Aula 2: Fecho, interior, fronteira de um conjunto

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Estes slides tem interseção com as notas de aulas dos professores

- Jorge Mujica (foi professor da IMECC-UNICAMP)
- Leandro Aurichi (professor do ICMC-USP)

Definição 1

Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um conjunto fechado se $X \backslash F$ é aberto.

Exemplo 2

(a) *Em qualquer espaço topológico $(X,\tau), X$ e $\emptyset$ são fechados, pois seus complementares são abertos (em particular, X e $\emptyset$ são abertos e fechados).*

(b) *Em $\mathbb{R}$, $[0,1]$ é fechado já que $\mathbb{R} \backslash [0,1] = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.*

(c) *Na topologia discreta, qualquer conjunto é fechado. Para isso, basta notar que o complementar de qualquer conjunto é ainda um membro de $\mathcal{P}(X)$ e, portanto, é aberto.*

(d) *Na reta de Sorgenfrey, $[a,b)$ é fechado (já sabemos que é aberto), onde $a < b$.*
Vamos mostrar que $\mathbb{R} \backslash [a,b)$ é aberto. Se $x \in \mathbb{R} \backslash [a,b)$, então há dois casos a considerar.
$x \geq b$: *basta tomar o aberto $[x, x+1)$, cuja interseção com $[a,b)$ é vazia;*
$x < a$: *tome o aberto $[x,a)$, que também está contido no complementar de $[a,b)$.*
Portanto, o complementar de $[a,b)$ é aberto, como queríamos.

Definição 3 (Fecho)

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Chamaremos de fecho de A (ou aderência de A) o conjunto

$$\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } F \supset A\}.$$

Fecho de um conjunto

Proposição 4

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\bar{A}$ é o menor fechado de X que contém A.

Prova: $\bar{A}$ é fechado pois X é fechado, $A \subset X$, e interseção arbitrária de fechados é um fechado.

Proposição 5

Seja X um espaço topológico. Então a aplicação $A \mapsto \bar{A}$ tem as seguintes propriedades:

(a) $A \subset \bar{A}$

(b) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

(c) $\bar{\emptyset} = \emptyset$

(d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(e) *A é fechado se, e só se, $A = \bar{A}$.*

Demonstração. (a) é óbvio. (b) Por (a) $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$. E como $\bar{A}$ é um fechado contendo $\bar{A}$, segue que $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$. (c) Como $\emptyset$ é um fechado contendo $\emptyset$, segue que $\bar{\emptyset} \subset \emptyset$. (d) Antes de provar (d) notemos que

$$A \subset B \text{ implica } \bar{A} \subset \bar{B}.$$

Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, segue que $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Logo $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por outro lado $\bar{A} \cup \bar{B}$ é um fechado contendo $A \cup B$. Logo $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. (e) é óbvio.

Reciprocamente, temos:

Proposição 6

Seja X um conjunto, e seja $A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \bar{A} \in \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

(a) $A \subset \bar{A}$

(b) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

(c) $\bar{\emptyset} = \emptyset$

(d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Seja $\mathcal{F} = \{A \subset X : A = \bar{A}\}$. Então $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia τ em X e, para cada $A \subset X$, $\bar{A}$ é o fecho de A nesta topologia.

Para demonstrar esta proposição utilizaremos o resultado da aula anterior sobre "topologia gerada por fechados" que relembramos agora:

Proposição 7

Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X tal que:

(a) *X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{F}$.*

(b) *A interseção de uma família arbitrária de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.*

(c) *A união de uma família finita de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.*

Seja $\tau = \{X \backslash F : F \in \mathcal{F}\}$. Então τ é uma topologia em X, e $\mathcal{F}$ coincide com a família dos fechados de (X, τ).

Caracterização do fecho

Demonstração: Note que por (a), $X \in \mathcal{F}$ e segue de (c) que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Segue de (d) que a união de dois membros (e portanto de qualquer número finito de membros) de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.

Antes de provar que qualquer interseção de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$, provemos que

$$(*) \quad A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}.$$

De fato usando (d) vemos que:

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \backslash A) \Rightarrow \bar{B} = \bar{A} \cup \overline{(B \backslash A)} \Rightarrow \bar{B} \supset \bar{A}.$$

Seja $A_i \in \mathcal{F}$ para cada $i \in I$. Então $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i$, e portanto $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \overline{A_i} = A_i$ para cada $i \in I$. Logo $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} A_i$, e segue que $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$. Assim $\mathcal{F}$ é a família de fechados para uma topologia τ em X.

