2020-1, "STATPHYS", AULA 04

OBJETIVOS DA AULA: CUMULANTES, PROPRIEDADES DA GAUSSIANA, ~~DEPENDÊNCIA ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS~~

ONDE ESTAMOS: 1.2 ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

INÍCIO DA AULA

* ESCALA E TRANSLAÇÃO NA CARACTERÍSTICA

JÁ SABEMOS QUE $\langle a + b X \rangle = a + b \langle X \rangle$ E QUE $\mathbb{V}(a+bX) = b^2 . \mathbb{V}(X)$. EM GERAL, QUEM É $\phi_Y(k)$ EM TERMOS DE $\phi_X(k)$, SE $Y = a + b.X$?

$$\phi_Y(k) = \langle e^{ikY} \rangle = \langle e^{ika} . e^{i(kb)X} \rangle$$

$$= e^{ika} \langle e^{i(kb)X} \rangle$$

$$\therefore \boxed{\phi_{a+bX}(k) = e^{ika} \phi_X(bk)}$$

* CUMULANTES

→ PRINCIPALMENTE QUANDO ESTUDARMOS MAIS DE UMA V.A., É CONVENIENTE CONHECERMOS OUTROS "MOMENTOS GENERALIZADOS".

→ FUNÇÃO GERADORA DE CUMULANTES:

$$\Psi_X(k) \equiv \log \phi_X(k)$$

n-ÉSIMO CUMULANTE

$$\Psi_X(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \cdot c_n \cdot k^n}{n!}$$

$c_n = c_n^X$

TAYLOR

OK, EXPANDE LOG

→ ESCALA E TRANSLAÇÃO

SE $Y = a + bX$, $\boxed{\Psi_Y(k)} = \log \phi_Y(k) =$

$= \log\left[e^{ika} \cdot \phi_X(bk)\right] \boxed{= ika + \Psi_X(bk)}$.

ASSIM, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n c_n^Y k^n}{n!} = ika + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (c_n^X b^n) k^n}{n!}$

E $\boxed{c_n^{a+X} = \begin{cases} c_n^X, & n \geq 2 \\ a + c_1^X, & n = 1 \end{cases}}$, $\boxed{c_n^{bX} = b^n \cdot c_n^X}$.

◇ EXEMPLO: SE UMA V.A. DISCRETA FOR TRATADA COMO CONTÍNUA, SUA CARACTERÍSTICA PODE SER OBTIDA DA GERADORA COM $z \to e^{ik}$.

X POISSON: $g_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$$\downarrow$$

$$\phi_X(k) = e^{-\lambda(1-e^{ik})}$$

$$\psi_X(k) = \log \phi_X(k) = -\lambda(1-e^{ik})$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \cdot k^n}{n!} \Rightarrow c_n = \lambda$$

UAU! ◇

◆ EXERCÍCIO: CALCULE OS CUMULANTES DAS V.A.'s BERNOULLI, BINOMIAL, EXPONENCIAL E GAMA. ◆

* PROPRIEDADES DA GAUSSIANA

→ VAMOS EXPLORAR O CASO "PADRÃO", $Z \sim N(0,1)$, E DAÍ GENERALIZAREMOS.

→ $\boxed{\langle Z \rangle = 0}$, POIS $\langle Z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\right] = 0$

ÍMPAR

$\rightarrow \boxed{\mathbb{V}(Z) = 1}$, POIS $\mathbb{V}(Z) = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2$, JÁ VIMOS QUE $\langle Z \rangle = 0$ E AGORA VEREMOS QUE $\langle Z^2 \rangle = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z^2}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \;\overset{\frac{d}{d\alpha}}{\Rightarrow}\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha z^2}\,dz = \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\alpha^{-3/2} \Rightarrow$$

CÁLCULO!

ENTRA ∂_α

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi} \qquad \therefore \langle Z^2 \rangle = 1.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi}\,\langle Z^2 \rangle$$

