SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA III

ELETROMAGNETISMO

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

PEARSON Addison Wesley

www.aw.com/young_br

Companion Website

Site com material de apoio para professores e estudantes

Addison Wesley - Makron Books - Prentice Hall
PEARSON Education
CORTESIA UNIVERSITÁRIO
VENDA PROIBIDA
(11) 2178-86

FÍSICA III

ELETROMAGNETISMO

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Pearson Education
EMPRESA CIDADÃ

FÍSICA III

ELETROMAGNETISMO

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Hugh D. Young
Universidade Carnegie-Mellon, Pittsburgh

Roger A. Freedman
Universidade da Califórnia, Santa Bárbara

Colaborador
A. Lewis Ford
Universidade A&M do Texas

Tradução
Sonia Midori Yamamoto

Revisão Técnica
Adir Moysés Luiz
Doutor em ciência
Professor associado do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

PEARSON
Addison Wesley

EDITORA AFILIADA

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

© 2009 by Pearson Education do Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de nenhum modo ou por algum outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo
Editores: Arlete Sousa e Marco Pace
Preparação: Letícia Reis Scarp
Revisão: Samuel Grecco e Carmen S. da Costa
Capa: Rafael Mazzo, sob projeto original de Yvo Riezebos Design
Projeto gráfico e diagramação: Globaltec Artes Gráficas

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Young, Hugh D.
Física III : eletromagnetismo / Young e Freedman ; [colaborador A. Lewis Ford] ; tradução Sonia Midori Yamamoto; revisão técnica Adir Moysés Luiz. — São Paulo : Addison Wesley, 2009.

Título original: Sear and Zemansky`s University physics.
12. ed. americana.
ISBN 978-85-88639-34-8

1. Eletromagnetismo 2. Física III. Freedman, Roger A. II. Ford, A. Lewis. III. Título.

08-02033 CDD-537

Índice para catálogo sistemático:
1. Eletromagnetismo : Física 537

1ª reimpressão – maio 2009

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

SUMÁRIO

FÍSICA 3
ELETROMAGNETISMO

CAPÍTULO 21 Carga Elétrica e Campo Elétrico

21.1 Carga Elétrica 02
21.2 Condutores, Isolantes e Cargas Induzidas 05
21.3 Lei de Coulomb 07
21.4 Campo Elétrico e Forças Elétricas 12
21.5 Determinação do Campo Elétrico 17
21.6 Linhas de Força de um Campo Elétrico 23
21.7 Dipolos Elétricos 25

Resumo/Principais Termos 28
Questões/Exercícios/Problemas 30

CAPÍTULO 22 Lei de Gauss

22.1 Carga Elétrica e Fluxo Elétrico 40
22.2 Determinação do Fluxo Elétrico 43
22.3 Lei de Gauss 47
22.4 Aplicações da Lei de Gauss 51
22.5 Cargas em Condutores 57

Resumo/Principais Termos 61
Questões/Exercícios/Problemas 63

CAPÍTULO 23 Potencial Elétrico

23.1 Energia Potencial Elétrica 71
23.2 Potencial Elétrico 78
23.3 Determinação do Potencial Elétrico 83
23.4 Superfícies Equipotenciais 87
23.5 Gradiente de Potencial 90

Resumo/Principais Termos 92
Questões/Exercícios/Problemas 93

CAPÍTULO 24 Capacitância e Dielétricos

24.1 Capacitância e Capacitores 105
24.2 Capacitores em Série e em Paralelo 109
24.3 Armazenamento de Energia em Capacitores e Energia do Campo Elétrico 112
24.4 Dielétricos 115
*24.5 Modelo Molecular da Carga Induzida 121
*24.6 Lei de Gauss em Dielétricos 122

Resumo/Principais Termos 124
Questões/Exercícios/Problemas 125

CAPÍTULO 25 Corrente, Resistência e Força Eletromotriz

25.1 Corrente 135
25.2 Resistividade 139
25.3 Resistência 142
25.4 Força Eletromotriz e Circuitos 146
25.5 Energia e Potência em Circuitos Elétricos 151
*25.6 Teoria da Condução em Metais 155

Resumo/Principais Termos 157
Questões/Exercícios/Problemas 159

CAPÍTULO 26 Circuitos de Corrente Contínua

26.1 Resistores em Série e em Paralelo 168
26.2 Leis de Kirchhoff 173
26.3 Instrumentos de Medidas Elétricas 178
26.4 Circuito R-C 182
26.5 Sistemas de Distribuição de Potência 186

Resumo/Principais Termos 189
Questões/Exercícios/Problemas 191

CAPÍTULO 27 Campo Magnético e Forças Magnéticas

27.1 Magnetismo 202
27.2 Campo Magnético 204
27.3 Linhas de Campo Magnético e Fluxo Magnético 208
27.4 Movimento de Partículas Carregadas em um Campo Magnético 211
27.5 Aplicações de Movimento e Partículas Carregadas 214
27.6 Força Magnética sobre um Condutor Transportando uma Corrente 217
27.7 Força e Torque sobre uma Espira de Corrente 220
*27.8 O Motor de Corrente Contínua 226
*27.9 O Efeito Hall 228

Resumo/Principais Termos 229
Questões/Exercícios/Problemas 231

CAPÍTULO 28 Fontes de Campo Magnético

28.1 Campo Magnético de uma Carga em Movimento 243
28.2 Campo Magnético de um Elemento de Corrente 246
28.3 Campo Magnético de um Condutor Retilíneo Transportando uma Corrente 248
28.4 Força entre Condutores Paralelos 251
28.5 Campo Magnético de uma Espira Circular 253
28.6 Lei de Ampère 255
28.7 Aplicações da Lei de Ampère 258
*28.8 Materiais Magnéticos 262
Resumo/Principais Termos 267
Questões/Exercícios/Problemas 270

CAPÍTULO 29 Indução Eletromagnética

29.1 Experiências de Indução 281
29.2 Lei de Faraday 283
29.3 Lei de Lenz 290
29.4 Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento 292
29.5 Campos Elétricos Induzidos 294
*29.6 Correntes de Foucault 297
29.7 Corrente de Deslocamento e Equações de Maxwell 298
*29.8 Supercondutividade 302
Resumo/Principais Termos 303
Questões/Exercícios/Problemas 305

CAPÍTULO 30 Indutância

30.1 Indutância Mútua 316
30.2 Indutores e Auto-Indutância 319
30.3 Energia do Campo Magnético 323
30.4 O Circuito R-L 325
30.5 O Circuito L-C 329
30.6 O Circuito R-L-C em Série 333
Resumo/Principais Termos 335
Questões/Exercícios/Problemas 337

CAPÍTULO 31 Corrente Alternada

31.1 Fasor e Corrente Alternada 347
31.2 Resistência e Reatância 351
31.3 O Circuito R-L-C em Série 356
31.4 Potência em Circuitos de Corrente Alternada 361
31.5 Ressonância em Circuitos de Corrente Alternada 363
31.6 Transformadores 366
Resumo/Principais Termos 369
Questões/Exercícios/Problemas 371

CAPÍTULO 32 Ondas Eletromagnéticas

32.1 Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas 377
32.2 Ondas Eletromagnéticas Planas e a Velocidade da Luz 381
32.3 Ondas Eletromagnéticas Senoidais 386
32.4 Energia e Momento Linear em Ondas Eletromagnéticas 390
32.5 Ondas Eletromagnéticas Estacionárias 395
Resumo/Principais Termos 398
Questões/Exercícios/Problemas 399

APÊNDICES

A Sistema Internacional de Unidades 405
B Relações Matemáticas Úteis 407
C Alfabeto Grego 408
D Tabela Periódica dos Elementos 409
E Fatores de Conversão das Unidades 410
F Constantes Numéricas 411
Respostas dos Problemas Ímpares 413
Índice Remissivo 417
Créditos das fotos 423
Sobre os autores 425

FÍSICA 1
MECÂNICA

CAPÍTULO 1 Unidades, Grandezas Físicas e Vetores

1.1 A Natureza da Física
1.2 Solução de Problemas de Física
1.3 Padrões e Unidades
1.4 Coerência e Conversão de Unidades
1.5 Incerteza e Algarismos Significativos
1.6 Estimativas e Ordens de Grandeza
1.7 Vetores e Soma Vetorial
1.8 Componentes de Vetores
1.9 Vetores Unitários
1.10 Produtos de Vetores

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 2 Movimento Retilíneo

2.1 Deslocamento, Tempo e Velocidade Média
2.2 Velocidade Instantânea
2.3 Aceleração Instantânea e Aceleração Média
2.4 Movimento com Aceleração Constante
2.5 Queda Livre de Corpos
*2.6 Velocidade e Posição por Integração

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 3 Movimento em Duas ou Três Dimensões

3.1 Vetor Posição e Vetor Velocidade
3.2 Vetor Aceleração
3.3 Movimento de um Projétil
3.4 Movimento Circular
3.5 Velocidade Relativa

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 4 Leis de Newton do Movimento

4.1 Força e Interações
4.2 Primeira Lei de Newton
4.3 Segunda Lei de Newton
4.4 Massa e Peso
4.5 Terceira Lei de Newton
4.6 Exemplos de Diagramas do Corpo Livre

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 5 Aplicações das Leis de Newton

5.1 Uso da Primeira Lei de Newton: Partículas em Equilíbrio
5.2 Uso da Segunda Lei de Newton: Dinâmica das Partículas
5.3 Forças de Atrito
5.4 Dinâmica do Movimento Circular
*5.5 As Forças Fundamentais da Natureza

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 6 Trabalho e Energia Cinética

6.1 Trabalho
6.2 Energia Cinética e o Teorema do Trabalho-Energia
6.3 Trabalho e Energia com Forças Variáveis
6.4 Potência

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 7 Energia Potencial e Conservação da Energia

7.1 Energia Potencial Gravitacional
7.2 Energia Potencial Elástica
7.3 Forças Conservativas e Forças Não Conservativas
7.4 Força e Energia Potencial
7.5 Diagramas de Energia

Resumo/Principais Termo
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 8 Momento Linear, Impulso e Colisões

8.1 Momento Linear e Impulso
8.2 Conservação do Momento Linear
8.3 Conservação do Momento Linear e Colisões
8.4 Colisões Elásticas
8.5 Centro de Massa
*8.6 Propulsão de um Foguete

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 9 Rotação de Corpos Rígidos

9.1 Velocidade Angular e Aceleração Angular
9.2 Rotação com Aceleração Angular Constante
9.3 Relações entre a Cinemática Linear e a Cinemática Angular
9.4 Energia no Movimento de Rotação
9.5 Teorema dos Eixos Paralelos
*9.6 Cálculos de Momento de Inércia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 10 Dinâmica do Movimento de Rotação

10.1 Torque
10.2 Torque e Aceleração Angular de um Corpo Rígido
10.3 Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Móvel
10.4 Trabalho e Potência no Movimento de Rotação
10.5 Momento Angular
10.6 Conservação do Momento Angular
10.7 Giroscópios e Precessão

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 11 Equilíbrio e Elasticidade

11.1 Condições de Equilíbrio
11.2 Centro de Gravidade
11.3 Soluções de Problemas de Equilíbrio de Corpos Rígidos
11.4 Tensão, Deformação e Módulos de Elasticidade
11.5 Elasticidade e Plasticidade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

FÍSICA 2
TERMODINÂMICA E ONDAS

CAPÍTULO 12 Gravitação

12.1 Lei de Newton da Gravitação
12.2 Peso
12.3 Energia Potencial Gravitacional
12.4 Movimento de Satélites
12.5 As Leis de Kepler e o Movimento de Planetas
*12.6 Distribuição Esférica de Massa
*12.7 Peso Aparente e Rotação da Terra
12.8 Buraco Negro

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 13 Movimento Periódico

13.1 Causas da Oscilação
13.2 Movimento Harmônico Simples
13.3 Energia no Movimento Harmônico Simples
13.4 Aplicações do Movimento Harmônico Simples
13.5 O Pêndulo Simples
13.6 O Pêndulo Físico
13.7 Oscilações Amortecidas
13.8 Oscilações Forçadas e Ressonância

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 14 Mecânica dos Fluidos

14.1 Densidade
14.2 Pressão em um Fluido
14.3 Empuxo
14.4 Escoamento de um Fluido
14.5 Equação de Bernoulli
14.6 Viscosidade e Turbulência

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 15 Ondas Mecânicas

15.1 Tipos de Ondas Mecânicas
15.2 Ondas Periódicas
15.3 Descrição Matemática das Ondas
15.4 Velocidade de uma Onda Transversal
15.5 Energia no Movimento Ondulatório
15.6 Interferência de Ondas, Condições de Contorno de uma Corda e Princípio da Superposição
15.7 Ondas Estacionárias em uma Corda
15.8 Modos Normais de uma Corda

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 16 Som e Audição

16.1 Ondas Sonoras
16.2 Velocidade das Ondas Sonoras
16.3 Intensidade do Som
16.4 Ondas Estacionárias e Modos Normais
16.5 Ressonância e Som
16.6 Interferência de Ondas
16.7 Batimentos
16.8 O Efeito Doppler
*16.9 Ondas de Choque

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 17 Temperatura e Calor

17.1 Temperatura e Equilíbrio Térmico
17.2 Termômetros e Escalas de Temperatura
17.3 Termômetro de Gás e Escala Kelvin
17.4 Expansão Térmica 184
17.5 Quantidade de Calor 190
17.6 Calorimetria e Transições de Fases
17.7 Mecanismos de Transferência de Calor

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 18 Propriedades Térmicas da Matéria

18.1 Equações de Estado
18.2 Propriedades Moleculares da Matéria
18.3 Modelo Cinético-Molecular de um Gás Ideal
18.4 Calor Específico
*18.5 Velocidades Moleculares
18.6 Fases da Matéria

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 19 A Primeira Lei da Termodinâmica

19.1 Sistemas Termodinâmicos
19.2 Trabalho Realizado Durante Variações de Volume
19.3 Caminhos entre Estados Termodinâmicos
19.4 Energia Interna e Primeira Lei da Termodinâmica
19.5 Tipos de Processos Termodinâmicos
19.6 Energia Interna de um Gás Ideal
19.7 Calor Específico de um Gás Ideal
19.8 Processo Adiabático de um Gás Ideal

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 20 A Segunda Lei da Termodinâmica

20.1 Sentido de um Processo Termodinâmico
20.2 Máquinas Térmicas
20.3 Máquinas de Combustão Interna
20.4 Refrigeradores
20.5 Segunda Lei da Termodinâmica
20.6 O Ciclo de Carnot
20.7 Entropia
*20.8 Interpretação Microscópica da Entropia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

FÍSICA 4
ÓTICA E FÍSICA MODERNA

CAPÍTULO 33 Natureza e Propagação da Luz

33.1 Natureza da Luz
33.2 Reflexão e Refração
33.3 Reflexão Interna Total
*33.4 Dispersão
33.5 Polarização
*33.6 Espalhamento da Luz
33.7 Princípio de Huygens

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 34 Ótica Geométrica e Instrumentos de Ótica

34.1 Reflexão e Refração em uma Superfície Plana
34.2 Reflexão em uma Superfície Esférica
34.3 Refração em uma Superfície Esférica
34.4 Lentes Delgadas
34.5 Câmera
34.6 O Olho
34.7 A Lupa
34.8 Microscópios e Telescópios

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 35 Interferência

35.1 Interferência e Fontes Coerentes
35.2 Interferência da Luz Produzida por Duas Fontes
35.3 Intensidade das Figuras de Interferência
35.4 Interferência em Películas Finas
35.5 O Interferômetro de Michelson

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 36 Difração

36.1 Difração de Fresnel e Difração de Fraunhofer
36.2 Difração Produzida por uma Fenda Simples
36.3 Intensidade na Difração Produzida por uma Fenda Simples
36.4 Fendas Múltiplas
36.5 A Rede de Difração
36.6 Difração de Raios X
36.7 Orifícios Circulares e Poder de Resolução
*36.8 Holografia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 37 Relatividade

37.1 Invariância das Leis Físicas
37.2 Relatividade da Simultaneidade
37.3 Relatividade dos Intervalos de Tempo
37.4 Relatividade do Comprimento
37.5 As Transformações de Lorentz
*37.6 O Efeito Doppler para as Ondas Eletromagnéticas
37.7 Momento Linear Relativístico
37.8 Trabalho e Energia na Relatividade
37.9 Mecânica Newtoniana e Relatividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 38 Fótons, Elétrons e Átomos

38.1 Emissão e Absorção da Luz
38.2 O Efeito Fotoelétrico
38.3 Espectro Atômico de Linhas e Níveis de Energia
38.4 O Núcleo do Átomo
38.5 O Modelo de Bohr
38.6 O Laser
38.7 Espalhamento e Produção de Raios X
38.8 Espectro Contínuo
38.9 A Dualidade Onda-Partícula

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 39 A Natureza Ondulatória das Partículas

39.1 Onda de De Broglie
39.2 Difração de Elétrons
39.3 Probabilidade e Incerteza
39.4 O Microscópio Eletrônico
39.5 Função de Onda e Equação de Schrödinger

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 40 Mecânica Quântica

40.1 Partícula em uma Caixa
40.2 Poço de Potencial
40.3 Barreira de Potencial e Efeito Túnel
40.4 O Oscilador Harmônico
40.5 Problemas em Três Dimensões

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 41 Estrutura Atômica

41.1 O Átomo de Hidrogênio
41.2 O Efeito Zeeman
41.3 Spin do Elétron
41.4 Átomos com Muitos Elétrons e o Princípio de Exclusão
41.5 Espectro de Raios X

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 42 Moléculas e Matéria Condensada

42.1 Tipos de Ligações Moleculares
42.2 Espectro Molecular
42.3 Estrutura de um Sólido
42.4 Bandas de Energia
42.5 Modelo do Elétron Livre para um Metal
42.6 Semicondutores
42.7 Dispositivos Semicondutores
42.8 Supercondutividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 43 Física Nuclear

43.1 Propriedades do Núcleo
43.2 Ligação Nuclear e Estrutura Nuclear
43.3 Estabilidade Nuclear e Radioatividade
43.4 Atividade e Meia-Vida
43.5 Efeitos Biológicos da Radiação
43.6 Reações Nucleares
43.7 Fissão Nuclear
43.8 Fusão Nuclear

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 44 Física das Partículas e Cosmologia

44.1 Partículas Fundamentais – uma História
44.2 Aceleradores de Partículas e Detectores
44.3 Interações entre Partículas
44.4 Quarks e o Modelo com Simetria de Oito Modos
44.5 O Modelo Padrão e os Modelos Futuros
44.5 O Universo em Expansão
44.6 O Começo do Tempo

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

PREFÁCIO

Este livro é o resultado de meio século de liderança e inovação no ensino da Física. A primeira edição do livro *Física* de Francis W. Sears e Mark W. Zemansky, publicada em 1949, foi revolucionária dentre os livros-texto baseados em cálculo por dar ênfase aos princípios da Física e suas aplicações. O êxito alcançado por esta obra para o uso de diversas gerações de alunos e professores, em várias partes do mundo, atesta os méritos desse método e das muitas inovações introduzidas posteriormente.

Ao preparar esta nova 12ª edição, incrementamos e desenvolvemos o livro de modo a incorporar as melhores idéias extraídas da pesquisa acadêmica, com ensino aprimorado de solução de problemas.

Novidades desta Edição

Estratégias para a solução de problemas e Exemplos resolvidos. Seções de Estratégia para a solução de problemas permeiam o livro e fornecem aos alunos táticas específicas para a resolução de determinados tipos de problema. Eles atendem às necessidades de todo estudante que já sentiu que 'compreende os conceitos, mas não consegue resolver os problemas'.

Todas as seções de Estratégia para a Solução de Problemas seguem a abordagem ISEE (do inglês *Identify, Set Up, Execute and Evaluate* – Identificar, Preparar, Executar e Avaliar). Essa abordagem ajuda os estudantes a saber como começar a tratar uma situação aparentemente complexa, identificar os conceitos relevantes de Física, decidir quais recursos são necessários para solucionar o problema, executar a solução e depois avaliar se o resultado faz sentido.

Essa é uma idéia extraída de pesquisas acadêmicas realizadas recentemente na área. Por ser um recurso extremamente didático, é muito eficiente para o aprendizado.

Estratégia para a solução de problemas 21.1

LEI DE COULOMB

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a lei de Coulomb entra em ação sempre que necessitamos conhecer a força elétrica que atua entre partículas carregadas.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho indicando as localizações das partículas carregadas e classifique cada partícula conforme a respectiva carga. Essa etapa é particularmente importante quando há mais de duas partículas carregadas.
2. Se houver mais de duas ou três cargas e elas não estiverem localizadas na mesma linha, prepare um sistema de coordenadas *xy*.
3. Com freqüência você necessitará obter a força elétrica que atua sobre uma única partícula. Nesse caso, identifique essa partícula.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Calcule o módulo da força que cada partícula exerce sobre a partícula de interesse, usando a Equação (21.2).
2. Desenhe os vetores da força elétrica que atuam sobre a(s) partícula(s) de interesse em função de cada uma das demais partículas (ou seja, faça um diagrama do corpo livre). Lembre-se de que a força exercida pela partícula 1 sobre a partícula 2 aponta da partícula 2 para a partícula 1, caso as duas cargas tenham sinais contrários, mas aponta da partícula 2 para o lado oposto ao da partícula 1, caso as cargas tenham o mesmo sinal.
3. Calcule a força elétrica total sobre a(s) partícula(s) de interesse. Lembre-se de que a força elétrica, como qualquer força, é

Exemplo 21.2

FORÇA ENTRE DUAS CARGAS PUNTIFORMES Duas cargas puntiformes, $q_1 = +25$ nC e $q_2 = -75$ nC, estão separadas por uma distância igual a 3,0 cm (Figura 21.12a). Determine o módulo, a direção e o sentido (a) da força elétrica que q_1 exerce sobre q_2; e (b) da força elétrica que q_2 exerce sobre q_1.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema solicita as forças elétricas que duas cargas exercem entre si, por isso necessitaremos usar a lei de Coulomb.

PREPARAR: usamos a Equação (21.2) para calcular o módulo da força que uma partícula exerce sobre a outra. Usamos a terceira lei de Newton para relacionar as forças que as duas partículas exercem entre si.

Cada seção de Estratégia para a Solução de Problemas é seguida por um ou mais **Exemplos resolvidos**, que ilustram a estratégia. Muitos outros Exemplos podem ser encontrados em cada capítulo. Assim como as seções de Estratégia para a Solução de Problemas, todos os exemplos quantitativos aplicam a abordagem ISEE. Vários deles são puramente qualitativos e classificados como Exemplos Conceituais.

Ensino associado à prática. Um recurso eficiente e sistemático de aprendizado associado à prática inclui os Objetivos de Aprendizagem, disponíveis no início de cada capítulo, e os Resumos dos capítulos, que consolidam cada conceito por meio de palavras, fórmulas matemáticas e figuras.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como analisar circuitos com múltiplos resistores em série ou em paralelo.
- Regras que podem ser aplicadas a qualquer circuito com mais de uma malha.
- Como usar um amperímetro, voltímetro, ohmímetro ou potenciômetro em um circuito.
- Como analisar circuitos que possuem tanto um resistor quanto um capacitor.
- Como a energia elétrica é distribuída em uma residência.

Teste sua compreensão da Seção 21.2 Considere duas esferas metálicas leves penduradas em um fio de náilon. Uma das esferas possui carga negativa líquida, enquanto a outra não possui carga líquida. (a) Quando as esferas estão próximas, mas não se tocam, elas (i) se atraem, (ii) se repelem ou (iii) não exercem nenhuma força mútua? (b) Caso as esferas se toquem, elas (i) se atraem, (ii) se repelem ou (iii) não exercem nenhuma força mútua? ▮

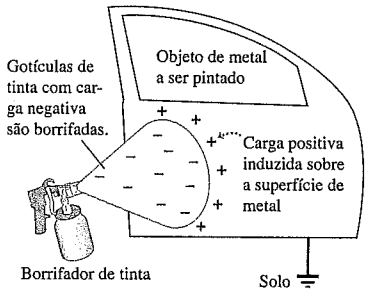


Figura 21.9 O processo de pintura eletrostática (compare as figuras 21.7b e 21.7c).

Organização dos capítulos

A Introdução de cada capítulo fornece exemplos específicos do conteúdo e faz a conexão com assuntos abordados em capítulos anteriores. Há também uma Pergunta de abertura do capítulo e uma lista de **Objetivos de Aprendizagem** para que o aluno reflita sobre a matéria no capítulo a seguir. (Para encontrar a resposta a essa pergunta, procure pelo ícone '?'.) A maioria das seções termina com um **Teste de compreensão**, que apresenta perguntas simples relacionadas ao conteúdo estudado. Esse recurso ajuda os alunos a testarem instantaneamente o que acabaram de aprender. O final de cada capítulo traz um Resumo visual dos princípios mais importantes apresentados, bem como uma lista de Principais termos com referência da página na qual cada termo foi introduzido pela primeira vez. As respostas à Pergunta de abertura do capítulo e do Teste de compreensão vêm na seqüência dos Principais termos.

O poder didático das figuras. O poder instrutivo das figuras é potencializado por meio da comprovada técnica de 'anotação' (comentários no estilo quadro-negro integrados às figuras, para orientar o estudante em sua interpretação) e do uso eficiente de detalhes.

Problemas em destaque, ao final dos capítulos. Outro reconhecido mérito desta 12ª edição vai ainda mais longe: ela oferece em seus quatro volumes a primeira biblioteca de problemas sistematicamente melhorados em Física, com mais de 800 novos problemas, que compõem o acervo total de 3700.

Questões e exercícios. No final de cada capítulo há um conjunto de Questões para discussão destinadas a aprofundar e ampliar a assimilação conceitual pelo aluno, e, logo após, vêm os Exercícios, problemas simples que envolvem um dado conceito relacionado com seções específicas do texto. Em seguida temos os Problemas, que normalmente necessitam de duas ou mais etapas não triviais, e, por fim, os Problemas desafiadores, destinados a desafiar os melhores estudantes. Os problemas abrangem aplicações a campos tão diversos quanto astrofísica, biologia e aerodinâmica. Muitos deles possuem partes conceituais as quais os estudantes devem discutir e explicar seus resultados. As novas questões, exercícios e problemas desta edição foram criados e organizados por Wayne Anderson (Sacramento City College), Laird Kramer (Florida International University) e Charlie Hibbard.

Parágrafos de 'atenção'. Duas décadas de pesquisa acadêmica em Física revelaram uma série de armadilhas conceituais que comumente afligem os iniciantes no estudo da Física. Dentre elas, as noções de que uma força é necessária para o movimento, que a corrente elétrica é 'usada' ao longo de um circuito e que o próprio produto da massa pela aceleração é uma força. Os parágrafos de 'Atenção' alertam para essas e outras armadilhas e explicam onde está o erro na abordagem (que pode ter inicialmente ocorrido ao estudante) de uma determinada situação.

> **ATENÇÃO Atração elétrica e repulsão** A atração e a repulsão entre dois objetos carregados é geralmente resumida como 'cargas iguais se repelem e cargas contrárias se atraem'. Contudo, tenha em mente que a expressão 'cargas iguais' *não* significa que as duas cargas sejam idênticas, apenas que elas possuem o mesmo *sinal* algébrico (ambas são positivas ou ambas são negativas). 'Cargas contrárias' significam que os objetos possuem cargas elétricas e que essas cargas possuem sinais algébricos opostos (uma é positiva e a outra é negativa).

Notação e unidades. Os estudantes geralmente levam muito tempo para distinguir as grandezas escalares das grandezas vetoriais. Nesta edição usamos letras em itálico e negrito com uma seta em cima para designar vetores, como $\vec{v}$, $\vec{a}$, e $\vec{F}$; vetores unitários como $\hat{\imath}$ possuem acento circunflexo. Os sinais em negrito $+$, $-$, $\times$ e $=$ são usados para relacionar grandezas vetoriais e não confundir com os respectivos sinais usados para relacionar grandezas escalares.

Nesta edição são usadas somente unidades SI (as unidades inglesas ocorrem em casos de exceção). O joule é usado como unidade padrão para todas as formas de energia, incluindo o calor.

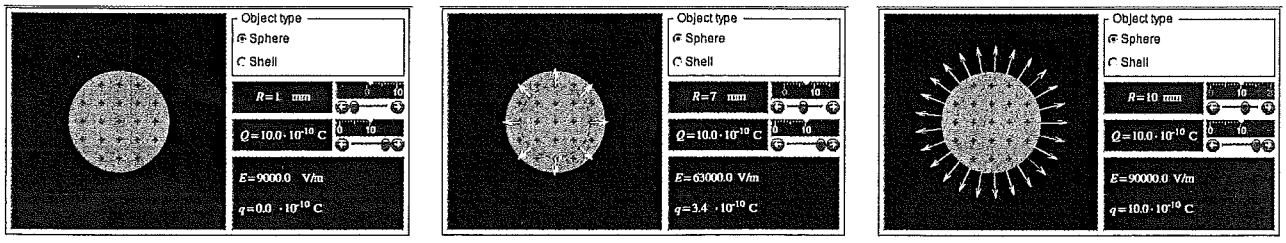
Um guia para o estudante. Muitos estudantes sentem dificuldade simplesmente porque não sabem como fazer o melhor uso do livro-texto. Depois deste prefácio, incluímos uma Seção com o título "Como aprender física tentando para valer", que serve como um 'manual do usuário' apontando para todas as características deste livro. Essa seção, escrita pelo Professor Mark Hollabaugh (*Normandale Community College*), fornece também inúmeras dicas para os estudantes. Recomendamos que todos os estudantes leiam atentamente essa seção!

Flexibilidade. Este livro pode ser utilizado em uma grande variedade de cursos. Existe material suficiente para cursos de três semestres ou cinco trimestres. Embora muitos professores possam achar que há material demais para um curso de um ano, ele pode ser usado omitindo-se certos capítulos ou seções. Por exemplo, alguns ou todos os capítulos sobre mecânica dos fluidos, acústica, ondas eletromagnéticas ou relatividade podem ser omitidos sem perda da continuidade. Seja como for, ninguém é obrigado a seguir estritamente a seqüência do livro.

Material Adicional

No Companion Website deste livro (www.aw.com/young_br), professores e estudantes têm acesso a materiais adicionais que facilitarão a exposição das aulas e o aprendizado.
Para os professores: manual de soluções (em inglês) e apresentações em PowerPoint com figuras e os principais conceitos do livro (protegidos por senha).
Para estudantes: exercícios de múltipla escolha para ajudar na fixação de conceitos e animações (em inglês) que simulam alguns temas das lições, como no exemplo abaixo.

Simulação da Lei de Gauss



Como Aprender Física Tentando para Valer

Mark Hollabaugh (Normandale Community College)

A física abrange o pequeno e o grande, o velho e o novo. Dos átomos até as galáxias, dos circuitos elétricos até a aerodinâmica, a física é parte integrante do mundo que nos cerca. Você provavelmente está fazendo este curso de física baseado no cálculo como pré-requisito de cursos subseqüentes que fará para se preparar para uma carreira de ciências ou de engenharia. Seu professor deseja que você aprenda física e que goste da experiência. Ele está muito interessado em ajudá-lo a aprender essa fascinante matéria. Essa é uma das razões para ter escolhido este livro-texto para o seu curso. Também foi por isso que os doutores Young e Freedman me pediram para escrever esta seção introdutória. Desejamos o seu sucesso!

O objetivo desta seção é fornecer algumas idéias que possam auxiliá-lo durante a aprendizagem. Após uma breve abordagem sobre hábitos e estratégias gerais de estudo, serão apresentadas sugestões específicas sobre como usar o livro-texto.

Preparação para este Curso

Caso esteja adiantado em seus estudos de física, você aprenderá mais rapidamente alguns conceitos, por estar familiarizado com a linguagem dessa matéria. Da mesma forma, seus estudos de matemática facilitarão sua assimilação dos aspectos matemáticos da física. Seu professor poderá indicar alguns tópicos de matemática que serão úteis neste curso.

Aprendendo a Aprender

Cada um de nós possui um estilo próprio e um método preferido de aprendizagem. Compreender seu estilo de aprender ajudará você a identificar as dificuldades e superá-las. Obviamente você preferirá dedicar mais tempo estudando os assuntos mais complicados. Se você aprende mais ouvindo, assistir às aulas e conferências será muito importante. Caso prefira explicar, o trabalho em equipe vai lhe ser útil. Se a sua dificuldade está na solução de problemas, gaste uma parte maior do seu tempo aprendendo a resolver problemas. Também é fundamental desenvolver bons hábitos de estudo. Talvez a coisa mais importante que você possa fazer por si mesmo seja estabelecer uma rotina de estudos, em horários regulares e em um ambiente livre de distrações.

Responda para si mesmo as seguintes perguntas:

- Estou apto para usar os conceitos matemáticos fundamentais da álgebra, da geometria e da trigonometria? (Caso não esteja apto, faça um programa de revisão com a ajuda de seu professor.)
- Em cursos semelhantes, qual foi a atividade na qual tive mais dificuldade? (Dedique mais tempo a isso.) Qual foi a atividade mais fácil para mim? (Execute-a primeiro; isso lhe dará mais confiança.)
- Eu entendo melhor a matéria se leio o livro antes ou depois da aula? (Pode ser que você aprenda melhor fazendo uma leitura superficial da matéria, assistindo à aula e depois relendo o material com mais atenção.)
- Eu dedico um tempo adequado aos meus estudos de física? (Uma regra prática para um curso deste tipo é dedicar 2h30 de estudos para cada hora de aula. Para uma semana com 5 horas de aula, deve-se dedicar cerca de 10 a 15 horas de estudos por semana.)
- Devo estudar física todos os dias? (Distribua as 10 ou 15 horas de estudos durante a semana!) Em que parte do dia meus estudos são mais eficientes? (Escolha um período específico do dia e atenha-se a ele.)
- Eu estudo em ambiente silencioso que favoreça minha concentração? (As distrações podem quebrar sua rotina de estudos e atrapalhar a assimilação de pontos importantes.)

Trabalho em Grupo

Cientistas e engenheiros raramente trabalham sozinhos e preferem cooperar entre si. Você aprenderá melhor e com mais prazer estudando Física junto com outros colegas. Alguns professores aplicam métodos formais de aprendizagem cooperativa ou incentivam a formação de grupos. Você pode, por exemplo, formar seu próprio grupo de estudos com amigos da escola ou de sua vizinhança. Caso possua *e-mail*, use-o para se comunicar com outros colegas. Seu grupo de estudos será especialmente importante quando estiver fazendo uma revisão para os exames.

Aulas e Anotações

Um componente importante de seu curso são as aulas e conferências. Na física, isso é especialmente importante porque seu professor geralmente faz demonstrações de princípios físicos, executa simulações em computador ou exibe filmes. Todos esses recursos ajudam você a entender princípios fundamentais. Não falte a nenhuma aula, e caso, por algum motivo, isso seja inevitável, peça as anotações de algum colega de seu grupo de estudos.

Faça anotações das aulas sob a forma de tópicos e deixe para completar os detalhes do conteúdo mais tarde. É difícil anotar palavra por palavra, portanto, anote apenas as idéias básicas. O professor pode usar um diagrama do livro.

Deixe um espaço em suas notas para inserir o diagrama depois. Após as aulas, revise suas anotações, preenchendo as lacunas e anotando os pontos que devem ser mais desenvolvidos posteriormente. Anote as referências de páginas, equações ou seções do livro.

Faça perguntas em classe ou procure o professor depois da aula. Lembre-se de que a única pergunta 'tola' é aquela que não foi feita.

Exames

Fazer uma prova gera um elevado nível de estresse. Contudo, estar bem preparado e descansado alivia a tensão. Preparar-se para uma prova é um processo contínuo; começa assim que termina a última prova. Imediatamente depois de uma prova, você deve rever cuidadosamente os eventuais erros cometidos. Proceda do seguinte modo: divida uma folha de papel em duas colunas. Em uma delas, escreva a solução correta do problema. Na outra, coloque sua solução e verifique onde foi que errou. Caso não consiga identificar com certeza o erro, consulte seu professor. A física se constrói a partir de princípios básicos e é necessário corrigir imediatamente qualquer interpretação incorreta. Atenção: embora você possa passar em um exame deixando para estudar na última hora, não conseguirá reter adequadamente os conceitos necessários para serem usados na próxima prova.

Agradecimentos

Desejamos agradecer às centenas de revisores e colegas que ofereceram valiosos comentários e sugestões para este livro. O sucesso duradouro de *Física* deve-se, em grande medida, às suas contribuições.

Edward Adelson (Ohio State University)
Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla)
J. G. Anderson, R. S. Anderson
Wayne Anderson (Sacramento City College)
Alex Azima (Lansing Community College)
Dilip Balamore (Nassau Community College)
Harold Bale (University of North Dakota)
Arun Bansil (Northeastern University)
John Barach (Vanderbilt University)
J. D. Barnett, H. H. Barschall,
Albert Bartlett (University of Colorado)
Paul Baum (CUNY, Queens College)
Frederick Becchetti (University of Michigan)
B. Bederson, David Bennum (University of Nevada, Reno)
Lev I. Berger (San Diego State University)
Robert Boeke (William Rainey Harper College)
S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University)
Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo)
Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo)
A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University)
Duane Carmony (Purdue University)
Troy Carter (UCLA)
P. Catranides, John Cerne (SUNY at Buffalo)
Roger Clapp (University of South Florida)
William M. Cloud (Eastern Illinois University)
Leonard Cohen (Drexel University)
W. R. Coker (University of Texas, Austin)
Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla)
H. Conrad, David Cook (Lawrence University)
Gayl Cook (University of Colorado)
Hans Courant (University of Minnesota)
Bruce A. Craver (University of Dayton)
Larry Curtis (University of Toledo)
Jai Dahiya (Southeast Missouri State University)
Steve Detweiler (University of Florida)
George Dixon (Oklahoma State University)
Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University)
Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University)
Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology)
William Faissler (Northeastern University)
William Fasnacht (U.S. Naval Academy)
Paul Feldker (St. Louis Community College)
Carlos Figueroa (Cabrillo College)
L. H. Fisher
Neil Fletcher (Florida State University)
Robert Folk
Peter Fong (Emory University)
A. Lewis Ford (Texas A&M University)
D. Frantszog, James R.
Gaines (Ohio State University)
Solomon Gartenhaus (Purdue University)
Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology)
J. David Gavenda (University of Texas, Austin)
Dennis Gay (University of North Florida)
James Gerhart (University of Washington)
N. S. Gingrich
J. L. Glathart
S. Goodwin
Rich Gottfried (Frederick Community College)
Walter S. Gray (University of Michigan)
Paul Gresser (University of Maryland)
Benjamin Grinstein (UC San Diego)
Howard Grotch (Pennsylvania State University)
John Gruber (San Jose State University)
Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy)
Michael J. Harrison (Michigan State University)
Harold Hart (Western Illinois University)
Howard Hayden (University of Connecticut)
Carl Helrich (Goshen College)
Laurent Hodges (Iowa State University)
C. D. Hodgman
Michael Hones (Villanova University)
Keith Honey (West Virginia Institute of Technology)
Gregory Hood (Tidewater Community College)
John Hubisz (North Carolina State University)
M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University)
Alvin Jenkins (North Carolina State University)
Robert P. Johnson (UC Santa Cruz)
Lorella Jones (University of Illinois)
John Karchek (GMI Engineering & Management Institute)

Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute)
Robert Kraemer (Carnegie Mellon University)
Jean P. Krisch (University of Michigan)
Robert A. Kromhout, Andrew Kunz (Marquette University)
Charles Lane (Berry College)
Thomas N. Lawrence (Texas State University)
Robert J. Lee
Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University)
Gerald P. Lietz (De Paul University)
Gordon Lind (Utah State University)
S. Livingston
Elihu Lubkin (University of Wisconsin, Milwaukee)
Robert Luke (Boise State University)
David Lynch (Iowa State University)
Michael Lysak (San Bernardino Valley College)
Jeffrey Mallow (Loyola University) Robert Mania (Kentucky State University)
Robert Marchina (University of Memphis)
David Markowitz (University of Connecticut)
R. J. Maurer
Oren Maxwell (Florida International University)
Joseph L. McCauley (University of Houston)
T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University)
Charles McFarland (University of Missouri at Rolla)
James Mcguire (Tulane University)
Lawrence McIntyre (University of Arizona)
Fredric Messing (Carnegie-Mellon University)
Thomas Meyer (Texas A&M University)
Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey)
Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook)
Jack Munsee (California State University, Long Beach)
Lorenzo Narducci (Drexel University)
Van E. Neie (Purdue University)
David A. Nordling (U. S. Naval Academy)
Benedict Oh (Pennsylvania State University)
L. O. Olsen
Jim Pannell (DeVry Institute of Technology)
W. F. Parks (University of Missouri)
Robert Paulson (California State University, Chico)
Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla)
Arnold Perlmutter (University of Miami)
Lennart Peterson (University of Florida)
R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder)
R. Pinkston
Ronald Poling (University of Minnesota)
J. G. Potter
C. W. Price (Millersville University)
Francis Prosser (University of Kansas)
Shelden H. Radin
Michael Rapport (Anne Arundel Community College)
R. Resnick
James A. Richards, Jr.,
John S. Risley (North Carolina State University)
Francesc Roig (University of California, Santa Barbara)
T. L. Rokoske
Richard Roth (Eastern Michigan University)
Carl Rotter (University of West Virginia)
S. Clark Rowland (Andrews University)
Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology)
Russell A. Roy (Santa Fe Community College)
Dhiraj Sardar (University of Texas, San Antonio)
Bruce Schumm (UC Santa Cruz)
Melvin Schwartz (St. John's University)
F. A. Scott
L. W. Seagondollar
Paul Shand (University of Northern Iowa)
Stan Shepherd (Pennsylvania State University)
Douglas Sherman (San Jose State)
Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University)
Hugh Siefkin (Greenville College)
Tomasz Skwarnicki (Syracuse University)
C. P. Slichter
Charles W. Smith (University of Maine, Orono)
Malcolm Smith (University of Lowell)
Ross Spencer (Brigham Young University)
Julien Sprott (University of Wisconsin)
Victor Stanionis (Iona College)
James Stith (American Institute of Physics)
Chuck Stone (North Carolina A&T State University)
Edward Strother (Florida Institute of Technology)
Conley Stutz (Bradley University)
Albert Stwertka (U.S. Merchant Marine Academy)
Martin Tiersten (CUNY, City College)
David Toot (Alfred University)
Somdev Tyagi (Drexel University)
F. Verbrugge
Helmut Vogel (Carnegie Mellon University)
Robert Webb (Texas A & M)
Thomas Weber (Iowa State University)
M. Russell Wehr (Pennsylvania State University)
Robert Weidman (Michigan Technical University)
Dan Whalen (UC San Diego)
Lester V. Whitney
ThomasWiggins (Pennsylvania State University)
DavidWilley (University of Pittsburgh, Johnstown)
George Williams (University of Utah)
John Williams (Auburn University)
Stanley Williams (Iowa State University)
Jack Willis
Suzanne Willis (Northern Illinois University)
Robert Wilson (San Bernardino Valley College)
L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College)
Lowell Wood (University of Houston)
R. E. Worley
D. H. Ziebell (Manatee Community College)
George O. Zimmerman (Boston University).