Caracterização do fecho

Para provar que $\bar{A}$ é a aderência de A com relação a τ, fixemos $A \subset X$. Segue de $(*)$ que

$$\bar{A} \subset \bar{F} = F \text{ para cada } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \supset A$$

e portanto

$$\bar{A} \subset \bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset A\}.$$

Por outro lado segue de (a) e (b) que $\bar{A} \in \mathcal{F}$ e $\bar{A} \supset A$. Logo

$$\bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset A\} \subset \bar{A}$$

Isto prova que $\bar{A}$ é a aderência de A.

Ponto aderente

Na aula passada . . .

Definição 8

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que $V \subset X$ é uma ***vizinhança de x*** *se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.*

Pensando que os abertos que contém um ponto são as possíveis noções de "perto do ponto", podemos definir a noção de um ponto estar perto de um conjunto se toda vez que olhamos para "perto do ponto", interceptamos o conjunto:

Definição 9

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é ***ponto aderente*** *a A se para todo aberto V tal que $x \in V$ valer $V \cap A \neq \emptyset$.*

A próxima proposição diz que o fecho de um conjunto é a coleção de todos os pontos próximos do conjunto.

Conjunto dos pontos aderentes = fecho

Proposição 10

Sejam (X, τ) *um espaço topológico e* $A \subset X$. *Então*

$\bar{A} = \{x \in X : x$ *é ponto aderente de* $A\}$.

Demonstração. Chame de D o conjunto dos pontos aderentes a A. Vamos provar que $\bar{A} \subset D$. Sejam $x \in \bar{A}$, V aberto tal que $x \in V$, e suponha $V \cap A = \emptyset$. Logo, $A \subset X \backslash V$ que é fechado. Assim, pela definição de $\bar{A}$, segue que $\bar{A} \subset X \backslash V$, contradição com o fato que $x \in \bar{A}$ e $x \in V$.

Provemos que $D \subset \bar{A}$. Seja $x \in D$ e suponha $x \notin \bar{A}$. Logo, $x \in X \backslash \bar{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \backslash \bar{A}) \cap A \neq \emptyset$. Contradição, pois $A \subset \bar{A}$.

Exemplos de fechos

Exemplo 11

(a) *Considere um conjunto X com a topologia discreta. Como todo subconjunto A de X é fechado, segue que $\bar{A} = A$ para todo subconjunto A de X.*

(b) *Em $\mathbb{R}$, $\overline{[a,b)} = [a,b]$.*
De fato, b é o único ponto fora de $[a,b)$ que é aderente a $[a,b)$.

(c) *Na reta de Sorgenfrey, $\overline{[a,b)} = [a,b)$ e $\overline{[a,b]} = [a,b]$.*
Basta lembrar que $[a,b)$ e $[a,b]$ são fechados da reta de Sorgenfrey.

(d) *Em $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*
Isto segue do fato de que dado qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contém pontos de $\mathbb{Q}$.

(e) *Na reta de Sorgenfrey, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*
Isto segue do fato de que dado qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, $[x, x+\varepsilon)$ contém pontos de $\mathbb{Q}$.

Definição 12 (Interior)

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Chamaremos de interior de A o conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{V : V \text{ é aberto e } V \subset A\}.$$

Proposição 13

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overset{\circ}{A}$ é o maior aberto de X contido em A.

Prova: $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$ é aberto pois $\emptyset$ é aberto, $\emptyset \subset A$, e união arbitrária de abertos é um aberto.

Propriedades de interior

Proposição 14

Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Então:

$$X \backslash \bar{A} = \overset{\circ}{(X \backslash A)} \quad e \quad X \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{(X \backslash A)}.$$

Demonstração. Basta aplicar as leis de De Morgan. Façamos a primeira:

$$\begin{aligned} X \backslash \bar{A} &= X \backslash \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } F \supset A\} \\ &= \bigcup \{X \backslash F : \quad F \text{ é fechado e } F \supset A\} \\ &= \bigcup \{V : V \text{ é aberto e } V \subset X \backslash A\} = \overset{\circ}{(X \backslash A)}\ . \end{aligned}$$

Deixamos como exercício as demonstrações das duas proposições seguintes. Elas podem ser demonstradas diretamente, ou podem ser deduzidas das Proposições que caracterizam os fechos, a Proposição anterior e as leis de De Morgan.

