2021-1, "STATPHYS", AULA 01

OBJETIVOS: APRESENTAR O CURSO E INICIAR A DISCUSSÃO SOBRE COMBINATÓRIA

APRESENTAÇÃO

FENÔMENOS NATURAIS, DETERMINÍSTICOS OU NÃO (FÍSICA QUÂNTICA!), FREQUENTEMENTE DEVEM SER ANALISADOS SOB UMA PERSPECTIVA ESTOCÁSTICA, DE VARIABILIDADE. ESSE ENFOQUE TAMBÉM É DENOMINADO ESTATÍSTICO, EMBORA ESTE TERMO ADMITA VÁRIOS SENTIDOS E, EM UM DELES, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA SEJAM "PRO-

CEDIMENTOS INVERSOS", AINDA QUE RELACIONADOS.

HÁ DIVERSAS "ABORDAGENS ESTOCÁSTICAS" POSSÍVEIS, DEPENDENDO DAS RELAÇÕES ENTRE AS DIVERSAS "VARIÁVEIS / UNIDADES ELEMENTARES" DO SISTEMA SOB ANÁLISE. VEREMOS QUE A FÍSICA ESTATÍSTICA DE EQUILÍBRIO DE UNIDADES INDEPENDENTES, CONSTITUÍDA NO LIMITE TERMODINÂMICO (INFINITAS UNIDADES), REVELA-SE COMO UMA TEORIA DETERMINÍSTICA (!) EM SEU REGIME ASSINTÓTICO, APESAR DE EXPRESSA EM UMA LINGUAGEM ESTATÍSTICA. ISSO OCORRE ATÉ NO CASO QUÂNTICO!

MAS OS OBJETIVOS PRIMÁRIOS DO CURSO SÃO O ESTUDO INTRODUTÓRIO DE SISTEMAS DE UNIDADES FORTEMENTE INTERAGENTES EM EQUILÍBRIO, ONDE TRANSIÇÕES DE FASE SÃO DESCRITAS COM TEORIAS DE ESCALA E RENORMALIZAÇÃO, E, PRINCIPALMENTE, A APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, QUE CONSTITUEM UM PARADIGMA PARA A FÍSICA ESTATÍSTICA FORA DO EQUILÍBRIO, PELO MENOS QUANDO AS VARIÁVEIS SÃO, NO MÁXIMO, FRACAMENTE DEPENDENTES (DINÂMICAS MARKOVIANAS), AINDA QUE FINITAS, EVENTUALMENTE.

1. ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

1.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

* PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

SE UMA "CONDIÇÃO" A PUDER SER SATISFEITA DE n_A FORMAS DISTINTAS E, INDEPENDENTEMENTE DESTE PRIMEIRO RESULTADO, UMA SEGUNDA CONDIÇÃO B PUDER SER SATISFEITA DE n_B FORMAS DISTINTAS, HÁ $n_A \cdot n_B$ FORMAS DAS DUAS CONDIÇÕES SEREM SATISFEITAS SIMULTANEAMENTE.

$$n(A \times B) = n_A \cdot n_B$$

A: $\cdot\, a_1$, $\cdot\, a_2$

B: $\cdot\, b_1$, $\cdot\, b_2$, $\cdot\, b_3$

A x B: (a_1, b_1) (a_1, b_2) (a_2, b_1) (a_1, b_3) (a_2, b_2) (a_2, b_3)

ESSE PRINCÍPIO É A ORIGEM/MOTIVAÇÃO DO CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA.

◊ EXEMPLO: "ESTATÍSTICA" DE MAXWELL-BOLTZMANN

DE QUANTAS FORMAS n PARTÍCULAS ("BOLAS") DISTINGUÍVEIS PODEM SER ALOCADAS EM r NÍVEIS ENERGÉTICOS ("URNAS") DISTINTOS (NÃO SATURÁVEIS)?

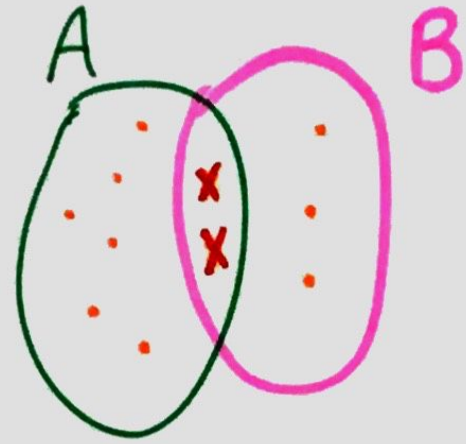
\# ESTADOS DISPONÍVEIS

$$\underset{1}{\boxed{r}}\,\underset{2}{\boxed{r}}\,\underset{3}{\boxed{r}}\,\boxed{\cdots}\,\underset{n-1}{\boxed{r}}\,\underset{n}{\boxed{r}} = \boxed{r^n}$$ ◊