Além disso, nós dois temos agradecimentos individuais a fazer.

Estendo meus cordiais agradecimentos aos meus colegas da Carnegie-Mellon, em especial aos professores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel e Brian Quinn, por discussões estimulantes sobre pedagogia da Física e por seu apoio e incentivo durante a elaboração das sucessivas edições deste livro. Agradeço também às muitas gerações de estudantes da Carnegie-Mellon, por me ajudarem a entender o que é ser um bom professor e um bom escritor e por me mostrarem o que funciona ou não. É sempre um prazer e um privilégio expressar minha gratidão à minha mulher, Alice, e minhas filhas, Gretchen e Rebeca, pelo amor, suporte e amparo emocional durante a elaboração das sucessivas edições deste livro. Quem dera todos os homens e mulheres fossem abençoados com o amor que elas me dedicam.

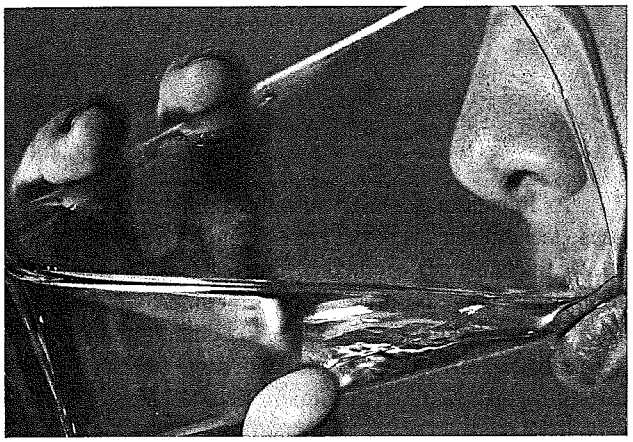
H. D.Y.

Gostaria de prestar agradecimento aos meus colegas do passado e do presente da UCSB, incluindo Rob Geller, Carl Gwin, Al Nash, Elisabeth Nicol e Francesc Roig, pelo dedicado apoio e pelas valiosas discussões. Expresso minha gratidão especial aos meus primeiros professores Willa Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwerttman e Dirk Walecka por me mostrarem como é claro e envolvente o ensino da Física, e a Stuart Johnson por me convidar a participar deste projeto como co-autor a partir da nona edição. Meus especiais agradecimentos à equipe editorial da Addison Wesley e seus parceiros: a Adam Black pela visão editorial; a Margot Otway pelo extraordinário senso gráfico e cuidadoso desenvolvimento desta edição; a Peter Murphy e Carol Reitz pela cuidadosa leitura do manuscrito; a Wayne Anderson, Charlie Hibbard, Laird Kramer e Larry Stookey pelo trabalho nos problemas de final de capítulo; e a Laura Kenney, Chandrika Madhavan, Nancy Tabor e Pat McCutcheon por manter a produção editorial fluindo. Desejo agradecer ao meu pai por seu amor e suporte permanentes e por reservar um espaço na estante para este livro. Acima de tudo, desejo expressar minha gratidão e amor à minha esposa, Caroline, a quem dedico minhas contribuições a este livro. Alô, Caroline, a nova edição finalmente saiu – vamos comemorar!

R.A.F.

CARGA ELÉTRICA E CAMPO ELÉTRICO

21



A água torna a vida possível: as células do seu corpo não funcionariam sem água na qual dissolver as moléculas biológicas essenciais. Que propriedades elétricas fazem da água um solvente tão eficiente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- A natureza da carga elétrica e como sabemos que a carga elétrica é conservada.
- Como os objetos se tornam eletricamente carregados.
- Como usar a lei de Coulomb para calcular a força elétrica existente entre as cargas.
- A distinção entre força elétrica e campo elétrico.
- Como calcular o campo elétrico em função de um conjunto de cargas.
- Como usar o conceito de linhas de campo elétrico para visualizar e interpretar os campos elétricos.
- Como calcular as propriedades dos dipolos elétricos.

No Capítulo 5, mencionamos superficialmente os quatro tipos de forças fundamentais. Até aqui, a única dessas forças que examinamos em detalhes foi a gravidade. Agora estamos preparados para analisar a força do *eletromagnetismo*, que envolve tanto a eletricidade quanto o magnetismo. O estudo dos fenômenos eletromagnéticos ocupará a maior parte da nossa atenção no restante deste livro.

As interações eletromagnéticas envolvem partículas que possuem uma propriedade chamada *carga elétrica*, um atributo que é tão fundamental quanto a massa. Assim como os objetos com massa são acelerados pelas forças gravitacionais, os objetos eletricamente carregados são acelerados pelas forças elétricas. A desagradável descarga elétrica que você sente quando arrasta os sapatos ao caminhar sobre um carpete e depois segura uma maçaneta metálica é causada por partículas carregadas que passam entre seus dedos e a maçaneta. Correntes elétricas, como aquelas em uma lanterna ou uma televisão, são simplesmente correntes de partículas carregadas dentro de fios em reação a forças elétricas. Até as forças que mantêm os átomos unidos para formar uma matéria sólida, e que impedem que os átomos de um objeto maciço passem para outro, são fundamentalmente decorrentes de interações elétricas entre as partículas carregadas dentro dos átomos.

Neste capítulo, iniciaremos o estudo do eletromagnetismo examinando a natureza da carga elétrica. Mostraremos que a carga elétrica é quantizada e obedece a um princípio de conservação. A seguir, passaremos a estudar as interações entre as cargas elétricas que estão em repouso em nosso sistema de referência, conhecidas como interações *eletrostáticas*. Essas interações são extraordinariamente importantes na química e na biologia e possuem inúmeras aplicações tecnológicas. As interações eletrostáticas são descritas por uma relação simples, chamada *lei de Coulomb*, e podem ser estudadas de modo mais adequado pelo conceito de *campo elétrico*. Em capítulos posteriores, estudaremos as cargas elétricas em movimento, o que nos levará à compreensão do magnetismo e, de forma admirável, da natureza da luz.

Embora as idéias básicas do eletromagnetismo sejam conceitualmente simples, suas aplicações para a resolução de problemas práticos exigirão seus conhecimentos de matemática, especialmente de cálculo integral e geometria. Por essa razão, você notará que neste volume utilizamos mais matemática que nos volumes precedentes. A recompensa por seu esforço extra será o entendimento mais aprofundado dos princípios fundamentais da física moderna e da tecnologia.

21.1 Carga elétrica

No ano de 600 a.C, os gregos descobriram que, atritado com a lã, o âmbar adquiria a propriedade de atrair outros objetos. Hoje, podemos afirmar que o âmbar adquiria uma **carga elétrica** ou se tornava *carregado*. O termo 'elétrico' deriva-se da palavra grega *elektron*, que significa âmbar. Ao arrastar os sapatos por um tapete de náilon, você fica com cargas elétricas e é capaz de carregar eletricamente um pente, atritando-o com o cabelo seco.

Bastões de plástico e um pedaço de peliça (animal ou artificial) são objetos particularmente bons para estudar o fenômeno da **eletrostática**, que descreve as interações entre cargas elétricas que estão em repouso (ou quase em repouso). A Figura 21.1a mostra um pedaço de peliça e dois bastões de plástico. Depois de atritados com a peliça, os dois bastões de plástico se repelem.

Quando esfregamos dois bastões de vidro com seda, os bastões de vidro também ficam carregados eletricamente e se repelem (Figura 21.1b). Porém, um bastão de plástico carregado *atrai* um bastão de vidro carregado; além disso, a peliça atrai o bastão de plástico carregado, e a seda, o bastão de vidro carregado (Figura 21.1c).

Essas experiências e muitas outras semelhantes mostraram que existem dois tipos de carga elétrica: o tipo de carga elétrica acumulada no bastão de plástico atritado com peliça e o tipo de carga elétrica acumulada no bastão de vidro atritado com seda. Benjamin Franklin (1706-1790) sugeriu denominar, respectivamente, de carga *negativa* e de carga *positiva* esses dois tipos de carga elétrica. O bastão de plástico e a seda possuem cargas negativas, e o bastão de vidro e a peliça possuem cargas positivas.

Duas cargas positivas se repelem e duas cargas negativas também se repelem. Existe uma atração mútua entre uma carga positiva e uma carga negativa.

ATENÇÃO Atração elétrica e repulsão A atração e a repulsão entre dois objetos carregados é geralmente resumida como 'cargas iguais se repelem e cargas contrárias se atraem'. Contudo, tenha em mente que a expressão 'cargas iguais' *não* significa que as duas cargas sejam idênticas, apenas que elas possuem o mesmo *sinal* algébrico (ambas são positivas ou ambas são negativas). 'Cargas contrárias' significam que os objetos possuem cargas elétricas e que essas cargas possuem sinais algébricos opostos (uma é positiva e a outra é negativa).

As impressoras a laser constituem um exemplo de aplicação tecnológica das forças entre objetos carregados (Figura 21.2). Inicialmente, o cilindro fotossensível da impressora recebe uma carga positiva. Quando o cilindro gira, um raio laser ilumina as áreas selecionadas do cilindro, deixando-as com carga *negativa*. As partículas com carga positiva do toner aderem somente às áreas do cilindro 'escritas' a laser. Quando uma folha de papel entra em contato com o cilindro, as partículas de pó aderem à folha, reproduzindo a imagem.

Carga elétrica e estrutura da matéria

Quando atritado com peliça animal ou seda, como na Figura 21.1, um bastão não apresenta alteração visível na aparência. Então, o que de fato ocorre ao bastão ao receber carga elétrica? Para responder a essa pergunta é preciso analisar atentamente a estrutura e as propriedades elétricas dos átomos, que constituem os 'tijolos' de qualquer tipo de matéria comum.

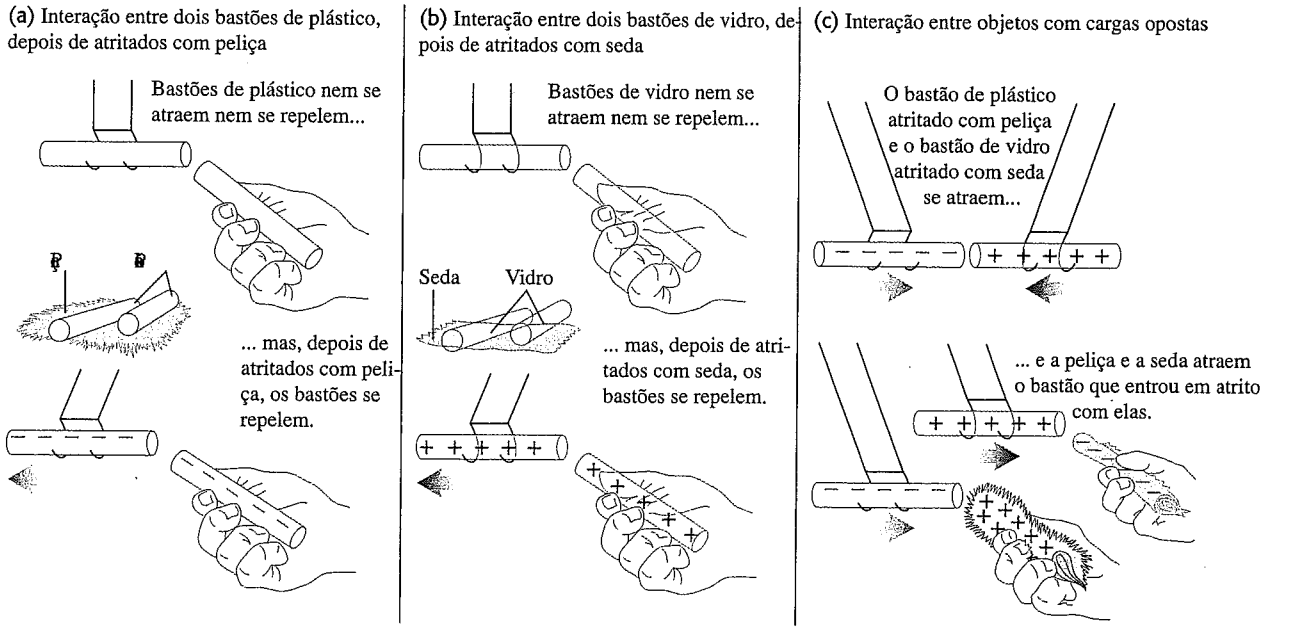


Figura 21.1 Experiências de eletrostática. (a) Objetos com carga negativa se repelem. (b) Objetos com carga positiva se repelem. (c) Objetos com carga positiva e objetos com carga negativa se atraem.

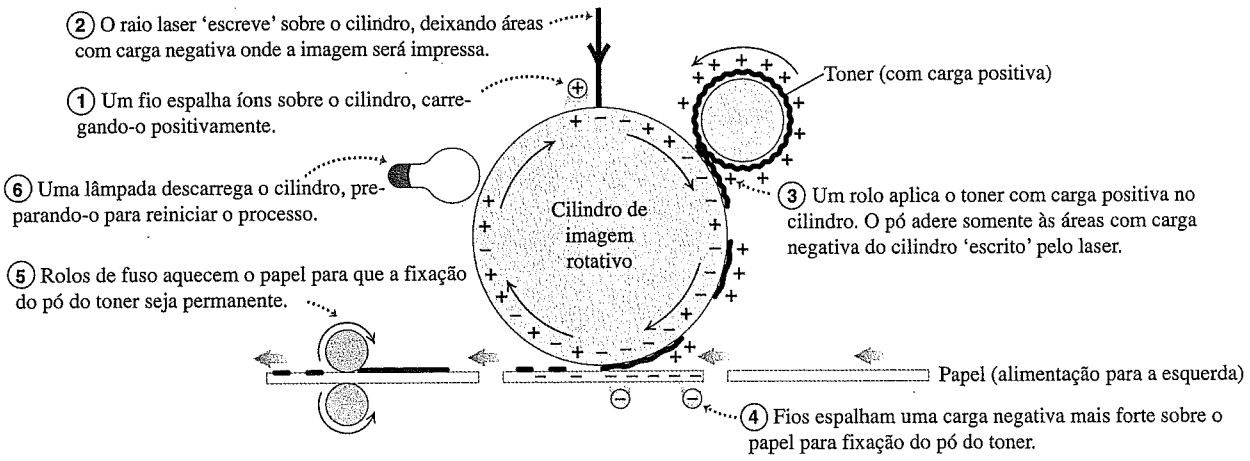


Figura 21.2 Esquematização da operação de uma impressora a laser.

A estrutura dos átomos pode ser descrita com base em três partículas elementares: o **elétron**, que possui carga elétrica negativa; o **próton**, de carga elétrica positiva; e o **nêutron**, que não possui carga elétrica (Figura 21.3). Prótons e nêutrons são constituídos por outras partículas, denominadas *quarks*, que possuem carga elétrica correspondente a $\pm\frac{1}{3}$ e $\pm\frac{2}{3}$ da carga do elétron. Ainda não foi observado nenhum quark isolado e existem razões teóricas para acreditar que, em princípio, seria impossível detectar um quark isolado.

Os prótons e os nêutrons no interior de um átomo constituem um caroço central denso, chamado de **núcleo**, cujo diâmetro é da ordem de 10^{-15} m. Circundando o núcleo, há uma camada de elétrons que se estende até uma distância aproximadamente igual a 10^{-10} m para fora do núcleo. Se o átomo tivesse diâmetro de alguns quilômetros, seu núcleo teria o tamanho de uma bola de tênis. Os elétrons negativos são mantidos no interior de um átomo pela força de atração elétrica entre o núcleo positivo e os elétrons. (Os prótons e os nêutrons são mantidos estáveis no interior de um núcleo atômico em virtude de uma força de atração denominada *força nuclear*, que supera a força de repulsão elétrica existente entre os prótons. A força nuclear possui curto alcance, equivalente ao diâmetro do núcleo, e seu efeito não se estende para muito além do centro do núcleo.)

As massas das partículas individuais, com a precisão com a qual elas são conhecidas atualmente, são dadas por

$$\text{Massa do elétron} = m_e = 9{,}1093826\ (16) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

$$\text{Massa do próton} = m_p = 1{,}67262171\ (29) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$\text{Massa do nêutron} = m_n = 1{,}67492728\ (29) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

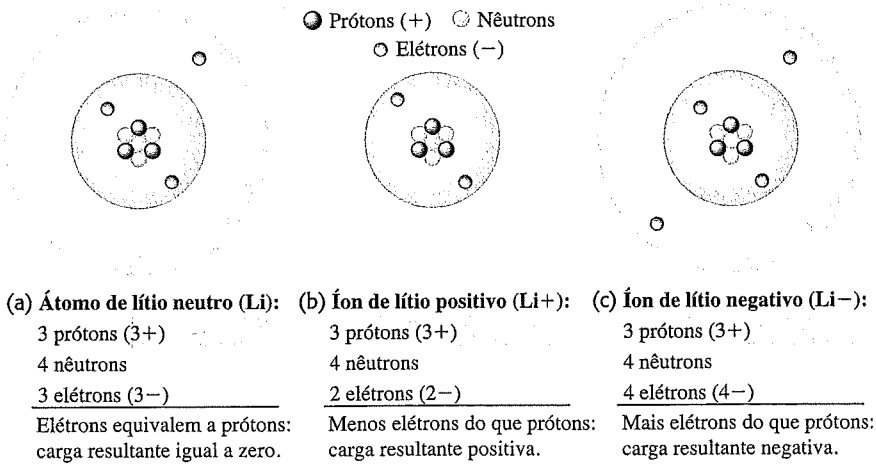


Figura 21.4 (a) Um átomo neutro possui a mesma proporção de elétrons e prótons. (b) Um íon positivo possui um déficit de elétrons. (c) Um íon negativo possui um excesso de elétrons. (As 'cápsulas' de elétrons são uma representação visual da real distribuição de elétrons, uma nuvem difusa várias vezes maior que o núcleo.)

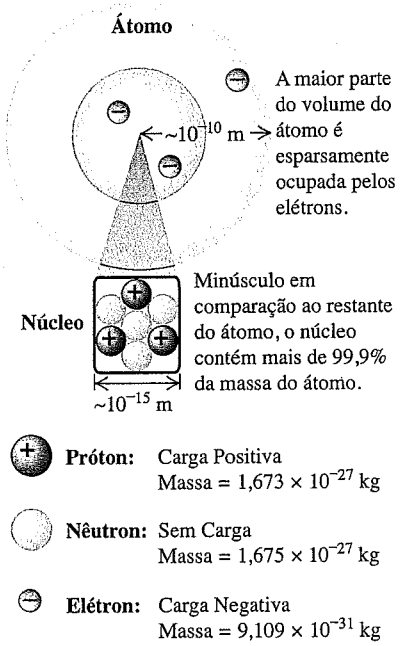


Figura 21.3 A estrutura de um átomo. O átomo aqui descrito é o lítio (veja a Figura 21.4a).

Os números entre parênteses indicam a imprecisão nos últimos dois dígitos. Note que a massa do próton é quase igual à massa do nêutron, sendo cerca de 2000 vezes maior que a massa do elétron. O núcleo concentra aproximadamente 99,9% da massa de qualquer átomo.

O módulo da carga elétrica negativa do elétron é *exatamente* igual (dentro do erro experimental) à carga elétrica positiva do próton. Em um átomo neutro, o número de elétrons é igual ao número de prótons existentes no núcleo do átomo, e a carga elétrica total (a soma algébrica de todas as cargas) é exatamente igual a zero (Figura 21.4a). Denomina-se **número atômico** o número de elétrons ou de prótons existentes em um átomo neutro de qualquer elemento. Quando removemos um ou mais elétrons desse átomo neutro, a carga elétrica positiva resultante constitui um **íon positivo** (Figura 21.4b). Um **íon negativo** é obtido quando um átomo *ganha* um ou mais elétrons (Figura 21.4c). Denomina-se **ionização** o processo no qual o átomo ganha ou perde elétrons.

Quando o número total de prótons em um corpo macroscópico é igual ao número total de elétrons, a carga total é igual a zero e dizemos que o corpo como um todo é eletricamente neutro. Para fazermos um corpo ficar com excesso de cargas negativas, devemos *adicionar* cargas *negativas* ao corpo neutro ou então *remover* cargas *positivas* desse corpo. De modo análogo, para fazermos um corpo ficar com excesso de cargas positivas, devemos *adicionar* cargas *positivas* ao corpo neutro ou então *remover* cargas *negativas* desse corpo. Na maior parte dos casos, os elétrons com cargas negativas (e extremamente móveis) são adicionados ou removidos e, geralmente, 'um corpo com carga elétrica positiva' é aquele que perdeu certa quantidade de elétrons. Quando falamos da carga elétrica de um corpo, sempre nos referimos à sua carga *líquida*. A carga líquida é uma fração muito pequena (em geral da ordem de 10^{-12}) da carga total positiva ou negativa existente no corpo neutro.

A carga elétrica é conservada

Na discussão precedente, há dois princípios muito importantes envolvidos implicitamente. O primeiro é o **princípio da conservação da carga elétrica**:

A soma algébrica de todas as cargas elétricas existentes em um sistema isolado permanece sempre constante.

Quando atritamos um bastão de plástico e um pedaço de peliça, ambos inicialmente descarregados, o bastão adquire carga elétrica negativa (uma vez que ele retira elétrons da peliça) e a peliça adquire carga elétrica positiva com o *mesmo* módulo (uma vez que ela perde a mesma quantidade de elétrons fornecidos para o bastão). Portanto, a carga elétrica total do sistema constituído pelos dois corpos permanece constante. Em qualquer processo no qual um corpo é carregado, a carga elétrica não é criada nem destruída, mas meramente *transferida* de um corpo a outro.

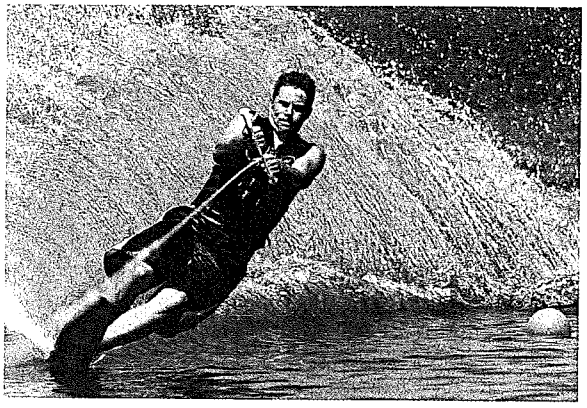


Figura 21.5 A maior parte das forças que atuam sobre este esquiador aquático é elétrica. As interações elétricas entre as moléculas adjacentes provocam a força da água sobre o esqui, a tensão no cabo de reboque e a resistência do ar sobre o corpo do esquiador. As interações elétricas também mantêm unidos os átomos no corpo do esquiador. Somente uma força totalmente não-elétrica atua sobre o esquiador: a força da gravidade.

Acredita-se que a lei da conservação da carga elétrica seja uma lei de conservação *universal*, não existindo nenhuma experiência que viole esse princípio. Até em interações envolvendo energias elevadas, durante as quais ocorrem criação e destruição de partículas, tal como a criação de um par elétron-pósitron, a carga elétrica total do sistema isolado permanece exatamente constante.

O segundo princípio importante é:

O módulo da carga elétrica do elétron ou do próton é uma unidade de carga natural.

Qualquer quantidade de carga elétrica observada é sempre um múltiplo inteiro dessa unidade básica. Dizemos que a carga elétrica é *quantizada*. O dinheiro é um exemplo familiar de quantização. Quando você compra um produto em uma loja, o pagamento em dinheiro é sempre algum múltiplo de um centavo. Nenhuma quantidade de dinheiro pode ser menor do que um centavo, assim como nenhuma carga elétrica pode ser dividida em uma quantidade menor do que a carga de um elétron ou de um próton. (As cargas elétricas do quark, $\pm\frac{1}{3}$ e $\pm\frac{2}{3}$ da carga do elétron, provavelmente não podem ser observadas livres e isoladas.) Portanto, a carga elétrica de qualquer corpo macroscópico é sempre igual a zero ou a um múltiplo inteiro (positivo ou negativo) da carga elétrica do elétron.

A compreensão da natureza elétrica da matéria esclarece muitos aspectos do mundo físico (Figura 21.5). As ligações químicas que mantêm os átomos unidos para formar moléculas se devem às interações elétricas entre os átomos. Elas abrangem as fortes ligações iônicas que mantêm unidos os átomos de sódio e os átomos do cloro para produzir o sal de cozinha; e as ligações relativamente fracas entre os fios de DNA que registram o código genético do seu corpo. A força normal exercida sobre você pela cadeira em que se senta provém das forças elétricas entre as partículas carregadas

nos átomos do seu glúteo e nos átomos da cadeira. A força de tensão em um fio esticado e a força adesiva da cola também se devem às interações elétricas dos átomos.

Teste sua compreensão da Seção 21.1 (a) Estritamente falando, o bastão de plástico na Figura 21.1 pesa mais, menos ou igual após o atrito com a peliça? (b) E o bastão de vidro após o atrito com a seda? E quanto à (c) peliça e à (d) seda? ∎

21.2 Condutores, isolantes e cargas induzidas

Alguns materiais possibilitam a migração da carga elétrica de uma região para outra, enquanto outros impedem o movimento das cargas elétricas. Por exemplo, a Figura 21.6a mostra um fio de cobre suspenso por um fio de náilon. Suponha que uma das extremidades do fio seja tocada por um bastão de plástico e que a outra extremidade esteja presa a uma esfera metálica inicialmente descarregada; a seguir, removem-se o bastão carregado e o fio de cobre. Quando você aproxima da esfera outro corpo carregado (figuras 21.6b e 21.6c), a esfera é atraída ou repelida, mostrando que ficou carregada eletricamente. A carga elétrica foi transferida do bastão de plástico para a esfera através do fio de cobre.

Chamamos o fio de cobre de **condutor** de eletricidade. Caso você repetisse essa experiência substituindo o fio de cobre por um fio de náilon ou por uma tira de borracha, verificaria que *nenhuma* carga seria transferida do bastão de plástico para a esfera. Esse tipo de material denomina-se **isolante**. Um condutor permite que ocorra o movimento de cargas elétricas através dele, enquanto um isolante não. (Os fios de sustentação em náilon mostrados na Figura 21.6 são isolantes, que impedem que a carga deixe a bola metálica e o fio de cobre.)

Como exemplo de um bom isolante, citamos um tapete de fibras em um dia seco. Quando você esfrega os pés no tapete, o atrito de seus sapatos com as fibras produz cargas elétricas que permanecem em seu corpo, pois elas não podem escoar através das fibras isolantes. Quando, a seguir, você toca um objeto condutor como uma maçaneta metálica, ocorre uma rápida transferência de carga elétrica, o que provoca um choque. Uma forma de evitar isso é enrolar algumas fibras do tapete em núcleos condutores, de modo que qualquer carga gerada em você seja transferida ao tapete, sem lhe causar qualquer dano. Outra solução é cobrir as fibras do tapete com uma camada antiestática que não transfere elétrons facilmente para os seus sapatos ou vice-versa; isso impede, logo de início, que qualquer carga seja gerada em você.

A maioria dos metais é composta de bons condutores, enquanto muitos materiais não-metálicos são isolantes. No interior de um metal sólido como o cobre, um ou mais elétrons de cada átomo se desprendem e podem se mover livremente através do material, do mesmo modo que as moléculas de um gás podem se mover livremente através dos espaços entre os grãos de um balde de areia. O movimento desses elétrons negativos produz a transferência da carga elétrica através do metal. Os elétrons restantes permanecem ligados aos núcleos carregados positivamente, os quais, por sua vez, permanecem relativamente fixos no interior do metal. Em um isolante não existe praticamente nenhum elétron livre, e a carga elétrica não pode ser transferida através do material. Denomina-se *semicondutor* um material que possui propriedades intermediárias entre as de um bom condutor e as de um bom isolante.

Carga por indução

Podemos carregar uma esfera metálica usando um fio de cobre e um bastão de plástico eletricamente carregado, como mostra a Figura 21.6a. Nesse processo, alguns elétrons em excesso existentes no bastão de plástico são transferidos para a esfera, diminuindo a carga elétrica negativa do bastão. Existe outra técnica na qual o bastão de plástico pode produzir uma carga com sinal *contrário* em outro corpo, sem que haja perda de sua própria carga. Nesse caso, dizemos que o corpo foi carregado por **indução**.

Um exemplo de como proceder para que um corpo seja carregado por indução é indicado na Figura 21.7. Uma esfera

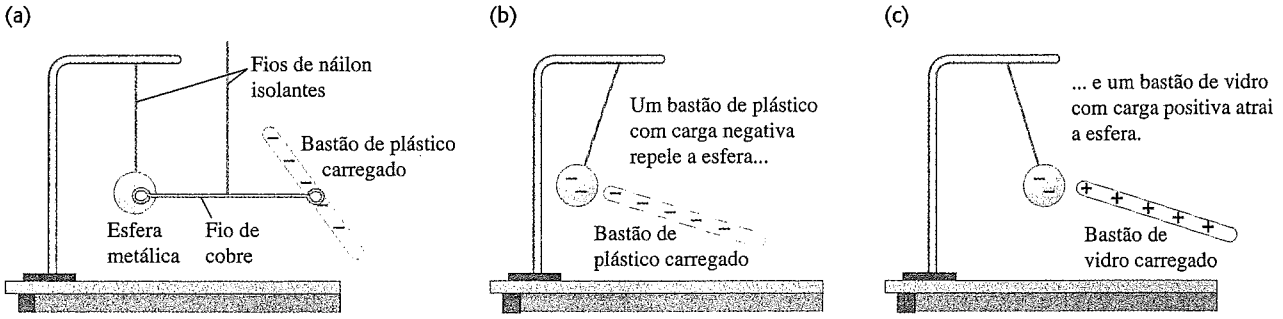
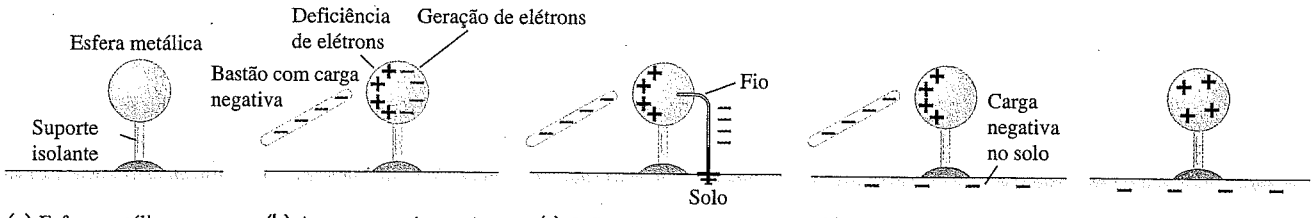


Figura 21.6 O cobre é um bom condutor de eletricidade; o náilon é um bom isolante. (a) A carga elétrica é transferida do bastão de plástico para a esfera metálica através do fio de cobre, carregando negativamente a esfera. A seguir, a esfera metálica é (b) repelida por um bastão de plástico carregado negativamente e (c) atraída por um bastão de vidro carregado positivamente.



(a) Esfera metálica sem carga elétrica.

(b) A carga negativa no bastão repele os elétrons, criando zonas de **carga induzida** negativa e positiva.

(c) O fio permite que os elétrons gerados (carga induzida negativa) fluam para o solo.

(d) O fio é retirado; a esfera passa a ter somente uma área de deficiência de elétrons, com carga positiva.

(e) O bastão é removido; os elétrons se rearranjam, a esfera possui deficiência generalizada de elétrons (carga positiva líquida).

Figura 21.7 Carregando uma esfera metálica por indução.

metálica é apoiada sobre um suporte isolante (Figura 21.7a). Ao se aproximar da esfera um bastão carregado negativamente, sem que o bastão toque na esfera (Figura 21.7b), os elétrons livres da esfera metálica são repelidos pelo excesso de elétrons do bastão e deslocados para a direita da esfera, afastando-se do bastão. Esses elétrons não escapam da esfera porque o suporte e o ar ambiente são isolantes. Portanto, no lado direito da esfera existe um excesso de elétrons, enquanto no lado esquerdo, uma deficiência de elétrons (ou seja, uma carga elétrica líquida positiva). Dizemos que em cada lado da esfera surgiu uma **carga induzida**.

Nem todos os elétrons livres se movem para o lado direito da superfície da esfera. À medida que começam a surgir cargas induzidas, elas exercem forças orientadas para a *esquerda* sobre os outros elétrons livres. Esses elétrons são repelidos pelos elétrons negativos existentes no lado direito e atraídos pelas cargas positivas induzidas do lado esquerdo. O sistema atinge um estado de equilíbrio no qual a força sobre um elétron orientada para a direita, produzida pelo bastão, é exatamente igual à força sobre o mesmo elétron orientada para a esquerda, produzida pelas cargas induzidas. Quando removemos o bastão carregado, os elétrons livres retornam para a esquerda da esfera e a condição de neutralidade original é restaurada.

O que ocorrerá se, mantendo o bastão de plástico próximo da esfera, você encostar a extremidade de um fio condutor sobre o lado direito da esfera, mantendo a outra extremidade do fio em contato com a superfície terrestre (Figura 21.7c)? A Terra é condutora e, por ser extremamente grande, pode funcionar como uma fonte praticamente inesgotável de elétrons ou como um sumidouro de elétrons. Muitas cargas negativas fluem através do fio para a superfície terrestre. Suponha agora que você desconecte o fio (Figura 21.7d) e remova o bastão carregado (Figura 21.7e); uma carga líquida positiva ficará sobre a esfera. A carga negativa do bastão não foi alterada no processo. A Terra adquiriu uma carga negativa de módulo igual à carga positiva que permaneceu sobre a esfera.

O processo de carregar um corpo por indução funcionaria igualmente bem se as cargas móveis sobre a esfera fossem positivas em vez de elétrons negativos, ou até mesmo se existissem simultaneamente cargas móveis positivas e negativas sobre a esfera. Em um condutor metálico, as cargas móveis são sempre elétrons negativos, contudo é mais conveniente descrever um processo *como se* as cargas móveis fossem positivas. Em soluções iônicas e em gases ionizados, existem cargas móveis positivas e negativas.

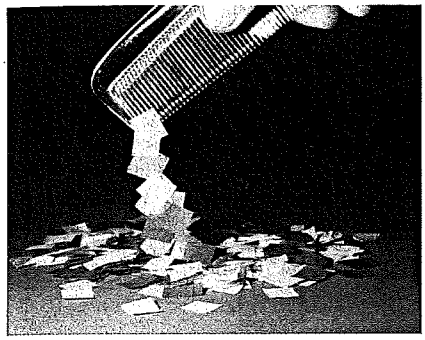
Forças elétricas sobre objetos descarregados

Finalmente, notamos que um corpo carregado pode exercer força até mesmo sobre objetos *descarregados*. Se você atritar uma bexiga cheia de ar com um tapete e a seguir segurá-la contra o teto, ela ficará grudada no teto, embora este não possua nenhuma carga elétrica líquida. Depois de fazer um pente adquirir carga atritando-o com o seu cabelo, o pente pode atrair pedacinhos de papel ou plástico descarregados (Figura 21.8a). Como isso é possível?

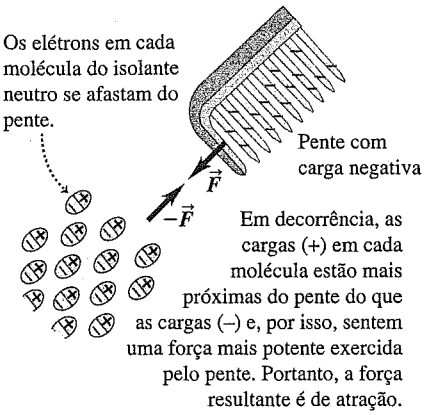
Essa interação é produzida pelo fenômeno da indução de cargas. Mesmo em um isolante, as cargas elétricas podem se deslocar ligeiramente para a frente ou para trás, quando existe uma carga em suas vizinhanças. Isso é indicado na Figura 21.8b; o pente de plástico, carregado negativamente, produz um ligeiro deslocamento das cargas das moléculas no interior do isolante neutro, um efeito chamado de *polarização*. As cargas positivas e negativas do material possuem o mesmo módulo, porém as cargas positivas estão mais próximas do pente do que as cargas negativas, sofrendo uma força de atração maior do que a força de repulsão sobre as cargas negativas. Portanto, a força resultante é de atração. (Na Seção 21.3, estudaremos a dependência da força elétrica em relação à distância.) Observe que o isolante neutro também pode ser atraído por um pente com cargas *positivas* (Figura 21.8c). Nesse caso, as cargas no isolante sofrem um deslocamento em sentido contrário ao do caso anterior; as cargas negativas no isolante estão mais próximas do pente e sofrem uma força de atração maior do que a força de repulsão sofrida pelas cargas positivas existentes no isolante. Portanto, *qualquer* que seja o sinal da carga elétrica de um objeto carregado, ele sempre exerce uma força de atração sobre um isolante neutro.

