2020-1, "STATPHYS", AULA 18

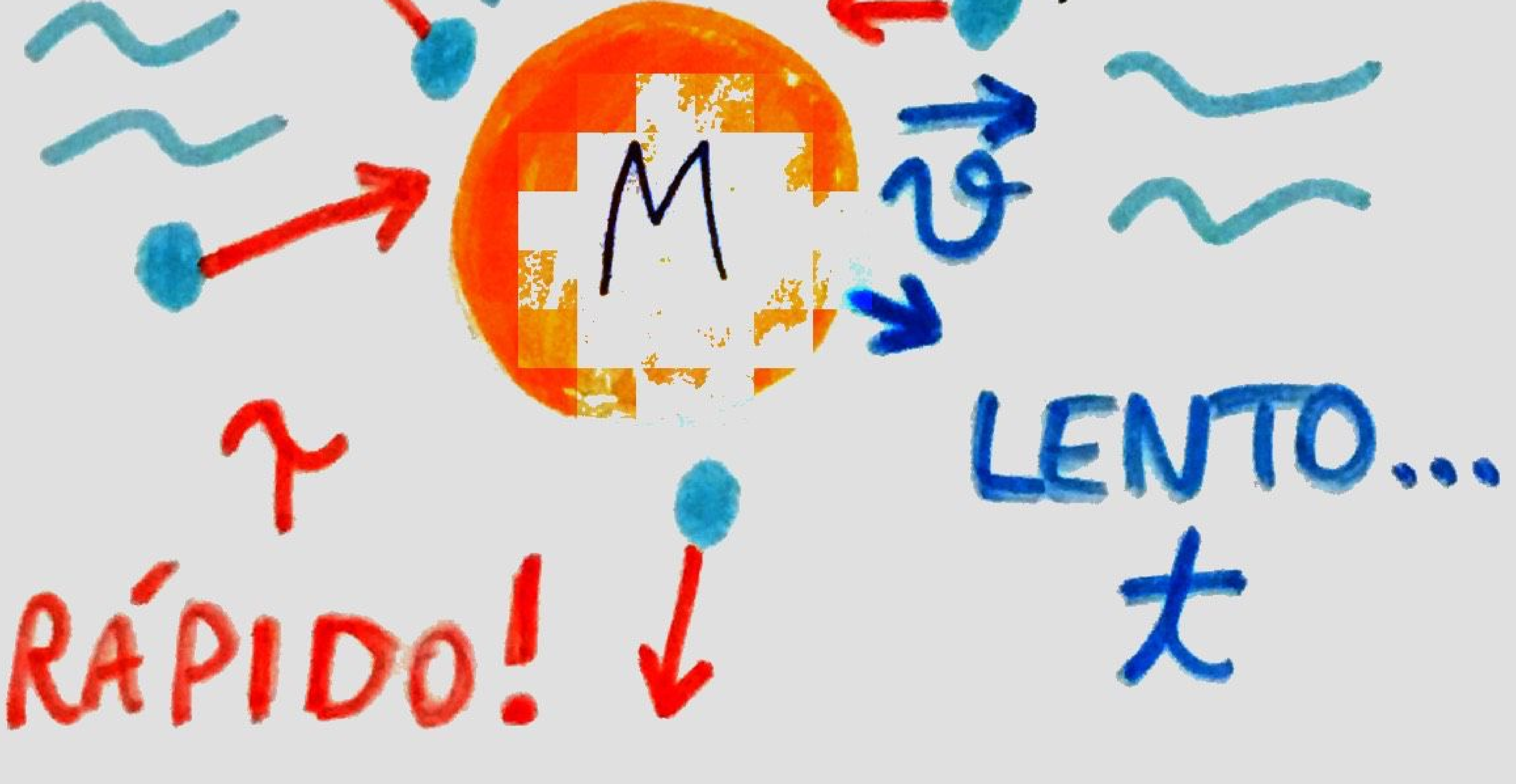
OBJETIVO: ESTUDAR O MOVIMENTO BROWNIANO MEDIANTE A EQUAÇÃO DE LANGEVIN.

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.5 PROCESSOS DE DIFUSÃO

2.5 PROCESSOS DE DIFUSÃO

TEMPO CONTÍNUO, ESPAÇO CONTÍNUO DE ESTADOS

* EQ. DE LANGEVIN E O MOVIMENTO BROWNIANO



INÉRCIA: $\boxed{M \gg m}$

SEPARAÇÃO DE ESCALAS DE TEMPO: $\boxed{t \gg \tau}$

→ O "TEMPO RÁPIDO" NÃO É OBSERVÁVEL.

