Convolução

Leonardo Maia

April 2022

Uma sequência a, sem perda de generalidade [1] , pode ser explicitada como uma "lista semi-infinita" (infinita só em um sentido) de números complexos,

$$a = (a_n) = (a_1, a_2, \cdots), \tag{1}$$

onde $a_n \in \mathbb{C}$. Dadas duas tais sequências, a e b, uma terceira sequência $c = (c_1, c_2, \cdots)$ é definida pelo **produto de convolução**

$$c = a * b \tag{2}$$

se cada termo de c, para $k \geq 1$ natural, for definido como

$$c_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \, b_{k-i}. \tag{3}$$

Essa definição permite uma construção inequívoca de c, que é denominada a **convolução** (de a e b). Além disso, ela admite "formulações no contínuo" [2] como

$$c(t) \propto \int_\Omega d\xi \, a(\xi) \, b(t-\xi), \tag{4}$$

que são importantes em diversos outros contextos (transformadas de Laplace e Fourier, por exemplo) onde uma nova função $c(t)$ é construída de certa forma a partir de duas funções dadas. Em qualquer um desses casos, um produto de convolução no contínuo é definido para ser comutativo, preservando o que já ocorre no caso discreto: $c = a*b = b*a$ pois, equivalentemente à Eq. (3), vale também

$$c_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} \, b_i. \tag{5}$$

[1] Variações simples na indexação, como iniciá-la em zero ao invés de um, em nada alteram as propriedades descritas a seguir.

[2] Dependendo do contexto, diferentes constantes de proporcionalidade podem multiplicar o resultado da integral. A variável ξ exibe valores em algum domínio $\Omega \in \mathbb{R}$.

Mas qual é a motivação para que uma convolução seja assim definida? Quais são suas propriedades básicas e qual é a sua utilidade? Veremos que, apesar da *motivação* de uma construção de convolução estritamente só fazer sentido no cenário das sequências, discretas, onde interpretações combinatórias são naturais, as propriedades básicas de todas as convoluções são as mesmas, independentemente se a *definição* é a original, do caso discreto, ou se é alguma das generalizadas "extensões ao contínuo".

Quando é preciso usar sequências em análise combinatória? Há circunstâncias em que naturalmente um problema é generalizado para definir toda uma *família* de problemas de mesma natureza, distinguidos um do outro por um parâmetro ou índice. Por exemplo, o problema único "quantas sequências binárias de 7 algarismos não apresentam dois 1's consecutivos", de resposta a_7, leva à questão generalizada "quantas sequências binárias de n algarismos não apresentam dois 1's consecutivos", cuja resposta é o "número parametrizado" a_n. Neste caso, a busca por um único número seria estendida à busca pelos infinitos escalares a_n, $n \in \mathbb{N}$, ou, em outras palavras, pelo termo geral da sequência (a_n). Elegante, mas aparentemente nada prático: por que trocar um problema por vários (infinitos, neste caso)?

Notavelmente, muitos problemas combinatoriais são de natureza *recursiva*, no sentido em que cada solução particular pode depender da solução de outros problemas (de mesma natureza, da mesma família de problemas). É esse o caso do exemplo apresentado, onde a técnica que se revela mais apropriada à busca de soluções é a construção da recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, que naturalmente envolve três problemas diferentes. Isso mesmo, pode ser mais fácil resolver infinitos problemas simultaneamente do que apenas um deles isoladamente!

Porém, embora o exemplo acima seja muito bom para ilustrar a ideia de uma família de problemas combinatoriais de mesma natureza, ele não serve para ilustrar a convolução discreta, pois ele envolve uma única sequência. Precisamos de um outro problema-exemplo que envolva três sequências distintas ao mesmo tempo e de uma "forma especial", a ser discriminada precisamente logo em seguida. Duas das sequências, a e b, serão triviais em certo sentido, mas sua convolução $c = a * b$ terá como elementos as diversas soluções de uma dada família de problemas não triviais. O problema-exemplo (família de problemas) agora adotado é "de quantas formas a *soma* das faces de dois dados *usuais* pode resultar em k", de resposta c_k, generalizado de um caso específico como "de quantas formas a *soma* das faces de dois dados *usuais* pode resultar em 8", cuja resposta seria c_8.

A sequência a com $a_i = 1$ se $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $a_i = 0$ se $i \geq 7$ descreve de quantas formas um dos dados pode exibir o valor i como sua parcela na soma: como ele é um dado comum, cada número de 1 a 6 aparece em uma única face. Como o outro dado também é usual, ele é descrito pela mesma sequência do primeiro dado, mas com a "identidade" b, $b = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, em uma representação intuitiva em que é truncada uma sequência de termos sempre nulos a partir de certo ponto.

Pelo princípio aditivo da análise combinatória, considerando todos os possíveis resultados (exaustivos e mutuamente exclusivos) de ambos os dados,

$$c_k = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} c_{ijk}, \tag{6}$$

onde define-se c_{ijk} como a quantidade de formas do valor k ser obtido na soma dos resultados dos dois dados quando o primeiro dado exibe o valor i e o segundo, j.

Agora, explicita-se a "forma especial" como relacionam-se as 3 sequências envolvidas em uma convolução: c_{ijk} anula-se sempre que $i+j \neq k$. Enquanto os elementos das sequências indicam quantidades/populações de índices/estados, são os próprios índices/estados daqueles elementos (das parcelas) que devem ser adicionados para determinar o elemento da sequência de convolução que receberá uma certa contribuição. Em outras palavras, um elemento de uma sequência de convolução indica de quantas formas uma certa soma pode emergir pela enumeração das possíveis formas como as parcelas podem ser combinadas para gerar aquela soma. Em símbolos,

$$c_{ijk} = d_{ij}\, \delta_{i+j,k}, \tag{7}$$

onde d_{ij} expressa de quantas formas o dado a pode exibir o valor i conjuntamente com o dado b exibindo o valor j e a delta de Kronecker pode filtrar qualquer um dos dois somatórios, levando a duas expressões alternativas, mas equivalentes, como as Eqs. (3) e (5).

Por fim, dois dados usuais claramente obedecem a condição de independência combinatorial que caracteriza o princípio multiplicativo: o número de possibilidades de qualquer face do segundo dado emergir não depende do resultado do primeiro dado [3] e

$$d_{ij} = a_i\, b_j. \tag{8}$$

Todas essas considerações combinadas, assim como a percepção de que os limites inferiores e superiores das somas na Eq. (6) podem ser convenientemente flexibilizados em cada problema em particular para incluir ou excluir termos nulos, levam às Eqs. (3) e (5). Assim, fica claro que os princípios aditivo e multiplicativo viabilizam a convolução como uma ferramenta naturalmente associada à soma de efeitos independentes.

[3] Ao menos por enquanto, mantenha uma "distância de segurança" de físicos quânticos, sempre ansiosos em conceber bizarros "dados quânticos emaranhados'!