A atração entre um objeto carregado e um objeto descarregado possui diversas aplicações práticas, como o processo de pintura eletrostática usado na indústria automotiva (Figura 21.9). Um objeto de metal a ser pintado é conectado à Terra (indicada como 'solo' na Figura 21.9) e

(a) Um pente carregado atrai pedaços de plástico descarregados



(b) Como um pente com carga negativa atrai um material isolante



(c) Como um pente com carga positiva atrai um material isolante

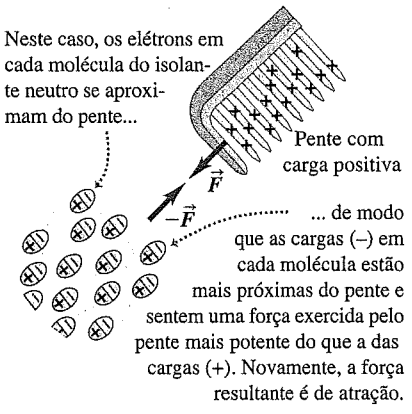


Figura 21.8 As cargas no interior das moléculas de um material isolante podem se deslocar ligeiramente. Em conseqüência, um pente com cargas elétricas atrai um isolante neutro. Pela terceira lei de Newton, o isolante neutro atrai o pente com uma força de mesmo módulo e de sentido contrário.

as gotículas de tinta recebem uma carga elétrica ao serem borrifadas. Cargas induzidas de sinal contrário surgem no objeto ante a aproximação das gotículas, como indicado na Figura 21.7b, e elas atraem as gotículas para a superfície. Esse processo minimiza o excesso causado por nuvens de partículas de tinta desgarradas e produz um acabamento especialmente uniforme.

Teste sua compreensão da Seção 21.2 Considere duas esferas metálicas leves penduradas em um fio de náilon. Uma das esferas possui carga negativa líquida, enquanto a outra não possui carga líquida. (a) Quando as esferas estão próximas, mas não se tocam, elas (i) se atraem, (ii) se repelem ou (iii) não exercem nenhuma força mútua? (b) Caso as esferas se toquem, elas (i) se atraem, (ii) se repelem ou (iii) não exercem nenhuma força mútua? ∎

21.3 Lei de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) estudou a força de interação entre partículas carregadas em 1784. Ele usou uma balança de torção (Figura 21.10a) semelhante à usada 13 anos mais tarde por Cavendish para estudar a força de interação gravitacional, que é muito mais fraca do que a elétrica, conforme discutimos na Seção 12.1. Para **cargas puntiformes**, ou seja, para corpos carregados separados por uma distância r muito maior do que os respectivos tamanhos, Coulomb verificou que a força elétrica entre eles é proporcional a $1/r^2$. Ou seja, quando a distância r dobra, a força se reduz a $\frac{1}{4}$ do seu valor inicial; quando a distância se reduz à metade, a força se torna quatro vezes maior do que seu valor inicial.

A força elétrica entre dois corpos também depende da carga existente em cada corpo, que será designada por q ou Q. Para pesquisar essa dependência, Coulomb dividiu uma carga em duas partes iguais, colocando um pequeno condutor esférico carregado em contato com outro condutor esférico idêntico descarregado; por simetria, as cargas são igualmente divididas entre as duas esferas. (Observe o papel essencial desempenhado pela lei da conservação da carga nesse procedimento.) Dessa maneira, ele poderia obter uma carga igual à metade da carga inicial, um quarto da carga inicial e assim por diante. Ele verificou que a força elétrica entre as duas cargas q_1 e q_2 é proporcional a cada uma das cargas e, portanto, proporcional ao *produto* q_1q_2 das duas cargas.

Desse modo, Coulomb estabeleceu uma relação hoje conhecida como **lei de Coulomb:**

O módulo da força elétrica entre duas cargas puntiformes é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Em termos matemáticos, dizemos que, quando duas cargas q_1 e q_2 estão separadas por uma distância r, o módulo F da força que qualquer uma das cargas exerce sobre a outra pode ser expresso pela relação

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} \tag{21.1}$$

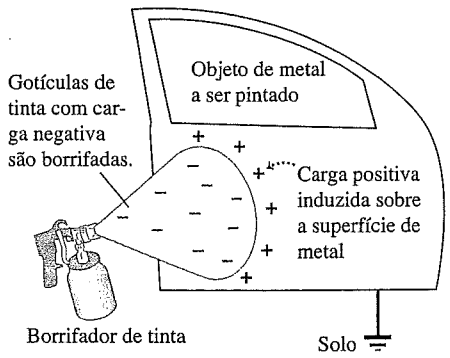


Figura 21.9 O processo de pintura eletrostática (compare as figuras 21.7b e 21.7c).

em que k é uma constante de proporcionalidade cujo valor numérico depende do sistema de unidades usado. As barras verticais que indicam valor absoluto são usadas na Equação (21.1) porque as cargas q_1 e q_2 podem ser positivas ou negativas, enquanto o módulo da força F é sempre positivo.

A direção da força que qualquer uma das cargas exerce sobre a outra é sempre ao longo da linha reta que passa pelas cargas. Quando as cargas q_1 e q_2 possuem o mesmo sinal, ambos positivos ou negativos, as forças são repulsivas; quando as cargas q_1 e q_2 possuem sinais contrários, as forças são atrativas (Figura 21.10b). As duas forças obedecem à terceira lei de Newton: elas sempre possuem o mesmo módulo e sentidos contrários, mesmo quando as cargas não são iguais.

A proporcionalidade da força elétrica com $1/r^2$ foi verificada com grande precisão. Não existe nenhuma razão para suspeitar de que o fator do expoente não seja exatamente igual a 2. Portanto, a Equação (21.1) tem estrutura igual à da lei da gravitação. Porém, a interação elétrica é um fenômeno diferente da interação gravitacional. A interação elétrica depende das cargas elétricas e pode ser atrativa ou repulsiva, enquanto a interação gravitacional depende das massas e só pode ser atrativa (porque não existe nada com massa negativa).

Constantes elétricas fundamentais

O valor da constante de proporcionalidade k na lei de Coulomb depende do sistema de unidades. Em nossos estudos da eletricidade e do magnetismo usaremos exclusivamente unidades do SI. Muitas unidades elétricas do SI abrangem unidades familiares, tais como o volt, o ampère, o ohm e o watt. (Não existe *nenhum* sistema britânico de unidades elétricas.) A unidade SI de carga elétrica é igual a um **coulomb** (1 C). Usando unidades do SI, a constante k na Equação (21.1) é

$$k = 8{,}987551787 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \cong 8{,}988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

O valor da constante k é conhecido com muitos algarismos significativos porque esse valor está intimamente relacionado à velocidade da luz no vácuo. (Quando estudarmos a radiação eletromagnética no Capítulo 32, mostraremos essa dependência.) Conforme dissemos na Seção 1.3, a velocidade da luz no vácuo é *dada* por $c = 2{,}99792458 \times 10^8$ m/s. Em termos de c, o valor de k é precisamente dado por

$$k = (10^{-7}\ \mathrm{N \cdot s^2/C^2})c^2$$

Você pode conferir as unidades da relação anterior para verificar que k realmente possui as unidades certas.

Primeiramente, podemos medir a força elétrica F entre duas cargas iguais q separadas por uma distância r e usar a lei de Coulomb para determinar o valor da carga. Portanto, podemos encarar o valor de k como uma definição operacional do coulomb. Contudo, por razões de precisão experimental, é melhor definir o coulomb em termos da unidade de *corrente* elétrica (carga por unidade de tempo), ou seja, o ampère, que é igual a um coulomb por segundo. Retornaremos a essa definição no Capítulo 28.

Usando unidades do SI, geralmente escrevemos a constante k da Equação (21.1) como $1/4\pi\epsilon_0$, em que ϵ_0 ('épsilon zero') é outra constante. Aparentemente, essa substituição faz a fórmula ficar mais complicada, porém se verifica que ela simplifica muitas fórmulas que serão encontradas em capítulos posteriores. A partir de agora, quase sempre escreveremos a lei de Coulomb na forma

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \tag{21.2}$$

(lei de Coulomb: força entre duas cargas puntiformes)

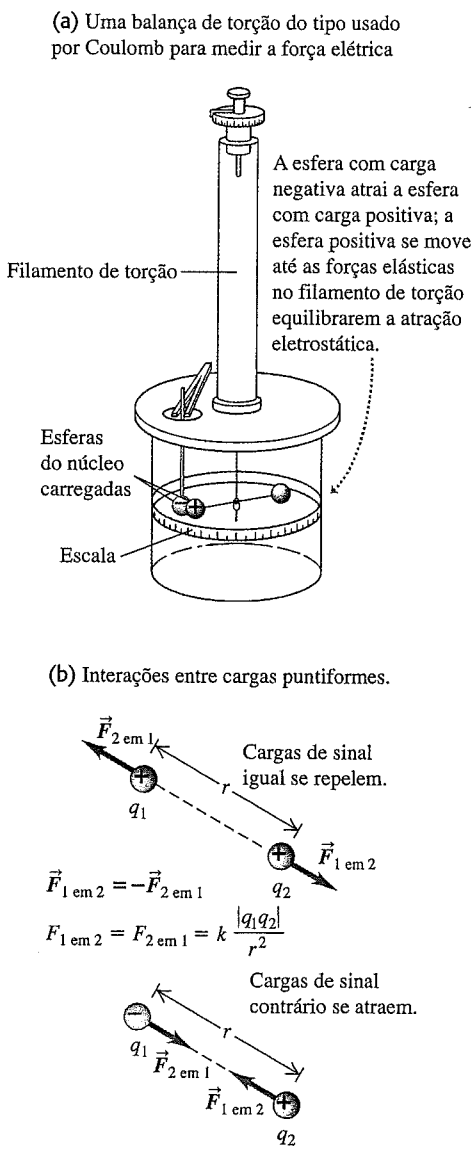


Figura 21.10 (a) Medição da força elétrica entre cargas puntiformes. (b) As forças elétricas entre cargas puntiformes obedecem à terceira lei de Newton: $\vec{F}_{1\text{ em }2} = -\vec{F}_{2\text{ em }1}$.

As constantes na Equação (21.2) são dadas aproximadamente por

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$$

e

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8{,}988 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

Nos exemplos e nos problemas, geralmente usaremos o valor aproximado

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9{,}0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

que possui erro máximo de 0,1% em relação ao valor exato.

Conforme dissemos na Seção 21.1, a unidade mais fundamental de carga elétrica é o módulo da carga de um próton ou de um elétron, que será designado por e. O valor mais preciso disponível quando este livro foi escrito é dado por

$$e = 1{,}60217653(14) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Um coulomb é a negativa da carga total existente em aproximadamente 6×10^{18} elétrons. Comparativamente, um cubo de cobre de 1 cm de aresta contém aproximadamente $2{,}4 \times 10^{24}$ elétrons. Cerca de 10^{19} elétrons passam através do filamento luminoso de uma lâmpada incandescente a cada segundo.

Em geral, os problemas de eletrostática (isto é, que envolvem cargas em repouso) não incluem cargas tão elevadas quanto 1 coulomb. Duas cargas de 1 C separadas por uma distância de 1 m exerceriam uma força mútua com módulo aproximadamente igual a 9×10^9 N (aproximadamente 1 milhão de toneladas)! A carga total dos elétrons existentes em uma moeda de cobre de um centavo é ainda maior, aproximadamente igual a $1{,}4 \times 10^5$ C , mostrando que não podemos perturbar a neutralidade elétrica a não ser usando forças muito elevadas. Os valores típicos de cargas elétricas livres oscilam aproximadamente entre 10^{-9} e 10^{-6} C. O microcoulomb ($1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}$ C) e o nanocoulomb ($1\ \mathrm{nC} = 10^{-9}$ C) são unidades de carga elétrica geralmente usadas na prática.

Exemplo 21.1

FORÇA ELÉTRICA *VERSUS* FORÇA GRAVITACIONAL Uma partícula α ('alfa') é o núcleo do átomo de hélio. Ela possui massa $m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg e carga $q = +2e = 3{,}2 \times 10^{-19}$ C. Compare a força de repulsão elétrica entre duas partículas α com a força de atração gravitacional entre elas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a lei de Newton para a força gravitacional F_g entre partículas (veja a Seção 12.1) e a lei de Coulomb para a força elétrica F_e entre cargas puntiformes. Devemos comparar essas forças, de modo que a incógnita do problema seja a *razão* entre essas duas forças, F_e/F_g.

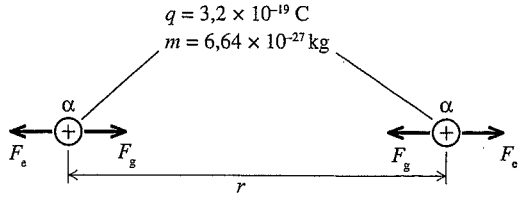


Figura 21.11 Nossa esquematização do problema.

PREPARAR: a Figura 21.11 mostra nossa esquematização do problema. O módulo da força de repulsão elétrica é dado pela Equação (21.2):

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

O módulo F_g da força gravitacional é dado pela Equação (12.1):

$$F_g = G\frac{m^2}{r^2}$$

EXECUTAR: a razão entre a força elétrica e a força gravitacional é

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}\frac{q^2}{m^2} = \frac{9{,}0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}}{6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}}\frac{(3{,}2 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6{,}64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2} = 3{,}1 \times 10^{35}$$

AVALIAR: esse número extraordinariamente elevado mostra que a força gravitacional nesse caso é completamente desprezível em comparação à força elétrica. Isso é sempre verdade para interação entre partículas atômicas e subatômicas. (Note que esse resultado não depende da distância r entre as duas partículas α.) Contudo, entre dois corpos do tamanho de uma pessoa ou de um planeta, em geral a carga líquida positiva é aproximadamente igual à carga líquida negativa, e a força elétrica é muito *menor* do que a força gravitacional.

Superposição das forças

A lei de Coulomb, conforme foi enunciada, descreve apenas a interação entre duas cargas *puntiformes*. Quando duas cargas exercem forças sobre uma terceira carga, a experiência mostra que a força total exercida sobre a terceira carga é dada pela *soma vetorial* das forças que as duas cargas exercem individualmente. Essa importante propriedade, denominada **princípio da superposição das forças**, pode ser aplicada para um número qualquer de cargas. Usando esse princípio, podemos aplicar a lei de Coulomb para *qualquer* conjunto de cargas. No final desta seção, apresentaremos diversos exemplos mostrando a aplicação do princípio da superposição.

Teoricamente, a lei de Coulomb só poderia ser usada para cargas puntiformes *no vácuo*. Quando existe matéria no espaço entre as cargas, a força resultante sobre cada carga se altera porque ocorre o fenômeno da indução de cargas elétricas nas moléculas do material do meio considerado. Esse efeito será discutido posteriormente. Contudo, na prática, podemos usar a lei de Coulomb sem nenhuma

alteração para cargas puntiformes no ar. Para a pressão atmosférica normal, a presença do ar altera o valor da força elétrica no vácuo em apenas uma parte em 2000.

Estratégia para a solução de problemas 21.1

LEI DE COULOMB

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a lei de Coulomb entra em ação sempre que necessitamos conhecer a força elétrica que atua entre partículas carregadas.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho indicando as localizações das partículas carregadas e classifique cada partícula conforme a respectiva carga. Essa etapa é particularmente importante quando há mais de duas partículas carregadas.
2. Se houver mais de duas ou três cargas e elas não estiverem localizadas na mesma linha, prepare um sistema de coordenadas xy.
3. Com freqüência você necessitará obter a força elétrica que atua sobre uma única partícula. Nesse caso, identifique essa partícula.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Calcule o módulo da força que cada partícula exerce sobre a partícula de interesse, usando a Equação (21.2).
2. Desenhe os vetores da força elétrica que atuam sobre a(s) partícula(s) de interesse em função de cada uma das demais partículas (ou seja, faça um diagrama do corpo livre). Lembre-se de que a força exercida pela partícula 1 sobre a partícula 2 aponta da partícula 2 para a partícula 1, caso as duas cargas tenham sinais contrários, mas aponta da partícula 2 para o lado oposto ao da partícula 1, caso as cargas tenham o mesmo sinal.
3. Calcule a força elétrica total sobre a(s) partícula(s) de interesse. Lembre-se de que a força elétrica, como qualquer força, é uma *grandeza vetorial*. Quando as forças que atuam sobre uma carga são produzidas por duas ou mais cargas diferentes, a força total sobre a carga é a *soma vetorial* das forças individuais. Talvez você queira rever o cálculo vetorial abordado desde a Seção 1.7 até a Seção 1.9. É sempre útil usar componentes em um sistema de coordenadas xy. Certifique-se de usar a correta notação vetorial; se um símbolo representa uma grandeza vetorial, coloque uma seta sobre ele. Negligenciar a notação comprometerá o raciocínio.
4. Como sempre, a verificação da consistência das unidades é essencial. Com o valor $k = 1/4\pi\epsilon_0$ fornecido anteriormente, as distâncias *devem* ser dadas em metros, as cargas em coulombs e as forças em newtons. Caso as distâncias sejam dadas em centímetros ou em qualquer outra unidade, não se esqueça de convertê-las para metros! Quando uma carga for dada em microcoulombs (μC) ou em nanocoulombs (nC), não esqueça que $1\ \mu C = 10^{-6}$ C e que $1\ nC = 10^{-9}$ C.
5. Alguns exemplos e problemas deste e dos próximos capítulos envolvem distribuições contínuas de carga ao longo de uma linha ou sobre uma superfície. Nesses casos, a soma vetorial mencionada no item 3 transforma-se em uma integral vetorial, geralmente calculada usando-se componentes. Dividimos a distribuição de cargas em regiões infinitesimais, usamos a lei de Coulomb para cada região e, a seguir, integramos para achar a soma vetorial. Em alguns casos, isso pode ser feito sem necessidade do uso de integrais.
6. Em muitos casos, a distribuição de carga será *simétrica*. Por exemplo, você poderá ser solicitado a achar a força que atua sobre uma carga Q na presença de duas outras cargas idênticas q, uma acima e à esquerda de Q e outra abaixo e à esquerda de Q. Se as distâncias entre Q e cada uma das outras cargas forem iguais, a força que atua sobre Q a partir de cada carga tem o mesmo módulo; se cada vetor de força forma o mesmo ângulo com o eixo horizontal, somar esses vetores para obter a força resultante será tarefa fácil. Sempre que possível, explore qualquer simetria para simplificar o processo de resolução de problemas.

AVALIAR *sua resposta*: confira se os resultados numéricos são razoáveis e confirme se o sentido da força elétrica líquida está de acordo com o princípio de que cargas iguais se repelem e cargas contrárias se atraem.

Exemplo 21.2

FORÇA ENTRE DUAS CARGAS PUNTIFORMES Duas cargas puntiformes, $q_1 = +25$ nC e $q_2 = -75$ nC, estão separadas por uma distância igual a 3,0 cm (Figura 21.12a). Determine o módulo, a direção e o sentido (a) da força elétrica que q_1 exerce sobre q_2; e (b) da força elétrica que q_2 exerce sobre q_1.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema solicita as forças elétricas que duas cargas exercem entre si, por isso necessitaremos usar a lei de Coulomb.

PREPARAR: usamos a Equação (21.2) para calcular o módulo da força que uma partícula exerce sobre a outra. Usamos a terceira lei de Newton para relacionar as forças que as duas partículas exercem entre si.

EXECUTAR: (a) convertendo as cargas para coulombs e as distâncias para metros, obtemos o módulo da força que q_1 exerce sobre q_2.

$$F_{1\text{ em }2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$= (9{,}0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{|(+25\times10^{-9}\ \text{C})(-75\times10^{-9}\ \text{C})|}{(0{,}030\ \text{m})^2}$$

$$= 0{,}019\ \text{N}$$

Visto que as duas cargas possuem sinais opostos, a força é de atração, ou seja, a força que atua sobre q_2 está sobre a reta que une as duas cargas e possui sentido orientado para q_1, como indica a Figura 21.12b.

(b) Lembre-se de que a terceira lei de Newton se aplica à força elétrica. Embora as duas cargas possuam módulos diferentes, o módulo da força elétrica que q_2 exerce sobre q_1 é *igual* ao módulo da força que q_1 exerce sobre q_2:

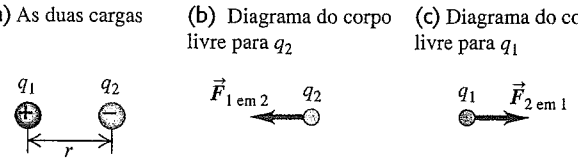


Figura 21.12 Qual é a força elétrica que q_1 exerce sobre q_2 e qual é a força elétrica que q_2 exerce sobre q_1? As forças gravitacionais são desprezíveis.

$$F_{2\text{ em }1} = 0{,}019\text{ N}$$

A terceira lei de Newton também afirma que o sentido da força que q_2 exerce sobre q_1 é contrário ao sentido da força que q_1 exerce sobre q_2, como indica a Figura 21.12c.

AVALIAR: note que a força que q_2 exerce sobre q_1 é orientada para q_2, como era de se esperar, porque cargas de sinais contrários se atraem.

Exemplo 21.3

SOMA VETORIAL PARA FORÇAS ELÉTRICAS COLINEARES Duas cargas puntiformes estão localizadas no lado positivo do eixo Ox de um sistema de coordenadas. A carga $q_1 = 1{,}0$ nC está localizada a 2,0 cm da origem, e a carga $q_2 = -3{,}0$ nC está localizada a 4,0 cm da origem. Qual é a força total exercida por essas duas cargas sobre uma carga $q_3 = 5{,}0$ nC localizada na origem? As forças gravitacionais são desprezíveis.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: aqui estão as *duas* forças elétricas que atuam sobre a carga q_3, e devemos somar essas duas forças para obter a força total.

PREPARAR: a Figura 21.13a mostra o sistema de coordenadas. A incógnita do problema é a força elétrica líquida exercida *sobre* a carga q_3 pelas outras duas cargas. Essa é a soma vetorial das forças individuais exercidas por q_1 e q_2.

EXECUTAR: a Figura 21.13b é um diagrama do corpo livre para a carga q_3. Note que q_3 é repelida por q_1 (que possui o mesmo sinal) e atraída por q_2 (que possui sinal contrário). Convertendo as cargas para coulombs e as distâncias para metros, usamos a Equação (21.2) para encontrarmos o módulo $F_{1\text{ em }3}$ da força que q_1 exerce sobre q_3:

$$\begin{aligned} F_{1\text{ em }3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_3|}{r^2} \\ &= (9{,}0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1{,}0\times10^{-9}\text{ C})(5{,}0\times10^{-9}\text{ C})}{(0{,}020\text{ m})^2} \\ &= 1{,}12\times10^{-4}\text{ N} = 112\ \mu\text{N} \end{aligned}$$

Essa força aponta para o lado negativo do eixo Ox porque a carga q_3 é repelida pela carga q_1 (ou seja, ela é empurrada para o sentido negativo do eixo Ox).

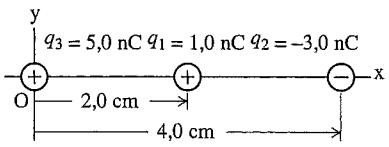
O módulo $F_{2\text{ em }3}$ da força que q_2 exerce sobre q_3 é

$$\begin{aligned} F_{2\text{ em }3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2 q_3|}{r^2} \\ &= (9{,}0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3{,}0\times10^{-9}\text{ C})(5{,}0\times10^{-9}\text{ C})}{(0{,}040\text{ m})^2} \\ &= 8{,}4\times10^{-5}\text{ N} = 84\ \mu\text{N} \end{aligned}$$

Essa força aponta para o lado positivo do eixo Ox porque a carga q_3 é atraída pela carga q_2 (ou seja, ela é puxada para o sentido positivo do eixo Ox). A soma dos componentes x dessas forças é dada por

$$F_x = -112\ \mu\text{N} + 84\ \mu\text{N} = -28\ \mu\text{N}$$

(a) Nosso diagrama da situação



(b) Diagrama do corpo livre para q_3

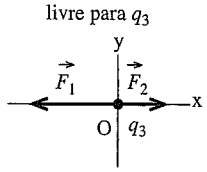


Figura 21.13 Nossa esquematização do problema.

Não existe nenhum componente na direção y nem na direção z. Portanto, a força total que atua sobre q_3 é orientada para a esquerda e possui módulo igual a 28 μN = 2,8 × 10^{-5} N.

AVALIAR: para conferir os módulos das forças individuais, note que q_2 possui três vezes mais carga (em módulo) do que q_1, mas está duas vezes mais distante de q_3. Pela Equação (21.2), isso significa que $F_{2\text{ em }3}$ deve ser $3/2^2 = \frac{3}{4}$ maior do que $F_{1\text{ em }3}$. Na verdade, os nossos resultados indicam que essa razão é (84 μN)/(112 μN) = 0,75. O sentido da força resultante também faz sentido: $\vec{F}_{1\text{ em }3}$ possui módulo maior e é oposta a $\vec{F}_{2\text{ em }3}$, portanto a força resultante está no sentido de $\vec{F}_{1\text{ em }3}$.

Exemplo 21.4

SOMA VETORIAL PARA FORÇAS ELÉTRICAS EM UM PLANO Duas cargas puntiformes positivas iguais $q_1 = q_2 = 2{,}0\ \mu$C estão localizadas em $x = 0$, $y = 0{,}30$ m e $x = 0$, $y = -0{,}30$ m, respectivamente. Determine o módulo, a direção e o sentido da força elétrica total (resultante) que essas cargas exercem sobre uma terceira carga puntiforme $Q = 4{,}0\ \mu$C em $x = 0{,}40$ m, $y = 0$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: analogamente ao caso do Exemplo 21.3, devemos calcular a força que cada carga exerce sobre Q e a seguir obter a soma vetorial das forças.

PREPARAR: a Figura 21.14 mostra a situação. Como as três cargas não são colineares, o modo mais fácil para fazer isso consiste em usar os componentes das forças que q_1 e q_2 exercem sobre Q.

EXECUTAR: a Figura 21.14 mostra a força sobre Q exercida pela carga superior q_1. De acordo com a lei de Coulomb, o módulo F dessa força é dado por

$$\begin{aligned} F_{1\text{ em }Q} &= (9{,}0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(4{,}0\times10^{-6}\text{ C})(2{,}0\times10^{-6}\text{ C})}{(0{,}50\text{ m})^2} \\ &= 0{,}29\text{ N} \end{aligned}$$

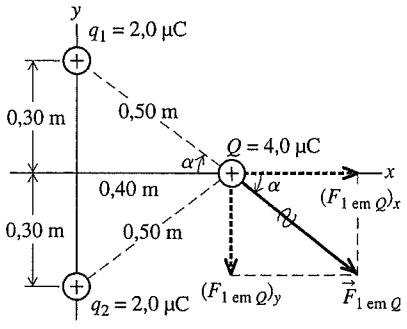


Figura 21.14 Nossa esquematização do problema.

O ângulo α está abaixo do eixo Ox, de modo que os componentes dessa força são dados por

$$(F_{1\,\text{em}\,Q})_x = (F_{1\,\text{em}\,Q})\cos\alpha = (0{,}29\ \text{N})\frac{0{,}40\ \text{m}}{0{,}50\ \text{m}} = 0{,}23\ \text{N}$$

$$(F_{1\,\text{em}\,Q})_y = -(F_{1\,\text{em}\,Q})\,\text{sen}\,\alpha = -(0{,}29\ \text{N})\frac{0{,}30\ \text{m}}{0{,}50\ \text{m}} = -0{,}17\ \text{N}$$

A carga inferior q_2 exerce uma força de mesmo módulo, porém formando um ângulo α que está *acima* do eixo Ox. Usando um raciocínio de simetria vemos que o componente x é o mesmo que o da carga superior, porém o componente y possui sentido contrário ao da carga superior. Logo, os componentes da força total $\vec{F}$ sobre Q são dados por

$$F_x = 0{,}23\ \text{N} + 0{,}23\ \text{N} = 0{,}46\ \text{N}$$

$$F_y = -0{,}17\ \text{N} + 0{,}17\ \text{N} = 0$$

A força total sobre Q aponta para o sentido $+x$ e possui módulo igual a 0,46 N.

AVALIAR: a força total sobre Q aponta em um sentido que não se afasta diretamente de q_1 nem de q_2. Em vez disso, esse sentido é uma acomodação que aponta para fora do *sistema* das cargas q_1 e q_2. Você é capaz de constatar que a força total *não* apontaria no sentido positivo de x se q_1 e q_2 não fossem iguais ou se a disposição geométrica das alterações não fosse tão simétrica?

Teste sua compreensão da Seção 21.3 Considere que a carga q_2 no Exemplo 21.4 fosse $-2{,}0\ \mu$C. Nesse caso, a força elétrica total sobre Q (i) apontaria no sentido positivo de x; (ii) apontaria no sentido negativo de x; (iii) apontaria no sentido positivo de y; (iv) apontaria no sentido negativo de y; (v) seria igual a zero; (vi) nenhuma das alternativas. ▮

21.4 Campo elétrico e forças elétricas

Quando ocorre uma interação no vácuo entre duas partículas que possuem cargas elétricas, como é possível uma delas perceber a existência da outra? O que existe no espaço entre as cargas para que a interação seja comunicada de uma carga para a outra? Podemos começar a responder a essas perguntas e, ao mesmo tempo, reformular a lei de Coulomb usando o conceito de *campo elétrico*.

Campo elétrico

Para introduzirmos esse conceito, vamos examinar a repulsão mútua entre dois corpos A e B com cargas positivas (Figura 21.15a). Suponha que B possua uma carga q_0 e seja $\vec{F}_0$ a força elétrica que A exerce sobre B. Um modo de interpretar a ação dessa força consiste em imaginar uma 'ação a distância', ou seja, essa força poderia agir através do espaço vazio sem a necessidade de nenhuma matéria (tal como um eixo de transmissão ou uma corda) que transmitisse a força no espaço intermediário. (A força da gravidade também poderia ser imaginada como uma força de 'ação a distância'.) Porém, podemos visualizar melhor a interação entre A e B imaginando um processo com duas etapas. Inicialmente, supomos que o corpo A, em virtude da carga elétrica que ele possui, de algum modo *modifica o espaço ao redor dele*. A seguir, o corpo B, em virtude da carga elétrica que *ele* possui, sente como o espaço foi modificado pela outra carga. A resposta sentida por B é a força elétrica $\vec{F}_0$.

Para entendermos como esse processo de duas etapas ocorre, inicialmente consideramos apenas o corpo A: removemos o corpo B e designamos pela letra P o ponto que ele ocupava (Figura 21.15b). Dizemos que o corpo A produz um **campo elétrico** no ponto P (e em todos os outros pontos nas vizinhanças). Esse campo elétrico está presente no ponto P mesmo quando não existe nenhuma carga em P; isso decorre somente da existência da carga sobre o corpo A. Quando uma carga q_0 é, a seguir, colocada no ponto P, ela sofre a ação da força elétrica $\vec{F}_0$. Adotamos o ponto de vista de que essa força é exercida sobre a carga q_0 *pelo campo elétrico* no ponto P (Figura 21.15c). Portanto, o campo elétrico serve de intermediário para comunicar a força que A exerce sobre q_0. Visto que a carga puntiforme q_0 sofre a ação da força em *qualquer* ponto nas vizinhanças de A, o campo elétrico produzido por A está presente em todos os pontos ao redor de A.

De modo análogo, podemos dizer que a carga puntiforme q_0 produz em torno dela um campo elétrico e que esse campo exerce sobre o corpo A uma força elétrica $-\vec{F}_0$. Para cada força (a força de A sobre q_0 e a força de q_0 sobre A), uma das cargas cria um campo elétrico que exerce uma força sobre a outra carga. Enfatizamos que esse efeito é uma *interação* entre *dois* corpos carregados. Uma única carga produz um campo elétrico no espaço de suas vizinhanças, porém esse campo elétrico não pode exercer força resultante sobre

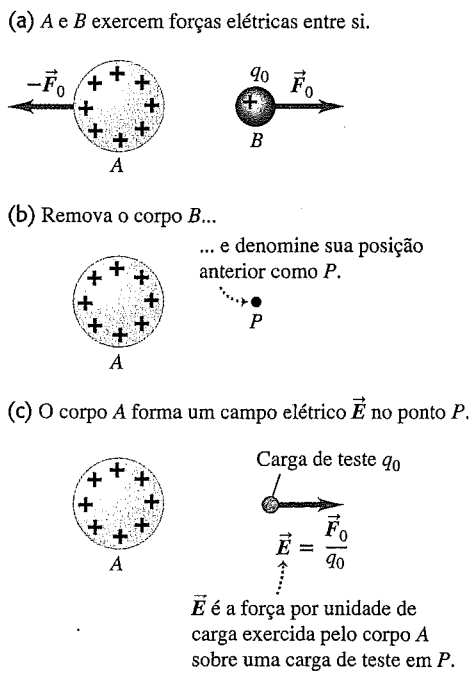


Figura 21.15 Um corpo carregado cria um campo elétrico ao redor dele.

a carga que o criou; esse é um exemplo do princípio geral enunciado na Seção 4.3, segundo o qual um corpo não pode produzir uma força resultante sobre si mesmo. (Se esse princípio não fosse verdadeiro, você poderia dar um pulo até o teto simplesmente puxando seu cinto para cima!)

A força elétrica sobre um corpo carregado é exercida pelo campo elétrico produzido por *outros* corpos carregados.

Para verificarmos se existe um campo elétrico em um dado ponto, colocamos no referido ponto um corpo carregado, chamado de **carga de teste** (Figura 21.15c). Quando a carga de teste sofre a ação de uma força elétrica, concluímos que existe um campo elétrico nesse ponto. Esse campo elétrico é produzido por outras cargas que não a carga q_0.

A força é uma grandeza vetorial, de modo que o campo elétrico também o é. (Observe o uso de sinais vetoriais, assim como negrito para os sinais de mais, menos e igual.) Definimos o *campo elétrico* $\vec{E}$ em um ponto como a força elétrica $\vec{F}_0$ que atua sobre uma carga q_0 nesse ponto, dividida pela carga q_0. Ou seja, o campo elétrico em um dado ponto é igual à *força elétrica por unidade de carga* que atua sobre uma carga situada nesse ponto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \tag{21.3}$$

(definição de campo elétrico como força elétrica por unidade de carga)

Usando unidades SI, para as quais a unidade de força é 1 N e a unidade de carga é 1 C, a unidade de campo elétrico é 1 newton por coulomb (1 N/C).

Quando o campo elétrico $\vec{E}$ for conhecido em um dado ponto, usando a Equação (21.3), podemos obter a força elétrica $\vec{F}_0$ que atua sobre uma carga puntiforme q_0 colocada nesse ponto. Essa força é dada simplesmente pelo campo elétrico $\vec{E}$ produzido pelas outras cargas, com exceção da carga q_0, multiplicado pela carga q_0:

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E} \tag{21.4}$$

(força exercida sobre uma carga puntiforme q_0 por um campo elétrico $\vec{E}$)

A carga q_0 pode ser positiva ou negativa. Quando q_0 for *positiva*, a força $\vec{F}_0$ que atua sobre a carga terá o mesmo sentido de $\vec{E}$; quando q_0 for *negativa*, $\vec{F}_0$ e $\vec{E}$ terão sentidos contrários (Figura 21.16).

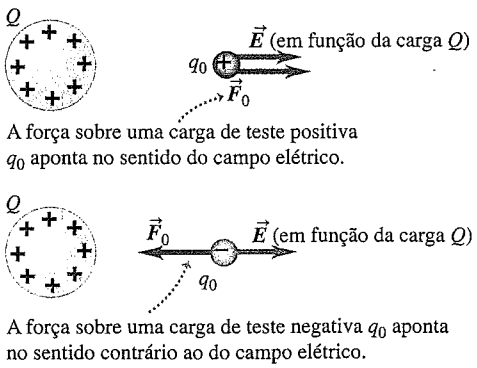


Figura 21.16 A força $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}$ que atua sobre uma carga q_0 provocada pelo campo elétrico $\vec{E}$.

Embora o conceito de campo elétrico possa ser novo para você, a idéia básica — de que um corpo produz um campo no espaço em torno dele e um segundo corpo sofre a ação desse campo — já foi, na realidade, introduzida anteriormente. Compare a Equação (21.4) com a expressão familiar da força gravitacional $\vec{F}_g$ que a Terra exerce sobre um corpo de massa m_0:

$$\vec{F}_g = m_0\vec{g} \tag{21.5}$$

Nessa expressão, $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade. Dividindo ambos os membros da Equação (21.5) pela massa m_0, obtemos

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}$$

Portanto, podemos interpretar $\vec{g}$ como a força gravitacional por unidade de massa. Por analogia à Equação (21.3), é possível dizer que $\vec{g}$ é o *campo gravitacional*. Desse modo, a interação gravitacional entre a Terra e um corpo de massa m_0 pode ser descrita como um processo com duas etapas: a Terra produz um campo gravitacional $\vec{g}$ no espaço em torno dela e o campo gravitacional produz uma força dada pela Equação (21.5) sobre um corpo de massa m_0 (que chamamos de *massa de teste*). Nesse sentido, você já empregou o conceito de campo ao usar a Equação (21.5) para a força gravitacional. O campo gravitacional $\vec{g}$, ou a força gravitacional por unidade de massa, é um conceito útil porque ele não depende da massa do corpo sobre o qual a força gravitacional está atuando; analogamente, o campo elétrico $\vec{E}$, ou a força elétrica por unidade de carga, é também um conceito útil porque ele não depende da carga do corpo sobre o qual a força elétrica está atuando.

ATENÇÃO $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}_0$ **somente se aplica a cargas de teste *puntiformes*** A força elétrica que atua sobre uma carga de teste q_0 pode variar de um ponto a outro do espaço, de modo que o campo elétrico pode assumir diferentes valores em pontos diferentes. Por essa razão, a Equação (21.4) só deve ser usada para determinar a força elétrica que atua sobre uma carga *puntiforme*. Quando o corpo carregado possui um tamanho suficientemente grande, o campo elétrico $\vec{E}$ pode variar em módulo e direção em pontos diferentes ao longo do corpo, e a determinação da força elétrica resultante que atua sobre o corpo pode se tornar complicada.

Até o momento desprezamos uma dificuldade sutil, mas importante, em nossa definição de campo elétrico: na Figura 21.15, a força exercida pela carga de teste q_0 sobre o corpo A pode produzir um deslocamento das cargas desse corpo. Isso é especialmente verdadeiro quando o corpo A é um condutor, no qual a carga pode se mover com facilidade. Desse modo, o campo elétrico em torno do corpo A quando q_0 está presente pode ser diferente do campo quando q_0 está

ausente. Contudo, quando q_0 for muito pequena, a redistribuição de cargas sobre o corpo A será também muito pequena. Logo, para fazer uma definição completamente correta de campo elétrico, tomamos o *limite* da Equação (21.3) quando a carga q_0 tende a zero, de modo que o efeito perturbador da carga q_0 sobre a distribuição torna-se desprezível:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

Para os cálculos práticos do campo elétrico $\vec{E}$ produzido por uma distribuição de cargas, vamos supor que a distribuição de cargas seja fixa, de modo que não usaremos esse processo de passagem ao limite.

Campo elétrico de uma carga puntiforme

Quando a distribuição de cargas da fonte corresponde a uma carga puntiforme q, é fácil encontrar o campo elétrico que ela produz. O local onde essa carga se encontra denomina-se **ponto da fonte**, e o ponto P onde desejamos determinar o campo elétrico é chamado de **ponto do campo**. É também útil introduzir um *vetor unitário* $\hat{r}$ que une o ponto da fonte e o ponto do campo e que aponta ao longo da linha (Figura 21.17a). Esse vetor unitário é igual ao vetor deslocamento $\vec{r}$ que une o ponto da fonte ao ponto do campo, dividido pela distância $\hat{r} = |\vec{r}|$ entre esses dois pontos; ou seja, $\hat{r} = \vec{r}/r$. Se colocarmos uma carga de teste pequena q_0 no ponto do campo P a uma distância r do ponto da fonte, o módulo F_0 da força será dado pela lei de Coulomb, Equação (21.2):

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qq_0|}{r^2}$$

Pela Equação (21.3), o módulo E do campo elétrico no ponto P é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \tag{21.6}$$

(módulo de campo elétrico de uma carga puntiforme)

Usando o vetor unitário $\hat{r}$, podemos escrever uma equação *vetorial* que fornece o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \tag{21.7}$$

(campo elétrico de uma carga puntiforme)

Por definição, o campo elétrico de uma carga puntiforme sempre aponta *para fora* de uma carga positiva (ou seja, no mesmo sentido de $\hat{r}$; veja a Figura 21.17b), porém *para dentro* de uma carga negativa (ou seja, no sentido contrário ao de $\hat{r}$; veja a Figura 21.17c).

