# 2020-1, "STATPHYS", AULA 09

OBJETIVOS: INTRODUZIR O CONCEITO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E DE CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO DISCRETO

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

## INÍCIO DA AULA

# 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

## 2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### * CARACTERIZAÇÃO INFORMAL

- SEQUÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEXADAS PELO "TEMPO"

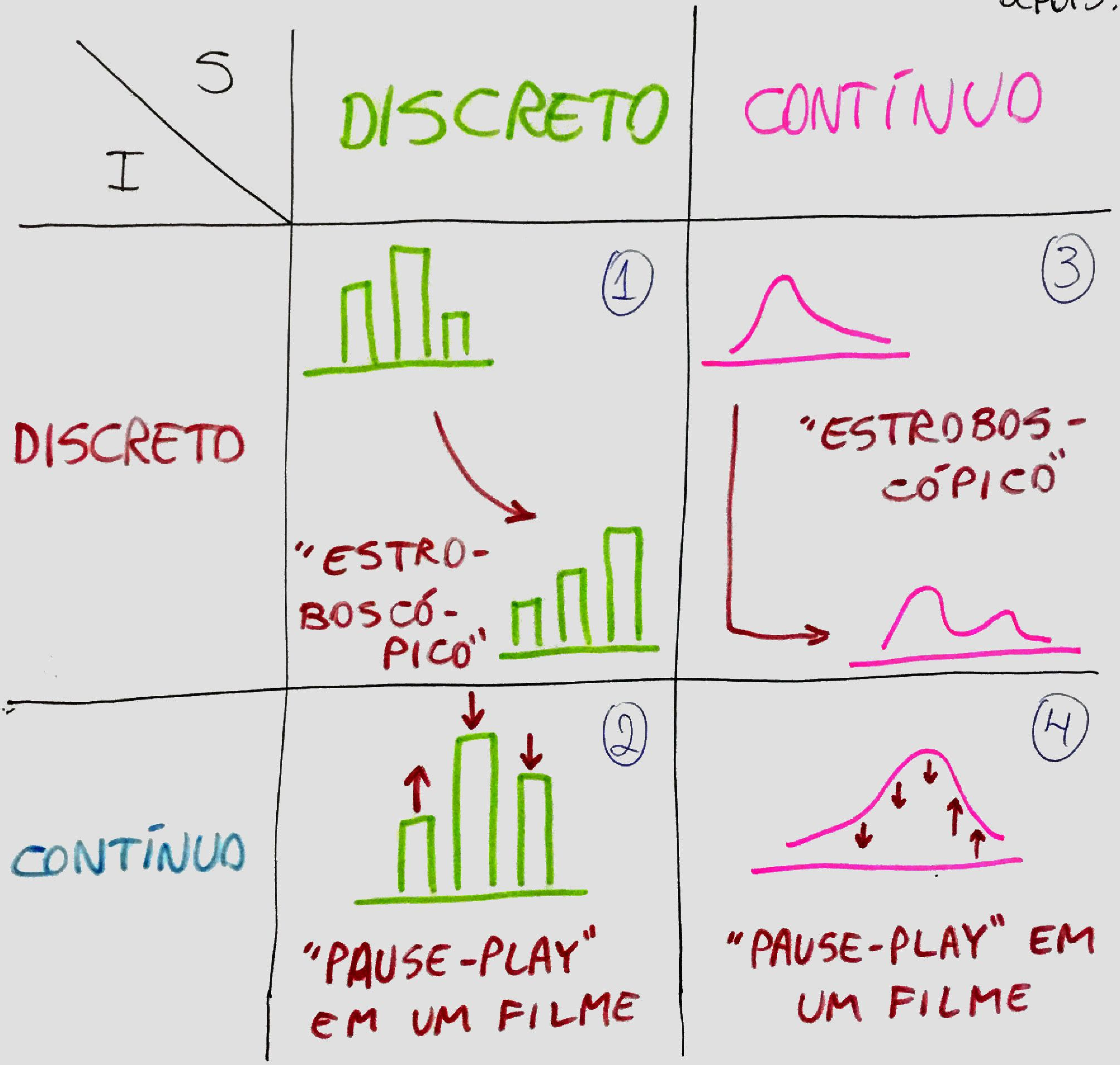
OU

- FAMÍLIA DE "TRAJETÓRIAS TEMPORAIS ESTOCÁSTICAS" (RANDOM PATHS)