$\rightarrow$ CARACTERÍSTICA DA PADRÃO

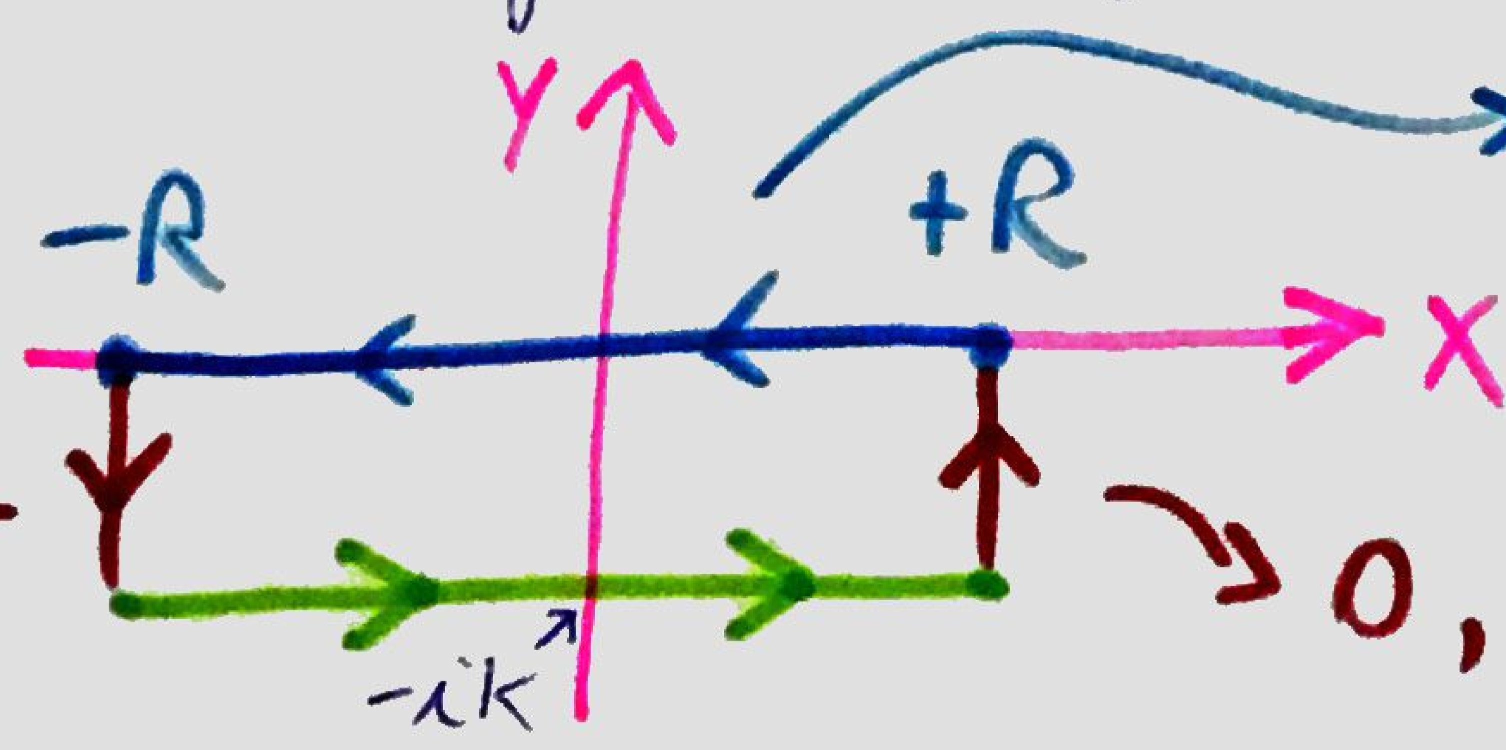
$$-\frac{x^2}{2} + ikx = -\frac{1}{2}(x - ik)^2 - \frac{k^2}{2}$$

$$\phi_Z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right] e^{ikx}\,dx = \cdots =$$

$$= e^{-k^2/2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-\frac{1}{2}(x-ik)^2}\,dx \right\} =$$

$$= e^{-k^2/2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{-z^2/2}\,dz \right\} = \cdots = e^{-k^2/2}$$

$\rightarrow -\sqrt{2\pi}$, NO LIMITE



0, NO LIMITE

0, NO LIMITE

MARSDEN & HOFFMAN "BASIC COMPLEX ANALYSIS", 3 RD

$\therefore \boxed{\phi_Z(k) = e^{-k^2/2}}$ **GAUSSIANA EM K**

→ CARACTERÍSTICA DA GAUSSIANA GERAL

$$X \equiv \underbrace{\mu}_{\text{MÉDIA}} + \overbrace{\sigma}^{\sigma^2 \text{ VARIÂNCIA}} Z \iff Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$\boxed{\phi_X(k) = e^{ik\mu} \cdot \phi_Z(\sigma k) = e^{ik\mu - \sigma^2 k^2/2}}$$

INCERTEZA!

LEMBREMOS: $\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

→ CUMULANTES E MOMENTOS DA GAUSSIANA

- TODOS OS MOMENTOS CENTRAIS DE ORDEM ÍMPAR DE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ SÃO NULOS. EM PARTICULAR, $\boxed{\langle (X-\mu)^3 \rangle = 0}$.
- $\boxed{\frac{\langle (X-\mu)^4 \rangle}{\sigma^4} = 3}$. ISSO SEGUE DE $\langle Z^4 \rangle = 3$.

$$\langle Z^4 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{d^2}{d\alpha^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z^2} dz \right] \right\}_{\alpha = \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \alpha^{-5/2} \right\}_{\alpha = \frac{1}{2}} = 3.$$

$$\bullet \ \Psi_X(k) = \log \phi_X(k) = \log\left[\exp\left(i\mu k - \sigma^2 k^2/2\right)\right] = i\boxed{\mu}k + \frac{i^2\boxed{\sigma^2}k^2}{2!}$$