Enfatizamos o cálculo do campo elétrico $\vec{E}$ em um determinado ponto. Porém, uma vez que o campo elétrico $\vec{E}$ pode variar de um ponto para outro, ele não é dado por uma única grandeza vetorial, mas por um conjunto *infinito* de grandezas vetoriais, cada uma das quais associada a um ponto desse espaço. Esse é um exemplo de um **campo vetorial**. A Figura 21.18 mostra uma série de campos vetoriais produzidos por uma carga positiva ou por uma carga negativa. Quando usamos um sistema de coordenadas retangulares (x, y, z), cada componente do $\vec{E}$ geralmente é uma função das coordenadas (x, y, z) do ponto. Podemos representar os componentes desse vetor por $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ e $E_z(x, y, z)$. Os campos vetoriais constituem uma parte importante na linguagem da física, particularmente na eletricidade e no magnetismo. Um exemplo cotidiano de campo vetorial é a velocidade $\vec{v}$ das correntes de vento na atmosfera; o módulo e a direção da velocidade $\vec{v}$ e, portanto, seus componentes vetoriais podem variar de um ponto para outro da atmosfera.

Em alguns casos, o módulo e a direção do campo elétrico (e, portanto, de seus componentes vetoriais) são constantes em todos os pontos de uma dada região; nesse caso, dizemos que o campo é *uniforme* na região considerada. Um importante exemplo disso é o campo elétrico encontrado no interior de um *condutor*. Caso exista um campo elétrico no interior de um condutor, o campo exerce uma força sobre cada carga existente no interior do condutor, produzindo um movimento das cargas livres. Por definição, *não* existe nenhum movimento efetivo em uma situação eletrostática. Concluímos que, *na eletrostática, o campo elétrico deve ser igual a zero em todos os pontos no*

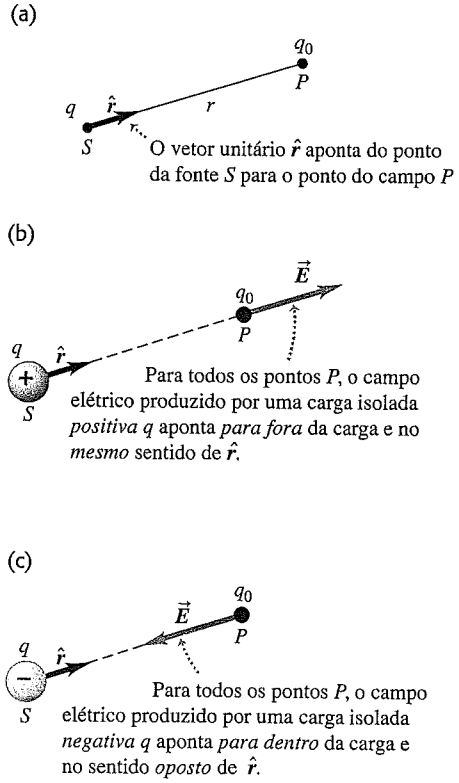
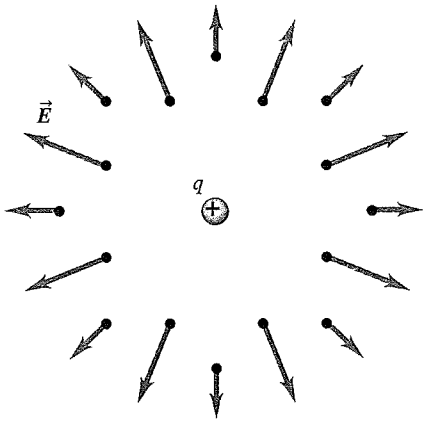


Figura 21.17 O campo elétrico $\vec{E}$ produzido no ponto P por uma carga puntiforme q em S. Note que tanto em (b) como em (c), o campo elétrico $\vec{E}$ é *produzido* por q (veja a Equação 21.7), porém *atua* sobre q_0 (veja a Equação 21.4).

interior de um condutor. (Note que, quando existe um *buraco* no interior de um condutor, não podemos afirmar que o campo elétrico seja necessariamente igual a zero no interior do buraco.)

Usando o conceito de campo elétrico, nossa descrição da interação elétrica é composta por duas partes. Inicialmente, uma dada distribuição de cargas funciona como uma fonte do campo elétrico. Em segundo lugar, o campo elétrico dessa distribuição exerce uma força sobre qualquer carga presente no interior desse campo. Nossa análise geralmente também apresenta duas etapas: primeiramente, calculamos o campo elétrico produzido por certa distribuição de cargas; em segundo lugar, determinamos o efeito desse campo em termos da força e do movimento. A segunda etapa geralmente envolve leis de Newton assim como os princípios das interações elétricas. Na próxima seção, mostraremos como determinar o campo elétrico produzido por diversas distribuições de cargas, porém, a seguir, apresentaremos alguns exemplos para a determinação do campo elétrico produzido por cargas puntiformes e para o cálculo da força elétrica que um dado campo $\vec{E}$ exerce sobre uma carga.

(a) O campo produzido por uma carga puntiforme positiva aponta *para fora* da carga.



(b) O campo produzido por uma carga puntiforme negativa aponta *para dentro* da carga.

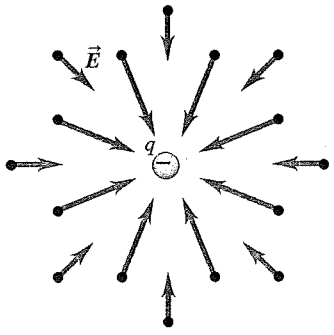


Figura 21.18 Uma carga puntiforme q produz um campo elétrico $\vec{E}$ em *todos* os pontos no espaço. A força do campo diminui conforme a distância aumenta.

Exemplo 21.5

MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PUNTIFORME

Calcule o módulo do campo elétrico de uma carga puntiforme $q = 4{,}0$ nC em um ponto do campo situado a uma distância de 2,0 m da carga. (A carga puntiforme pode ser qualquer objeto pequeno carregado com a carga q, desde que as dimensões do objeto sejam muito pequenas em comparação à distância entre o objeto e o ponto do campo.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa a expressão para o campo elétrico em função de uma carga puntiforme.

PREPARAR: como conhecemos o módulo da carga e a distância entre o objeto e o ponto do campo, usamos a Equação (21.6) para calcular o módulo do campo E.

EXECUTAR: de acordo com a Equação (21.6),

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{4{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(2{,}0\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 9{,}0\ \mathrm{N/C}$$

AVALIAR: para conferir nosso resultado, usamos a definição de campo elétrico como a força elétrica por unidade de carga. Podemos inicialmente usar a lei de Coulomb, Equação (21.2), para calcular o módulo F_0 da força sobre uma carga de teste q_0 colocada a uma distância de 2,0 m de q:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{4{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}|q_0|}{(2{,}0\ \mathrm{m})^2}$$
$$= (9{,}0\ \mathrm{N/C})\,|q_0|$$

Então, de acordo com a Equação (21.3), o módulo de $\vec{E}$ é dado por

$$E = \frac{F_0}{|q_0|} = 9{,}0\ \mathrm{N/C}$$

Como q é positiva, a *direção* do campo $\vec{E}$ nesse ponto segue ao longo da reta que une as cargas de q para a carga q_0, como indica a Figura 21.17b. Contudo, o módulo, a direção e o sentido de $\vec{E}$ não dependem do sinal de q_0. Você sabe por quê?

Exemplo 21.6

VETOR DO CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PUNTIFORME

Uma carga puntiforme $q = -8{,}0$ nC está localizada na origem. Determine o vetor do campo elétrico para o ponto do campo $x = 1{,}2$ m, $y = -1{,}6$ m.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste problema devemos encontrar o *vetor* $\vec{E}$ do campo elétrico em função de uma carga puntiforme. Logo, precisamos obter os componentes de $\vec{E}$ ou seu módulo, direção e sentido.

PREPARAR: a Figura 21.19 mostra a situação. A forma vetorial do campo elétrico é dada pela Equação (21.7). Para usar essa equação, primeiro achamos a distância r entre o ponto do campo P e o ponto da fonte S (a posição da carga q), bem como o vetor unitário $\hat{\boldsymbol{r}}$ que aponta no sentido de S para P.

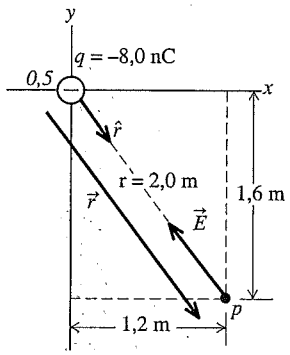


Figura 21.19 Nossa esquematização do problema.

EXECUTAR: a distância da carga no ponto da fonte S (que neste caso está na origem O) para o ponto do campo P é

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1{,}2\text{ m})^2 + (-1{,}6\text{ m})^2} = 2{,}0\text{ m}$$

O vetor unitário $\hat{\boldsymbol{r}}$ está orientado do ponto da fonte para o ponto do campo. Ele equivale ao deslocamento do $\vec{r}$ desde o ponto da fonte até o ponto do campo (na Figura 21.19, foi deslocado para o lado, para não ocultar os demais vetores), dividido por seu módulo r:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}{r}$$

$$= \frac{(1{,}2\text{ m})\hat{\imath} + (-1{,}6\text{ m})\hat{\imath}}{2{,}0\text{ m}} = 0{,}60\hat{\imath} - 0{,}80\hat{\jmath}$$

Logo, o vetor do campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$= (9{,}0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-8{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C})}{(2{,}0\text{ m})^2}(0{,}60\hat{\imath} - 0{,}80\hat{\jmath})$$

$$= (-11\,\text{N/C})\hat{\imath} + (14\,\text{N/C})\hat{\jmath}$$

AVALIAR: como a carga q é negativa, o vetor $\vec{E}$ aponta do ponto do campo para a carga (o ponto da fonte), possuindo sentido oposto ao do vetor unitário $\hat{r}$ (compare com a Figura 21.17c). Deixamos para você fazer como exercício o cálculo do módulo e da direção de $\vec{E}$ (veja o Exercício 21.36).

Exemplo 21.7

ELÉTRON EM UM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME Quando os terminais de uma bateria são conectados a duas grandes placas condutoras paralelas, cargas distribuídas sobre as placas produzem um campo elétrico $\vec{E}$ aproximadamente uniforme na região entre as placas. (Na próxima seção, mostraremos o porquê desse comportamento uniforme. Essas placas carregadas geralmente são usadas em dispositivos elétricos chamados de *capacitores*, que serão discutidos no Capítulo 24.) Imagine placas horizontais separadas por uma distância de 1,0 cm conectadas a uma bateria de 100 V e considere o módulo do campo elétrico dado por $E = 1{,}0 \times 10^4$ N/C. Suponha que o vetor $\vec{E}$ seja orientado verticalmente de baixo para cima, como indica a Figura 21.20. (a) Calcule a aceleração de um elétron liberado do repouso na placa superior. (b) Calcule a velocidade escalar e a energia cinética do elétron quando ele atinge a placa inferior depois de percorrer 1,0 cm. (c) Quanto tempo ele leva para percorrer essa distância? O elétron possui carga $-e = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

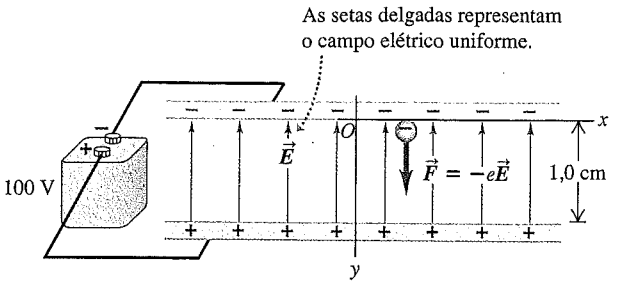


Figura 21.20 Um campo elétrico uniforme entre duas placas condutoras paralelas conectadas a uma bateria de 100 V. (Nessa figura, a separação entre as placas está exagerada em relação ao tamanho das placas.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo envolve vários conceitos: a relação entre campo elétrico e força elétrica, a relação entre força e aceleração, a definição de energia cinética e as relações cinemáticas entre aceleração, distância, velocidade e tempo.

PREPARAR: um sistema de coordenadas é indicado na Figura 21.20. Como conhecemos o campo elétrico, usamos a Equação (21.4) para obter a força que atua sobre o elétron e a segunda lei de Newton para obter sua aceleração. Como o campo é uniforme entre as placas, a força e a aceleração são constantes, e podemos usar as fórmulas de aceleração constante do Capítulo 3 para achar a velocidade do elétron e o tempo de percurso. Achamos a energia cinética usando a definição $K = \frac{1}{2}mv^2$.

EXECUTAR: (a) note que, embora $\vec{E}$ seja orientado verticalmente de baixo para cima (no sentido $+y$), a força $\vec{F}$ é orientada verticalmente de cima para baixo, pois a carga do elétron é negativa. Logo, a componente F_y é negativa. Visto que F_y é constante, o elétron se move com uma aceleração constante a_y dada por

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(1{,}00 \times 10^4\,\text{N/C})}{9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}}$$

$$= -1{,}76 \times 10^{15}\,\text{m/s}^2$$

Essa aceleração é enorme! Para fazer um carro de 1000 kg adquirir essa aceleração seria necessário aplicar uma força aproximadamente igual a 2×10^{18} N (equivalente ao peso de um corpo com massa de cerca de 2×10^{14} toneladas). A força gravitacional sobre o elétron é completamente desprezível em comparação à força elétrica.

(b) O elétron parte do repouso, de modo que seu movimento ocorre somente no sentido $+y$ (o sentido da aceleração). Podemos determinar a velocidade escalar do elétron em cada ponto usando a fórmula do movimento com aceleração constante $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Temos $v_{0y} = 0$ e $y_0 = 0$, de modo que o módulo da velocidade escalar $|v_y|$ quando $y = -1{,}0$ cm $= -1{,}0 \times 10^{-2}$ m é

$$|v_y| = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{2(-1{,}76 \times 10^{15}\,\text{m/s}^2)(-1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{m})}$$

$$= 5{,}9 \times 10^6\,\text{m/s}$$

A velocidade é orientada de cima para baixo, de modo que o componente y é dado por $v_y = -5{,}9 \times 10^6$ m/s. A energia cinética do elétron é dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(5{,}9 \times 10^{6}\,\text{m/s})^2$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-17}\,\text{J}$$

(c) De acordo com a fórmula do movimento com aceleração constante, $v_y = v_{0y} + a_y t$, verificamos que o tempo necessário é muito pequeno:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{(-5{,}9 \times 10^{6}\,\text{m/s}) - (0\,\text{m/s})}{-1{,}76 \times 10^{15}\,\text{m/s}^2}$$
$$= 3{,}4 \times 10^{-9}\,\text{s}$$

(Poderíamos também resolver $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ para encontrar o tempo t.)

AVALIAR: este exemplo mostra que no problema sobre partículas subatômicas, como os elétrons, muitas grandezas — incluindo aceleração, velocidade escalar, energia cinética e tempo — terão valores *muito* diferentes daqueles constatados para objetos comuns, como bolas de beisebol e automóveis.

Exemplo 21.8

TRAJETÓRIA DE UM ELÉTRON Quando lançamos um elétron no interior do campo elétrico do Exemplo 21.7 com uma velocidade inicial horizontal v_0 (Figura 21.21), qual é a equação de sua trajetória?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a aceleração é a mesma que a encontrada no Exemplo 21.7. O objetivo é encontrar a trajetória que corresponda a essa aceleração.

PREPARAR: a aceleração é constante e aponta no sentido negativo de y (não há aceleração no sentido de x). Portanto, podemos usar as equações cinemáticas do Capítulo 3 para o movimento bidimensional com aceleração constante.

EXECUTAR: a aceleração ao longo do eixo Ox é igual a zero; a aceleração ao longo do eixo Oy é igual a $(-e)E/m$. Em $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$ e $v_{0y} = 0$; portanto, para o instante t,

$$x = v_0 t \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$

Eliminando t dessas equações, encontramos

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0^2}x^2$$

AVALIAR: essa equação indica uma trajetória ao longo de uma parábola, análoga à trajetória descrita por um projétil lançado horizontalmente no campo gravitacional da Terra (veja a Seção 3.3). Para uma dada velocidade inicial do elétron, a curvatura da trajetória depende do módulo E do campo elétrico. Quando invertemos os sinais das cargas sobre as placas na Figura 21.21, o sentido do campo elétrico $\vec{E}$ se inverte e a concavidade da trajetória do elétron, em vez de ser voltada para baixo, passa a ser voltada para cima. Portanto, podemos 'guiar' o elétron alterando os valores das cargas das placas. Desse modo, o campo elétrico entre as placas condutoras carregadas pode ser usado para controlar a trajetória de um feixe de elétrons em osciloscópios.

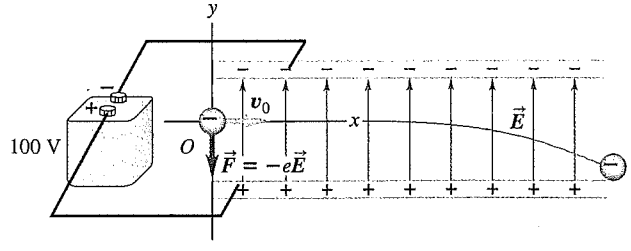


Figura 21.21 A trajetória parabólica de um elétron no interior de um campo elétrico uniforme.

Teste sua compreensão da Seção 21.4 (a) Uma carga puntiforme negativa se move ao longo de uma trajetória retilínea em direção a uma carga puntiforme positiva fixa. Que aspectos da força elétrica sobre a carga puntiforme negativa permanecerão constantes enquanto ela se move? (i) módulo; (ii) direção e sentido; (iii) tanto o módulo, quanto a direção e o sentido; (iv) nenhum deles. (b) Uma carga puntiforme negativa se move ao longo de uma órbita circular em torno de uma carga positiva puntiforme. Que aspectos da força elétrica sobre a carga puntiforme negativa permanecerão constantes enquanto ela se move? (i) módulo; (ii) direção e sentido; (iii) tanto o módulo, quanto a direção e o sentido; (iv) nenhum deles. ∎

21.5 Determinação do campo elétrico

A Equação (21.7) fornece o campo elétrico produzido por uma única carga puntiforme. Porém, em muitas situações reais que envolvem forças e campos elétricos, verificamos que a carga se encontra *distribuída* ao longo do espaço. Os bastões de plástico e de vidro, cujas cargas estão indicadas na Figura 21.1, possuem cargas distribuídas ao longo de suas superfícies, como no caso do cilindro de imagem de uma impressora a laser (Figura 21.2). Nesta seção, aprenderemos a determinar o campo elétrico produzido por diversas distribuições de cargas elétricas. Os cálculos envolvidos são extraordinariamente importantes para as aplicações tecnológicas das forças elétricas. Para determinar as trajetórias de partículas carregadas, tais como elétrons em um cinescópio de TV, núcleos atômicos em aceleradores para o tratamento do câncer ou partículas em um dispositivo eletrônico semicondutor, você deve conhecer com detalhes a natureza do campo elétrico que atua sobre cada carga.

A superposição dos campos elétricos

Para determinarmos o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas, imaginemos a distribuição como um conjunto de cargas puntiformes q_1, q_2, q_3, ... (Essa hipótese é efetivamente bastante realista, porque, conforme vimos, as cargas elétricas são oriundas de elétrons e prótons, que são partículas tão pequenas que podem ser consideradas puntiformes.) Para qualquer ponto P, cada carga puntiforme produz seu respectivo campo elétrico $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, ..., de modo que uma carga de teste q_0 colocada em P sofre a ação de uma força $\vec{F}_1 = q_0\vec{E}_1$ exercida

pela carga q_1, uma força $\vec{F}_2 = q_0\vec{E}_2$ exercida pela carga q_2 e assim por diante. De acordo com o princípio da superposição das forças, discutido na Seção 21.3, a força *total* $\vec{F}_0$ resultante da ação da distribuição de cargas sobre q_0 é a soma vetorial dessas forças individuais:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = q_0\vec{E}_1 + q_0\vec{E}_2 + q_0\vec{E}_3 + \cdots$$

O efeito combinado de todas as cargas da distribuição é descrito pelo campo elétrico *total* $\vec{E}$ no ponto P. De acordo com a Equação (21.3), esse campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

O campo elétrico total no ponto P é igual à soma vetorial dos campos que cada carga da distribuição produz no ponto P (Figura 21.22). Esse resultado é chamado de **princípio da superposição dos campos elétricos**.

Quando uma carga é distribuída ao longo de uma linha, sobre uma superfície ou ao longo de um volume, alguns termos adicionais são úteis. Para uma distribuição linear de cargas (tal como no caso de um bastão fino e longo de plástico carregado), usaremos a letra λ (lambda) para representar a **densidade linear de carga** (carga por unidade de comprimento, medida em C/m). Quando a carga estiver distribuída sobre uma superfície (tal como no cilindro da reprodução de imagens de máquinas fotocopiadoras), usaremos a letra σ (sigma) para representar a **densidade superficial de carga** (carga por unidade de área, medida em C/m^2). E, quando a carga se encontrar distribuída ao longo de um volume, tomaremos a letra ρ (rô) para representar a **densidade volumétrica de carga** (carga por unidade de volume, medida em C/m^3).

Alguns cálculos que serão apresentados nos exemplos a seguir podem parecer complicados; na determinação do campo elétrico, certa complexidade matemática faz parte da natureza dos cálculos. Depois que você resolver alguns exemplos, desenvolvendo cada etapa, verá que essa tarefa não é tão complicada. Muitas técnicas usadas nos cálculos apresentados nesses exemplos serão novamente empregadas no Capítulo 28 para calcular os campos *magnéticos* produzidos por cargas em movimento.

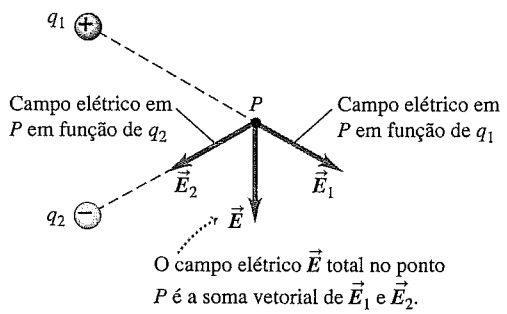


Figura 21.22 Ilustração do princípio da superposição dos campos elétricos.

Estratégia para a solução de problemas 21.2

CÁLCULOS ENVOLVENDO CAMPO ELÉTRICO

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: use o princípio da superposição sempre que for necessário calcular o campo elétrico em função de uma distribuição de carga (duas ou mais cargas puntiformes, uma distribuição sobre uma linha, superfície, volume ou uma combinação deles).

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho que mostre claramente a localização das cargas e a escolha dos eixos de coordenadas.
2. No desenho, indique a posição do *ponto do campo* (o ponto em que você quer calcular o campo elétrico $\vec{E}$). Às vezes, o ponto do campo estará em uma posição arbitrária ao longo de uma linha. Por exemplo, você pode ser solicitado a achar $\vec{E}$ em qualquer ponto sobre o eixo x.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Verifique se você está usando um sistema de unidades consistente. Distâncias devem ser medidas em metros e cargas em coulombs. Quando um valor é fornecido em centímetros ou nanocoulombs, não se esqueça de convertê-lo.
2. Ao somar os campos elétricos produzidos por diversas partes de uma distribuição de cargas, lembre-se de que o campo elétrico é um vetor. Portanto, você *deve* fazer uma soma vetorial. Não calcule simplesmente os módulos dos campos elétricos; as direções e os sentidos também são importantes.
3. Tire proveito de quaisquer simetrias na distribuição de cargas. Por exemplo, quando uma carga positiva e uma carga negativa com o mesmo módulo são colocadas simetricamente em relação ao ponto do campo, elas produzem campos elétricos com o mesmo módulo, mas com direção e sentido como a imagem em um espelho. Explorar essas simetrias simplificará os cálculos.
4. Em geral, é conveniente usar componentes para calcular uma soma vetorial. Aplique os métodos que você aprendeu no Capítulo 1; caso sinta necessidade, faça uma revisão desses métodos. Use uma notação apropriada para vetores. Faça uma clara distinção entre escalares, vetores e componentes dos vetores. Construa um diagrama para indicar claramente o sistema de coordenadas e verifique a consistência dos componentes com a escolha dos eixos desse sistema.
5. Ao determinar a direção e o sentido de $\vec{E}$, tenha o cuidado de distinguir entre o *ponto da fonte* e o *ponto do campo*. O campo produzido por uma carga puntiforme sempre aponta do ponto da fonte para o ponto do campo, quando a carga é positiva; e aponta no sentido oposto, quando a carga é negativa.
6. Em algumas situações, você encontrará uma distribuição contínua de cargas ao longo de uma linha, sobre uma superfície ou através de um volume. Então, defina um pequeno elemento de carga que pode ser considerado como um ponto, determine o campo elétrico do ponto P e procure um método para encontrar a soma dos campos de todos os elementos de carga. Geralmente, é mais fácil fazer isso para cada componente de $\vec{E}$ separadamente. Freqüentemente, você terá de calcular uma ou mais integrais. Verifique se os limites de integração estão corretos; especialmente quando houver simetria, tome cuidado para não contar duas vezes a mesma carga.

AVALIAR *sua resposta*: verifique se o sentido de $\vec{E}$ é razoável. Caso o seu resultado para o módulo E do campo elétrico seja uma função da posição (digamos, coordenada x), compare seu resulta-

do com qualquer outro limite cujo módulo você conheça. Se possível, confira sua resposta realizando outro tipo de cálculo.

Exemplo 21.9

CAMPO DE UM DIPOLO ELÉTRICO A distância entre duas cargas puntiformes $q_1 = +12$ nC e $q_2 = -12$ nC é igual a 0,10 m (Figura 21.23). Denomina-se *dipolo elétrico* um conjunto de duas cargas iguais, porém de sinais contrários. (Essa combinação ocorre com freqüência na natureza. Por exemplo, na Figura 21.8b e 21.8c, cada molécula no isolante neutro constitui um dipolo elétrico. Estudaremos dipolos elétricos com mais detalhes na Seção 21.7.) Determine o campo elétrico produzido por q_1, o campo elétrico produzido por q_2 e o campo elétrico resultante (a) no ponto a; (b) no ponto b; e (c) no ponto c.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: devemos obter o campo elétrico total em três pontos diferentes em função de duas cargas puntiformes. Usaremos o princípio da superposição: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

PREPARAR: a Figura 21.23 mostra o sistema de coordenadas e a localização dos três pontos do campo a, b e c.

EXECUTAR: (a) no ponto a, o campo $\vec{E}_1$ produzido pela carga positiva q_1 e o campo $\vec{E}_2$ produzido pela carga negativa q_2 estão ambos orientados da esquerda para a direita. Os módulos de $\vec{E}_1$ e de $\vec{E}_2$ são dados por

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}060\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}040\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

Os componentes de $\vec{E}_1$ e de $\vec{E}_2$ são dados por

$$E_{1x} = 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \qquad E_{1y} = 0$$
$$E_{2x} = 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \qquad E_{2y} = 0$$

Portanto, no ponto a, o campo elétrico total $\vec{E}_a = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ possui os componentes

$$(E_a)_x = E_{1x} + E_{2x} = (3{,}0 + 6{,}8) \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$
$$(E_a)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

No ponto a, o módulo do campo elétrico total é $9{,}8 \times 10^4$ N/C, e o vetor campo é orientado da esquerda para a direita; portanto,

$$\vec{E}_a = (9{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\,\hat{\imath}$$

(b) No ponto b, o campo $\vec{E}_1$ produzido por q_1 é orientado da direita para a esquerda, enquanto no campo $\vec{E}_2$ produzido por q_2 é orientado da esquerda para a direita. Os módulos de $\vec{E}_1$ e de $\vec{E}_2$ são dados por

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}040\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}140\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 0{,}55 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

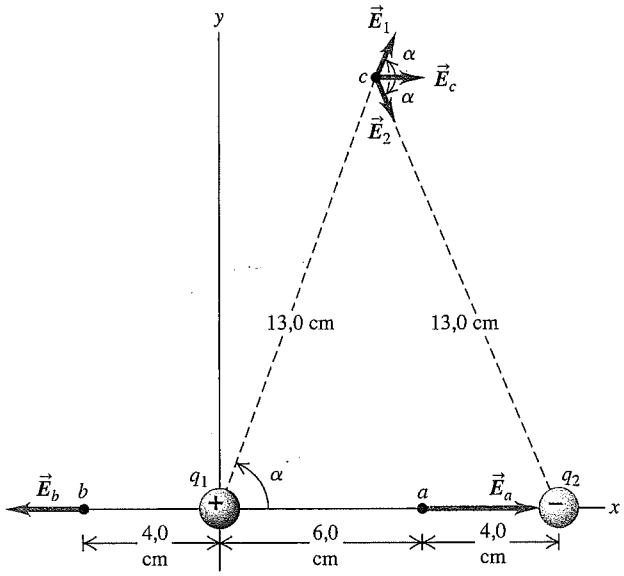


Figura 21.23 Campo elétrico nos pontos a, b e c, produzido por duas cargas q_1 e q_2, que formam um dipolo elétrico.

Os componentes de $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ e do campo total $\vec{E}_b$ no ponto b são dados por

$$E_{1x} = -6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \qquad E_{1y} = 0$$
$$E_{2x} = 0{,}55 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \qquad E_{2y} = 0$$
$$(E_b)_x = E_{1x} + E_{2x} = (-6{,}8 + 0{,}55) \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$
$$(E_b)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Ou seja, no ponto b, o módulo do campo elétrico total é $6{,}2 \times 10^4$ N/C, e o vetor do campo é orientado da direita para a esquerda; portanto,

$$\vec{E}_b = (-6{,}2 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\,\hat{\imath}$$

(c) No ponto c, o campo $\vec{E}_1$ possui módulo igual ao do campo $\vec{E}_2$, visto que as duas cargas possuem o mesmo módulo; e a distância entre elas e o ponto considerado é a mesma:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}130\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

Na Figura 21.23, mostramos as direções e os sentidos de $\vec{E}_1$ e de $\vec{E}_2$. Os componentes x desses vetores são os mesmos:

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1\cos\alpha = (6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\left(\frac{5}{13}\right)$$
$$= 2{,}46 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

Por simetria, vemos que o componente y E_{1y} é igual e contrário ao componente E_{2y} e, portanto, a resultante é igual a zero nessa direção. Logo, os componentes do campo total $\vec{E}_c$ são dados por

$$(E_c)_x = E_{1x} + E_{2x} = 2(2{,}46 \times 10^3\ \mathrm{N/C}) = 4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$
$$(E_c)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Ou seja, no ponto c, o módulo do campo elétrico total é $4{,}9 \times 10^3$ N/C, e o vetor do campo é orientado da esquerda para a direita; portanto,

$$\vec{E}_c = (4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\,\hat{\imath}$$

Foi uma surpresa para você verificar que o campo elétrico total no ponto c é paralelo ao eixo que liga as duas cargas?

AVALIAR: um método alternativo para determinar o campo elétrico total no ponto c consiste em usar a expressão de uma carga puntiforme, dada pela Equação (21.7). O vetor deslocamento $\vec{r}_1$ que liga q_1 com o ponto c, situado a uma distância $r = 13{,}0$ cm da carga, é dado por

$$\vec{r}_1 = r\cos\alpha\,\hat{\imath} + r\,\text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$$

Logo, o vetor unitário ligando q_1 ao ponto c é

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$$

e o campo produzido pela carga q_1 no ponto c é

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$

Por simetria, verificamos que o vetor unitário $\hat{r}_2$ ligando q_2 ao ponto c possui um componente x oposto ao outro vetor unitário, porém possui o mesmo componente y; portanto, o campo no ponto c produzido por q_2 é

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{r}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}(-\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$

Como $q_2 = -q_1$, o campo total no ponto c é dado por

$$\begin{aligned}\vec{E}_c &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q_1)}{r^2}(-\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(2\cos\alpha\hat{\imath})\\ &= (9{,}0\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12\times10^{-9}\,\text{C}}{(0{,}13\,\text{m})^2}\left[2\left(\frac{5}{13}\right)\right]\hat{\imath}\\ &= (4{,}9\times10^3\,\text{N/C})\hat{\imath}\end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado anterior.

Exemplo 21.10

CAMPO DE UM ANEL CARREGADO Um condutor em forma de anel com raio a possui uma carga Q distribuída uniformemente ao longo dele (Figura 21.24). Determine o campo elétrico em um ponto P situado sobre o eixo do anel a uma distância x de seu centro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a superposição dos campos elétricos. O fato novo é que a carga é distribuída de forma contínua em torno do anel, em vez de em torno de uma série de cargas puntiformes.

PREPARAR: o ponto do campo é um ponto arbitrário sobre o eixo x na Figura 21.24. A incógnita do problema é o campo elétrico em um ponto tal que esteja em função da coordenada x.

EXECUTAR: como indicado na Figura 21.24, dividimos o anel em segmentos infinitesimais de comprimento ds. Cada segmento possui carga dQ e funciona como uma fonte puntiforme de campo elétrico. Seja $d\vec{E}$ o campo elétrico produzido por um desses segmentos, o campo elétrico resultante no ponto P é dado pela soma dos campos $d\vec{E}$ de todos os segmentos do anel. (Essa mesma técnica pode ser usada para qualquer distribuição de cargas ao longo de uma reta ou ao longo de uma curva.)

A determinação de $\vec{E}$ é bastante simplificada, porque o ponto do campo P está situado sobre o eixo de simetria do anel. Considerando um segmento no topo e outro na base do anel, vemos que o campo $d\vec{E}$ produzido no ponto P por um dos segmentos possui o mesmo componente x do campo produzido pelo outro segmento, porém o componente y produzido por um deles é oposto ao componente produzido pelo outro. Logo, o componente y do campo elétrico é igual a zero. Quando somamos todas as contribuições de todos esses pares de segmentos, concluímos que o campo elétrico resultante $\vec{E}$ deverá ter apenas um componente ao longo do eixo de simetria do anel (o eixo Ox) e não possuir nenhum componente ao longo dos eixos ortogonais a esse eixo (ou seja, nem componente y, nem componente z). Logo, o campo elétrico em P é completamente descrito pelo componente E_x.

Para calcular E_x, note que o quadrado da distância r entre o segmento do anel e o ponto P é dado por $r^2 = x^2 + a^2$. Logo, o módulo do campo elétrico $d\vec{E}$ produzido pelo segmento no ponto P é

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

Usando $\cos\alpha = x/r = x/(x^2 + a^2)^{1/2}$, o componente dE_x para esse campo ao longo do eixo Ox é

$$\begin{aligned}dE_x = dE\cos\alpha &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Para calcularmos o componente *resultante* E_x do campo no ponto P, integramos a expressão anterior sobre todos os segmentos do anel:

$$E_x = \int\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Uma vez que x não varia quando percorremos todos os pontos do anel, todas as grandezas do lado direito, com exceção de dQ, são constantes e podem passar para fora do sinal da integral. A integral de dQ é a carga total Q, logo

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath} \qquad (21.8)$$

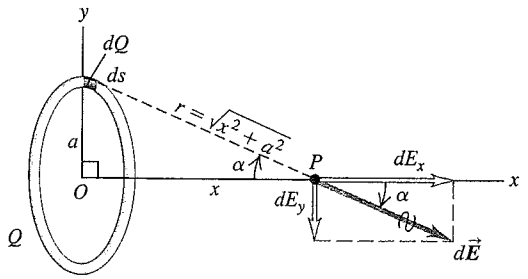


Figura 21.24 Cálculo do campo elétrico em um ponto sobre o eixo de um anel carregado. A carga considerada na figura é positiva.

AVALIAR: o resultado para o campo elétrico $\vec{E}$ mostra que no centro do anel ($x = 0$) o campo elétrico é igual a zero. Isso já era esperado — as cargas situadas em pontos opostos do anel empurrariam uma carga de teste no centro em sentidos contrários com o mesmo módulo e a força resultante seria igual a zero. Quando o ponto do campo P estiver situado a uma distância muito maior do que o tamanho do anel (ou seja, $x >> a$), o denominador da Equação (21.8) será aproximadamente igual a x^3, e obteremos aproximadamente a relação

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Em outras palavras, quando a distância x for tão grande que o tamanho do anel a se torna desprezível em relação a essa distância, o campo elétrico do anel será o mesmo que o produzido por uma carga puntiforme. Para um observador muito afastado do anel, ele parecerá um ponto, e o campo elétrico reflete esse efeito.

Nesse exemplo, usamos um *argumento de simetria* para concluir que $\vec{E}$ possui somente componente x nos pontos sobre o eixo de simetria do anel. Neste capítulo e em capítulos posteriores, empregaremos muitas vezes raciocínios de simetria. Contudo, convém lembrar que esse tipo de raciocínio só vale em situações particulares. Para um ponto no plano xy que não esteja ao longo do eixo Ox, como indicado na Figura 21.24, o argumento de simetria não se aplica e, geralmente, o campo elétrico possui componentes x e y.

Exemplo 21.11

CAMPO PRODUZIDO POR UMA LINHA RETA COM CARGAS Uma carga elétrica positiva Q está distribuída uniformemente ao longo de uma linha reta de comprimento igual a $2a$, situada no eixo Oy entre $y = -a$ e $y = +a$. (Isso poderia representar uma das barras carregadas indicadas na Figura 21.1.) Determine o campo elétrico em um ponto P situado sobre o eixo Ox a uma distância x da origem.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 21.10, a incógnita é o campo elétrico produzido por uma distribuição contínua de carga.

PREPARAR: a Figura 21.25 mostra a situação. Necessitamos encontrar o campo elétrico em P em função da coordenada x. O eixo x é perpendicular à linha carregada; assim, como no Exemplo 21.10, poderemos usar um argumento de simetria.

EXECUTAR: dividimos a linha reta em segmentos infinitesimais e cada elemento de carga atua como uma carga puntiforme; sendo dy o comprimento de um segmento típico situado a uma altura y. Como a carga está distribuída uniformemente, a densidade linear de carga λ em qualquer ponto sobre a linha reta é igual a $Q/2a$ (a carga total dividida pelo comprimento total). Logo, a carga dQ distribuída no segmento dy é dada por

$$dQ = \lambda dy = \frac{Q dy}{2a}$$

A distância r entre o ponto P e esse segmento é igual a $(x^2 + y^2)^{1/2}$; logo, o campo elétrico dE no ponto P produzido por esse segmento é

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dy}{2a(x^2 + y^2)}$$

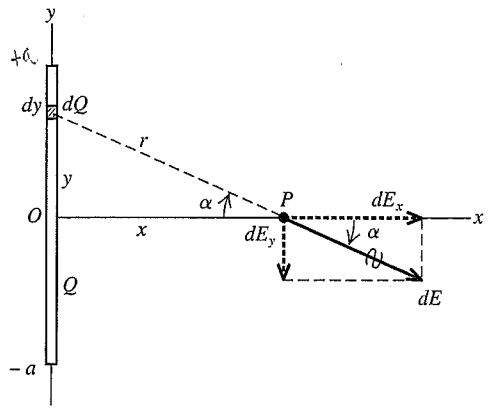


Figura 21.25 Nossa esquematização do problema.

Podemos representar esse campo em termos dos componentes x e y:

$$dE_x = dE\cos\alpha \qquad dE_y = -dE\,\text{sen}\,\alpha$$

Notamos que $\text{sen}\,\alpha = y/(x^2 + y^2)^{1/2}$ e $\cos\alpha = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$; usando essas relações na expressão para dE, encontramos

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\,dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para determinarmos os componentes E_x e E_y do campo elétrico resultante, integramos as relações anteriores, notando que, para incluir a carga total Q, devemos integrar entre $y = -a$ e $y = +a$. Convidamos você a fazer os detalhes da integração; o uso de uma tabela de integrais seria útil. Os resultados são dados por

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

ou, usando notação vetorial,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{\imath} \qquad (21.9)$$

AVALIAR: usando o argumento de simetria tal como o adotado no Exemplo 21.10, concluímos que o componente E_y do campo resultante deve ser igual a zero; colocando-se uma carga de teste positiva no ponto P, as cargas situadas na metade superior da linha de cargas empurram a carga de teste para baixo com uma força igual e contrária à força exercida pela metade inferior da linha de cargas.