(i) ESPAÇO DE ESTADOS S

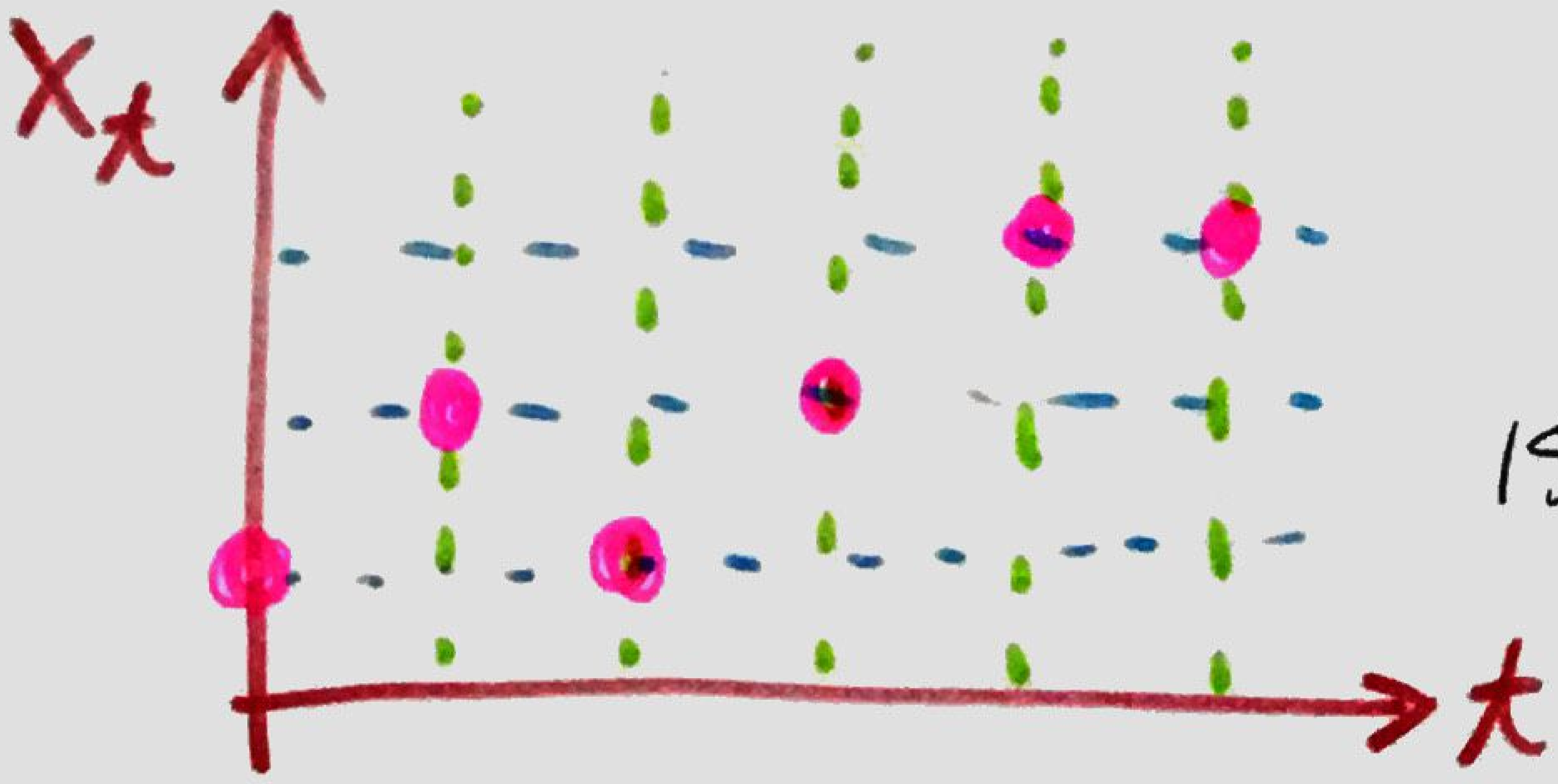
(ii) ESPAÇO INDICIAL ("TEMPO") I

(iii) RELAÇÕES DE DEPENDÊNCIA → DEPOIS!