* PRINCÍPIO ADITIVO

SE DUAS "CONDIÇÕES" MUTUAMENTE INCOMPATÍVEIS, A e B, PUDEREM SER SATISFEITAS DE n_A E n_B FORMAS DISTINTAS, RESPECTIVAMENTE, HÁ

$n_A + n_B$ FORMAS DE EXATAMENTE UMA DAS CONDIÇÕES SER SATISFEITA.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \overset{0}{\overset{\|}{\boxed{n(A \cap B)}}}$$

"DIVIDA O PROBLEMA, DE FORMA EXAUSTIVA, EM SUBPROBLEMAS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, LIDANDO COM AS DIFICULDADES TÃO CEDO QUANTO POSSÍVEL."

◇ EXEMPLO: QUANTOS NÚMEROS ÍMPARES ACIMA DE MIL PODEM SER FORMADOS USANDO UMA ÚNICA VEZ OS ALGARISMOS 0, 3, 4 E 7?

OPÇÕES DEPENDE DA 1ª CASA

MAU CAMINHO:

3			?

↓

3, 4 OU 7

BOM CAMINHO:

			2

↓

3 OU 7

2			2

↓

SEM 0 { 4 OU 7
4 OU 3

TANTO FAZ!

2	2	1	2

= 8

OUTRO BOM CAMINHO:
TOTAL − PARES

FAZ 1º, S/ 0.

TOTAL

3	3	2	1

= 18

FAZ 1º

PARES

3	2	1	1

= 6

0

3 OU 7 + 4

4 ◇

FAZ 2º ←

2	2	1	1

FAZ 1º

$\boxed{07}$

* ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

HÁ $\boxed{\dfrac{n!}{(n-m)!}}$ FORMAS DE ESCOLHER $\boxed{n \geq m}$ **ORDENADAMENTE** m ENTRE OS n ELEMENTOS **DISTINTOS** DE UM CONJUNTO.

$$\boxed{n \mid n-1 \mid n-2 \mid \cdots \mid n-(m-1)} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

1ª ESCOLHA

m-ÉSIMA ESCOLHA

$m=n$: $n!$ PERMUTAÇÕES

* COMBINAÇÕES

HÁ $\boxed{\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}}$ FORMAS DE ESCOLHER UM SUBCONJUNTO DE m ELEMENTOS DE UM CONJUNTO DE n

ELEMENTOS.

EM COMPARAÇÃO COM A EXPRESSÃO PARA ARRANJOS, A DIVISÃO POR $m!$ SIMPLESMENTE COMPENSA O "EXCESSO MULTIPLICATIVO DOS ORDENAMENTOS DESNECESSÁRIOS".

◇ EXEMPLO: "ESTATÍSTICA" DE FERMI-DIRAC

DE QUANTAS FORMAS n BOLAS INDISTINGUÍVEIS PODEM SER DISTRIBUÍDAS EM r URNAS QUE COMPORTAM NO MÁXIMO UMA BOLA, CADA? PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO!

SÓ FAZ SENTIDO $n \leq r$.

BASTA ESCOLHER AS URNAS "POPULADAS":

$$\boxed{\binom{r}{n}}.$$ ◇

"EM COMBINAÇÕES, COMO A ORDEM NÃO IMPORTA, OS m SELECIONADOS SÃO INDISTINGUÍVEIS ENTRE SI, BEM COMO OS $n-m$ NÃO ESCOLHIDOS".

◇ EXEMPLOS:

(i) QUANTAS SÃO AS SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DE $x_1+x_2+x_3=10$?

$(6,0,4)$ E $(1,3,6)$ SÃO DUAS DELAS.

ISSO EQUIVALE A DISTRIBUIR 10 BOLAS (IDÊNTICAS E INDISTINGUÍVEIS) EM 3 URNAS DISTINGUÍVEIS.

<u>DOIS</u> "SEPARADORES" DIVIDEM AS BOLAS EM <u>TRÊS</u> GRUPOS!

$$(1,3,6) \xleftrightarrow[\text{BIUNÍVOCA}]{} \bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

QUANTAS SÃO AS CONFIGURAÇÕES DE BOLAS E SEPARADORES? $10+2=12$ OBJETOS, 10 DE UM TIPO, 2 DE OUTRO.

RESPOSTA: $\dfrac{12!}{10!\,2!} = 66$.

(ii) "ESTATÍSTICA" DE BOSE-EINSTEIN

DE QUANTAS FORMAS m BÓSONS (INDISTINGUÍVEIS) PODEM OCUPAR n ESTADOS? É O NÚMERO $S_{m,n}$ QUE CORRESPONDE AS SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DE $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$.

RESPOSTA: $\dfrac{[m+(n-1)]!}{m!\,(n-1)!} = \dbinom{m+n-1}{m}$

◇