Para testarmos nosso resultado, inicialmente vamos ver o que ocorre no limite, quando x for muito maior do que a. Nesse caso, podemos desprezar a no denominador da Equação (21.9), obtendo o resultado

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Em outras palavras, quando o ponto P estiver muito afastado da linha de cargas em comparação ao comprimento da linha, o campo elétrico do anel no ponto P será o mesmo que o produzido por uma carga puntiforme. Encontramos um resultado análogo para o anel carregado no Exemplo 21.10.

Para explorar nossa precisão do resultado obtido para $\vec{E}$, a Equação (21.9), vamos expressá-lo em função da densidade linear de carga $\lambda = Q/2a$. Substituindo $Q = 2a\lambda$ na Equação (21.9) e simplificando, encontramos

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2)+1}}\hat{\imath} \qquad (21.10)$$

Agora podemos responder à pergunta: Qual seria o valor do vetor $\vec{E}$ a uma distância x de uma linha de cargas com um comprimento *muito* grande? Para respondermos a essa pergunta, tomamos o *limite* da Equação (21.10) quando a distância a se torna muito grande. Nesse limite, o termo x^2/a^2 no denominador se torna muito menor do que 1 e podemos desprezá-lo. Encontramos

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{\imath}$$

O módulo do campo elétrico depende apenas da distância entre o ponto P e a linha de cargas. Logo, em qualquer ponto P situado a uma distância r medida perpendicularmente até a linha de cargas, o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ é dado por

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(linha de cargas infinita)

Portanto, o campo elétrico $\vec{E}$ produzido por uma linha de cargas de comprimento infinito é proporcional a $1/r$, contrariamente ao caso de uma carga puntiforme que produz um campo proporcional a $1/r^2$. A direção do campo elétrico $\vec{E}$ é sempre ortogonal à direção da linha de cargas e seu sentido aponta para fora da distribuição de cargas quando λ é positivo, e para dentro quando λ é negativo.

Certamente, na natureza não existe nenhuma linha de cargas de comprimento infinito. Contudo, quando o ponto do campo estiver suficientemente próximo da linha de cargas, será muito pequena a diferença entre o resultado finito real e o resultado de uma linha infinita. Por exemplo, se a distância r entre o ponto considerado e a linha de cargas for igual a 1% do comprimento da linha, o valor real de E será menor do que 0,02% do valor do resultado de uma linha infinita.

Exemplo 21.12

CAMPO DE UM DISCO UNIFORMEMENTE CARREGADO

Determine o campo elétrico produzido por um disco com raio R, que possui uma densidade superficial de carga (carga por unidade de área) positiva uniforme σ em um ponto situado sobre o eixo do disco a uma distância x de seu centro. Suponha x positivo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo é semelhante aos exemplos 21.10 e 21.11 no que se refere à variável, ou seja, um campo elétrico ao longo de um eixo simétrico de uma carga contínua de distribuição.

PREPARAR: a situação é indicada na Figura 21.26. Podemos representar a distribuição de cargas como um conjunto de anéis concêntricos carregados dQ, como indica a Figura 21.26. No Exemplo 21.10, aprendemos a calcular o campo elétrico de um anel em um ponto sobre seu eixo de simetria, portanto basta somar as contribuições de todos os anéis.

EXECUTAR: um anel típico possui carga dQ, raio interno r e raio externo $r + dr$ (Figura 21.26). Sua área dA é aproximadamente igual à sua largura dr vezes a circunferência $2\pi r$, ou seja, $dA = 2\pi r\,dr$. A carga por unidade de área é $\sigma = dQ/dA$, logo a carga do anel é dada por $dQ = \sigma\,dA = \sigma\,(2\pi r\,dr)$, ou seja,

$$dQ = 2\pi\sigma r\,dr$$

Substituímos a relação anterior no lugar da carga Q indicada na Equação (21.8), encontrada no Exemplo 21.10, e também substituímos o raio do anel a por r. Então, o componente do campo dE_x no ponto P produzido por dQ é dado por

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Para determinarmos o campo elétrico produzido pela contribuição de todos os anéis, integramos dE_x para todos os valores de r de $r = 0$ a $r = R$ (e *não* de $-R$ até R):

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Lembre-se de que x permanece constante durante a integral e de que a variável de integração é r. A integral pode ser calculada usando-se a substituição $z = x^2 + r^2$. Deixamos para você a tarefa de fazer os detalhes da integração. O resultado é

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2)+1}}\right] \end{aligned} \qquad (21.11)$$

O campo elétrico produzido pelo anel não possui nenhum componente perpendicular a esse eixo. Portanto, no ponto P indicado na Figura 21.26, para cada anel temos $dE_y = dE_z = 0$, e o campo elétrico resultante possui componentes $E_y = E_z = 0$.

AVALIAR: suponha que o raio R do disco aumente indefinidamente adicionando-se, simultaneamente, cargas, de modo que a densidade superficial de carga σ (carga por unidade de área) permaneça constante. No limite, quando R se tornar muito maior do que a distância x do ponto do campo até o disco, o termo $1/\sqrt{(R^2/x^2)+1}$ na Equação (21.11) será desprezível e obteremos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad (21.12)$$

O resultado final não contém a distância x do ponto do campo até o disco. Isso significa que o campo elétrico produzido por um plano *infinito* com uma distribuição uniforme de cargas *é independente da distância entre o ponto e o plano*. Portanto, esse campo elétrico é uniforme; sua direção é sempre perpendicular ao plano e seu sentido aponta para fora do plano. Novamente, observamos que, na natureza, não existe nenhum plano infinito com cargas; contudo, quando a distância x do ponto do campo P for muito menor do que

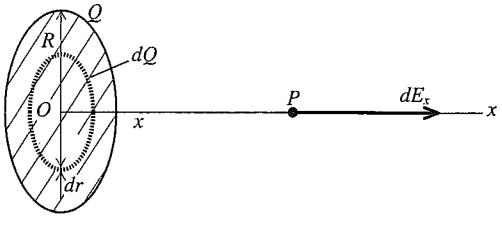


Figura 21.26 Nossa esquematização do problema.

as dimensões do plano, o campo elétrico nesse ponto será aproximadamente igual ao produto da Equação (21.11).

Se o ponto P estivesse situado à *esquerda* do plano ($x < 0$), em vez de à direita, o resultado seria o mesmo, exceto pelo fato de que o sentido de $\vec{E}$ seria da direita para a esquerda em vez de da esquerda para a direita. Além disso, caso a distribuição de cargas fosse negativa, os sentidos dos campos seriam para dentro do plano em vez de para fora dele.

Exemplo 21.13

CAMPO DE DUAS PLACAS INFINITAS CARREGADAS COM CARGAS OPOSTAS Duas placas paralelas infinitas possuem uma distância d entre elas (Figura 21.27). O plano da placa inferior possui uma densidade superficial de carga σ uniforme e positiva, e o plano superior possui uma densidade superficial de carga negativa $-\sigma$ com mesmo módulo. Determine o campo elétrico entre as duas placas, acima do plano inferior e abaixo do plano superior.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no Exemplo 21.12, encontramos o campo de um único plano infinito uniformemente carregado. O objetivo é achar o campo elétrico produzido por *duas* placas assim.

PREPARAR: usaremos o princípio da superposição para combinar os campos elétricos produzidos pelas duas placas, como indica a Figura 21.27.

EXECUTAR: suponha que o plano 1 seja o plano inferior com cargas positivas e o plano 2 seja o plano superior contendo cargas negativas; os campos produzidos por esses planos são, respectivamente, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$. De acordo com a Equação (21.12) do Exemplo 21.12, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ possuem o mesmo módulo nos dois lados de cada plano, independentemente da distância entre o ponto e qualquer plano:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Para qualquer ponto, a direção de $\vec{E}_1$ é sempre perpendicular ao plano e seu sentido aponta para fora da carga positiva do plano 1; a direção de $\vec{E}_2$ é sempre perpendicular ao plano e seu sentido aponta para dentro da carga negativa do plano 2. Esses campos, assim como os eixos x e y, são indicados na Figura 21.27.

ATENÇÃO Campos elétricos não são 'fluxos' Talvez você tenha ficado surpreso ao verificar que o plano 2 não afeta $\vec{E}_1$ e que o plano 1 não afeta $\vec{E}_2$. Você deve ter pensado que o campo de um plano 'penetra' no outro plano. Esse raciocínio é falso, pois se baseia na idéia errada de que o campo elétrico é um tipo de substância que 'flui', saindo ou entrando em uma carga. Na verdade, não existe esse tipo de substância, e os campos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ dependem somente das cargas que os produziram. O campo elétrico *resultante* é simplesmente dado pela soma vetorial de $\vec{E}_1$ com $\vec{E}_2$.

Nos pontos situados entre os planos, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ se reforçam porque possuem sentidos iguais; nos pontos acima do plano superior ou abaixo do plano inferior, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ se cancelam. Logo, o campo elétrico resultante é dado por

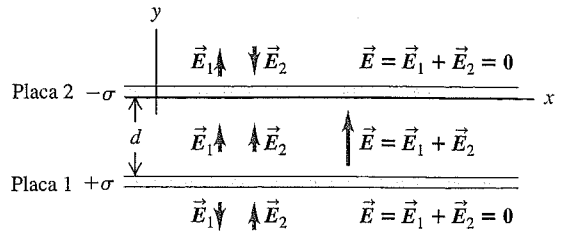


Figura 21.27 Cálculo do campo elétrico produzido por duas placas infinitas carregadas com cargas opostas. A figura mostra um corte ortogonal das placas; somente uma região das placas infinitas pode ser mostrada!

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{Acima da placa superior} \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j} & \text{Entre as placas} \\ \mathbf{0} & \text{Abaixo da placa inferior} \end{cases}$$

Como estamos supondo planos infinitos, nosso resultado não depende da distância d entre as placas.

AVALIAR: note que o campo elétrico entre duas placas com cargas opostas é uniforme. Usamos esse resultado nos exemplos 21.7 e 21.8, nos quais duas placas condutoras grandes foram conectadas aos terminais de uma bateria. A bateria produz cargas iguais e contrárias nas duas placas, gerando entre as placas um campo essencialmente uniforme quando a distância entre elas for muito menor do que suas dimensões. No Capítulo 23, mostraremos como uma bateria produz as cargas positivas e negativas sobre as placas. Denomina-se *capacitor* um dispositivo formado por duas placas condutoras paralelas com cargas contrárias; verifica-se que esse dispositivo possui uma extraordinária importância prática; e esse será o assunto principal do Capítulo 24.

Teste sua compreensão da Seção 21.5 Suponha que a linha de carga na Figura 21.25 (Exemplo 21.11) tivesse carga $+Q$ distribuída uniformemente entre $y = 0$ e $y = +a$ e tivesse carga $-Q$ distribuída uniformemente entre $y = 0$ e $y = -a$. Nesse caso, o campo elétrico em P (i) apontaria no sentido positivo de x; (ii) apontaria no sentido negativo de x; (iii) apontaria no sentido positivo de y; (iv) apontaria no sentido negativo de y; (v) seria igual a zero; (vi) nenhuma dessas alternativas. ∎

21.6 Linhas de força de um campo elétrico

O conceito de campo elétrico pode parecer um pouco ilusório porque não se pode vê-lo diretamente. As linhas de força do campo elétrico, ou simplesmente *linhas* do campo elétrico, constituem uma ajuda valiosa para se visualizar o campo e interpretá-lo de modo mais realista. Uma **linha de campo elétrico** é desenhada como uma linha imaginária reta ou curva que passa por uma região do espaço de tal modo que sua tangente em qualquer ponto forneça a direção e o sentido do campo elétrico no ponto considerado. A idéia básica é indicada na Figura 21.28. (Usamos um conceito semelhante em nossa discussão sobre o escoamento de um

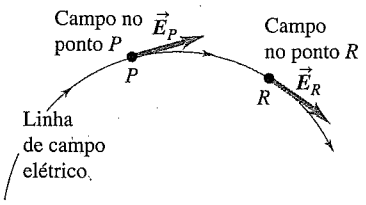


Figura 21.28 A direção do campo elétrico em qualquer ponto é tangente à linha de campo elétrico no ponto considerado.

fluido na Seção 14.5. Uma *linha de corrente* é uma linha reta ou curva cuja tangente em qualquer ponto fornece a direção e o sentido da velocidade do fluido no ponto considerado. Contudo, existe apenas semelhança matemática entre uma linha de corrente de um fluido e uma linha de campo elétrico; não existe nada 'fluindo' ao longo de uma linha de campo elétrico.) O cientista inglês Michael Faraday (1791-1867) foi o primeiro a introduzir o conceito de linhas de campo. Ele chamou essas curvas de 'linhas de força', porém a expressão 'linhas de campo elétrico' é preferível.

As linhas de campo elétrico indicam a direção e o sentido do campo elétrico $\vec{E}$ em qualquer ponto, e o espaçamento dessas linhas fornece uma idéia do *módulo* de $\vec{E}$ em cada ponto. Nos locais onde $\vec{E}$ é forte, desenhamos linhas agrupadas de forma compacta; onde $\vec{E}$ é fraco, as distâncias entre as linhas são maiores. Em qualquer ponto particular, o campo elétrico possui uma única direção, de modo que somente uma linha de campo elétrico pode passar em cada ponto. Em outras palavras, *as linhas de campo elétrico não podem se cruzar.*

A Figura 21.29 mostra algumas linhas de campo elétrico em um plano com (a) uma única carga positiva; (b) duas cargas de mesmo módulo, porém de sinais contrários (um dipolo); e (c) duas cargas positivas iguais. Diagramas como esses algumas vezes são chamados de *mapas do campo*. Eles são, na verdade, seções retas de uma configuração em três dimensões. A direção do campo elétrico resultante em cada ponto desses diagramas segue pela tangente até a linha de campo elétrico que passa pelo ponto considerado. As setas indicam o sentido do vetor do campo elétrico $\vec{E}$ ao longo de cada linha de campo elétrico. O tamanho real do vetor $\vec{E}$ foi desenhado em alguns pontos em cada uma das configurações. Note que, em geral, o módulo do campo elétrico é diferente em pontos diferentes da mesma linha de campo elétrico — uma linha de campo elétrico *não* é uma curva que possui o módulo do campo elétrico constante!

A Figura 21.29 mostra que as linhas de campo elétrico possuem sentido *para fora* das cargas positivas (visto que, nas vizinhanças de uma carga puntiforme positiva, o campo elétrico $\vec{E}$ aponta para fora da carga) e possuem sentido *para dentro* das cargas negativas (visto que, nas vizinhanças de uma carga puntiforme negativa, o campo elétrico $\vec{E}$ aponta para dentro da carga). Em locais onde o campo elétrico possui módulo grande, tal como entre as duas cargas com sinais contrários na Figura 21.29b, as linhas de campo são desenhadas de forma mais compactada. Nos locais onde o campo elétrico possui módulo pequeno, tal como entre as duas cargas positivas na Figura 21.29c, as distâncias entre as linhas são grandes. Em um campo elétrico *uniforme*, as linhas de campo são retas, paralelas, e as distâncias entre as linhas são constantes, como indica a Figura 21.20.

A Figura 21.30 mostra a vista de cima de um dispositivo experimental para visualizar as linhas de campo elétrico. Nesse dispositivo, as extremidades de dois fios carregados positivamente são inseridas em um recipiente com um líquido isolante e algumas pequenas sementes flutuam sobre o líquido. As sementes são isolantes neutros, porém o campo elétrico dos dois fios carregados produz uma *polarização* das sementes, gerando um ligeiro deslocamento das cargas no interior das moléculas da semente, como indica a Figura 21.8. A extremidade da semente com carga positiva é puxada no mesmo sentido de $\vec{E}$, e a extremidade da semente com carga negativa é puxada em senti-

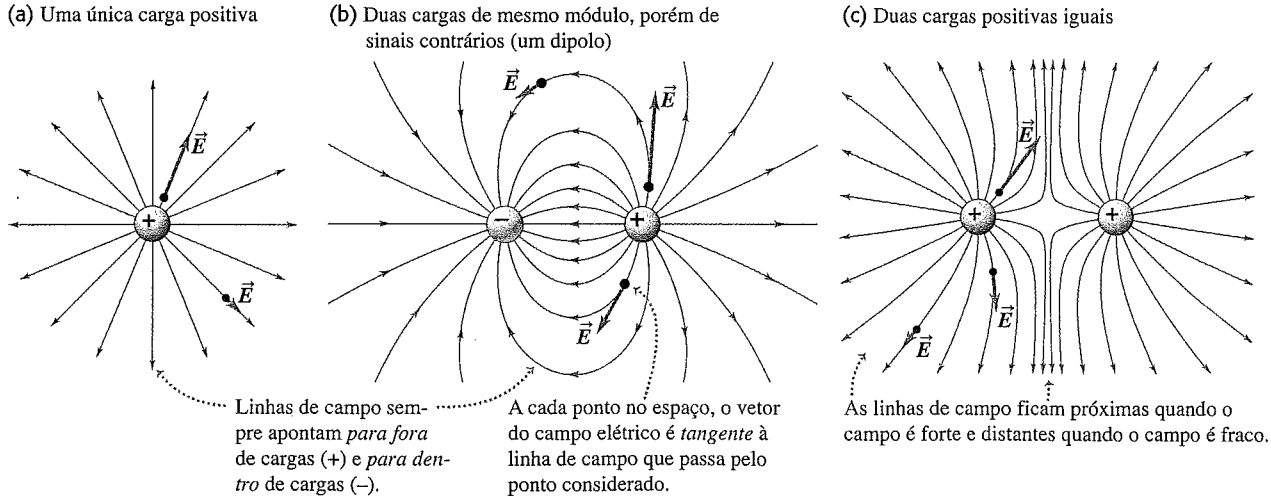


Figura 21.29 Linhas de campo elétrico para três distribuições de cargas. Geralmente o módulo do campo elétrico difere em pontos diferentes da mesma linha de campo elétrico.

do contrário ao de $\vec{E}$. Portanto, o eixo maior da semente tende a se orientar paralelamente ao campo elétrico na mesma direção da linha de campo elétrico que passa na posição da semente (Figura 21.30b).

ATENÇÃO Linhas de campo elétrico não são o mesmo que trajetórias É um erro conceitual comum imaginar que, quando uma partícula com carga q se move em um campo elétrico, ela se desloca ao longo de uma linha de campo elétrico. Como $\vec{E}$ em qualquer ponto é tangente à linha de campo elétrico que passa nesse ponto, é certamente verdade que a *força* $\vec{F} = q\vec{E}$ que atua sobre a partícula e, portanto, sua aceleração são tangentes à linha de campo elétrico. Contudo, aprendemos no Capítulo 3 que, quando uma partícula se move ao longo de uma trajetória curva, sua aceleração *não* pode ser tangente à trajetória. Logo, geralmente a trajetória de uma partícula carregada é *diferente* da linha de campo elétrico.

Teste sua compreensão da Seção 21.6 Suponha que as linhas de campo elétrico em determinada área no espaço sejam linhas retas. Se uma partícula carregada for libertada do repouso nessa área, a trajetória da partícula seguirá ao longo de uma linha de campo? ▮

21.7 Dipolos elétricos

Um **dipolo elétrico** é um par de cargas puntiformes com mesmo módulo, porém de sinais contrários (uma carga positiva q e uma carga negativa $-q$), separadas por uma distância d. Introduzimos o conceito de dipolo elétrico no Exemplo 21.9 (Seção 21.5); esse conceito é digno de um estudo mais aprofundado porque muitos sistemas físicos, de moléculas até antenas de TV, podem ser descritos como dipolos elétricos. Usaremos também extensivamente esse conceito quando discutirmos materiais dielétricos no Capítulo 24.

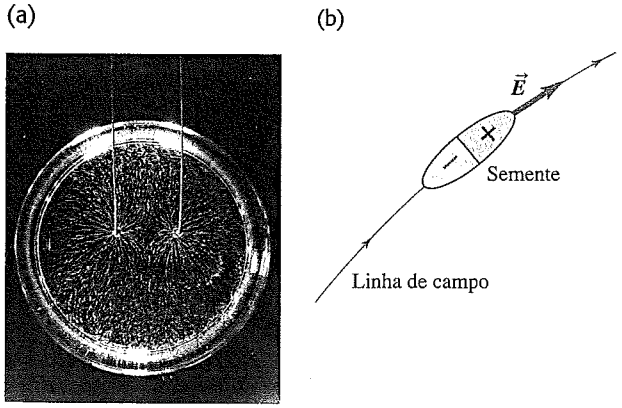


Figura 21.30 (a) Linhas de campo elétrico produzidas por duas cargas puntiformes iguais. A configuração é resultante de pequenas sementes flutuando sobre um líquido situado acima de dois fios carregados. Compare esta configuração com a configuração indicada na Figura 21.29c. (b) As linhas de campo elétrico produzem polarização nas sementes, que por sua vez se alinham ao campo.

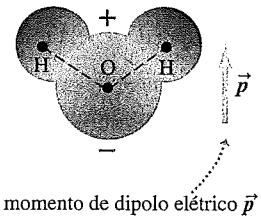
A Figura 21.31a mostra um esquema da molécula de água (H_2O), que, sob muitos aspectos, é semelhante a um dipolo elétrico. A molécula de água como um todo é eletricamente neutra, porém as ligações químicas no interior da molécula de água produzem um deslocamento das cargas; o resultado é uma carga líquida negativa na outra extremidade da molécula, ocupada pelo oxigênio, e uma carga líquida positiva na extremidade, ocupada pelos átomos de hidrogênio, formando um dipolo elétrico. O efeito é equivalente ao deslocamento de um único elétron a uma distância de apenas 4×10^{-11} m (aproximadamente igual ao raio de um átomo de hidrogênio). Porém, as conseqüências desse deslocamento são profundas. A água é um excelente solvente de substâncias iônicas, como, por exemplo, o sal de cozinha (cloreto de sódio, NaCl), precisamente porque a molécula de água é um dipolo elétrico (Figura 21.31b). Quando dissolvido em água, o sal se dissocia em um íon de sódio positivo (Na^+) e um íon de cloro negativo (Cl^-), os quais são atraídos, respectivamente, pelas extremidades negativas e positivas das moléculas de água; essa força mantém os íons separados na solução. Caso as moléculas de água não fossem dipolos elétricos, a água seria um solvente fraco e praticamente todos os efeitos físicos e químicos que ocorrem nas soluções aquosas seriam impossíveis. Esses efeitos incluem todas as reações bioquímicas em todos os tipos de vida existentes na Terra. Na realidade, podemos afirmar que sua existência como um ser vivo depende dos dipolos elétricos!

Vamos abordar duas questões sobre dipolos elétricos. Primeira: qual é a força resultante e o torque exercido sobre um dipolo elétrico quando este é colocado em um campo elétrico externo (ou seja, um campo oriundo de cargas no exterior do dipolo)? Segunda: qual é o campo elétrico produzido pelo próprio dipolo?

Força e torque sobre um dipolo elétrico

Para começar a abordar a primeira questão, vamos colocar o dipolo elétrico em um campo elétrico externo *uniforme* $\vec{E}$, como indica a Figura 21.32. Ambas as forças

(a) Uma molécula de água, indicando a carga positiva com o sinal + e a carga negativa com o sinal –



O momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ aponta da extremidade negativa para a extremidade positiva da molécula.

(b) Várias substâncias dissolvidas em água

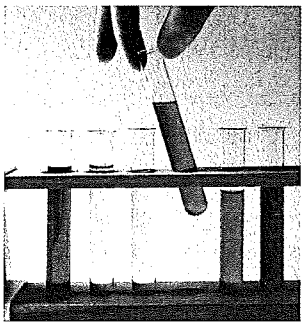


Figura 21.31 (a) A molécula de água é um exemplo de dipolo elétrico. (b) Cada tubo de teste contém uma solução de uma substância diferente na água. O grande momento de dipolo elétrico da água produz um excelente solvente.

$\vec{F}_+$ e $\vec{F}_-$ que atuam sobre as cargas possuem o mesmo módulo qE, porém os sentidos dessas forças são opostos e, portanto, a resultante é igual a zero. *A força resultante sobre um dipolo elétrico em um campo elétrico uniforme externo é igual a zero.*

Entretanto, como as forças não atuam ao longo da mesma linha reta, o *torque* resultante não é zero. Vamos calcular o torque em relação ao centro do dipolo. Seja ϕ o ângulo entre o campo elétrico $\vec{E}$ e o eixo do dipolo, então o braço da alavanca tanto para $\vec{F}_+$ quanto para $\vec{F}_-$ é igual a $(d/2)$ sen ϕ. O módulo do torque tanto para $\vec{F}_+$ quanto para $\vec{F}_-$ é igual a $(qE)(d/2)$ sen ϕ e ambos os torques tendem a fazer o dipolo girar no sentido horário (ou seja, $\vec{\tau}$ na Figura 21.32 entra perpendicularmente no plano da página). Logo, o módulo do torque resultante é exatamente igual ao dobro do módulo de cada torque individual:

$$\tau = (qE)(d \text{ sen } \phi) \tag{21.13}$$

em que d sen ϕ é a distância perpendicular entre as linhas de ação das duas forças.

O produto da carga q pela distância d é uma grandeza chamada **momento de dipolo elétrico**, designada pela letra p:

$$p = qd \tag{21.14}$$

(módulo do momento de dipolo elétrico)

As unidades de p são carga vezes distância (C · m). Por exemplo, o módulo do momento de dipolo elétrico da molécula de água é dado por $p = 6{,}13 \times 10^{-30}$ C · m.

ATENÇÃO O símbolo *p* possui vários significados Tome cuidado para não confundir o momento de dipolo com pressão nem com momento linear. Infelizmente, o número de grandezas físicas é maior do que o número de letras do alfabeto; logo, alguma letra terá de ser usada para designar mais de uma grandeza. O contexto em que a letra aparece é suficiente para evitar confusão, mas preste atenção.

Aprofundando a definição, dizemos que o momento de dipolo elétrico é uma grandeza *vetorial* $\vec{p}$, cujo módulo é dado pela Equação (21.14), e cuja direção é o eixo do dipolo, sendo o sentido orientado da carga negativa para a carga positiva, como indica a Figura 21.32.

Usando a Equação (21.13), o módulo do torque τ exercido pelo campo elétrico é dado em função de p pela relação

$$\tau = pE \text{ sen } \phi \tag{21.15}$$

(módulo do torque sobre um dipolo elétrico)

Visto que ϕ na Figura 21.32 é o ângulo entre o vetor $\vec{p}$ e o campo elétrico $\vec{E}$, a relação anterior faz lembrar a definição do módulo do *produto vetorial* discutido na Seção 1.10. (Você pode desejar fazer uma revisão dessa discussão.) Portanto, podemos escrever a relação do torque sobre um dipolo usando notação vetorial do seguinte modo:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{21.16}$$

(torque sobre um dipolo elétrico, em notação vetorial)

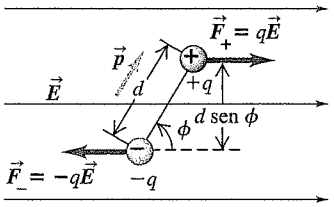


Figura 21.32 A força elétrica sobre este dipolo elétrico é igual a zero, porém existe um torque resultante entrando perpendicularmente no plano da página que tende a fazer o dipolo girar no mesmo sentido dos ponteiros do relógio.

Você pode usar a regra da mão direita para verificar que o vetor torque $\vec{\tau}$ na Figura 21.32 é orientado para dentro da página. O módulo do torque é máximo quando $\vec{p}$ e $\vec{E}$ são ortogonais e iguais a zero quando esses vetores são paralelos ou antiparalelos. O torque tende sempre a alinhar a direção de $\vec{p}$ paralelamente a $\vec{E}$. Para $\phi = 0$, ou seja, $\vec{p}$ e $\vec{E}$ paralelos, o equilíbrio é estável, e para $\phi = \pi$, ou seja, $\vec{p}$ e $\vec{E}$ antiparalelos, o equilíbrio é instável. A polarização de uma pequena semente, como no dispositivo indicado na Figura 21.30b, produz um momento de dipolo elétrico na semente; o torque produzido por $\vec{E}$ faz com que ela se alinhe paralelamente a $\vec{E}$ e, portanto, fique em equilíbrio ao longo de uma linha de campo.

Energia potencial de um dipolo elétrico

Quando um dipolo muda de direção em um campo elétrico, o torque do campo elétrico realiza um *trabalho* sobre ele, produzindo uma correspondente variação da energia potencial. O trabalho dW realizado pelo torque τ durante um deslocamento infinitesimal $d\phi$ é dado pela Equação (10.19): $dW = \tau\, d\phi$. Como o torque possui o sentido da *diminuição* de ϕ, devemos escrever o torque como $\tau = -pE$ sen ϕ; logo,

$$dW = \tau\, d\phi = -pE \text{ sen } \phi\, d\phi$$

Em um deslocamento finito de ϕ_1 até ϕ_2, o trabalho total realizado sobre o dipolo é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \operatorname{sen}\phi)\, d\phi \\ &= pE\cos\phi_2 - pE\cos\phi_1 \end{aligned}$$

O trabalho realizado é igual à variação da energia potencial com o sinal contrário, análogo ao que vimos no Capítulo 7: $W = U_1 - U_2$. Assim, vemos que uma definição apropriada de energia potencial U para esse sistema é

$$U(\phi) = -pE \cos \phi \tag{21.17}$$

Nessa relação, reconhecemos o *produto escalar* $\vec{p} \cdot \vec{E} = pE \cos \phi$, portanto podemos também escrever

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{(energia potencial para um dipolo em um campo elétrico)} \tag{21.18}$$

A energia potencial possui um valor mínimo $U = -pE$ (isto é, seu valor negativo com maior módulo), correspondendo a uma posição de equilíbrio estável, para $\phi = 0$ e $\vec{p}$ e $\vec{E}$ paralelos. A energia potencial possui um valor máximo para $\phi = \pi$ e $\vec{p}$ e $\vec{E}$ antiparalelos; então $U = +pE$. Quando $\phi = \pi/2$, em que $\vec{p}$ é perpendicular a $\vec{E}$, U será igual a zero. Naturalmente, poderíamos definir U de outro modo, considerando seu valor igual a zero para outra orientação de $\vec{p}$, porém nossa definição é a mais simples possível.

A Equação (21.18) provê outra forma de analisar o efeito indicado na Figura 21.30. O campo elétrico $\vec{E}$ fornece a cada semente um momento de dipolo elétrico, e a semente então se alinha a $\vec{E}$ para minimizar a energia potencial.

Exemplo 21.14

FORÇA E TORQUE SOBRE UM DIPOLO ELÉTRICO A Figura 21.33a indica um dipolo elétrico no interior de um campo elétrico uniforme com módulo igual a $5{,}0 \times 10^5$ N/C orientado paralelamente ao plano da figura. As cargas são $\pm 1{,}6 \times 10^{-19}$ C e ambas as cargas estão sobre o plano da figura, sendo que a distância entre elas é igual a 0,125 nm = $0{,}125 \times 10^{-9}$ m. (Ambos os valores precedentes são típicos de dimensões moleculares.) Calcule (a) a força resultante exercida pelo campo elétrico sobre o dipolo; (b) o módulo, a direção e o sentido do momento de dipolo elétrico; (c) o módulo, a direção e o sentido do torque; (d) a energia potencial do sistema na posição indicada.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa os conceitos desta seção referentes a um dipolo elétrico colocado em um campo elétrico.

PREPARAR: usamos a relação $\vec{F} = q\vec{E}$ para cada carga puntiforme, para achar a força sobre o dipolo como um todo. A Equação (21.14) fornece o momento de dipolo, a Equação (21.16) fornece o torque sobre o dipolo e a Equação (21.18) fornece a energia potencial do sistema.

EXECUTAR: (a) Uma vez que o campo elétrico é uniforme, as forças que atuam sobre as cargas são iguais e opostas e a força resultante é igual a zero.

(b) O módulo p do momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ é dado por

$$p = qd = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\,(0{,}125 \times 10^{-9}\ \text{m})$$
$$= 2{,}0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

O sentido de $\vec{p}$ vai da carga negativa para a carga positiva, formando um ângulo de 145° no sentido dos ponteiros do relógio com o sentido do vetor do campo elétrico (Figura 21.33b).

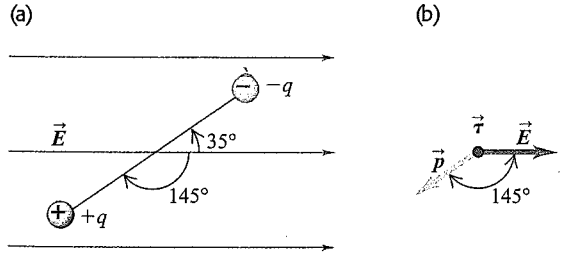


Figura 21.33 (a) Um dipolo elétrico. (b) Direções e sentidos do torque, campo elétrico e do momento de dipolo elétrico.

(c) O módulo do torque é

$$\tau = pE \operatorname{sen}\phi = (2{,}0 \times 10^{-29}\ \text{C})\,(5{,}0 \times 10^5\ \text{N/C})\,(\operatorname{sen} 145°)$$
$$= 5{,}7 \times 10^{-24}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Usando a regra da mão direita para o produto vetorial (veja a Seção 1.10), vemos que o torque $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ sai perpendicularmente do plano da página. Isso corresponde a uma rotação no sentido anti-horário, que tende a fazer $\vec{p}$ se alinhar a $\vec{E}$.

(d) A energia potencial é dada por

$$U = -pE \cos\phi$$
$$= -(2{,}0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m})\,(5{,}0 \times 10^5\ \text{N/C})\,(\cos 145°)$$
$$= 8{,}2 \times 10^{-24}\ \text{J}$$

AVALIAR: o momento de dipolo, o torque e a energia potencial são excessivamente pequenos. Não se surpreenda com esse resultado: lembre-se de que estamos analisando uma única molécula, que é realmente um objeto muito pequeno!

Nesta discussão, estamos supondo $\vec{E}$ uniforme, de modo que a força resultante que atua sobre o dipolo elétrico é igual a zero. Caso $\vec{E}$ não fosse uniforme, as forças nas extremidades não se cancelariam completamente e a força resultante poderia ser diferente de zero. Logo, um corpo sem nenhuma carga elétrica líquida, porém com um dipolo elétrico, pode sofrer a ação de uma força elétrica em um campo elétrico não uniforme. Como dissemos na Seção 21.1, um corpo neutro pode ser polarizado por um campo elétrico, surgindo nele uma separação de cargas e, portanto, um momento de dipolo elétrico. Isso explica como um corpo descarregado pode sofrer a ação de forças eletrostáticas (veja a Figura 21.8).

Campo de dipolo elétrico

Vamos agora estudar um dipolo elétrico como uma *fonte* de campo elétrico. Qual é o aspecto do campo elétrico? A forma geral é mostrada pelo mapa do campo indicado na Figura 21.29b. Em cada ponto da configuração, o campo elétrico resultante $\vec{E}$ é dado pela soma vetorial dos campos produzidos pelas duas cargas individuais, como mostrou o Exemplo 21.9 (Seção 21.5). Sugerimos que você faça diagramas mostrando essa soma vetorial em diversos pontos.

Para obtermos informações quantitativas sobre o campo de um dipolo elétrico, precisamos fazer alguns cálculos, como ilustra o Exemplo 21.15, a seguir. Observe o uso do princípio da superposição dos campos elétricos para a soma vetorial das contribuições individuais das cargas. Observe também que devemos usar técnicas de aproximação até mesmo no caso relativamente simples do campo elétrico produzido por duas cargas. Os cálculos envolvidos podem ser complicados, e geralmente utilizamos análises feitas com uso de um computador para a determinação do campo elétrico de distribuições arbitrárias de cargas.

Exemplo 21.15

CAMPO DE UM DIPOLO ELÉTRICO, NOVO ESTUDO Na Figura 21.34, um dipolo elétrico está centralizado na origem, com o vetor $\vec{p}$ apontando para o eixo $+Oy$. Deduza uma expressão para o campo elétrico ao longo do eixo Oy, considerando y muito maior do que d. Use a série binomial $(1 + x)^n$, ou seja, $(1 + x)^n \cong 1 + nx + (n-1)x^2/2 + \ldots$, para o caso $|x| < 1$. (Este exemplo ilustra uma técnica de cálculo muito útil.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos o princípio da superposição: o campo elétrico total é a soma vetorial do campo produzido pela carga positiva e do campo produzido pela carga negativa.

PREPARAR: no ponto do campo indicado na Figura 21.34, o campo da carga positiva possui um componente y positivo (de baixo para cima) e o campo da carga negativa possui um componente y negativo (de cima para baixo). Somamos esses componentes para obter o campo total e a seguir aplicamos a aproximação de que y é muito maior do que d.

EXECUTAR: o componente y do campo elétrico E_y produzido pelas duas cargas é dado por

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(y - d/2)^2} - \frac{1}{(y + d/2)^2}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2}\right]$$

Usamos esse método no Exemplo 21.9 (Seção 21.5). Agora vamos à aproximação. Quando y é muito maior do que d, estamos muito afastados do dipolo em comparação ao seu tamanho, portanto a grandeza $d/2y$ é muito menor do que 1. Fazendo $n = -2$ e identificando $d/2y$ com o papel desempenhado por x na série binomial, mantemos os dois primeiros termos da série. Os demais termos desprezados são muito menores do que esses dois termos; assim encontramos

$$\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 + \frac{d}{y} \quad \text{e} \quad \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 - \frac{d}{y}$$

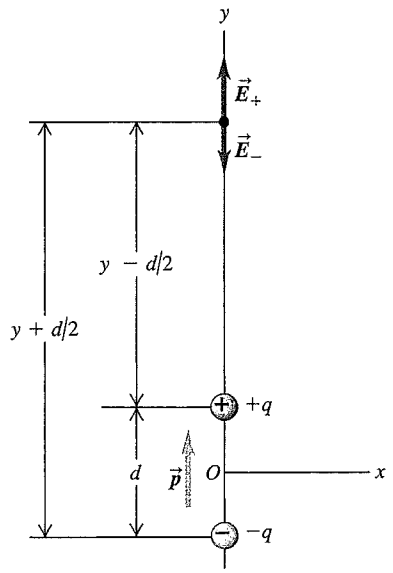


Figura 21.34 Cálculo do campo elétrico produzido por um dipolo elétrico para um ponto situado sobre seu eixo.

Portanto, E_y é dado aproximadamente por

$$E \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[1 + \frac{d}{y} - \left(1 - \frac{d}{y}\right)\right]$$
$$= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$
$$= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$

AVALIAR: um caminho alternativo para obter essa expressão consiste em colocar as frações da expressão de Ey sobre um denominador comum e combinar; em seguida, aproximamos o denominador $(y - d/2)^2(y + d/2)^2$ para y^4. Deixamos os detalhes para você (veja o Exercício 21.65).

Quando o ponto P não está sobre o eixo de coordenadas, as expressões são um pouco mais complicadas, porém para *todos* os pontos muito afastados do dipolo elétrico (em qualquer direção) o campo elétrico cai com $1/r^3$. Compare esse resultado com a dependência de $1/r^2$ para uma carga puntiforme, com a dependência de $1/r$ para uma linha de cargas e com a independência de r para o caso de um plano carregado infinito. Existem distribuições de cargas para as quais o campo elétrico decresce ainda mais rapidamente. Um *quadrupolo elétrico* é um conjunto de dois dipolos elétricos iguais com orientações opostas e separados por uma distância pequena. Para pontos muito afastados de seu centro, o campo elétrico de um quadrupolo cai com $1/r^4$.