Caracterização de interior

Proposição 15

Seja X um espaço topológico. Então a aplicação $A \mapsto \overset{\circ}{A}$ *tem as seguintes propriedades:*

(a) $\overset{\circ}{A} \subset A$

(b) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

(c) $\overset{\circ}{X} = X$

(d) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

(e) *A é aberto se, e só se,* $A = \overset{\circ}{A}$.

Proposição 16

Seja X um conjunto, e seja $A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overset{\circ}{A} \in \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

(a) $\overset{\circ}{A} \subset A$,

(b) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,

(c) $\overset{\circ}{X} = X$,

(d) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Seja $\tau = \left\{ A \subset X : A = \overset{\circ}{A} \right\}$. Então τ é uma topologia em X e, para cada $A \subset X$, $\overset{\circ}{A}$ é o interior de A nesta topologia.

Ponto interior

Definição 17

Sejam (X, τ) *um espaço topológico e* $A \subset X$*. Dizemos que* $x \in X$ *é* ***ponto interior de*** A *se existe* V *aberto tal que* $x \in V \subset A$*.*

Proposição 18

Sejam (X, τ) *um espaço topológico e* $A \subset X$. *Então*

$$\mathring{A} = \{x \in X : x \textit{ é ponto interior de } A\}.$$

Prova: Diretamente das definições de ponto interior e $\mathring{A}$.

Fronteira

Algumas vezes, um ponto pode estar próximo tanto de um conjunto, como de seu complementar.

Definição 19

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um ***ponto de fronteira de A*** *se para todo $V \subset X$ aberto tal que $x \in V$, temos*

$$V \cap A \neq \emptyset \text{ e } V \cap (X \backslash A) \neq \emptyset.$$

Utilizamos a seguinte notação:

$$\partial A = \{x \in X : x \text{é ponto de fronteira de } A\}.$$

Exemplo de fronteira

Exemplo 20

Em $\mathbb{R}$*,* $\partial[a,b) = \{a,b\}$*. Enquanto que na reta de Sorgenfrey temos que* $\partial[a,b) = \emptyset$*.*

Note que a última igualdade acima vale de modo geral.

Proposição 21

Se A *é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico* (X,τ)*, então* $\partial A = \emptyset$*.*

Exemplo 22

Em $\mathbb{R}$ *(ou na reta de Sorgenfrey),* $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$*.*

Exercícios de fecho, interior, fronteira

1. Seja X um espaço topológico. Mostre que:
   (a) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$
   (b) $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$
   (c) $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$
   (d) $\bar{A} = A \cup \partial A$
   (e) $\mathring{A} = A \setminus \partial A$
2. Seja X um espaço topológico com a topologia cofinita.
   2.1 Descreva $\bar{A}$ para cada $A \subset X$.
   2.2 Descreva $\mathring{A}$ para cada $A \subset X$.
3. Sejam X um conjunto, $A \subset X$ e considere em X a topologia τ_A. Então:
   3.1 Descreva $\bar{B}$ para cada $B \subset X$.
   3.2 Descreva $\mathring{B}$ para cada $B \subset X$.
4. Seja X um espaço topológico.
   (a) Prove que $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ para todos $A, B \subset X$.
   (b) Dê exemplo de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que $\overline{(A \cap B)} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.
5. Seja X um espaço topológico.
   (a) Prove que $(A \overset{\circ}{\cup} B) \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ para todos $A, B \subset X$.
   (b) Dê exemplo de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que $(A \overset{\circ}{\cup} B) \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

6. Para cada $A \subset \mathbb{N}$ seja

$$\bar{A} = \{kn : n \in A, k \in \mathbb{N}\}.$$

   (a) Prove que a aplicação $A \mapsto \bar{A}$ tem as propriedades da Proposição da topologia induzida por uma "família de fechados" (página 25 da Aula 1), e define portanto uma topologia τ em $\mathbb{N}$.
   (b) Descreva os fechados de $(\mathbb{N}, \tau)$.
   (c) Descreva os abertos de $(\mathbb{N}, \tau)$.