Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
SFI 5704 - Mecânica Estatística - 2023-1

Prof. Leonardo Paulo Maia

Lista 02 - 2023/04/10, analíticos → **2023/04/17**,
computacionais (17-20) → **2023/04/24**

Para cada variável aleatória discreta indicada nas questões de (1) até (4), calcule sua função geradora e, a partir dela, calcule a média e a variância da v.a.. Para cada variável aleatória contínua indicada nas questões de 5 até 7, calcule sua função característica e, a partir dela, calcule a média e a variância da v.a.. Nos casos 6 e 7, calcule também os cumulantes.

1 Bernoulli, $p_0 = 1 - p$, $p_1 = p$

2 binomial, $p_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$, $n = 0, \cdots, N$

3 Poisson, $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

4 geométrica, $p_n = pq^{n-1}$, $q = 1 - p$, $n = 1, 2, \cdots$

5 uniforme, $\rho(x) = 1/(b-a)$, $a \leq x \leq b$

6 exponencial, $\rho(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

7 gama, $\rho(x) = \lambda^p x^{p-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}/\Gamma(p)$, $x \geq 0$, $\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1}\mathrm{e}^{-z}\, dz$

8 Se c for uma constante real e X uma variável aleatória qualquer, com $\langle\cdot\rangle = \mathbb{E}(\cdot)$ indicando a média, mostre que $\boxed{\langle cX\rangle = c\langle X\rangle}$ e que $\boxed{\langle X + c\rangle = \langle X\rangle + c}$.

9 A partir da definição da variância como segundo momento central, mostre que $\boxed{\mathrm{var}(X) = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}$.

10 Se c for uma constante real e X uma variável aleatória qualquer, mostre que $\boxed{\mathrm{var}(cX) = c^2\mathrm{var}(X)}$ e que $\boxed{\mathrm{var}(X + c) = \mathrm{var}(X)}$.

11 (Kardar - particles) A corrente $I(V)$ que passa por um diodo está relacionada à voltagem aplicada V pela eq. $I(V) = I(0)\,[\exp(eV/kT) - 1]$, onde todas as constantes têm seus significados usuais. Se o diodo está sujeito a uma voltagem aleatória descrita por uma Gaussiana de média nula e variância s^2, determine a densidade de probabilidade da corrente, seu valor mais provável, seu valor médio e indique estas duas grandezas no esboço de um gráfico da densidade.

12 A transformação de Box-Muller define o par de variáveis (Z_1, Z_2) a partir de (U_1, U_2) de acordo com

$$\begin{cases} Z_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ Z_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2) \end{cases}$$

Mostre (analiticamente, manipulando as densidades conjuntas pertinentes) que, se U_1 e U_2 são independentes e uniformemente distribuídas em $(0,1)$, então Z_1 e Z_2 são independentes e individualmente obedecem a distribuição normal padrão (ou seja, média nula e variância unitária).

13 (peso 2) Considere sequências binárias de tamanho n onde, em cada posição, o dígito 1 ocorre com probabilidade p e o dígito 0 ocorre com probabilidade $1-p$, independentemente do que ocorre nas demais posições. Use a lei da probabilidade total para obter uma equação de recorrência de segunda ordem para a probabilidade de uma dessas sequências **não apresentar dois 1's consecutivos**. Você deverá obter a solução explícita da recorrência, considerando as condições iniciais pertinentes.

14 (peso 2) Considere sequências binárias de tamanho n onde, em cada posição, o dígito 1 ocorre com probabilidade p e o dígito 0 ocorre com probabilidade $1-p$, independentemente do que ocorre nas demais posições. Use a lei da probabilidade total para obter uma equação de recorrência de primeira ordem para a probabilidade de uma dessas sequências apresentar uma quantidade total **par de 1's**. Você deverá obter a solução explícita da recorrência, considerando as condições iniciais pertinentes. Porém, antes de mais nada, tente predizer o comportamento qualitativo da solução. Para obter um número par de 1's, você preferiria p alto, baixo ou seria indiferente? A paridade de n é relevante? Sempre?

15 Mostre que $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = \langle X.Y \rangle - \langle X \rangle . \langle Y \rangle}$ e que $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ se X e Y forem independentes.

16 Mostre que $\boxed{\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)}$.

17 Use a plataforma computacional que lhe for conveniente para gerar curvas de densidade de probabilidade de distribuições exponenciais ($\lambda = 1$) e Gaussianas ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$). Especificamente, em cada caso, você deverá (i) escolher a quantidade N de números uniformemente distribuídos u_i em $[0,1]$ de onde você parte, (ii) converter a sequência (u_i), $i = 1, \cdots, N$ em uma sequência transformada (x_i), $i = 1, \cdots, N$ com $x_i = -\log(u_i)$ para a exponencial e Box-Muller para a Gaussiana, (iii) escolher δ (largura de cada célula a ser populada) e M (ponto de corte a partir do qual - $|x| \geq M$ - pontos são "agregados até o infinito"), (iv) estimar a distribuição empírica e, finalmente, (v) estimar a densidade de probabilidade para δ "pequeno". Comente o papel da discretização do espaço de estados na geração do ruído nas curvas.

18 Desenvolva uma simulação estocástica do problema descrito na questão 13, de modo que cada dígito de uma n-sequência binária da seja sorteado da forma estipulada. Gere várias dessas sequências, calcule a fração delas onde não há 1's consecutivos e compare essa fração empírica com a resposta analítica do ex. 13.

19 Como acima, desenvolva uma simulação correspondente à questão 14.