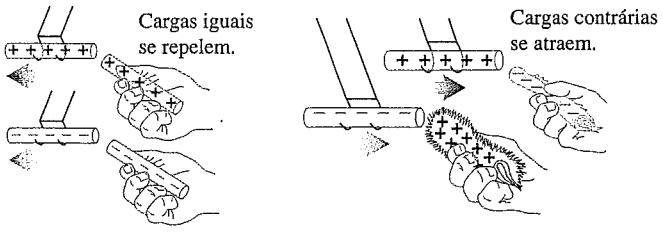
Teste sua compreensão da Seção 21.7 Um dipolo elétrico é colocado em uma área de campo elétrico uniforme $\vec{E}$, com o momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ apontando no sentido oposto a $\vec{E}$. O dipolo está (i) em equilíbrio estável, (ii) em equilíbrio instável ou (iii) nenhuma das alternativas? (*Sugestão:* Revise a Seção 7.5.)

Resumo

Carga elétrica, condutores e isolantes: a grandeza fundamental da eletrostática é a carga elétrica. Existem dois tipos de carga: a positiva e a negativa. Cargas de mesmo sinal se repelem. Cargas de sinais contrários se atraem. A carga se conserva; a carga total de um sistema isolado permanece sempre constante.

Toda matéria comum é constituída de prótons, nêutrons e elétrons. O próton (positivo) e o nêutron (eletricamente neutro) estão ligados no interior do núcleo pela ação da força nuclear; os elétrons giram em torno do núcleo em distâncias muito maiores do que o diâmetro nuclear. As interações elétricas são as principais responsáveis pela estrutura dos átomos, das moléculas e dos sólidos.

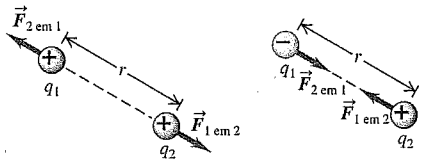
Os condutores são materiais no interior dos quais o movimento de cargas ocorre com facilidade. Os isolantes não permitem facilmente o movimento de cargas. Todos os metais são condutores, e muitos materiais não-metálicos são isolantes.



Lei de Coulomb: a lei de Coulomb é a lei básica para descrever a interação entre cargas elétricas puntiformes. Para cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r, o módulo da força sobre cada carga é proporcional ao produto q_1q_2 e inversamente proporcional a r^2. A direção da força que atua sobre uma carga é dada pela linha reta que une as duas cargas; ela é repulsiva quando q_1 e q_2 possuem o mesmo sinal e atrativa quando q_1 e q_2 apresentam sinais contrários. As forças formam um par de ação e reação e obedecem à terceira lei de Newton. A unidade SI de carga elétrica é o coulomb, abreviado pela letra C (exemplos 21.1 e 21.2).
O princípio da superposição das forças afirma que, quando duas ou mais cargas exercem forças entre si, a força total sobre uma dada carga é igual à soma vetorial das forças individuais exercidas pelas outras cargas sobre a referida carga (exemplos 21.3 e 21.4).

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2} \tag{21.2}$$

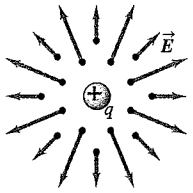
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$



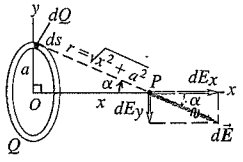
Campo elétrico: o campo elétrico $\vec{E}$, uma grandeza vetorial, é a força elétrica por unidade de carga exercida sobre uma carga de teste em qualquer ponto, desde que a carga de teste seja suficientemente pequena para que não perturbe as cargas que dão origem ao campo elétrico considerado. O campo elétrico produzido por uma carga puntiforme aponta radialmente para fora da carga ou para dentro dela (exemplos 21.5 a 21.8).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \tag{21.3}$$

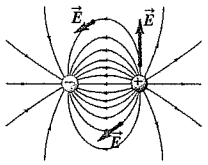
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{21.7}$$



Superposição dos campos elétricos: o princípio da superposição dos campos elétricos afirma que o campo elétrico $\vec{E}$ de qualquer combinação de cargas é igual à soma vetorial dos campos elétricos produzidos pelas cargas individuais. Para calcular o campo elétrico produzido por uma distribuição contínua de cargas, divida a distribuição em pequenos elementos, calcule o campo elétrico produzido por cada elemento e determine a soma vetorial para cada componente do campo elétrico, geralmente fazendo uma integral. As distribuições de cargas são descritas pela densidade linear de carga λ, pela densidade superficial de carga σ e pela densidade volumétrica de carga ρ (exemplos 21.9 a 21.13).



Linhas de campo elétrico: as linhas de campo elétrico fornecem uma representação gráfica do campo elétrico. Em qualquer ponto de uma linha de campo, a tangente à linha fornece a direção e o sentido de $\vec{E}$ no ponto considerado. O número de linhas por unidade de área (perpendicular à sua direção) é proporcional ao módulo de $\vec{E}$ no ponto considerado.

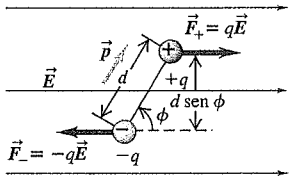


Dipolos elétricos: um dipolo elétrico é um par de cargas elétricas com sinais contrários que possuem o mesmo módulo q separadas por uma distância d. O momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ é um vetor cujo módulo é $p = qd$. A direção de $\vec{p}$ é o eixo do dipolo, e seu sentido aponta da carga negativa para a carga positiva. Um dipolo elétrico em um campo elétrico $\vec{E}$ sofre a ação de um torque $\vec{\tau}$, cujo módulo é o produto vetorial de $\vec{p}$ e $\vec{E}$. O módulo do torque depende do ângulo ϕ entre $\vec{p}$ e $\vec{E}$. A energia potencial U para um dipolo elétrico em um campo elétrico também depende da orientação relativa de $\vec{p}$ e $\vec{E}$ (exemplos 21.14 e 21.15).

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi \tag{21.15}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{21.16}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{21.18}$$



Principais termos

campo elétrico, 12
campo vetorial, 14
carga de teste, 13
carga elétrica, 2
carga induzida, 6
cargas puntiformes, 7
condutor, 5
coulomb, 8
densidade linear de carga, 18
densidade superficial de carga, 18
densidade volumétrica de carga, 18
dipolo elétrico, 25
elétron, 3
eletrostática, 2
ionização, 4
íon negativo, 4
íon positivo, 4
indução, 5
isolante, 5
lei de Coulomb, 7
linha de campo elétrico, 23
momento de dipolo elétrico, 26
nêutron, 3

núcleo, 3
número atômico, 4
ponto da fonte, 14
ponto do campo, 14
princípio da conservação da carga, 4
princípio da superposição das forças, 9
princípio da superposição dos campos elétricos, 18
próton, 3

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

As moléculas de água possuem um momento de dipolo elétrico permanente: uma das extremidades da molécula possui carga positiva e a outra extremidade possui carga negativa. Essas extremidades atraem íons positivos e negativos, respectivamente, mantendo-os isolados na solução. A água é menos eficaz como solvente para materiais cujas moléculas não se ionizam (chamadas substâncias *não iônicas*), como os óleos.

Resposta às Perguntas dos Testes de Compreensão

21.1 Respostas: (a) o bastão de plástico pesa mais, (b) o bastão de vidro pesa menos, (c) a peliça pesa um pouco menos, (d) a seda pesa um pouco menos. O bastão de plástico obtém carga negativa ao retirar elétrons da peliça, por isso pesa um pouco mais, enquanto a peliça pesa um pouco menos após o atrito entre eles. Por outro lado, o bastão de vidro obtém carga positiva ao ceder elétrons à seda. Logo, após o atrito entre eles, o bastão de vidro passa a pesar um pouco menos e a seda um pouco mais. A alteração no peso é *muito* pequena. O número de elétrons transferidos é uma pequena fração de um mol, e um mol de elétrons possui massa de somente ($6{,}02 \times 10^{23}$ elétrons) ($9{,}11 \times 10^{-31}$ kg/elétron) = $5{,}48 \times 10^{-7}$ kg = 0,548 miligramas!

21.2 Respostas: (a) (i), (b) (ii). Antes do toque entre as duas esferas, aquela com carga negativa exerce uma força repulsiva sobre os elétrons na outra esfera, produzindo zonas de carga induzida positiva e negativa (Figura 21.7b). A zona positiva está mais próxima da esfera com carga negativa, por isso há uma força resultante de atração que une as esferas, como o pente e o isolante na Figura 21.8b. Quando as duas esferas metálicas se tocam, parte do excedente de elétrons na esfera com carga negativa passará para a outra esfera (porque os metais são condutores). Logo, ambas as esferas terão carga negativa e vão se repelir.

21.3 Resposta: (iv). A força exercida por q_1 sobre Q continua sendo a mesma do Exemplo 21.4. O módulo da força exercida por q_2 sobre Q continua sendo igual a $F_{1\text{ em }Q}$, mas o sentido da força passa a ser *para dentro* de q_2, a um ângulo α abaixo do eixo x. Logo, os componentes x de ambas as forças se cancelam, enquanto os componentes y (negativos) se unem, e a força elétrica total aponta na direção negativa de y.

21.4 Respostas: (a) (ii), (b) (i). O campo elétrico $\vec{E}$ produzido por uma carga puntiforme positiva aponta diretamente para fora da carga (como na Figura 21.18a) e possui um módulo que depende da distância r da carga até o ponto do campo. Logo, uma segunda carga puntiforme negativa $q < 0$ sofrerá uma força $\vec{F} = q\vec{E}$, que aponta diretamente para dentro da carga positiva e possui um módulo que depende da distância r entre as duas cargas. Se a carga negativa se move diretamente para dentro da carga positiva, o sentido da força permanece o mesmo (ao longo da linha de movimento da carga negativa), mas o módulo da força aumenta à medida que a distância r diminui. Quando a carga negativa se move em círculo em torno da carga positiva, o módulo da força permanece inalterado (pois a distância r é constante), mas o sentido da força varia (quando a carga negativa fica à direita da carga positiva, a força é da direita para a esquerda; quando a carga negativa fica à esquerda da carga positiva, a força é da esquerda para a direita).

21.5 Resposta: (iv). Imagine um par de segmentos de comprimento dy, um na coordenada $y > 0$ e outro na coordenada $-y < 0$. O segmento superior possui carga positiva e produz um campo elétrico $d\vec{E}$ no ponto P, que aponta para fora do segmento; logo, $d\vec{E}$ possui componente positivo de x e negativo de y, como o vetor $d\vec{E}$ da Figura 21.25. O segmento inferior possui o mesmo valor de carga negativa. Ele produz um $d\vec{E}$ com o mesmo módulo, mas que aponta *para dentro* do segmento inferior e, portanto, possui um componente negativo de x e um componente negativo de y. Por analogia, os dois componentes de x são iguais porém contrários, cancelando-se. Assim, o campo elétrico total possui somente um componente negativo de y.

21.6 Resposta: sim. Se as linhas de campo forem retilíneas, $\vec{E}$ deve apontar na mesma direção por toda a área. Logo, a força $\vec{F} = q\vec{E}$ que atua sobre uma partícula de carga q está sempre na mesma direção. Uma partícula libertada do repouso acelera em linha reta no sentido de $\vec{F}$ e, portanto, sua trajetória é uma linha reta que estará ao longo de uma linha de campo.

21.7 Resposta: (ii) De acordo com as equações (21.17) e (21.18), a energia potencial para um dipolo em um campo elétrico é $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\phi$, em que ϕ é o ângulo entre os sentidos de $\vec{p}$ e $\vec{E}$. Se $\vec{p}$ e $\vec{E}$ apontam em sentidos opostos, de modo que $\phi = 180°$, temos $\cos\phi = -1$ e $U = +pE$. Esse é o valor máximo de U. Com base no estudo sobre diagramas de energia na Seção 7.5, deduz-se que essa é uma situação de equilíbrio instável.

Outra forma de analisar essa questão é pela Equação (21.15), segundo a qual o módulo do torque sobre um dipolo elétrico é $\tau = pE\,\text{sen}\,\phi$. Esse resultado será igual a zero, se $\phi = 180°$, portanto não há torque e, caso não seja perturbado, o dipolo não girará. Entretanto, caso o dipolo seja ligeiramente perturbado, de modo que ϕ seja um pouco menor do que 180°, haverá um torque diferente de zero, que tentará girar o dipolo em direção a $\phi = 0$, para que $\vec{p}$ e $\vec{E}$ apontem na mesma direção. Logo, quando o dipolo é perturbado da sua orientação de equilíbrio em $\phi = 180°$, ele se afasta dessa orientação — que é a marca do equilíbrio instável.

Pode-se mostrar que a situação em que $\vec{p}$ e $\vec{E}$ apontam no mesmo sentido ($\phi = 0$) é um caso de equilíbrio *estável*. A energia potencial é mínima e, se o dipolo é ligeiramente deslocado, há um torque que tenta fazê-lo voltar à orientação original (um torque de *restauração*).

Questões para discussão

Q21.1 Quando você destaca duas tiras de fita adesiva transparente do mesmo rolo e imediatamente as suspende próximas uma da outra, elas vão se repelir. Quando você gruda a parte adesiva de uma delas no lado brilhante da outra e depois puxa para afastá-las, elas vão se atrair. Dê uma explicação plausível para essa série de ocorrências, envolvendo a transferência de elétrons entre as tiras da fita adesiva.

Q21.2 Duas esferas metálicas estão suspensas com fios de náilon. Quando você as aproxima de modo que a distância entre elas se torne pequena, as duas esferas tendem a se atrair. Com base somente nessa informação, discuta todas as possibilidades de existência de cargas na superfície das esferas. Caso fosse possível o toque entre as esferas, elas permaneceriam unidas? Explique.

Q21.3 A força elétrica entre duas partículas carregadas torna-se fraca quando a distância aumenta. Suponha que, em vez disso, a força elétrica fosse *independente* da distância. Nesse caso, um pente carregado ainda poderia produzir uma polarização de um isolante neutro como indicado na Figura 21.8? Por quê? O isolante neutro ainda seria atraído pelo pente? Novamente, por quê?

Q21.4 Suas roupas tendem a se aglutinar depois que passam pela secadora. Por quê? Você espera que, na secagem, a aglutinação, supondo o mesmo material para todas as roupas (digamos, algodão), seja maior ou menor do que no caso de roupas feitas com materiais diferentes? Por quê? (Talvez você queira fazer a experiência na próxima vez em que lavar roupa.)

Q21.5 Uma esfera metálica descarregada está suspensa por um fio de náilon. Quando um bastão de vidro carregado positivamente é colocado próximo da esfera, ela é atraída e se move em direção ao bastão. Porém, se a esfera toca o bastão, ela repentinamente se afasta dele. Explique por que ela é inicialmente atraída e a seguir repelida.

Q21.6 Os elétrons livres de um metal são atraídos pela força de gravidade da Terra. Então, por que eles não se acumulam na base de um condutor, tal como a sedimentação de partículas no fundo de um rio?

Q21.7 Alguns elétrons livres em um bom condutor (tal como um pedaço de cobre) podem se mover com velocidades da ordem de 10^6 m/s. Então, por que esses elétrons não saem do condutor?

Q21.8 Bons condutores elétricos, como os metais, são, em geral, também bons condutores de calor; isolantes elétricos, como a madeira, são maus condutores de calor. Explique a razão pela qual deveria existir uma relação entre a condução elétrica e a condução térmica desses materiais.

Q21.9 Discuta a seguinte afirmação: "Se no universo inteiro existisse somente uma partícula com carga elétrica, o conceito de carga elétrica não serviria para nada".

Q21.10 Dois objetos metálicos idênticos são montados sobre suportes isolantes. Descreva como você poderia introduzir em tais objetos cargas com sinais contrários, porém com módulos exatamente iguais.

Q21.11 Uma película de plástico pode ser usada para cobrir um recipiente com alimentos, esticando-se a película sobre o topo do recipiente e pressionando-se a película excedente contra as partes laterais do recipiente. O que faz a película aderir? (*Dica:* A resposta envolve a força elétrica.) A película adere a ela mesma com a mesma intensidade? Por quê? Esse método funciona para um recipiente metálico? Por quê?

Q21.12 Quando você caminha sobre um tapete de náilon e a seguir toca um objeto metálico grande, tal como uma maçaneta, pode ocorrer uma faísca e você sentirá um choque. Por que em um dia seco existe maior probabilidade de isso ocorrer do que em um dia úmido? (*Dica:* veja a Figura 21.31.) Por que quando você toca um objeto *pequeno*, como um clipe de papel, a probabilidade de choque é menor?

Q21.13 Você tem um objeto com carga negativa. Como você pode usá-lo para colocar carga negativa em uma esfera metálica isolante? E para colocar carga positiva na esfera?

Q21.14 Quando duas cargas puntiformes de igual massa e carga são libertadas sobre uma mesa com atrito desprezível, cada qual possui uma aceleração inicial a_0. Se, em vez disso, você mantiver uma fixa e libertar a outra, qual será a aceleração inicial: a_0, $2a_0$ ou $a_0/2$? Explique.

Q21.15 Uma carga puntiforme com massa m e carga Q e outra carga puntiforme com massa m, porém com carga $2Q$, são libertadas sobre uma mesa com atrito desprezível. Caso a carga Q tenha uma aceleração inicial a_0, qual será a aceleração de $2Q$: a_0, $2a_0$, $4a_0$, $a_0/2$ ou $a_0/4$? Explique.

Q21.16 Um próton é colocado em um campo elétrico uniforme e depois libertado. A seguir um elétron é colocado nesse mesmo ponto e libertado. Essas duas partículas sofrem a mesma força? E a mesma aceleração? Elas se movem na mesma direção e sentido quando libertadas?

Q21.17 No Exemplo 21.1 (Seção 21.3), vimos que a força elétrica entre duas partículas α é da ordem de 10^{35} vezes mais forte que a força gravitacional. Então por que facilmente sentimos a gravidade da Terra, mas nenhuma força elétrica que dela emana?

Q21.18 Que semelhanças existem entre uma força elétrica e uma força gravitacional? Quais são as diferenças mais relevantes entre essas forças?

Q21.19 A uma distância R de uma carga puntiforme o campo elétrico é E_0. A qual distância (em termos de R) da carga puntiforme o campo elétrico seria $\frac{1}{3}E_0$?

Q21.20 Um núcleo é constituído por prótons e nêutrons. Isso mostra que, além da força elétrica e da força gravitacional, deve existir outro tipo de interação. Explique.

Q21.21 Um campo elétrico suficientemente forte pode fazer um átomo se tornar um íon positivo, isto é, fazer com que ele perca um ou mais elétrons. Explique como isso pode ocorrer. O que determina a intensidade mínima capaz de produzir esse efeito?

Q21.22 Os campos elétricos no ponto P produzidos pelas cargas positivas q_1 e q_2 são mostrados na Figura 21.35. O fato de elas se cruzarem viola a afirmação feita na Seção 21.6 de que os campos elétricos nunca se cruzam? Explique.

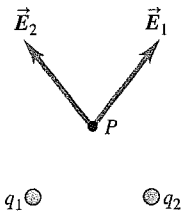


Figura 21.35 Questão 21.22.

Q21.23 A temperatura e a velocidade do ar possuem valores diferentes em diferentes pontos da atmosfera terrestre. A velocidade do ar é uma grandeza vetorial? Por quê? A temperatura do ar é uma grandeza vetorial? Por quê?

Exercícios

Seção 21.3 Lei de Coulomb

21.1 Uma pequena esfera de chumbo de massa igual a 8,0 g possui excesso de elétrons com uma carga líquida igual a $-3{,}20 \times 10^{-9}$ C. (a) Calcule o número de elétrons em excesso sobre a esfera. (b) Quantos elétrons em excesso existem por átomo de chumbo? O número atômico do chumbo é igual a 82 e sua massa atômica é 207 g/mol.

21.2 Um raio ocorre quando existe fluxo de cargas elétricas (principalmente elétrons) entre o solo e uma nuvem de tempestade. A taxa máxima do fluxo de cargas elétricas em um raio é aproximadamente igual a 20000 C/s; essa descarga dura cerca de 100 μs. Qual é a quantidade de carga que flui entre a terra e a nuvem nesse intervalo de tempo? Quantos elétrons fluíram durante esse intervalo?

21.3 Estime o número de elétrons existentes em seu corpo. Levante todas as hipóteses que você julgar relevantes, porém enuncie claramente cada uma delas. (*Dica:* Quase todos os átomos do seu corpo possuem iguais quantidades de elétrons, prótons e nêutrons.) Qual é a carga total correspondente ao número calculado?

21.4 Partículas em um anel de ouro. Você possui um anel de ouro puro (24 quilates) com massa igual a 17,7 g. A massa atômica do ouro é igual a 197 g/mol e seu número atômico é 79. (a) Quantos prótons existem no anel e qual é a carga total positiva correspondente? (b) Sabendo que o anel não tem nenhuma carga líquida, quantos elétrons ele possui?

21.5 Um ser humano médio pesa cerca de 650 N. Se dois seres assim carregassem, cada qual, 1,0 coulomb de excesso de carga, um positivo e outro negativo, qual deve ser a distância entre eles para que a atração elétrica seja igual aos seus pesos de 650 N?

21.6 Duas pequenas esferas separadas por uma distância igual a 20,0 cm possuem cargas iguais. Quantos elétrons em excesso devem estar presentes em cada esfera para que o módulo da força de repulsão entre elas seja igual a $4{,}57 \times 10^{-21}$ N?

21.7 Duas pequenas esferas de plástico possuem cargas elétricas positivas. Quando estão separadas por uma distância igual a 15,0 cm, a força de repulsão entre elas possui módulo igual a 0,220 N. Qual será a carga de cada esfera (a) se as cargas das esferas forem iguais? (b) Se a carga de uma esfera for o quádruplo da carga da outra esfera?

21.8 Duas pequenas esferas de alumínio, cada qual com massa igual a 0,0250 kg, estão separadas por uma distância de 80,0 cm. (a) Quantos elétrons estão presentes em cada esfera? (O número atômico do alumínio é 13 e sua massa atômica é 26,982 g/mol.) (b) Quantos elétrons devem ser removidos de uma esfera e adicionados na outra para que o módulo da força de atração entre elas seja igual a $1{,}00 \times 10^4$ N (aproximadamente igual ao peso de uma tonelada)? Suponha que as esferas possam ser tratadas como cargas puntiformes. (c) A que fração da carga total de cada esfera essa quantidade corresponde?

21.9 Duas esferas muito pequenas, de 8,55 g, estão a uma distância de 15,0 cm de um centro a outro e são carregadas adicionando-se um número igual de elétrons a cada uma delas. Desconsiderando-se todas as demais forças, quantos elétrons teriam de ser adicionados a cada esfera para que ambas acelerem a 25,0g quando forem libertadas? Para que lado elas vão acelerar?

21.10 (a) Supondo somente a atuação da força da gravidade, qual deveria ser a distância entre um elétron e um próton para que a sua aceleração seja a mesma de um objeto em queda livre na superfície terrestre? (b) Suponha que a Terra seja composta somente de prótons, mantendo o mesmo tamanho e massa atuais. Qual seria a aceleração de um elétron libertado na superfície? É necessário considerar a atração gravitacional bem como a força elétrica? Por quê?

21.11 Em uma experiência no espaço, um próton é mantido fixo e outro próton é libertado do repouso a uma distância de 2,50 mm. (a) Qual é a aceleração inicial do próton após ser libertado? (b) Faça gráficos qualitativos (sem números!) de aceleração *versus* tempo e velocidade *versus* tempo do movimento do próton libertado.

21.12 Uma carga negativa de – 0,550 μC exerce uma força de baixo para cima de 0,200 N sobre uma carga desconhecida, situada a 0,300 m diretamente abaixo da primeira. (a) Qual é a carga desconhecida (módulo e sinal)? (b) Determine o módulo, a direção e o sentido da força que a carga desconhecida exerce sobre a carga de – 0,550 μC.

21.13 Três cargas puntiformes estão dispostas em linha reta. A carga $q_3 = +5{,}0$ nC está na origem. A carga $q_2 = -3{,}0$ nC está em $x = +4{,}0$ cm. A carga q_1 está em $x = +2{,}0$ cm. Determine q_1 (módulo e sinal), quando a força resultante sobre q_3 for igual a zero.

21.14 No Exemplo 21.4, suponha que a carga puntiforme sobre o eixo Oy na posição $y = -0{,}30$ m possua uma carga negativa igual a $-2{,}0$ μC, mantendo a outra carga inalterada. Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante sobre a carga Q. Quais são as diferenças entre sua resposta e a resposta encontrada no Exemplo 21.3? Explique as diferenças.

21.15 No Exemplo 21.3, calcule a força resultante sobre a carga q_1.

21.16 No Exemplo 21.4, determine a força resultante (módulo, direção e sentido) sobre a carga q_1 exercida pelas outras duas cargas.

21.17 Três cargas puntiformes estão dispostas ao longo do eixo x. A carga $q_1 = +3{,}0$ μC está na origem e a carga $q_2 = -5{,}0$ μC está em $x = 0{,}200$ m. A carga $q_3 = -8{,}0$ μC. Onde q_3 estará localizado quando a força resultante sobre q_1 for 7,0 N no sentido $-x$?

21.18 Repita o Exercício 21.17 para $q_3 = +8{,}0$ μC.

21.19 Duas cargas puntiformes estão localizadas sobre o eixo Oy do seguinte modo: a carga $q_1 = -1{,}50$ nC no ponto $y = -0{,}600$ m; e a carga $q_2 = +3{,}20$ nC na origem ($y = 0$). Qual é a força resultante (módulo, direção e sentido) que essas duas cargas exercem sobre uma terceira carga $q_3 = +5{,}0$ nC, localizada no ponto $y = -0{,}400$ m?

21.20 Duas cargas puntiformes são colocadas sobre o eixo Ox do seguinte modo: a carga $q_1 = +4{,}0$ nC está localizada no ponto $x = 0{,}200$ m e a carga $q_2 = +5{,}0$ nC, na origem $x = -0{,}300$ m. Qual é o módulo, a direção e o sentido da força resultante que essas duas cargas exercem sobre uma terceira carga puntiforme negativa $q_3 = -6{,}0$ nC, localizada na origem?

21.21 Uma carga puntiforme positiva q está localizada sobre o eixo Oy no ponto $y = a$ e uma carga puntiforme negativa $-q$ está localizada sobre o eixo $-Oy$ no ponto $y = -a$. Uma carga puntiforme negativa $-Q$ está localizada em algum ponto sobre o eixo $+Ox$. (a) Faça um diagrama do corpo livre mostrando as forças que atuam sobre a carga $-Q$. (b) Determine os componentes x e y da força resultante da ação das cargas q e $-q$ sobre $-Q$. (Sua resposta deve envolver somente k, q, Q, a e a coordenada x da terceira carga.) (c) Qual é a força resultante sobre a carga $-Q$ quando ela está na origem ($x = 0$)? (d) Faça um gráfico do componente y da força resultante sobre $-Q$ em função de x para valores de x compreendidos entre $-4a$ e $+4a$.

21.22 Duas cargas puntiformes positivas q estão localizadas sobre o eixo Oy sobre os pontos $y = a$ e $y = -a$. Uma carga puntiforme negativa $-Q$ está localizada em algum ponto sobre o eixo Ox. (a) Faça um diagrama do corpo livre mostrando as forças que atuam sobre a carga $-Q$. (b) Encontre os componentes x e y da força resultante da ação das cargas q e $-q$ sobre $-Q$. (Sua resposta deve envolver somente k, q, Q, a e a coordenada x da terceira carga.) (c) Qual é a força resultante sobre a carga $-Q$ quando ela está na origem ($x = 0$)? (d) Faça um gráfico do componente x da força resultante sobre $-Q$ em função de x para valores de x compreendidos entre $-4a$ e $+4a$.

21.23 Quatro cargas idênticas Q são colocadas nos vértices de um quadrado de lado igual a L. (a) Faça um diagrama do corpo livre mostrando todas as forças que atuam sobre uma das cargas. (b) Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante exercida pelas outras três cargas sobre a carga considerada.

21.24 Duas cargas, uma de 2,50 μC e outra de –3,50 μC, são colocadas no eixo x, uma na origem e outra em $x = 0{,}600$ m, como indica a Figura 21.36. Determine a posição sobre o eixo x em que a força resultante sobre a pequena carga $+q$ será igual a zero.

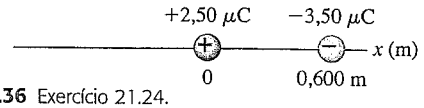


Figura 21.36 Exercício 21.24.

Seção 21.4 Campo elétrico e forças elétricas

21.25 Um próton é colocado em um campo elétrico uniforme de $2{,}75 \times 10^3$ N/C. Calcule: (a) o módulo da força elétrica sofrida

pelo próton; (b) a aceleração do próton; (c) a velocidade escalar do próton após 1,0 μs no campo, supondo que ele parta do repouso.

21.26 Uma partícula possui carga igual a –3,0 nC. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico produzido por essa partícula em um ponto situado a 0,250 m diretamente acima dela. (b) A que distância dessa partícula o campo elétrico possui módulo igual a 12,0 N/C?

21.27 Um próton se desloca horizontalmente da esquerda para a direita a $4,50 \times 10^6$ m/s. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico mais fraco capaz de trazer o próton uniformemente para o repouso, por uma distância de 3,20 cm. (b) Quanto tempo o próton leva para parar após entrar no campo? (c) Qual é o campo mínimo (módulo, direção e sentido) necessário para parar um elétron sob as condições descritas no item (a)?

21.28 Um elétron é libertado do repouso em um campo elétrico uniforme. O elétron acelera verticalmente de baixo para cima, percorrendo 4,50 m nos primeiros 3,0 μs após ser libertado. (a) Quais são o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico? (b) Há justificativa em se desprezar os efeitos da gravidade? Justifique sua resposta em termos quantitativos.

21.29 (a) Qual deve ser a carga (sinal e módulo) de uma partícula com 1,45 g para que ela permaneça em repouso quando colocada em um campo elétrico orientado de cima para baixo cujo módulo é igual a 650 N/C? (b) Qual deve ser o módulo de um campo elétrico para que a força elétrica exercida sobre um próton seja igual ao módulo do seu peso?

21.30 (a) Qual é o campo elétrico de um núcleo de ferro a uma distância igual a $6,00 \times 10^{-10}$ m do núcleo? O número atômico do ferro é igual a 26. Suponha que o núcleo possa ser considerado uma carga puntiforme. (b) Qual é o módulo do campo elétrico de um próton a uma distância igual a $5,29 \times 10^{-11}$ m do próton? (Essa distância é igual ao raio da órbita do elétron no modelo de Bohr para o estado fundamental do átomo de hidrogênio.)

21.31 A distância entre duas cargas puntiformes é de 25,0 cm (Figura 21.37). Determine o campo elétrico líquido que essas cargas produzem (a) no ponto A e (b) no ponto B. (c) Quais seriam o módulo, a direção e o sentido da força elétrica que esse conjunto de cargas produziria sobre um próton no ponto A?

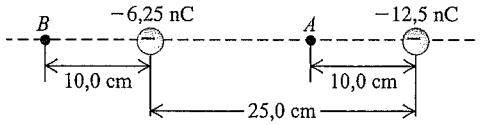


Figura 21.37 Exercício 21.31.

21.32 Campo elétrico da Terra. A Terra possui uma carga elétrica líquida que produz um campo elétrico orientado para o centro da Terra com módulo de 150 N/C em pontos próximos de sua superfície. (a) Qual seria o módulo e o sinal da carga líquida que uma pessoa de 60,0 kg deveria possuir para que seu peso fosse igual e contrário à força produzida pelo campo elétrico da Terra? (b) Qual deveria ser a força de repulsão entre duas pessoas que tivessem a carga calculada no item (a) quando a distância entre elas fosse igual a 100 m? O uso do campo elétrico da Terra poderia fornecer algum método factível para voar? Por quê?

21.33 Um elétron é projetado com velocidade inicial $v_0 = 1,60 \times 10^6$ m/s para dentro do campo elétrico uniforme entre as placas paralelas indicadas na Figura 21.38. Suponha que o campo seja uniforme e orientado verticalmente para baixo e considere igual a zero o campo elétrico fora das placas. O elétron entra no campo em um ponto intermediário entre as placas. (a) Sabendo que o elétron tangencia a placa superior quando ele sai do campo, calcule o módulo do campo elétrico. (b) Suponha que na Figura 21.38 o elétron seja substituído por um próton com a mesma velocidade inicial v_0. O próton colide com uma das placas? Se o próton não colide com nenhuma placa, qual deve ser o módulo, a direção e o sentido do seu deslocamento vertical quando ele sai da região entre as placas? (c) Compare as trajetórias seguidas pelo elétron e pelo próton e explique as diferenças. (d) Analise se é razoável desprezar os efeitos da gravidade para cada partícula.

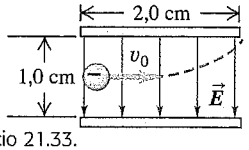


Figura 21.38 Exercício 21.33.

21.34 A carga puntiforme $q_1 = -5,0$ nC está na origem e a carga puntiforme $q_2 = +3,0$ nC está no eixo x em $x = 3,0$ cm. O ponto P está no eixo y em $y = 4,0$ cm. (a) Calcule os campos elétricos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ no ponto P produzidos pelas cargas q_1 e q_2. Expresse os resultados em termos das unidades de vetores (Exemplo 21.6). (b) Use os resultados do item (a) para obter o campo resultante em P, expresso em unidade de vetor.

21.35 No Exercício 21.33, qual é a velocidade escalar do elétron quando ele emerge do campo?

21.36 (a) Determine o módulo, a direção e o sentido (em relação ao eixo $+Ox$) do campo elétrico do Exemplo 21.6. (b) Uma carga puntiforme de –2,5 nC é colocada no ponto P da Figura 21.19. Determine o módulo, a direção e o sentido (i) da força que uma carga de – 8,0 nC situada na origem exerce sobre essa carga e (ii) da força que essa carga exerce sobre a carga de – 8,0 nC situada na origem.

21.37 (a) Para o elétron dos exemplos 21.7 e 21.8, compare o peso do elétron com o módulo da força elétrica sobre o elétron. É apropriado desprezar a força gravitacional sobre o elétron nesses exemplos? Explique. (b) Uma partícula com carga $+e$ é colocada em repouso entre as placas carregadas na Figura 21.20. Qual deve ser a massa dessa partícula para que ela permaneça em repouso? Forneça a resposta em quilogramas e em múltiplos da massa do elétron. (c) A resposta da parte (a) depende do local entre as placas no qual a partícula foi colocada? Por quê?

21.38 Há um campo elétrico uniforme na região entre duas placas planas paralelas com cargas de sinais contrários. Um próton é liberado do repouso na superfície da placa com carga positiva e, depois de um intervalo de tempo igual a $1,50 \times 10^{-6}$ s, ele colide sobre a superfície da placa oposta, que está a uma distância de 1,60 cm da primeira. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico. (b) Calcule o módulo da velocidade do próton quando ele atinge a placa com carga negativa.

21.39 Uma carga puntiforme está na origem. Considerando a carga uma fonte puntiforme, qual é o vetor unitário $\hat{r}$ para um ponto do campo situado em (a) $x = 0$, $y = -1,35$ m; (b) $x = 12,0$ cm, $y = 12,0$ cm; (c) $x = -1,10$ m, $y = 2,6$ m? Expresse os resultados em termos dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.

21.40 Uma carga puntiforme +8,75 μC está colada em uma mesa horizontal com atrito desprezível. Ela está atada a uma carga puntiforme de –6,50 μC por um fio leve, não condutor, de 2,50 cm. Um campo elétrico uniforme de módulo $1,85 \times 10^8$ N/C está direcionado paralelamente ao fio, como indica a Figura 21.39. (a) Determine a tensão no fio. (b) Qual seria a tensão, se ambas as cargas fossem negativas?

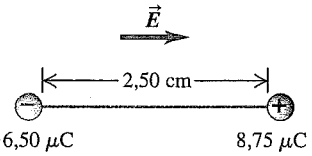


Figura 21.39 Exercício 21.40.

21.41 (a) Um elétron se desloca no sentido do leste para o oeste em um campo elétrico uniforme de 1,50 N/C, que aponta do oeste para o leste. No ponto A, a velocidade do elétron é $4,50 \times 10^5$ m/s no sentido do oeste para o leste. Qual é a velocidade escalar do elétron quando ele atinge o ponto B, que está a 0,375 m a leste do ponto A? (b) Um próton se desloca no campo elétrico uniforme do item (a). No ponto A, a velocidade do próton é $1,90 \times 10^4$ m/s, para leste. Qual é a velocidade escalar do próton no ponto B?

21.42 Campo elétrico no núcleo. A distância entre os prótons no núcleo é da ordem de 10^{-15} m (1 fm). (a) Qual é o módulo do campo elétrico produzido por um próton a uma distância de 1,50 fm dele? (b) Como esse campo se compara em termos de módulo ao campo do Exemplo 21.7?

Seção 21.5 Determinação do campo elétrico

21.43 Duas cargas puntiformes q são colocadas sobre o eixo Ox, uma no ponto $x = a$ e outra no ponto $x = -a$. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no ponto $x = 0$. (b) Deduza uma expressão para o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo Ox. Use seu resultado para fazer um gráfico do campo elétrico em função de x para valores de x compreendidos entre $-4a$ e $+4a$.

21.44 Duas partículas cujas cargas são $q_1 = 0,500$ nC e $q_2 = 8,0$ nC estão separadas por uma distância de 1,2 m. Em que ponto entre as cargas o campo elétrico resultante das duas cargas é igual a zero?

21.45 Uma carga puntiforme igual a +2,0 nC está na origem e uma segunda carga puntiforme igual a −5,0 nC encontra-se sobre o eixo Ox, no ponto $x = 0,800$ m. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico nos seguintes pontos sobre o eixo Ox: (i) $x = 0,200$ m; (ii) $x = 1,20$ m; (iii) $x = -0,200$ m. (b) Calcule a força elétrica resultante que essas duas cargas exerceriam sobre um elétron situado em cada um dos pontos mencionados no item (a).

21.46 Repita o Exercício 21.44, considerando $q_1 = -4,0$ nC.

21.47 Três cargas puntiformes negativas estão posicionadas ao longo de uma linha, como indica a Figura 21.40. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico que esse conjunto de cargas produz no ponto P, que está a 6,0 cm da carga −2,0 μC, medida perpendicularmente à linha que conecta as três cargas.

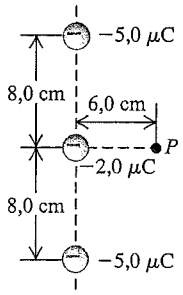


Figura 21.40 Exercício 21.47.

21.48 Uma carga puntiforme positiva q é colocada no ponto $x = a$ e outra carga puntiforme negativa $-q$ é colocada no ponto $x = -a$. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no ponto $x = 0$. (b) Deduza uma expressão para o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo Ox. Use seu resultado para fazer um gráfico do campo elétrico em função de x para valores de x compreendidos entre $-4a$ e $+4a$.

21.49 Em um sistema de coordenadas ortogonais, uma carga puntiforme positiva $q = 6,0 \times 10^{-9}$ C é colocada no ponto $x = +0,150$ m, $y = 0$; e outra carga idêntica é colocada no ponto $x = -0,150$ m, $y = 0$. Estabeleça os componentes x e y, bem como o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico nos seguintes pontos: (a) a origem; (b) $x = 0,300$ m, $y = 0$; (c) $x = 0,150$ m, $y = -0,400$ m; (d) $x = 0$, $y = 0,200$ m.

21.50 Uma carga puntiforme $q_1 = -4,0$ nC está no ponto $x = 0,600$ m, $y = 0,800$ m; e outra carga puntiforme $q_2 = +6,0$ nC está no ponto $x = 0,600$ m, $y = 0$. Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico na origem produzido por essas duas cargas.

21.51 Repita o Exercício 21.49 supondo que a carga situada no ponto $x = +0,150$ m, $y = 0$ seja positiva e que a outra carga seja negativa, cada qual com módulo $6,00 \times 10^{-9}$ C.

21.52 Um fio retilíneo muito longo possui carga por unidade de comprimento igual a $1,50 \times 10^{-10}$ C/m. A que distância do fio o módulo do campo elétrico é igual a 2,50 N/C?