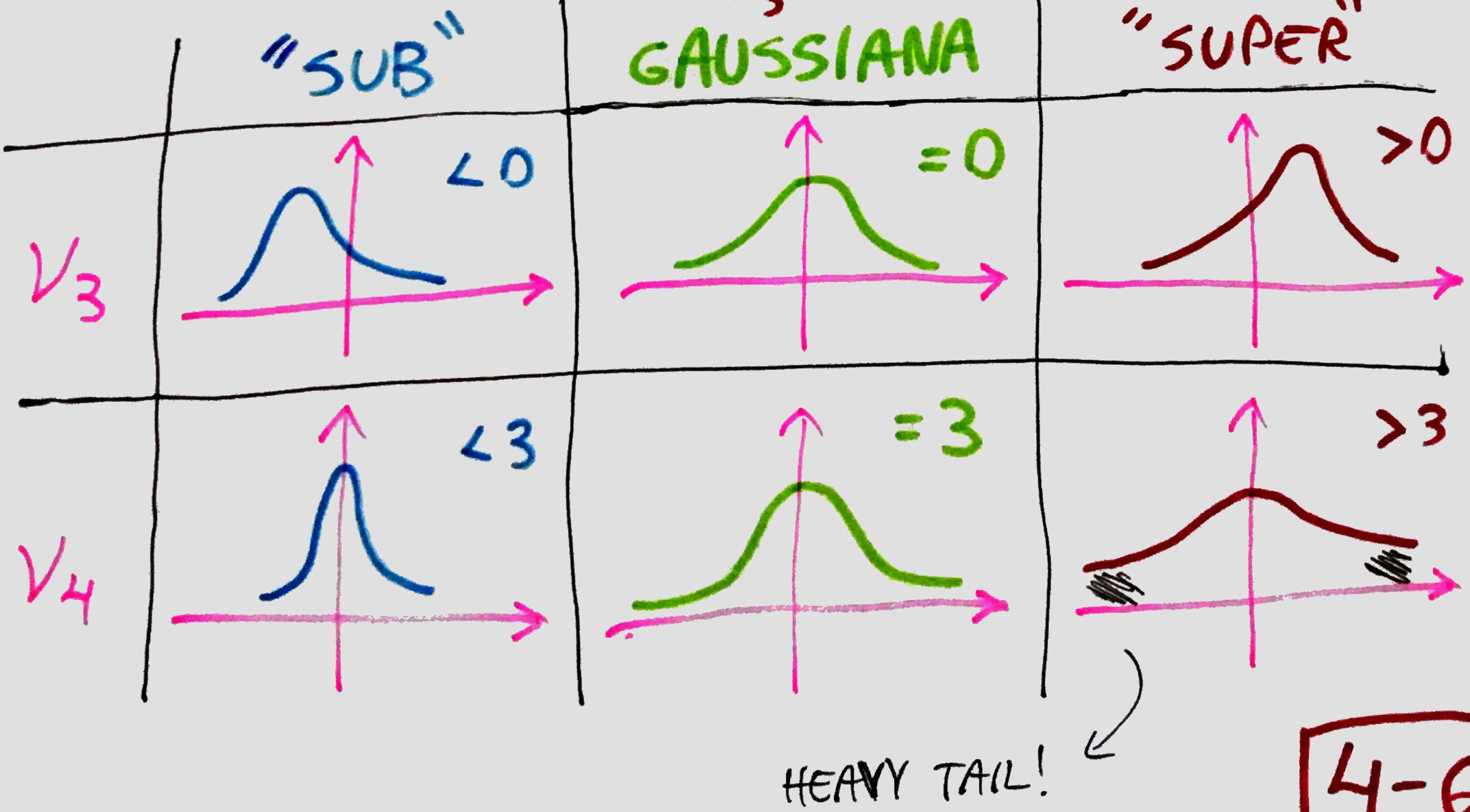
SOMENTE OS DOIS PRIMEIROS CUMULANTES DE UMA GAUSSIANA NÃO SE ANULAM. SÃO A MÉDIA E A VARIÂNCIA.

* ÚLTIMOS DETALHES GERAIS SOBRE CUMULANTES E MOMENTOS

X QUALQUER, $\mu \equiv \langle X \rangle$, $\sigma^2 \equiv \mathbb{V}(X)$

ASSIMETRIA (SKEWNESS) : $\dfrac{\langle (X-\mu)^3 \rangle}{\sigma^3} \equiv \nu_3$

CURTOSE (KURTOSIS) : $\dfrac{\langle (X-\mu)^4 \rangle}{\sigma^4} \equiv \nu_4$



→ EM <u>GERAL</u>:

- O PRIMEIRO CUMULANTE É A MÉDIA (PRIMEIRO MOMENTO "REGULAR").
- O SEGUNDO CUMULANTE É A VARIÂNCIA (SEGUNDO MOMENTO <u>CENTRAL</u>).
- O TERCEIRO CUMULANTE É A ASSIMETRIA <u>NÃO</u> <u>NORMALIZADA</u>.
- NÃO HÁ REGRA SIMPLES PARA $n \geq 4$. MAS VEJA KARDAR, "STATISTICAL PHYSICS OF PARTICLES".