M: MASSA DA PARTÍCULA BROWNIANA

m: MASSA DAS MOLÉCULAS DO FLUIDO

EQ. LANGEVIN $M\frac{dv}{dt} = -\rho v + \eta(t)$

"FORÇA ESTOCÁSTICA DO FLUIDO EM Δt"

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t)}$$

DISSIPAÇÃO

RUÍDO!

→ ISSO NÃO É UMA EDO: $\xi(t)$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA!!!

→ TRATA-SE DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA.

→ SÓ TEM VALOR HEURÍSTICO: v TORNA-SE V.A. TAMBÉM E NÃO HÁ SENTIDO EM $\frac{dv}{dt}$, DERIVADA DE V.A.!!!

→ OPERACIONAL E CONCEITUALMENTE,

$$\boxed{dv = -\gamma v\, dt + \xi(t)\, dt},$$

POIS INTEGRAÇÃO (SOMA!) DE V.A.'S FAZ SENTIDO.

→ MAIS CONDIÇÕES: RUÍDO BRANCO!

$$\boxed{\langle \xi(t) \rangle = 0} \qquad \boxed{\langle \xi(t) . \xi(t') \rangle = \Gamma . \delta(t-t')}$$

→ OBTEREMOS DUAS SOLUÇÕES: A PRIMEIRA, Ⓐ, USARÁ UMA SEQUÊNCIA ESTOCÁSTICA E REVELARÁ UM $\sqrt{dt}$ OCULTO NO RUÍDO; A SEGUNDA, Ⓑ, HEURÍSTICA COMUM DOS FÍSICOS, FOCARÁ APENAS NA MÉDIA E NA VARIÂNCIA DE v.

Ⓐ DISCRETIZAÇÃO DA EQ. DE LANGEVIN

$$\boxed{\begin{aligned} t_n &= n . \Delta t \\ v_n &\equiv v(t_n) \end{aligned}}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t)$$

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = -\gamma v_n + \xi(t_n)$$

PROBLEMA!

$$\langle \xi(t_m) \xi(t_n) \rangle = \Gamma . \delta(t_m - t_n) = \Gamma . \delta(m\Delta t - n\Delta t) = \frac{\Gamma}{\Delta t} . \delta(m-n) \quad (1)$$

DIRAC

ANSATZ:

$$\boxed{\xi(K . \Delta t) = f(\Delta t) \, \zeta_K} \quad (*)$$

$$\langle \zeta_K \rangle = 0$$

$$\langle \zeta_K . \zeta_{K'} \rangle = \delta_{K,K'}$$

$$\boxed{\zeta_K \sim N(0,1)}$$

KRONECKER

$$\langle \xi(t_m) . \xi(t_n) \rangle = [f(\Delta t)]^2 \langle \zeta_m . \zeta_n \rangle = [f(\Delta t)]^2 \delta_{m,n} \quad (2)$$

$$\therefore \boxed{f(\Delta t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta t}}}$$

$$\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t} = -\gamma v_n + \boxed{\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta t}} \cdot \eta_n} = \xi(t_n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{v_{n+1} = a . v_n + \sqrt{\Gamma} . \sqrt{\Delta t} . \eta_n},$$

ONDE $\boxed{a \equiv 1 - \gamma \Delta t}$.

→ FORA UMA OU OUTRA CONSTANTE RESOLVEMOS ESSA RECORRÊNCIA NA AULA PASSADA! SE $v_0 = 0$,

$$\boxed{v_n = \sqrt{\Gamma} . \sqrt{\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \eta_i},$$

QUE É UMA NORMAL DE MÉDIA NULA E VARIÂNCIA $\Gamma . \Delta t \dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}$.

MAS $a = a(\Delta t)$!!! O QUE OCORRE QUANDO $n \to \infty$, $\Delta t \to 0$ E $n\Delta t \to t$?

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0 \\ n\Delta t = t}} \mathbb{V}(v_n) = \Gamma \lim\left[\Delta t \cdot \frac{(1-\gamma\Delta t)^{2n}-1}{(1-\gamma\Delta t)^2-1}\right] =$$

$$= \Gamma \cdot \frac{\lim\left\{\left[\left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^n\right]^2-1\right\}}{\underbrace{\lim \frac{(1-\gamma\Delta t)^2-1}{\Delta t}}_{=-2\gamma}}$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{V}(v_n) \longrightarrow \frac{\Gamma}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)}$$

POIS $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

E

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n} = e^{\alpha\cdot\beta} .$$