21.53 Uma carga elétrica positiva é distribuída sobre o eixo Oy, sendo λ a carga por unidade de comprimento. (a) Considere o caso para o qual a carga seja distribuída somente entre os pontos $y = a$ e $y = -a$. Para os pontos sobre o eixo $+Ox$, faça um gráfico do componente x do campo elétrico em função de x para valores de x compreendidos entre $x = a/2$ e $x = 4a$. (b) Agora, suponha que a carga seja distribuída sobre todos os pontos do eixo Oy com a mesma carga por unidade de comprimento λ. Usando o mesmo gráfico obtido na parte (a), faça outra curva para o componente x do campo elétrico em função de x para valores de x compreendidos entre $x = a/2$ e $x = 4a$. Identifique os gráficos com as respectivas situações.

21.54 Um fio plástico retilíneo e não condutor de 8,50 cm de comprimento carrega uma densidade de carga de +175 nC/m distribuída uniformemente ao longo do comprimento. Ele está sobre a superfície horizontal de uma mesa. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico que esse fio produz em um ponto 6,0 cm diretamente acima do seu ponto médio. (b) Se o fio for dobrado em círculo sobre a mesa, ache o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico que ele produz em um ponto 6,0 cm diretamente acima do seu centro.

21.55 Um condutor em forma de anel com raio $a = 2,50$ cm possui uma carga positiva $Q = +0,125$ nC uniformemente distribuída ao longo do anel, como indica a Figura 21.24. O centro do anel está na origem O do sistema de coordenadas. (a) Qual é o campo elétrico (módulo, direção e sentido) no ponto P situado em $x = 40,0$ cm? (b) Uma carga puntiforme $q = -2,50$ μC está no ponto P descrito na parte (a). Determine o módulo, a direção e o sentido da força exercida *pela* carga q *sobre* o anel.

21.56 Uma carga de −6,50 nC está uniformemente distribuída sobre a superfície de uma face de um disco não condutor de raio 1,25 cm. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico que esse disco produz em um ponto P sobre o eixo do disco a uma distância de 2,0 cm do seu centro. (b) Suponha que a carga seja integralmente afastada do centro e uniformemente distribuída sobre a periferia do disco. Ache o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no ponto P. (c) Se a carga for integralmente trazida para o centro do disco, ache o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no ponto P. (d) Por que o campo no item (a) é mais forte do que o campo no item (b)? Por que o campo no item (c) é o mais forte de todos os campos?

21.57 A distância entre dois planos carregados infinitos é igual a d. O plano inferior carregado negativamente possui uma densidade superficial de carga $-\sigma < 0$. O plano superior carregado positivamente possui uma densidade superficial de carga $\sigma > 0$. Determine o campo elétrico (módulo, direção e sentido quando o campo for diferente de zero) (a) acima do plano superior; (b) abaixo do plano inferior; (c) entre os dois planos.

Seção 21.6 Linhas de força de um campo elétrico

21.58 A placa A possui densidade uniforme de carga positiva σ e a placa B, que está à direita de A e paralela a ela, possui densidade uniforme de carga negativa -2σ. (a) Faça um desenho das linhas de campo elétrico para esse par de placas. Inclua a área entre as placas bem como as áreas à esquerda de A e à direita de B. (b) Repita o item (a) para o caso em que a placa B possui carga de densidade $+2\sigma$.

21.59 Suponha que a carga indicada na Figura 21.29a seja fixa. Uma pequena partícula com carga positiva é colocada em algum ponto na figura e, a seguir, libertada. A trajetória da partícula seguirá uma linha de campo elétrico? Por quê? Suponha, por outro lado, que a partícula seja colocada em algum ponto na Figura 21.29b e libertada (as cargas positiva e negativa mostradas na figura estão fixas). A trajetória seguirá uma linha de campo elétrico? Novamente, por quê? Explique quaisquer diferenças entre suas respostas para as duas diferentes situações.

21.60 Faça um esboço das linhas de campo elétrico para um disco de raio R que possui uma densidade superficial de carga positiva σ. Para fazer esse desenho use o resultado que você conhece sobre o campo elétrico em pontos muito próximos do disco e em pontos muito afastados do disco.

21.61 (a) Faça um esboço das linhas de campo elétrico para um fio retilíneo infinito uniformemente carregado. Você poderá achar útil fazer o desenho das linhas de campo em um plano com o fio carregado e desenhar as linhas de campo em um plano ortogonal ao fio. (b) Explique como seus desenhos mostram que (i) o módulo E do campo elétrico depende somente da distância r entre o ponto e o fio e que (ii) E diminui com $1/r$.

21.62 A Figura 21.41 mostra algumas linhas de campo elétrico produzidas por três cargas puntiformes localizadas ao longo de um eixo vertical. Todas as três cargas possuem o mesmo módulo. (a) Quais são os sinais de cada uma das três cargas? Explique seu raciocínio. (b) Em que ponto(s) o módulo do campo elétrico atinge seu valor mínimo? Explique como os campos produzidos pelas cargas individuais se combinam para fornecer o campo elétrico resultante nesse(s) ponto(s).

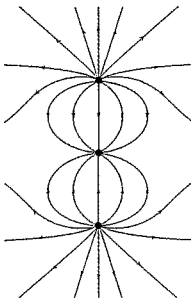


Figura 21.41 Exercício 21.62.

Seção 21.7 Dipolos elétricos

21.63 A distância entre duas cargas puntiformes $q_1 = -4{,}5$ nC e $q_2 = +4{,}5$ nC é igual a 3,1 mm, formando um dipolo elétrico. (a) Calcule o momento de dipolo elétrico (módulo, direção e sentido). (b) As cargas estão no interior de um campo elétrico cuja direção faz um ângulo de 36,9° com o eixo que liga as cargas. Qual é o módulo desse campo elétrico, sabendo que o módulo do torque exercido sobre o dipolo elétrico é igual a $7{,}2 \times 10^{-9}$ N · m?

21.64 A molécula de amônia (NH_3) possui um momento de dipolo elétrico igual a $5{,}0 \times 10^{-30}$ C · m. Moléculas de amônia na fase gasosa são colocadas em um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ cujo módulo é igual a $1{,}6 \times 10^6$ N/C. (a) Qual é a carga e a energia potencial elétrica quando o momento de dipolo muda sua orientação em relação a $\vec{E}$, de uma direção paralela para uma direção perpendicular? (b) Qual é a temperatura absoluta T para a qual a energia cinética média da translação $\frac{3}{2}kT$ das moléculas é igual à variação da energia potencial calculada no item (a)? (Acima dessa temperatura, a agitação térmica impede que o dipolo elétrico se alinhe com o campo elétrico.)

21.65 No Exemplo 21.15, deduzimos o resultado aproximado $E \cong p/2\pi\epsilon_0 y^3$ para o campo elétrico ao longo do eixo de um dipolo elétrico. (a) Deduza novamente essa relação, colocando as frações da expressão de E no denominador comum, conforme descrito no Exemplo 21.15. (b) Por que o resultado aproximado também fornece uma aproximação correta para E_y quando $y < 0$?

21.66 O momento de dipolo da molécula de água (H_2O) é $6{,}17 \times 10^{-30}$ C · m. Suponha que a molécula de água esteja na origem com o momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ apontando no sentido $+x$. Um íon de cloro (Cl^-), com carga igual a $-1{,}60 \times 10^{-19}$ C, está localizado no ponto $x = 3{,}0 \times 10^{-19}$ m. Determine o módulo, a direção e o sentido da força que a molécula de água exerce sobre o íon de cloro. A força é de atração ou de repulsão? Suponha que x seja muito maior do que a distância d entre as cargas do dipolo elétrico, de modo que você pode usar a expressão aproximada para o campo elétrico ao longo do eixo do dipolo elétrico encontrada no Exemplo 21.15.

21.67 **Tensão superficial.** A superfície de um líquido polar, tal como a água, pode ser considerada uma série de dipolos encadeados no arranjo estável, em que os vetores do momento de dipolo estão paralelos à superfície e tudo aponta na mesma direção. Suponha que algo exerça uma pressão para dentro da superfície, distorcendo os dipolos mostrados na Figura 21.42. (a) Mostre que os dois dipolos oblíquos exercem uma força resultante de baixo para cima sobre o dipolo que está entre eles e, portanto, se opõem à força externa de cima para baixo. (b) Mostre que os dipolos se atraem e, portanto, resistem à separação. A força entre os dipolos se opõe à penetração da superfície do líquido e é um modelo simples de tensão superficial (Seção 14.3 e Figura 14.15).

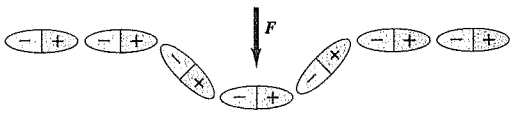


Figura 21.42 Exercício 21.67.

21.68 Considere o dipolo elétrico do Exemplo 21.15. (a) Deduza uma expressão para o módulo do campo elétrico produzido pelo dipolo em um ponto sobre o eixo x da Figura 21.34. Qual é a direção e o sentido desse campo elétrico? (b) Como o campo elétrico nos pontos sobre o eixo x depende de x quando este é muito grande?

21.69 **Torque sobre um dipolo.** Um dipolo elétrico com momento de dipolo $\vec{p}$ está em um campo elétrico uniforme $\vec{E}$. (a) Determine as orientações do dipolo para as quais o torque sobre o dipolo é igual a zero. (b) Qual das orientações do item (a) é estável e qual é instável? (*Sugestão:* considere um pequeno deslocamento para fora da posição de equilíbrio e verifique o que acontece.) (c) Mostre

que, para a orientação estável do item (b), o próprio campo elétrico do dipolo tende a se opor ao campo externo.

21.70 Um dipolo que consiste de cargas $\pm e$, a 220 nm de distância, está colocado entre duas placas muito grandes (essencialmente infinitas) com densidades de cargas iguais, porém opostas, de 125 $\mu C/m^2$. (a) Qual é a energia potencial máxima desse dipolo produzida pelas placas e qual deveria ser sua orientação em relação às placas para atingir esse valor? (b) Qual é o torque máximo que pode ser exercido sobre o dipolo e qual deve ser sua orientação em relação às placas para atingir esse valor? (c) Qual é a força resultante exercida pelas duas placas sobre o dipolo?

21.71 Três cargas se situam nos vértices de um triângulo isósceles, como indica a Figura 21.43. As cargas de $\pm$ 5,0 μC formam um dipolo. (a) Determine a força (módulo, direção e sentido) que a carga –10,0 μC exerce sobre o dipolo. (b) Para um eixo perpendicular à linha que liga as cargas de $\pm$ 5,0 μC no meio dessa linha, ache o torque (módulo, direção e sentido) exercido sobre o dipolo pela carga –10,0 μC.

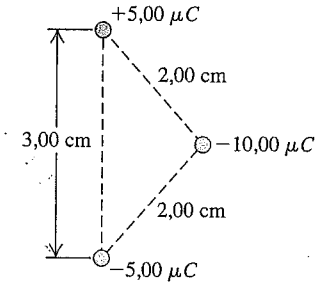


Figura 21.43 Exercício 21.71.

Problemas

21.72 Uma carga $q_1 = +5{,}0$ nC é colocada na origem de um sistema de coordenadas e uma carga $q_2 = 2{,}0$ nC é colocada no lado positivo do eixo Ox, no ponto $x = 4{,}0$ cm. (a) Se uma terceira carga $q_3 = 6{,}0$ nC é colocada no lado positivo do eixo Ox, no ponto $x = 4{,}0$ cm, $y = 3{,}0$ cm, quais são os componentes x e y da força resultante que atua sobre essa carga exercida pelas outras cargas? (b) Determine o módulo, a direção e o sentido dessa força.

21.73 Duas cargas puntiformes positivas Q são mantidas fixas sobre o eixo Ox, nos pontos $x = a$ e $x = -a$. Uma terceira carga puntiforme positiva q, com massa m, é colocada sobre o eixo Ox afastada da origem em um ponto x tal que $|x| << a$. A carga q, que pode se mover livremente ao longo do eixo Ox, é, a seguir, liberada. (a) Determine a freqüência das oscilações da carga q. (*Sugestão:* faça uma revisão da definição de movimento harmônico simples na Seção 13.2. Use a série binomial $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + \cdots$, válida para $|z| << 1$.) (b) Agora, suponha que a carga q seja colocada sobre o eixo Oy em um ponto y tal que $|y| << a$ e, a seguir, liberada. Caso essa carga possa se mover livremente no plano xy, o que ocorrerá com ela? Explique sua resposta.

21.74 Duas esferas idênticas de massa m estão suspensas em fios de seda de comprimento L, como indicado na Figura 21.44. Cada esfera possui a mesma carga; logo, $q_1 = q_2 = q$. O raio de cada esfera é muito pequeno em comparação à distância entre as esferas, de modo que elas podem ser consideradas cargas puntiformes. Mostre que, se o ângulo θ for pequeno, a distância d no equilíbrio entre as esferas será dada por $d = (q^2L/2\pi\epsilon_0 mg)^{1/3}$. (*Sugestão:* quando θ for pequeno, então tg $\theta \cong$ sen θ.)

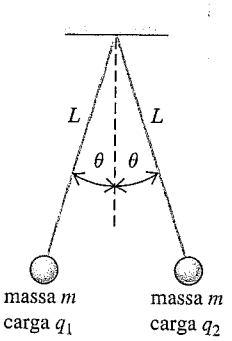


Figura 21.44 Problemas 21.74, 21.75 e 21.76.

21.75 Duas pequenas esferas idênticas, de massa $m = 15{,}0$ g, estão suspensas por fios de seda de comprimento $L = 1{,}20$ m e presos em um ponto comum (Figura 21.44). Cada esfera possui a mesma carga; logo, $q_1 = q_2 = q$. Cada fio possui inclinação $\theta = 25{,}0°$ com a vertical. (a) Faça um desenho mostrando as forças que atuam sobre cada esfera. Considere as esferas como cargas puntiformes. (b) Calcule o módulo de q. (c) Os dois fios agora se encurtam para um comprimento $L = 0{,}600$ m, enquanto as cargas q_1 e q_2 ficam inalteradas. Qual será o novo ângulo que cada fio formará com a vertical? (*Sugestão:* esta parte do problema pode ser resolvida numericamente pelo método das tentativas; escolha um valor inicial para θ e ajuste os valores de θ até obter um valor autoconsistente com a resposta.)

21.76 Duas esferas idênticas estão suspensas por fios de seda de comprimento $L = 0{,}500$ m, presos em um ponto comum (Figura 21.44). Cada esfera possui $m = 8{,}0$ g. O raio de cada esfera é muito pequeno em comparação à distância entre as esferas, de modo que elas podem ser consideradas cargas puntiformes. Uma esfera possui uma carga q_1 e a outra possui uma carga diferente q_2; as esferas se afastam e, quando elas atingem o equilíbrio, cada fio forma um ângulo $\theta = 20{,}0°$ com a vertical. (a) Faça um diagrama do corpo livre para cada esfera na posição de equilíbrio, identificando com símbolos todas as forças que atuam em cada esfera. (b) Determine o módulo da força eletrostática que atua sobre cada esfera e calcule a tensão em cada fio. (c) Com base nos dados do problema, o que você pode concluir sobre os módulos e os sinais das cargas q_1 e q_2? Explique suas respostas. (d) Agora um pequeno fio condutor é conectado entre as duas esferas, permitindo que ocorra uma transferência de cargas de uma para outra até que as duas esferas fiquem com cargas iguais; a seguir o fio é removido. Então, cada fio passa a formar um ângulo de 30,0° com a vertical. Calcule os valores das cargas originais q_1 e q_2. (*Sugestão:* a carga total sobre as duas esferas permanece constante.)

21.77 O cloreto de sódio (NaCl, sal de cozinha comum) é composto de íons positivos de sódio (Na^+) e íons negativos de cloro (Cl^-). (a) Calcule o módulo da força de atração entre uma carga puntiforme constituída pela mesma massa e carga total dos íons Na^+ existentes em 0,100 mol de NaCl, a uma distância 2,0 cm de outra carga puntiforme de mesmo módulo, constituída pela mesma massa e carga total dos íons Cl^- existentes. (b) Supondo que a carga puntiforme positiva da parte (a) seja mantida fixa e que a carga puntiforme negativa seja liberada do repouso, qual será sua aceleração? (Veja o Apêndice D para as massas atômicas necessárias.) (c) Parece razoável que os íons em NaCl possam ser separados dessa forma? Por quê? (De fato, quando o cloreto de sódio se dissolve na água, ele se quebra em íons Na^+ e Cl^-. Entretanto, neste caso, forças elétricas adicionais são exercidas pela água.)

21.78 Duas cargas puntiformes q_1 e q_2 são mantidas fixas a uma distância de 4,50 cm. Outra carga puntiforme $Q = -1{,}75\ \mu C$, de massa igual a 5,0 g, está inicialmente localizada a 3,0 cm de cada uma dessas cargas (Figura 21.45) e é libertada do repouso. Você verifica que a aceleração inicial de Q é 324 m/s^2 de baixo para cima, paralela à linha que liga as duas cargas puntiformes. Ache q_1 e q_2.

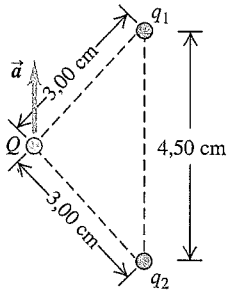


Figura 21.45 Exercício 21.78.

21.79 Três cargas puntiformes idênticas q são colocadas nos vértices de um quadrado de lado L. Calcule o módulo, a direção e o sentido da força resultante sobre uma carga puntiforme $-3q$ colocada (a) no centro do quadrado; (b) no vértice vazio do quadrado. (c) Em cada caso, faça um diagrama do corpo livre mostrando todas as forças que atuam sobre a carga $-3q$ exercidas pelas outras três cargas.

21.80 Três cargas puntiformes são distribuídas ao longo do eixo Oy; uma carga q no ponto $y = -a$, uma carga $-2q$ na origem e uma carga q no ponto $y = -a$. Esse arranjo é chamado de quadrupolo elétrico. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico nos pontos positivos sobre o eixo x. (b) Use a série binomial para obter uma expressão aproximada para o campo elétrico válido para $x >> a$. Compare esse comportamento ao campo elétrico produzido por uma carga puntiforme e ao campo produzido por um dipolo elétrico.

21.81 Intensidade da força elétrica. Imagine duas sacolas de 1,0 g com prótons, uma no pólo norte e outra no pólo sul. (a) Quantos prótons há em cada sacola? (b) Calcule a atração gravitacional e a repulsão elétrica que cada sacola exerce sobre a outra. (c) As forças no item (b) são suficientes para que você sinta que está segurando uma das sacolas?

21.82 Força elétrica dentro do núcleo. As dimensões típicas do núcleo atômico são da ordem de 10^{-15} m (1 fm). (a) Se a distância entre dois prótons em um núcleo é de 2,0 fm, ache o módulo da força elétrica que cada um exerce sobre o outro. Expresse a resposta em newtons e em libras. Essa força é suficientemente grande para ser sentida por uma pessoa? (b) Considerando que os prótons se repelem de forma tão intensa, por que eles não saem do núcleo?

21.83 Se os átomos não fossem neutros... Como a carga de um elétron é igual e contrária à carga de um próton, os átomos são eletricamente neutros. Suponha que isso não fosse precisamente correto e que a carga do elétron fosse 0,00100% menor do que a carga de um próton. (a) Faça uma estimativa da carga total existente em um dicionário com 5 cm de espessura nessas circunstâncias. Levante qualquer hipótese que julgar necessária, porém enuncie claramente cada uma delas. (*Sugestão:* quase todos os átomos do dicionário possuem o mesmo número de elétrons, prótons e nêutrons.) (b) Usando o valor estimado, calcule o módulo da força elétrica entre dois dicionários separados por uma distância igual a 5,0 m. Essa força é de atração ou de repulsão? Estime qual deve ser a aceleração de cada dicionário quando eles estão a uma distância de 5,0 m, imaginando que não existisse nenhuma outra força a não ser a força elétrica. (c) Discuta como o fato de a matéria ordinária ser estável implica a conclusão de que o valor absoluto da carga do elétron deve ser igual ao da carga do próton com uma precisão *muito* elevada.

21.84 Duas minúsculas bolas de massa m possuem carga igual, porém contrárias de módulo q. Elas estão atadas ao mesmo gancho de teto por fios leves, de comprimento L. Quando um campo elétrico uniforme horizontal E é ativado, as bolas ficam suspensas a um ângulo θ entre os fios (Figura 21.46). (a) Qual bola (a da esquerda ou a da direita) é positiva e qual é negativa? (b) Ache o ângulo θ entre os fios em termos de E, q, m e g. (c) À medida que a força do campo elétrico aumenta, o que o resultado do item (b) fornece para o maior ângulo θ possível?

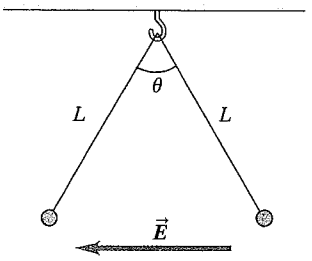


Figura 21.46 Problema 21.84.

21.85 Duas pequenas esferas de cobre possuem raio de 1,0 mm cada uma. (a) Quantos átomos cada esfera contém? (b) Suponha que cada átomo de cobre contenha 29 prótons e 29 elétrons. Sabemos que elétrons e prótons possuem cargas com exatamente o mesmo módulo, mas vamos explorar o efeito de pequenas diferenças (consulte também o Problema 21.83). Se a carga de um próton é $+e$ e o módulo da carga de um elétron é 0,100% menor, qual é a carga líquida de cada esfera e qual força uma esfera exerceria sobre a outra, se a distância entre elas fosse de 1,0 m?

21.86 Funcionamento de uma impressora a jato de tinta. Em uma impressora que usa jato de tinta, as letras são reproduzidas numa folha de papel injetando-se gotas de tinta, que saem de um pulverizador que se move rapidamente. As gotas de tinta, com massa de $1{,}4 \times 10^{-8}$ g cada uma, deixam o pulverizador e se dirigem para o papel com velocidade igual a 20 m/s. Quando a gota passa por uma unidade de eletrostática, ela deixa alguns elétrons e adquire uma carga q. A seguir, as gotas passam entre placas defletoras, com comprimento igual a 2,0 cm, no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme com módulo igual a $8{,}0 \times 10^4$ N/C. Sabendo que a gota deve sofrer um desvio de 0,30 mm ao atingir o final da placa defletora, qual deve ser o módulo da carga?

21.87 Um próton é projetado para o interior de um campo elétrico uniforme que aponta verticalmente para cima e possui módulo E. A velocidade inicial do próton possui módulo v_0 e sua direção forma um ângulo α abaixo da horizontal. (a) Calcule a distância máxima $h_{máx}$ que o próton desce verticalmente abaixo de sua altura inicial. Despreze as forças gravitacionais. (b) Depois de qual distância horizontal d o próton retorna à sua altura inicial? (c) Faça um esboço da trajetória do próton. (d) Calcule os valores numéricos de $h_{máx}$ e de d, sabendo que $E = 500$ N/C, $v_0 = 4{,}0 \times 10^5$ m/s e $\alpha = 30{,}0°$.

21.88 Uma carga puntiforme negativa $q_1 = -4{,}0$ nC está sobre o eixo Ox no ponto $x = 0{,}60$ m. Uma segunda carga puntiforme q_2 está sobre o eixo Ox no ponto $x = 1{,}20$ m. Determine o módulo e o sinal de q_2 para que o campo elétrico resultante na origem seja (a) 50,0 N/C no sentido $+x$; e (b) 50,0 N/C no sentido $-x$.

21.89 Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente sobre o eixo Ox de $x = 0$ até $x = a$. Uma carga puntiforme positiva q está sobre a parte positiva do eixo Ox, no ponto $x = a + r$, a uma distância r à direita da extremidade de Q (Figura 21.47).

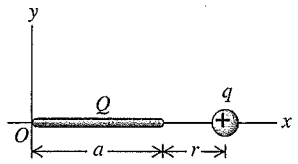


Figura 21.47 Problema 21.89.

(a) Determine os componentes x e y do campo elétrico produzido pela distribuição de cargas Q nos pontos da parte positiva do eixo Ox para $x > a$. (b) Obtenha a força (módulo, direção e sentido) que a distribuição de cargas Q exerce sobre a carga q. (c) Mostre que para os pontos $r >> a$, o módulo da força calculada no item (b) é aproximadamente igual a $Qq/4\pi\epsilon_0 r^2$. Explique a razão desse resultado.

21.90 Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente sobre a parte positiva do eixo Oy desde $y = 0$ até $y = a$. Uma carga puntiforme negativa $-q$ está sobre a parte positiva do eixo Ox, a uma distância x da origem (Figura 21.48). (a) Determine os componentes x e y do campo elétrico produzido pela distribuição de cargas Q nos pontos da parte positiva do eixo Ox. (b) Encontre os componentes x e y da força que a distribuição de cargas Q exerce sobre a carga q. (c) Mostre que para os pontos $x >> a$, $F_x \cong -Qq/4\pi\epsilon_0 x^2$ e $F_y \cong +Qqa/8\pi\epsilon_0 x^3$. Explique a razão desse resultado.

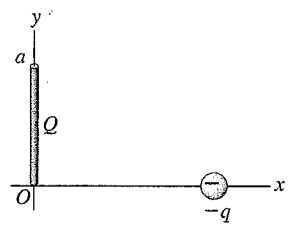


Figura 21.48 Problema 21.90.

21.91 Um fio retilíneo carregado como aquele indicado na Figura 21.25 se estende desde $y = 2{,}50$ cm até $y = -2{,}50$ cm. A carga total distribuída uniformemente sobre o fio é igual a $-9{,}0$ nC. (a) Obtenha o campo elétrico (módulo, direção e sentido) sobre o eixo Ox para $x = 10{,}0$ cm. (b) Verifique se o módulo do campo elétrico que você encontrou no item (a) é maior ou menor do que o do campo elétrico a 10,0 cm de distância de uma carga puntiforme que possui a mesma carga que a distribuída uniformemente sobre o fio finito. Com base na aproximação usada para deduzir $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ para a carga puntiforme a partir da Equação (21.9), explique a razão desse comportamento. (c) Para que distância x o resultado do fio finito difere de 1,0% do resultado da carga puntiforme?

21.92 Um universo paralelo. Imagine um universo paralelo em que a força elétrica possui as mesmas propriedades que no nosso universo, mas não há gravidade. Nesse universo paralelo, o Sol possui carga Q, a Terra carga $-Q$ e a atração elétrica entre eles mantém a Terra em órbita. A Terra no universo paralelo possui a mesma massa, o meio raio orbital e o mesmo período orbital que no nosso universo. Calcule o valor de Q. (Consulte o Apêndice F, se necessário.)

21.93 Um disco uniformemente carregado, como aquele indicado na Figura 21.26, possui raio de 2,50 cm e carga igual a $4{,}0 \times 10^{-12}$ C. (a) Obtenha o campo elétrico (módulo, direção e sentido) sobre o eixo Ox para $x = 20{,}0$ cm. (b) Mostre que para $x >> R$, a Equação (21.11) se transforma em $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$, em que Q é a carga total sobre o disco. (c) Verifique se o módulo do campo elétrico que você encontrou no item (a) é maior ou menor do que o do campo elétrico a 0,20 cm de distância de uma carga puntiforme que possui a mesma carga que a carga total existente no disco. Com base na aproximação usada para deduzir $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ para a carga puntiforme a partir da Equação (21.11), explique a razão desse comportamento. (d) Calcule a diferença porcentual entre o campo elétrico produzido pelo disco e o campo elétrico produzido por uma carga puntiforme com a mesma carga para $x = 20{,}0$ cm e para $x = 10{,}0$ cm.

21.94 (a) Seja $f(x)$ uma função par de x de modo que $f(x) = f(-x)$. Mostre que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. (*Sugestão:* escreva a integral de $-a$ até a como a soma da integral de $-a$ até 0 com a integral de 0 até a. Na primeira integral, faça a mudança de variável $x' = -x$.) (b) Seja $g(x)$ uma função ímpar de x de modo que $g(x) = -g(-x)$. Usando o método indicado na sugestão para o item (a) mostre que $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$. (c) Use o resultado obtido no item (b) para mostrar que E_y, indicado no Exemplo 21.11 (Seção 21.5), é igual a zero.

21.95 Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente sobre o eixo Ox de $x = 0$ até $x = a$. Uma carga puntiforme negativa $-Q$ é distribuída uniformemente sobre o eixo Ox de $x = 0$ até $x = -a$. (a) Uma carga puntiforme positiva q está sobre a parte positiva do eixo Oy a uma distância y da origem. Obtenha a força (módulo, direção e sentido) que as duas distribuições de cargas exercem em conjunto sobre a carga q. Mostre que para todos os pontos $y >> a$, o módulo dessa força é proporcional a y^{-3}. (b) Suponha que, em vez da hipótese do item anterior, exista uma carga puntiforme positiva q sobre a parte positiva do eixo Ox a uma distância $x > a$ da origem. Obtenha a força (módulo, direção e sentido) que as duas distribuições de cargas exercem em conjunto sobre a carga q. Mostre que, para os pontos $x >> a$, o módulo dessa força é proporcional a x^{-3}.

21.96 Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente ao longo de uma semicircunferência de raio a (Figura 21.49). Obtenha o campo elétrico (módulo, direção e sentido) no centro de curvatura P.

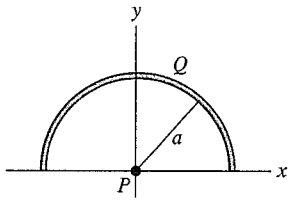


Figura 21.49 Problema 21.96.

21.97 Uma carga negativa $-Q$ é distribuída uniformemente ao longo da quarta parte de uma circunferência de raio a, que está sobre o primeiro quadrante, com centro de curvatura na origem. Encontre os componentes x e y do campo elétrico na origem.

21.98 Uma pequena esfera de massa m, com uma carga positiva q, é ligada à extremidade de um fio de seda de comprimento L. A outra extremidade do fio está presa a uma grande placa isolante vertical, que possui uma densidade superficial de carga σ. Mostre que, quando a esfera está em equilíbrio, o ângulo formado entre a vertical e o fio é igual a $(q\sigma/2mg\epsilon_0)$.

21.99 Dois fios não condutores de 1,20 m se encontram em um ângulo reto. Um segmento possui +2,50 μC de carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento, e a outra possui $-2{,}50$ μC de carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento, como indica a Figura 21.50. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico produzido por esses fios no ponto P, que se situa a 60,0 cm de cada fio. (b) Se um elétron for libertado de P, quais são o módulo, a direção e o sentido da força resultante que esses fios exercem sobre ele?

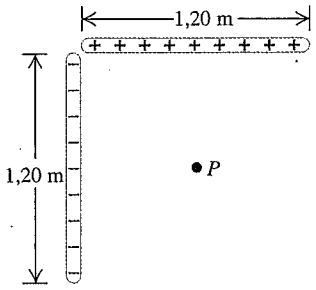


Figura 21.50 Exercício 21.99.

21.100 A distância entre duas placas paralelas de grande porte é de 5,0 cm. A placa A possui uma densidade superficial de carga uniforme de $-9{,}50\ \mu C$, e a placa B, que está à direita de A, possui carga uniforme de $-11{,}6\ \mu C$. Suponha que as placas são grandes o suficiente para serem tratadas como infinitas. Ache o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico resultante produzido por essas placas em um ponto (a) 4,0 cm à direita da placa A; (b) 4,0 cm à esquerda da placa A; (c) 4,0 cm à direita da placa B.

21.101 Repita o Problema 21.100 considerando que a placa B é positiva.

21.102 Duas placas horizontais muito grandes estão a uma distância de 4,25 cm uma da outra e possuem densidade de cargas iguais, porém contrárias, de módulo σ. Você quer usar essas placas para manter fixa na área entre elas uma gota de óleo de massa 324 μg que carrega 5 elétrons em excesso. Supondo que a gota está em um vácuo, (a) para que lado deve apontar o campo elétrico entre as placas e (b) qual seria o valor de σ?

21.103 Uma placa infinita, com uma carga positiva por unidade de área igual a σ, está sobre o plano xy. Uma segunda placa infinita, com uma carga negativa por unidade de área $-\sigma$ está sobre o plano yz. Determine o campo elétrico resultante em todos os pontos que não estejam situados sobre nenhum desses planos. Expresse a resposta em termos dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

21.104 Denomina-se *coroa anular* um disco fino de raio externo R_2 com um buraco circular concêntrico de raio interno R_1 (Figura 21.51). Uma coroa anular possui uma densidade superficial de carga σ sobre sua superfície. (a) Determine a carga total sobre a coroa anular. (b) A coroa anular está sobre o plano yz com seu centro na origem. Para um ponto arbitrário sobre o eixo Ox (o eixo de simetria da coroa anular), determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico $\vec{E}$. Considere todos os pontos acima e abaixo do plano da coroa anular da Figura 21.51. (c) Mostre que, para os pontos sobre o eixo Ox suficientemente próximos da origem, o módulo do campo elétrico é aproximadamente proporcional à distância entre o centro da coroa e o ponto considerado. Qual é a distância que pode ser considerada "suficientemente próxima"? (d) Uma partícula puntiforme com massa m e carga $-q$ pode se mover livremente sobre o eixo Ox (mas não pode sair desse eixo). A partícula é inicialmente colocada sobre o ponto $x = 0{,}01R_1$ e, a seguir, liberada. Determine a freqüência das oscilações da partícula. (*Sugestão:* faça uma revisão da Seção 13.2. A coroa anular permanece em repouso.)

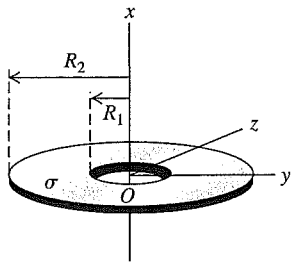


Figura 21.51 Problema 21.104.

Problemas desafiadores

21.105 Três cargas são colocadas como indica a Figura 21.52. O módulo de q_1 é igual a $2{,}0\ \mu C$, porém não conhecemos seu sinal nem o valor da carga q_2. A carga q_3 é igual a $+4{,}0\ \mu C$ e a força resultante $\vec{F}$ sobre q_3 aponta para o sentido negativo do eixo Ox. (a) Considerando os possíveis sinais diferentes para as cargas q_1 e q_2, existem quatro diagramas de forças possíveis para representar as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ exercidas por q_1 e q_2 sobre a carga q_3. Faça desenhos mostrando esses quatro diagramas possíveis. (b) Usando os desenhos da parte (a) e a direção e o sentido de $\vec{F}$, determine os sinais das cargas q_1 e q_2. (c) Calcule o módulo de q_2. (d) Calcule o módulo da força resultante F que atua sobre q_3.

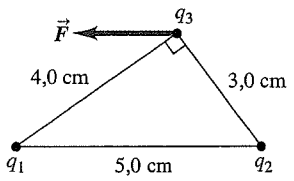


Figura 21.52 Problema desafiador 21.105.

21.106 Duas cargas são colocadas como indica a Figura 21.53. O módulo de q_1 é igual a $3{,}0\ \mu C$, porém não conhecemos seu sinal e nem o valor da carga q_2. O campo elétrico resultante $\vec{E}$ no ponto P aponta para o sentido negativo do eixo Oy. (a) Considerando os possíveis sinais diferentes para as cargas q_1 e q_2, existem quatro possíveis diagramas para representar os campos elétricos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ produzidos por q_1 e q_2. Faça desenhos mostrando esses quatro diagramas possíveis. (b) Usando os desenhos da parte (a) e a direção e o sentido de $\vec{E}$, determine os sinais das cargas q_1 e q_2. (c) Calcule o módulo do campo elétrico $\vec{E}$.

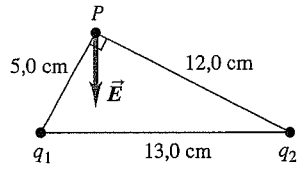


Figura 21.53 Problema desafiador 21.106.

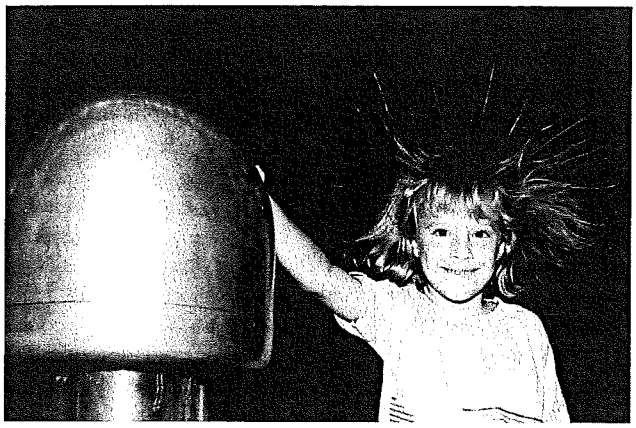
21.107 Duas barras delgadas de comprimento L estão sobre o eixo Ox, uma delas entre os pontos $x = a/2$ e $x = a/2 + L$ e a outra entre os pontos $x = -a/2$ e $x = -a/2 - L$. Cada barra possui uma carga Q distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento. (a) Calcule o campo elétrico produzido pela segunda barra nos pontos situados ao longo da parte positiva do eixo Ox. (b) Mostre que o módulo da força que uma barra exerce sobre a outra é dado por

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\ln\left[\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}\right]$$

(c) Mostre que, quando $a >> L$, o módulo dessa força se reduz a $F = Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. (*Sugestão:* use o desenvolvimento em série $\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \cdots$, válido para $|z| << 1$. Faça *todos* os desenvolvimentos até pelo menos o termo L^2/a^2.) Interprete esse resultado.

LEI DE GAUSS

22



Esta criança adquire cargas elétricas ao tocar a esfera metálica carregada. Os cabelos eletricamente carregados da cabeça da criança se repelem e ficam eriçados. Se a criança ficar *dentro* de uma grande esfera metálica carregada, o cabelo dela ficará em pé?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como determinar a quantidade de carga no interior de uma superfície fechada examinando o campo elétrico sobre a superfície.
- O que significa fluxo elétrico e como calculá-lo.
- Como a lei de Gauss relaciona o fluxo elétrico através de uma superfície fechada à carga englobada pela superfície.
- Como usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico produzido por uma distribuição simétrica de carga.
- Onde se localiza a carga em um condutor carregado.

Em geral, existe um modo simples e um modo complicado de realizar uma tarefa; o modo mais fácil pode ser simplesmente usar as ferramentas adequadas. Na física, uma ferramenta importante para a simplificação de um problema consiste em usar as *propriedades de simetria* dos sistemas. Muitos sistemas físicos possuem simetrias. Por exemplo: se você girar um cilindro em torno do seu eixo central, o aspecto do cilindro continuará o mesmo; e uma esfera metálica carregada permanecerá exatamente a mesma se você girar a esfera em torno de qualquer eixo passando pelo seu centro.

A lei de Gauss é uma parte da chave para usar considerações de simetria a fim de simplificar a determinação de campos elétricos. Por exemplo, o campo elétrico de uma distribuição de cargas ao longo de um fio retilíneo ou ao longo de um plano, como o que deduzimos na Seção 21.5, usando algumas integrações cansativas, pode ser deduzido em poucas linhas com a lei de Gauss. Mas essa lei é mais do que somente uma forma de facilitar a realização de alguns cálculos. De fato, trata-se de uma afirmação fundamental sobre a relação entre cargas elétricas e campos elétricos. Dentre outras coisas, a lei de Gauss também pode nos ajudar a compreender como se dá a distribuição das cargas elétricas em corpos condutores.

Aqui descrevemos o significado da lei de Gauss. Dada qualquer distribuição de cargas, desenhamos uma superfície imaginária englobando as cargas. A seguir, pesquisamos como o campo elétrico se distribui ao longo dos pontos dessa superfície imaginária. A lei de Gauss relaciona a carga total existente no interior da superfície com o campo elétrico de *todos* os pontos sobre a superfície imaginária. Pode parecer uma forma bastante indireta para resolver o problema, porém se trata de uma lei extraordinariamente útil. Além de seu uso como um instrumento de cálculo, a lei de Gauss nos auxiliará a compreender bem melhor o campo elétrico. À medida que continuarmos a estudar o eletromagnetismo nos próximos capítulos, usaremos freqüentemente esses conceitos.