EXEMPLOS ILUSTRATIVOS:

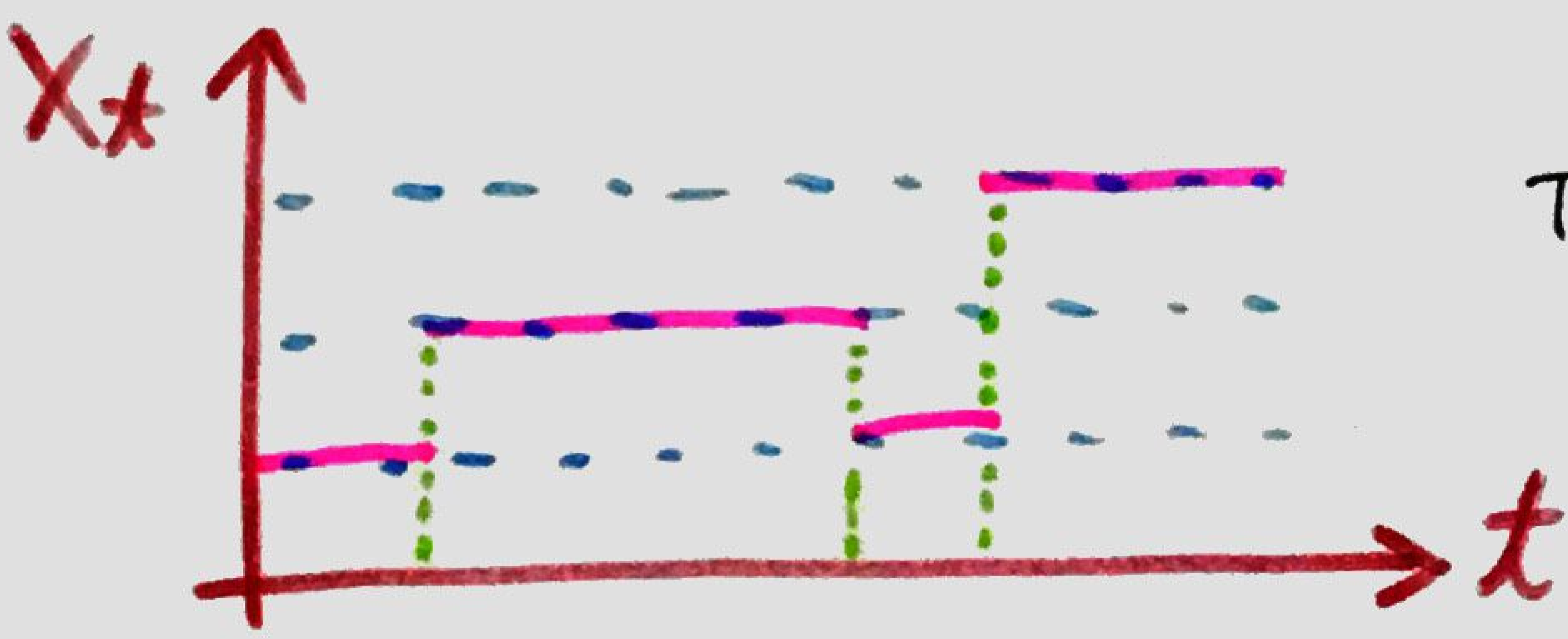
1. CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO DISCRETO




i. MONTE CARLO NO ISING (ALGORITMO DE METROPOLIS)

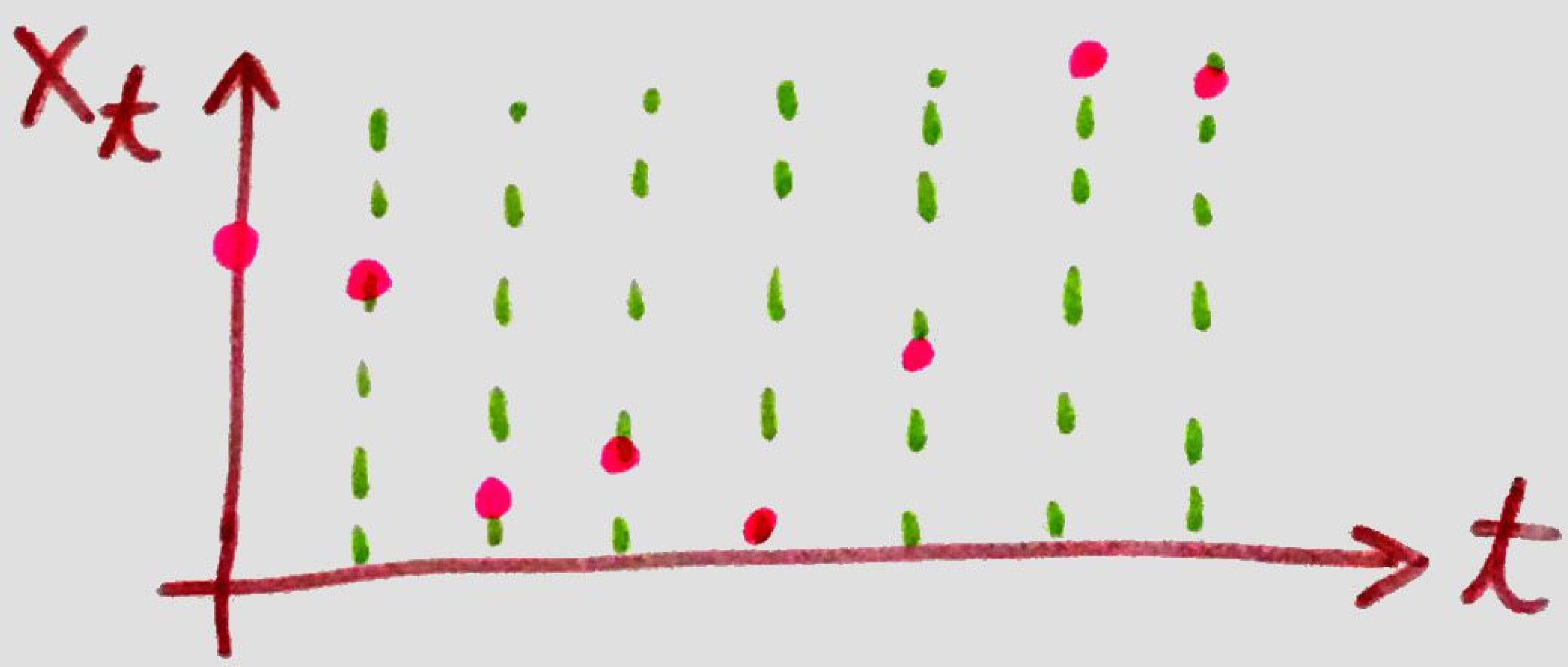
ii. URNAS DE EHRENFEST

2. EQUAÇÃO MESTRA (CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO CONTÍNUO)

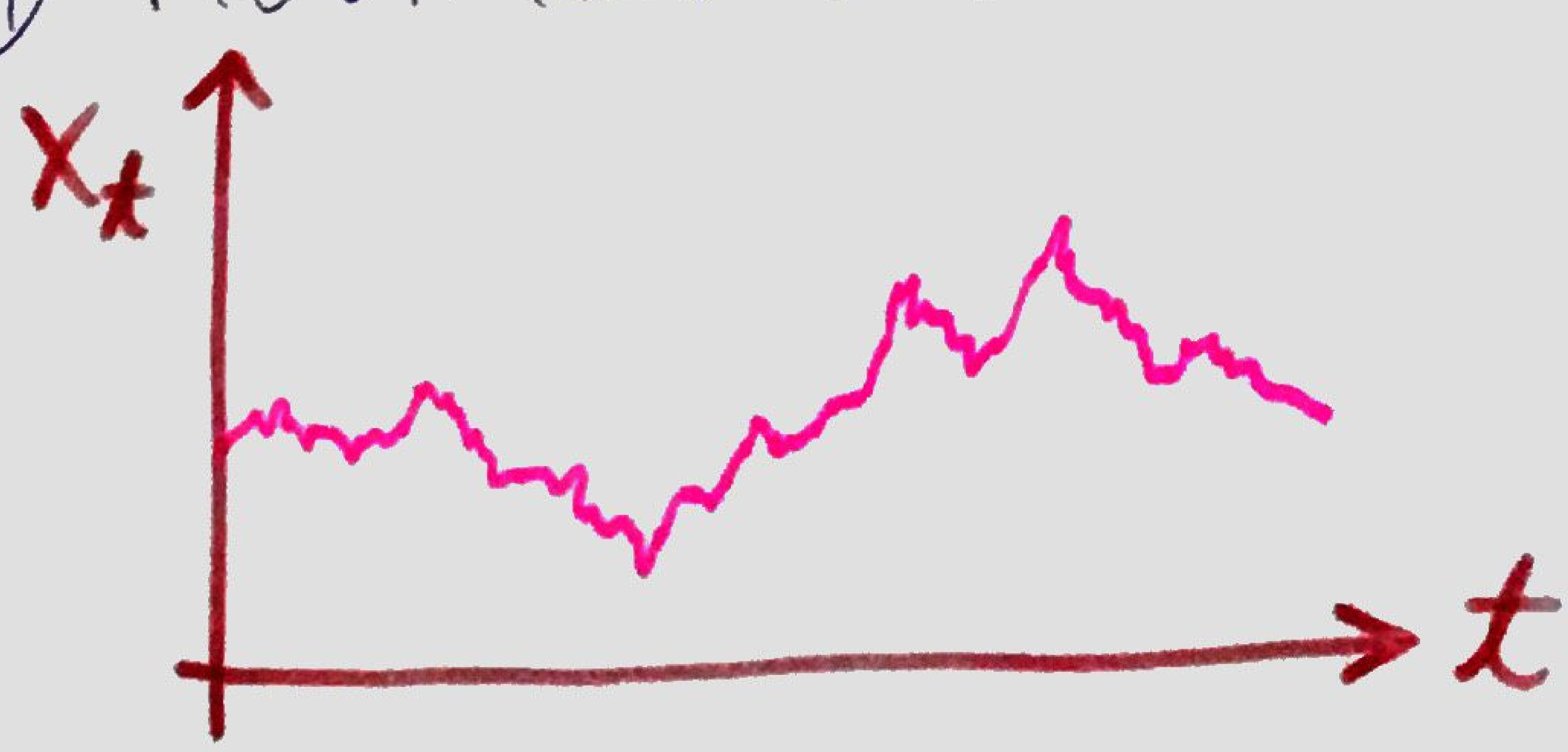



TEMPOS DE DECAIMENTO, TRANSIÇÕES ELETRÔNICAS

3. SÉRIES TEMPORAIS (ECONOMIA)



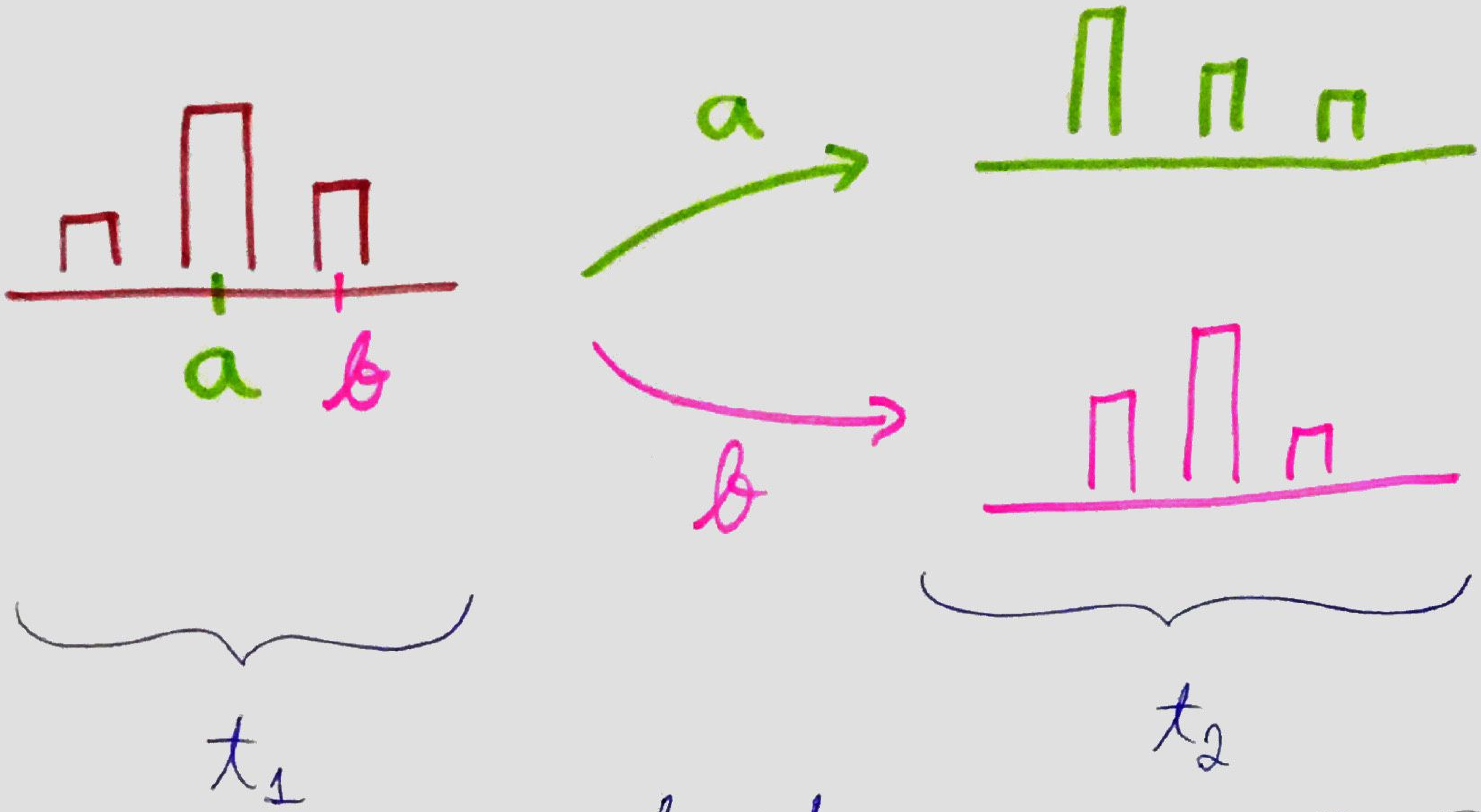

4. MOVIMENTO BROWNIANO (DIFUSÃO)




FOKKER-PLANCK

LANGEVIN

E A DEPENDÊNCIA ENTRE ESTADOS (V.A.'s) EM DIFERENTES INSTANTES?




$t_1 < t_2$

$t_0$? $t_{-1}$??

## * FORMALISMO

$\forall n \in \mathbb{N}$ , $\forall \{t_i\}_{i=1,\dots,n}$ COM $t_{i-1} < t_i$

$$\boxed{F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)}$$

OU

$$\boxed{p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1,t_1)}$$

NOTAÇÃO!

DESAFIA-DOR!

# * PROCESSOS MARKOVIANOS

$$\rho_1(x_n,t_n) = \int\ldots\int dx_{n-1}\ldots dx_1\, \rho_n(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$$

ERREI, INVERTE

CONDICIONAL!

$$= \int\ldots\int dx_{n-1}\ldots dx_1\, \rho_{1|n-1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)\cdot$$

$$\cdot\rho_{n-1}(x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1) =$$

ITERA CONDICIONAL! $\rho_{n-1} = \rho_{1|n-2}\cdot\rho_{n-2}$

$$= \int\ldots\int dx_{n-1}\ldots dx_1\,.\,\rho_{1|n-1}\cdot\rho_{1|n-2}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\rho_{1|2}\cdot\rho_{1|1}(x_2,t_2|x_1,t_1)\cdot$$

$$\cdot\rho_1(x_1,t_1)$$

E AGORA? HIPÓTESE DE MARKOV!

$\boxed{\rho_{1|k} = \rho_{1|1}}$, "MEMÓRIA CURTA",

"APENAS A ÚLTIMA LEMBRANÇA IMPORTA".

$$\rho_{1|n-1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1) = \rho_{1|1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})$$

$\rho_{1|1}$: PROBABILIDADE DE <u>TRANSIÇÃO</u>

$$\rho_1(x_n,t_n)=\int\dots\int dx_{n-1}\dots dx_1 \cdot$$
$$\cdot\, \rho_{1|1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\cdot$$
$$\cdot\, \rho_{1|1}(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\cdot$$
$$\dots$$
$$\cdot\, \rho_{1|1}(x_2,t_2|x_1,t_1)\cdot$$
$$\cdot\, \rho_1(x_1,t_1)$$

MARKOVIANO

→ EM PARTICULAR, VALE A EQUAÇÃO DE CHAPMAN-KOLMOGOROV (OU DE SMOLU-CHOWSKI),

$$\boxed{\rho_{1|1}(x_3,t_3|x_1,t_1)=\int dx_2\, \rho_{1|1}(x_3,t_3|x_2,t_2)\cdot \rho_{1|1}(x_2,t_2|x_1,t_1)}$$

POIS

CONDICIONAL

CONJUNTA → MARGINAL

$$\rho_{1|1}(x_3,t_3|x_1,t_1)=\int dx_2\, \rho_{2|1}(x_3,t_3;x_2,t_2|x_1,t_1)=$$
$$=\int dx_2\, \rho_{1|2}(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1)\cdot\rho_{1|1}(x_2,t_2|x_1,t_1)=$$
$$=\int dx_2\, \rho_{1|1}(x_3,t_3|x_1,t_1)\,\rho_{1|1}(x_2,t_2|x_1,t_1).$$

MARKOV

• ASSIM, MARKOV $\Rightarrow$ CK. NO ENTANTO, CK $\not\Rightarrow$ MARKOV. VER VAN KAMPEN'S "STOCHASTIC PROCESSES IN PHYSICS AND CHEMISTRY".

## 2.2 CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO DISCRETO

S: ESPAÇO DE ESTADOS

$$\boxed{S = \{1, 2, \ldots, n\}}$$

$\pi_i(t)$: PROB. DO SISTEMA ESTAR NO ESTADO $i$ NO INSTANTE $t$

$$\boxed{\pi_i(t) = \mathbb{P}(X_t = i)} \quad , \quad \sum_{i \in S} \pi_i(t) = 1$$

$$\pi_i(t) = \mathbb{P}(X_t = i) \overset{\text{LPT}}{=} \sum_{j \in S} \underbrace{\mathbb{P}(X_t = i \mid X_{t-1} = j)}_{\equiv T_{ij}^{(t-1)} \rightsquigarrow T_{i \leftarrow j}^{(t-1)}} . \mathbb{P}(X_{t-1} = j)$$

$$= \sum_{j \in S} T_{ij}^{(t-1)} . \pi_j(t-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\pi(t)\rangle = T^{(t-1)} |\pi(t-1)\rangle}$$

$$T^{(t)} = \left(T_{ij}^{(t)}\right)$$

ONDE $|\pi(t)\rangle = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))$ É UM VETOR <u>COLUNA</u>.

EM GERAL,

$$\boxed{|\pi(t)\rangle = T^{(t-1)} \cdot T^{(t-2)} \cdot \ldots \cdot T^{(1)} \cdot T^{(0)} |\pi(0)\rangle}.$$

SE A CADEIA FOR TEMPORALMENTE <u>HOMOGÊNEA</u>, $T^{(t)} \to T$,

$$\boxed{|\pi(t)\rangle = T^{t} |\pi(0)\rangle}.$$