22.1 Carga elétrica e fluxo elétrico

No Capítulo 21, fizemos a pergunta: 'Qual é o campo elétrico produzido por uma dada distribuição de cargas em um ponto P?'. Vimos que a resposta pode ser obtida considerando-se a distribuição como um conjunto de cargas puntiformes, cada uma das quais produzindo um campo elétrico $\vec{E}$ dado pela Equação (21.7). O campo elétrico resultante

no ponto P é, então, determinado fazendo-se a soma vetorial dos campos elétricos produzidos por todas as cargas.

A discussão sobre a lei de Gauss nesta seção tem como base e fonte de inspiração as inovadoras idéias de Ruth W. Chabay e Bruce A. Sherwood em *Electric and Magnetic Interactions* (John Wiley & Sons, 1994).

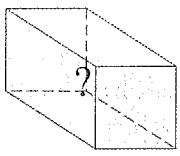
No entanto, existe uma relação alternativa entre distribuição de cargas e campos elétricos. Para descobrir essa relação, vamos inverter a questão formulada no Capítulo 21: 'Caso você soubesse a configuração do campo elétrico em uma dada região, o que poderia afirmar sobre a distribuição de cargas nessa região?'.

Vejamos um exemplo. Considere a caixa indicada na Figura 22.1a, a qual pode ou não conter cargas elétricas. Vamos supor que a caixa seja feita de um material que não produza nenhum efeito sobre qualquer campo elétrico; trata-se de uma situação idealizada, tal como a corda sem massa ou um plano inclinado sem atrito. Melhor ainda, suponha que a caixa seja uma superfície *imaginária* que pode ou não conter cargas elétricas. Vamos chamar essa caixa de **superfície fechada,** porque ela engloba completamente um dado volume. Como você pode determinar a quantidade de carga elétrica (caso haja) existente no interior dessa caixa?

Sabendo que uma distribuição de carga produz um campo elétrico e que uma carga de teste sofre a ação de uma força produzida por esse campo elétrico, você coloca uma carga de teste q_0 em pontos nas vizinhanças da caixa. Medindo a força $\vec{F}$ exercida sobre a carga de teste, você faz um mapa tridimensional do campo elétrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ existente no exterior da caixa. Verifica-se que, para o caso indicado na Figura 22.1b, o mapa corresponde ao campo elétrico produzido por uma única carga puntiforme positiva (Figura 21.29a). Examinando os detalhes do mapa, você poderá calcular o valor exato da carga existente no interior da caixa.

Para determinar o conteúdo da caixa, basta, na verdade, medir $\vec{E}$ sobre a *superfície* da caixa. Na Figura 22.2a existe uma única carga puntiforme positiva no interior da caixa; e na Figura 22.2b existem duas cargas puntiformes positivas. Os detalhes das configurações dos campos nas superfícies das caixas são diferentes, porém em ambos os casos o campo elétrico aponta para fora da caixa. As figuras 22.2c e 22.2d indicam, respectivamente, a existência de uma e de duas cargas puntiformes negativas no interior da caixa. Novamente, os detalhes de $\vec{E}$ sobre a superfície da caixa diferem, porém em ambos os casos o campo aponta de fora para dentro da caixa.

(a) Uma caixa com uma quantidade de carga desconhecida



(b) A carga elétrica no interior da caixa pode ser detectada usando-se uma carga de teste no exterior da caixa para medir o campo elétrico

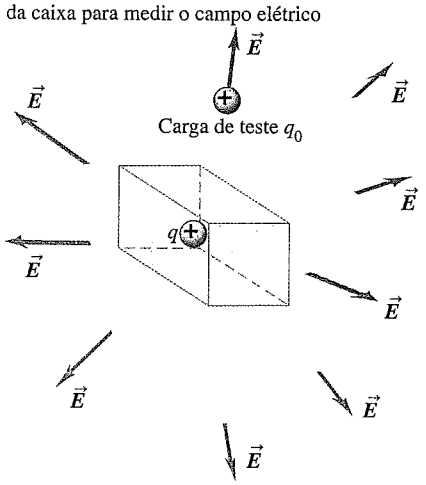
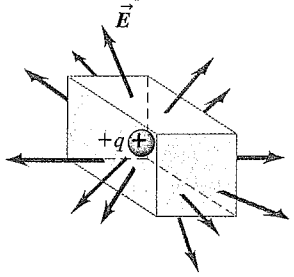
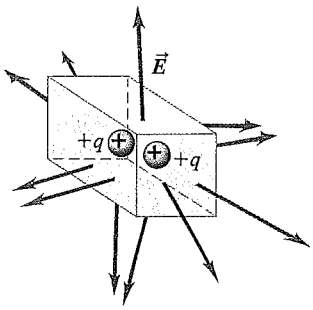


Figura 22.1 Como medir a carga no interior de uma caixa sem abri-la?

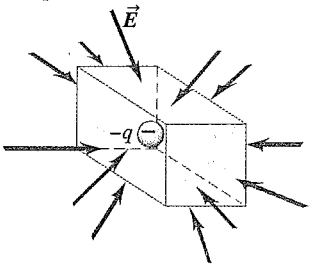
(a) Carga positiva dentro da caixa, fluxo de dentro para fora



(b) Cargas positivas dentro da caixa, fluxo de dentro para fora



(c) Carga negativa dentro da caixa, fluxo de fora para dentro



(d) Cargas negativas dentro da caixa, fluxo de fora para dentro

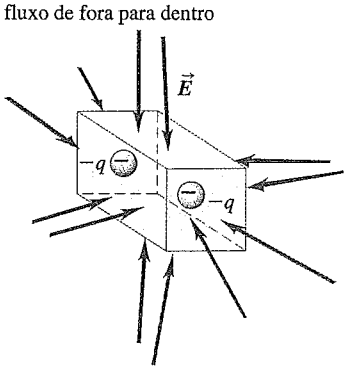


Figura 22.2 Campo elétrico sobre a superfície de caixas contendo (a) uma única carga puntiforme positiva, (b) duas cargas puntiformes positivas, (c) uma única carga puntiforme negativa ou (d) duas cargas puntiformes negativas.

Fluxo elétrico e carga englobada

Na Seção 21.4, discutimos a analogia entre o vetor do campo elétrico e o vetor da velocidade de um fluido em movimento. Essa analogia pode ser útil, embora em um campo elétrico não exista nenhum 'fluxo' real. Usando essa analogia nas figuras 22.2a e 22.2b, nas quais o campo elétrico aponta para fora da superfície, podemos dizer que existe um **fluxo elétrico** para fora da superfície. (A palavra 'fluxo' deriva do latim e a palavra 'escoamento' é, geralmente, usada como sinônimo de 'fluxo'.) Nas figuras 22.2c e 22.2d, todos os vetores $\vec{E}$ apontam para o interior da superfície e o fluxo elétrico segue *para dentro* da superfície.

A Figura 22.2 sugere uma relação simples: quando no interior da caixa existe uma carga positiva, o fluxo elétrico orienta-se para fora da superfície e, quando no interior da caixa existe uma carga negativa, o fluxo elétrico orienta-se para dentro da superfície. O que acontece quando a carga é *igual a zero* dentro da caixa? Na Figura 22.3a, a caixa está vazia e $\vec{E} = \mathbf{0}$ em todos os pontos; logo, não existe nenhum fluxo elétrico nem para dentro nem para fora da superfície. Na Figura 22.3b, no interior da caixa existe uma carga positiva e uma carga negativa com mesmo módulo; portanto, a carga *líquida* é igual a zero dentro da caixa. Existe um campo elétrico, porém o 'fluxo para dentro' em uma das metades da caixa é igual ao 'fluxo para fora' na outra metade da caixa. Logo, o fluxo elétrico *líquido* através da superfície da caixa é igual a zero.

Na Figura 22.3c, a caixa está novamente vazia. Contudo, existem cargas presentes *fora* da caixa; ela foi colocada com uma das suas extremidades paralela a um plano infinito com uma distribuição uniforme de cargas que produz um campo elétrico uniforme perpendicular ao plano (conforme aprendemos no Exemplo 21.12, da Seção 21.5). Em uma das extremidades da caixa, o vetor $\vec{E}$ aponta para dentro dela; na extremidade oposta, $\vec{E}$ aponta para fora da caixa; e nas faces laterais da caixa, $\vec{E}$ é paralelo à superfície externa e não aponta nem para dentro nem para fora da caixa. Analogamente ao caso indicado na Figura 22.3b, o fluxo para dentro em uma das metades da caixa compensa exatamente o fluxo para fora da outra metade. Logo, em todos os casos indicados na Figura 22.3, não existe fluxo elétrico *líquido* através da superfície da caixa, e a carga *líquida* dentro da caixa é igual a zero.

As figuras 22.2 e 22.3 demonstram a conexão entre o *sinal* (positivo, negativo ou nulo) da carga *líquida* dentro da caixa e o sentido (para dentro, para fora ou nenhum) do fluxo elétrico líquido através da superfície. Também existe uma conexão entre o *módulo* da carga dentro da superfície fechada e a *intensidade* do 'fluxo' do vetor $\vec{E}$ sobre a superfície. Em ambas as figuras 22.4a e 22.4b, existe uma única carga puntiforme no interior da caixa, porém na Figura 22.4b o módulo da carga e de $\vec{E}$ é igual ao dobro do módulo da carga e de $\vec{E}$ na Figura 22.4a. Considerando a analogia do escoamento de um fluido, isso significa que o fluxo elétrico líquido para fora da superfície na Figura 22.4b também é igual ao dobro do fluxo elétrico líquido na Figura 22.4a. Isso sugere que o fluxo elétrico líquido através da superfície é *diretamente proporcional* ao módulo da carga líquida existente no interior da caixa.

Essa conclusão independe do tamanho da caixa. Na Figura 22.4c, a carga puntiforme $+q$ está no interior de uma caixa com o dobro das dimensões lineares da caixa indicada na Figura 22.4a. O módulo do campo elétrico diminui com a distância entre o ponto e a carga elétrica na razão $1/r^2$, de modo que o valor médio do módulo do campo elétrico $\vec{E}$ em cada face da caixa grande, indicada na Figura 22.4c, é exatamente igual a $\frac{1}{4}$ do valor médio do módulo do campo na face correspondente, indicada na Figura 22.4a. Porém, a área de cada face da caixa grande é exatamente quatro vezes maior do que a respectiva área de cada face da caixa pequena. Portanto, o fluxo elétrico para fora das duas caixas é o *mesmo* se *definirmos* o fluxo elétrico do seguinte modo: para cada face da caixa, faça o

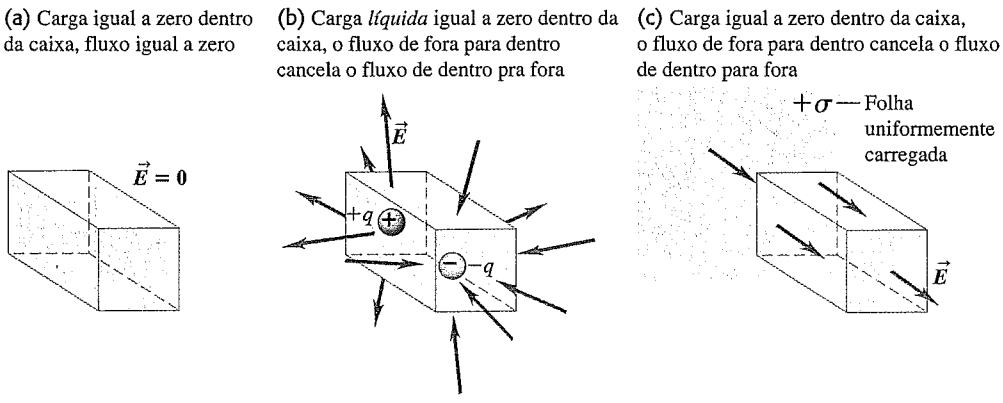


Figura 22.3 Três casos nos quais a carga *líquida* é igual a zero dentro da caixa e o fluxo elétrico através da superfície da caixa é igual a zero. (a) Uma caixa vazia com $\vec{E} = 0$. (b) Uma caixa com uma carga positiva e uma carga negativa com mesmo módulo. (c) Uma caixa vazia imersa em um campo elétrico uniforme.

produto do valor médio do componente perpendicular de $\vec{E}$ pela área da respectiva face; a seguir, some os resultados para todas as faces da caixa. Usando essa definição, o fluxo elétrico líquido produzido por uma única carga puntiforme no interior da caixa é independente do tamanho da caixa, dependendo somente do valor da carga existente no interior dela.

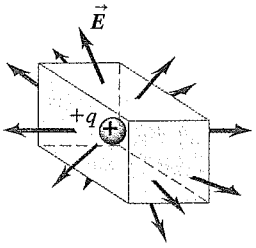
Vimos que existe uma relação entre a quantidade líquida de carga no interior de uma superfície fechada e o fluxo elétrico através dessa superfície. Para os casos especiais de uma superfície fechada em forma de caixa retangular e para distribuições de cargas que envolvam cargas puntiformes, ou planos infinitos com uma distribuição de cargas uniformes, verificamos o seguinte:

1. O sinal da carga existente no interior de uma superfície fechada determina se o fluxo elétrico está entrando ou saindo da superfície considerada.
2. Cargas situadas no *exterior* da superfície não fornecem fluxo elétrico líquido através da superfície fechada.
3. O fluxo elétrico líquido é diretamente proporcional à carga líquida existente no interior da superfície fechada, porém ele não depende do tamanho da superfície fechada escolhida.

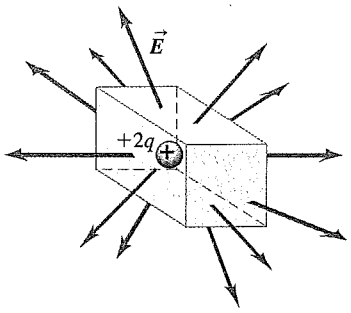
Essas observações constituem uma formulação qualitativa da *lei de Gauss*.

Será que tais observações permanecem válidas para outros tipos de distribuição de cargas e para superfícies fechadas com formas arbitrárias? A resposta a essas perguntas é 'sim'. Porém, para explicar a razão desse comportamento, precisamos de uma definição matemática de fluxo elétrico. Isso será feito na próxima seção.

(a) Uma caixa contendo uma carga



(b) Duplicar a carga englobada equivale a duplicar o fluxo



(c) Duplicar as dimensões da caixa *não altera* o fluxo

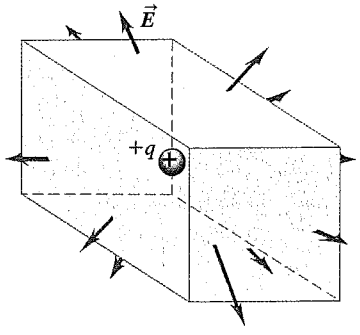


Figura 22.4 (a) Uma caixa com uma carga positiva $+q$. (b) Uma caixa idêntica com uma carga positiva $+2q$. Quando dobramos o valor da carga, dobramos o módulo de $\vec{E}$ e o fluxo elétrico através da superfície. (c) A carga puntiforme positiva $+q$ no interior de uma caixa com o dobro das dimensões da caixa em $\frac{1}{4}$. O módulo de $\vec{E}$ sobre a superfície se reduz a $\frac{1}{4}$, porém a área através da qual ele 'flui' torna-se quatro vezes maior.

Teste sua compreensão da Seção 22.1 Se todas as dimensões da caixa na Figura 22.2a forem triplicadas, qual efeito essa alteração produzirá sobre o fluxo elétrico através da caixa? (i) O fluxo será $3^2 = 9$ vezes maior; (ii) o fluxo será 3 vezes maior; (iii) o fluxo permanecerá inalterado; (iv) o fluxo será $(\frac{1}{3})$ do valor inicial; (v) o fluxo será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ do valor inicial; (vi) não há informação suficiente para a decisão. ∎

22.2 Determinação do fluxo elétrico

Na seção precedente, introduzimos o conceito de *fluxo elétrico*. Qualitativamente, o fluxo elétrico através de uma superfície fornece uma descrição para sabermos se o campo elétrico $\vec{E}$ está entrando ou saindo da superfície. Usamos esse conceito para elaborar uma formulação qualitativa aproximada da lei de Gauss: o fluxo elétrico líquido através de uma superfície fechada é diretamente proporcional à carga líquida existente no interior dessa superfície. Para utilizarmos plenamente essa lei, precisamos saber como se *calcula* um fluxo elétrico. Para isso, vamos novamente fazer a analogia entre um campo elétrico $\vec{E}$ e um campo de velocidade $\vec{v}$ no escoamento de um fluido. (Lembre-se de que isso é somente uma analogia; um campo elétrico *não* escoa.)

Fluxo: analogia do escoamento de um fluido

A Figura 22.5 indica um fluido se escoando de modo estacionário da esquerda para a direita. Vamos examinar a vazão volumétrica dV/dt (digamos, em metros cúbicos por segundo) através da espira de arame retangular com área A.

Quando a área está perpendicular à velocidade do escoamento $\vec{v}$ (Figura 22.5a) e a velocidade do escoamento é a mesma em todos os pontos do fluido, a vazão volumétrica dV/dt é igual ao produto da área A pelo módulo da velocidade do escoamento v:

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

Quando o retângulo está inclinado a um ângulo ϕ (Figura 22.5b), de modo que sua face não é perpendicular a $\vec{v}$, a área que conta é o perfil da área quando observamos o retângulo na direção de $\vec{v}$. Essa área, indicada pelo símbolo $A_\perp$ na Figura 22.5b, é a *projeção* da área A sobre um plano perpendicular a $\vec{v}$. Dois lados da projeção do retângulo possuem o mesmo comprimento do retângulo original, porém os outros dois ficam diminuídos pelo fator de cos ϕ, de modo que a área projetada é dada por A cos ϕ. Então, a vazão volumétrica através de A é

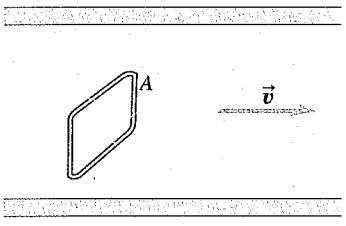
$$\frac{dV}{dt} = vA\cos\phi$$

Quando $\phi = 90°$, $dV/dt = 0$; o retângulo é paralelo ao escoamento e não passa nenhum fluido através do retângulo.

Também v cos ϕ é o componente do vetor $\vec{v}$ perpendicular ao plano da área A. Usando o símbolo $v_\perp$, para esse componente, podemos reescrever a vazão volumétrica na forma

$$\frac{dV}{dt} = v_\perp A$$

(a) Uma espira retangular em um fluido



(b) A espira retangular inclinada a um ângulo ϕ

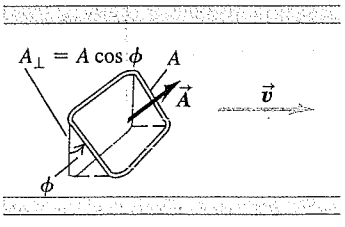


Figura 22.5 A vazão volumétrica de um fluido através da área da espira retangular de arame é dada por (a) vA quando a área do retângulo é perpendicular a $\vec{v}$ e (b) vA cos ϕ quando a área do retângulo está inclinada a um ângulo ϕ.

Podemos expressar mais resumidamente a vazão volumétrica usando o conceito de *vetor área* $\vec{A}$, uma grandeza vetorial cujo módulo fornece a área A e cuja direção é perpendicular ao plano da área que estamos descrevendo. O vetor área $\vec{A}$ indica o tamanho da área e sua orientação no espaço. Com base na área $\vec{A}$, podemos escrever a vazão volumétrica do fluido através do retângulo indicado na Figura 22.5b como um produto escalar (com ponto interno):

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Fluxo de um campo elétrico uniforme

Usando a analogia entre campo elétrico e escoamento de um fluido, podemos agora definir o fluxo elétrico com um método semelhante ao que acabamos de usar para definir a vazão volumétrica de um fluido; basta substituir a velocidade $\vec{v}$ pelo campo elétrico $\vec{E}$. Para fluxo elétrico, usamos o símbolo Φ_E (letra grega maiúscula *fi* com o índice inferior E para lembrarmos que estamos considerando fluxo *elétrico*). Inicialmente, considere uma superfície plana com área A perpendicular a um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ (Figura 22.6a). Definimos o fluxo elétrico através dessa área como o produto do módulo E pela área A:

$$\Phi_E = EA$$

De modo aproximado, podemos descrever Φ_E em termos das linhas de campo que passam através da área A. Quando a área aumenta, um número maior de linhas de $\vec{E}$ passa através dela, fazendo aumentar o fluxo elétrico; campos elétricos mais fortes correspondem a linhas de $\vec{E}$ agrupadas mais compactamente e, portanto, mais linhas por unidade de área, de modo que, novamente, o fluxo elétrico é maior.

Quando a área A é plana, mas não perpendicular ao campo $\vec{E}$, então um número menor de linhas passa através dela. Nesse caso, a área que conta é o perfil da área quando a observamos na direção de $\vec{E}$. Essa área é indicada pelo símbolo $A_\perp$ na Figura 22.6b, sendo dada por A cos ϕ (compare com a Figura 22.5b). Generalizamos a definição de fluxo elétrico para um campo elétrico uniforme por meio da relação

$$\Phi_E = EA\cos\phi \qquad (22.1)$$

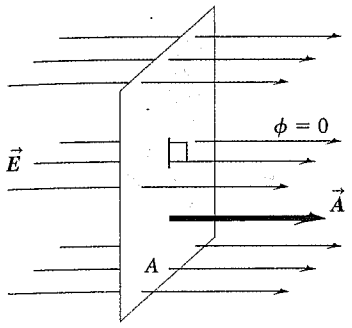
(fluxo elétrico para $\vec{E}$ uniforme, superfície plana)

Como E cos ϕ é o componente de $\vec{E}$ perpendicular à área, podemos reescrever a Equação (22.1) na forma

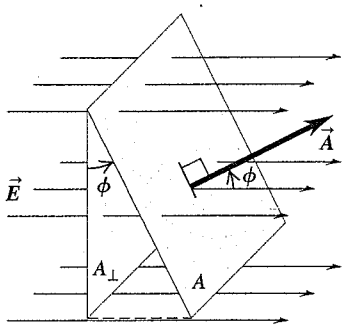
$$\Phi_E = E_\perp A \qquad (22.2)$$

(fluxo elétrico para $\vec{E}$ uniforme, superfície plana)

(a) A superfície é frontal ao campo elétrico: $\vec{E}$ e $\vec{A}$ são paralelos (o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A}$ é $\phi = 0$).
• O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



(b) A superfície está inclinada em relação a uma orientação frontal, formando um ângulo ϕ:
• O ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A}$ é ϕ.
• O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



(c) A superfície é lateral ao campo elétrico:
• $\vec{E}$ e $\vec{A}$ são perpendiculares (o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A}$ é $\phi = 90°$).
• O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90° = 0$.

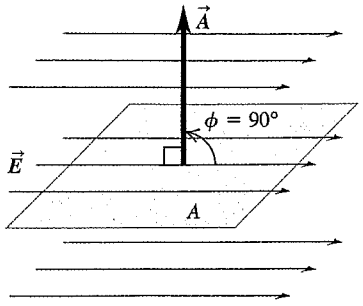


Figura 22.6 Uma superfície plana em um campo elétrico uniforme. O fluxo elétrico Φ_E através da superfície é igual ao produto escalar de $\vec{E}$ e do vetor da área $\vec{A}$.

Com base no vetor da área $\vec{A}$ perpendicular à área, podemos escrever o fluxo elétrico como o produto escalar entre os vetores $\vec{E}$ e $\vec{A}$:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

(fluxo elétrico para $\vec{E}$ uniforme, superfície plana) (22.3)

As equações (22.1), (22.2) e (22.3) são formas equivalentes para calcular o fluxo elétrico para o caso de uma superfície *plana* e um campo elétrico uniforme. No SI, a unidade de fluxo elétrico é 1 N · m^2/C. Note que, se a área for lateral ao campo, $\vec{E}$ e $\vec{A}$ serão perpendiculares e o fluxo será igual a zero (Figura 22.6c).

Podemos representar um vetor área $\vec{A}$ usando um *vetor unitário* $\hat{n}$ perpendicular à área; $\hat{n}$ faz lembrar a inicial da palavra 'normal'. Logo,

$$\vec{A} = A\hat{n} \qquad (22.4)$$

Uma superfície possui dois lados, portanto existem dois sentidos possíveis para os vetores $\vec{A}$ e $\hat{n}$. Devemos sempre especificar qual é o sentido escolhido. Na Seção 22.1, relacionamos a carga no interior de uma superfície *fechada* com o fluxo elétrico que passa através da superfície. Quando a superfície é fechada, sempre escolhemos o sentido de $\hat{n}$ *para fora* da superfície e dizemos que o fluxo elétrico *sai* da superfície fechada. Logo, quando, na Seção 22.1, falamos que 'um fluxo elétrico sai da superfície', queremos dizer que Φ_E é *positivo,* e quando falamos que 'um fluxo elétrico entra na superfície', queremos dizer que Φ_E é *negativo.*

Fluxo de um campo elétrico não uniforme

O que ocorre quando o campo elétrico $\vec{E}$ não é uniforme, porém varia de um ponto para outro ao longo da superfície de área A? Ou o que ocorre quando A é parte de uma superfície curva? Nesse caso, dividimos A em pequenos elementos de superfície de área dA; cada um deles possui um vetor unitário $\hat{n}$ perpendicular à respectiva superfície e um vetor área $d\vec{A} = \hat{n}\, dA$. Calculamos o fluxo elétrico através de cada um desses elementos e integramos o resultado para obter o fluxo elétrico total:

$$\Phi_E = \int E \cos\phi \, dA = \int E_\perp \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(definição geral de fluxo elétrico) (22.5)

Essa integral é chamada de **integral de superfície** do componente $E_\perp$ sobre a área considerada ou a integral de superfície de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. As diversas formas da integral expressam, diferentemente, a mesma coisa. Em problemas específicos, uma forma pode ser mais conveniente do que outra. O Exemplo 22.3, no final desta seção, ilustra o uso da Equação (22.5).

Na Equação (22.5), o fluxo elétrico $\int E_\perp \, dA$ é igual ao valor *médio* do componente perpendicular do campo elétrico multiplicado pela área da superfície. Essa é a mesma definição de fluxo elétrico apresentada na Seção 22.1, agora expressa sob forma matemática mais rigorosa. Na próxima seção, veremos a conexão entre o fluxo elétrico total por meio de *qualquer* tipo de superfície fechada, seja qual for o seu formato, e a carga no interior da superfície.

Exemplo 22.1

FLUXO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UM DISCO Um disco com raio igual a 0,10 m está orientado de modo que seu vetor unitário normal $\hat{n}$ forme um ângulo de 30° com um campo elétrico uniforme $\vec{E}$, cujo módulo é igual a $2{,}0 \times 10^3$ N/C (Figura 22.7). (Como essa superfície não é fechada, não podemos especificar um lado 'interno' nem 'externo'. Por essa razão, tivemos de escolher o sentido de $\hat{n}$ na figura.) (a) Qual é o fluxo elétrico através do disco? (b) Qual é o fluxo elétrico através do disco depois que ele

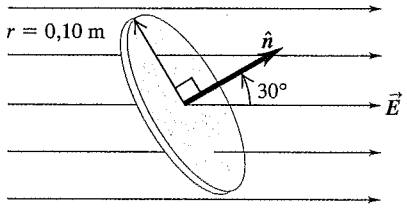


Figura 22.7 O fluxo elétrico Φ_E através de um disco depende do ângulo entre sua normal $\hat{n}$ e o campo elétrico $\vec{E}$.

gira e passa a ocupar uma posição perpendicular ao vetor $\vec{E}$? (c) Qual é o fluxo elétrico através do disco quando sua normal é paralela ao vetor $\vec{E}$?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema trata de uma superfície plana em um campo elétrico uniforme, portanto podemos aplicar os conceitos abordados nesta seção.

PREPARAR: a orientação do disco é semelhante à do retângulo na Figura 22.6b. Calculamos o fluxo elétrico usando a Equação (22.1).

EXECUTAR: (a) A área é $A = \pi\,(0{,}10\ \text{m})^2 = 0{,}0314\ \text{m}^2$ e o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A} = A\hat{n}$ é $\Phi = 30°$, portanto

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\,\text{N/C})\,(0{,}0314\text{m}^2)\,(\cos 30°)$$
$$= 54\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

(b) A normal ao disco é agora perpendicular a $\vec{E}$; logo, $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ e $\Phi_E = 0$. Neste caso, não existe nenhum fluxo elétrico através do disco.

(c) A normal ao disco é paralela a $\vec{E}$; logo, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ e o fluxo elétrico atinge seu valor máximo. Pela Equação (22.1),

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\,\text{N/C})\,(0{,}0314\text{m}^2)\,(1)$$
$$= 63\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

AVALIAR: para conferir os resultados obtidos, note que a resposta ao item (a) é menor do que a resposta ao item (c). É assim que deve ser?

Exemplo 22.2

FLUXO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UM CUBO Um cubo de lado L está colocado em uma região onde existe um campo elétrico uniforme $\vec{E}$. Determine o fluxo elétrico através de cada face do cubo e o fluxo total através do cubo quando: (a) ele está orientado com duas de suas faces perpendiculares ao campo elétrico $\vec{E}$, como na Figura 22.8a; (b) ele sofre um giro de um ângulo θ, como indica a Figura 22.8b.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste problema, devemos achar o fluxo elétrico através de cada face do cubo bem como o fluxo total (a soma dos fluxos através das seis faces).

PREPARAR: como o campo elétrico $\vec{E}$ é uniforme, podemos calcular o fluxo elétrico através de cada face do cubo usando as equações (22.3) e (22.4). A seguir, calculamos o fluxo total através do cubo somando os seis fluxos individuais.

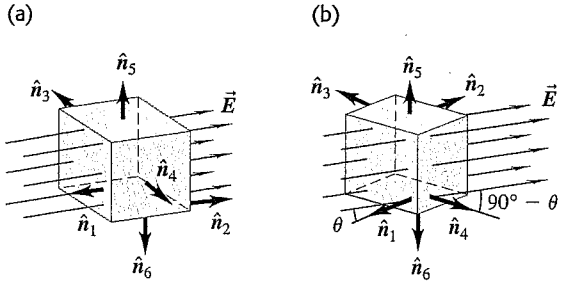


Figura 22.8 Fluxo de um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ através de uma caixa cúbica com aresta L em duas orientações.

EXECUTAR: (a) Os vetores unitários das normais a cada face (desde $\hat{n}_1$ até $\hat{n}_6$) são indicados na figura; cada vetor unitário está orientado *para fora* da superfície do cubo. O ângulo entre $\vec{E}$ e $\hat{n}_1$ é igual a 180°; o ângulo entre $\vec{E}$ e $\hat{n}_2$ é igual a 0°; e o ângulo entre $\vec{E}$ e cada um dos outros quatro vetores unitários é de 90°. Cada face do cubo possui uma área igual a L^2. Portanto, os fluxos através de cada face do cubo são

$$\Phi_{E1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2\cos 180° = -EL^2$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = EL^2\cos 0° = +EL^2$$
$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

O fluxo elétrico é negativo sobre a face 1, na qual $\vec{E}$ está entrando no cubo; e positivo sobre a face 2, na qual $\vec{E}$ está saindo do cubo. O fluxo elétrico *total* através do cubo é igual à soma dos fluxos através das seis faces do cubo:

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$$
$$= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

(b) Os fluxos através das faces 1 e 3 são negativos porque $\vec{E}$ está entrando nessas faces; como o campo elétrico sai das faces 2 e 4, o fluxo elétrico através dessas faces é positivo. Encontramos

$$\Phi_{E1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2\cos(180° - \theta) = -EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = +EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E3} = \vec{E}\cdot\hat{n}_3 A = EL^2\cos(90° + \theta) = -EL^2\,\text{sen}\,\theta$$
$$\Phi_{E4} = \vec{E}\cdot\hat{n}_4 A = EL^2\cos(90° - \theta) = +EL^2\,\text{sen}\,\theta$$
$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

O fluxo elétrico total $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ através do cubo é novamente igual a zero.

AVALIAR: o fluxo total igual a zero para ambas as orientações era previsível. Obtivemos essa mesma conclusão em nossa discussão acerca da Figura 22.3c, na Seção 22.1, a partir da qual pudemos verificar que o fluxo elétrico é igual a zero quando um campo elétrico uniforme atravessa uma superfície fechada, no interior da qual não existe nenhuma carga elétrica.

Exemplo 22.3

FLUXO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UMA ESFERA Uma carga puntiforme positiva $q = 3{,}0\ \mu\text{C}$ está circundada por uma esfera de raio igual a 0,20 m, centralizada sobre a carga (Figura 22.9). Calcule o fluxo elétrico produzido por essa carga através da esfera.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste caso, a superfície não é plana e o campo elétrico não é uniforme, portanto devemos usar a definição geral de fluxo elétrico.

PREPARAR: usamos a Equação (22.5) para calcular o fluxo elétrico (a incógnita do problema). Como a esfera está centralizada sobre uma carga puntiforme, em qualquer ponto na superfície esférica, $\vec{E}$ está direcionado para fora da superfície perpendicular à superfície. O sentido positivo tanto para $\hat{n}$ quanto para $E_\perp$ aponta para fora, portanto $E_\perp = E$ e o fluxo através de um elemento de área dA é $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$. Isso simplifica muito a integral na Equação (22.5).

EXECUTAR: em qualquer ponto sobre a superfície da esfera, o módulo de $\vec{E}$ é dado por

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}20\ \text{m})^2}$$
$$= 6{,}75 \times 10^5\ \text{N/C}$$

Como possui o mesmo valor em todos os pontos, E pode ser retirado do sinal da integral $\Phi_E = \int E\, dA$ na Equação (22.5). Assim, resta a integral $\int dA$, que é dada pela área total $A = 4\pi r^2$ da superfície esférica. Portanto, o fluxo elétrico total que sai da esfera é

$$\Phi_E = EA = (6{,}75 \times 10^5\ \text{N/C})\,(4\pi)\,(0{,}20\ \text{m})^2$$
$$= 3{,}4 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

AVALIAR: note que dividimos por $r^2 = (0{,}20\ \text{m})^2$ para encontrarmos E, mas depois multiplicamos por $r^2 = (0{,}20\ \text{m})^2$ para calcularmos Φ_E; portanto, o valor de Φ_E não depende do raio r da esfera. Obteríamos o mesmo resultado tanto para uma esfera com raio de 2,0 m quanto para uma esfera com raio igual a 200 m. Chegamos a essa mesma conclusão em nossa discussão da Figura 22.4, na Seção 22.1, na qual utilizamos superfícies fechadas retangulares com dois tamanhos diferentes, mas que continham a mesma carga puntiforme. Naquele caso, descobrimos que o fluxo de $\vec{E}$ não dependia do tamanho da área; o mesmo resultado se aplica a uma superfície esférica. Na verdade, o fluxo elétrico sobre *qualquer* superfície fechada que contenha uma carga puntiforme não depende nem da forma, nem do tamanho da superfície, conforme mostraremos mais adiante.

Teste sua compreensão da Seção 22.2 Classifique as seguintes superfícies seguindo a ordem do fluxo elétrico mais positivo para o mais negativo. (i) uma superfície retangular plana com vetor de área $\vec{A} = (6{,}0\ \text{m}^2)\hat{\imath}$ em um campo elétrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; (ii) uma superfície circular plana com vetor de área $\vec{A} = (3{,}0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ em um campo elétrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\ \text{N/C})\,\hat{\imath} + (2{,}0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; (iii) uma superfície quadrada plana com vetor de área $\vec{A} = (3{,}0\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (7{,}0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ em um campo elétrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\ \text{N/C})\,\hat{\imath} - (2{,}0\ \text{N/C})\,\hat{\jmath}$; (iv) uma superfície oval plana com vetor de área $\vec{A} = (3{,}0\ \text{m}^2)\,\hat{\imath} - (7{,}0\ \text{m}^2)\,\hat{\jmath}$ em um campo elétrico uniforme $\vec{E} = (4{,}0\ \text{N/C})\,\hat{\imath} - (2{,}0\ \text{N/C})\,\hat{\jmath}$. ■

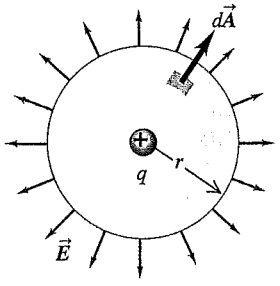


Figura 22.9 Fluxo elétrico através de uma esfera centralizada sobre uma carga puntiforme.

22.3 Lei de Gauss

A **lei de Gauss** é uma alternativa à lei de Coulomb. Embora seja completamente equivalente à lei de Coulomb, a lei de Gauss fornece uma forma diferente de expressar a relação entre carga elétrica e campo elétrico. Ela foi formulada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Muitas áreas da matemática foram marcadas por sua influência, e ele também deixou contribuições significativas para a física teórica (Figura 22.10).

Carga puntiforme no interior de uma superfície esférica

A lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada (a superfície interna de um volume definido) é proporcional à carga elétrica total (líquida) existente no interior da superfície. Na Seção 22.1, observamos isso qualitativamente para certos casos especiais; agora verificaremos isso de maneira mais rigorosa. Vamos iniciar com o campo elétrico de uma única carga puntiforme positiva q. As linhas de campo se irradiam para fora da carga igualmente em todas as direções. Colocamos essa carga no centro de uma superfície esférica imaginária de raio R. O módulo do campo elétrico E em qualquer ponto sobre a superfície é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

Figura 22.10 Carl Friedrich Gauss ajudou a desenvolver diversos ramos da matemática, incluindo a geometria diferencial, a análise real e a teoria dos números. A 'curva do sino' da estatística é uma de suas invenções. Gauss também realizou sofisticadas investigações sobre campos magnéticos da Terra e calculou a órbita do primeiro asteróide a ser descoberto.

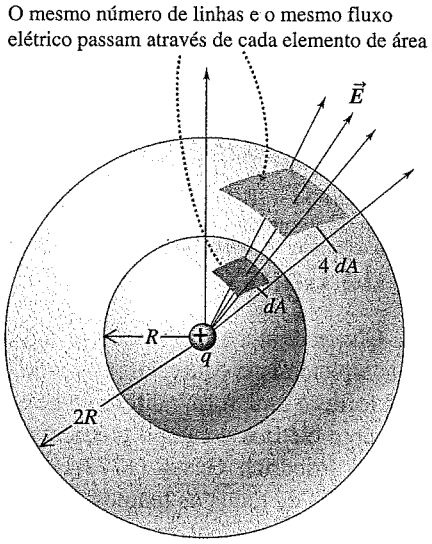


Figura 22.11 Projeção de um elemento de área dA de uma esfera de raio R sobre uma esfera concêntrica de raio igual a $2R$. A projeção multiplica cada dimensão linear por dois, de modo que o elemento de área sobre a esfera maior é igual a $4dA$.

O vetor $\vec{E}$ é perpendicular a cada ponto da superfície e seu módulo é sempre o mesmo em todos os pontos, tal como no Exemplo 22.3 (Seção 22.2). Portanto, o fluxo elétrico é dado simplesmente pelo produto do módulo do campo elétrico E pela área $A = 4\pi R^2$ da superfície da esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (22.6)$$

O fluxo elétrico é independente do raio R da esfera. Ele depende apenas da carga q existente no interior da esfera.

Podemos também interpretar esse resultado com base nas linhas de campo. A Figura 22.11 mostra duas esferas com raios R e $2R$ centralizadas sobre a carga puntiforme q. Cada linha de campo elétrico que passa pela esfera menor também passa pela esfera maior, de modo que o fluxo elétrico é o mesmo nas duas esferas.

O que é verdade para a esfera como um todo também é verdade para qualquer porção de sua superfície. Na Figura 22.11, um elemento de área dA é assinalado sobre uma esfera de raio R e, a seguir, é projetado sobre uma esfera concêntrica de raio $2R$, desenhando-se raios que passam pelo centro e pelos pontos limítrofes de dA. A área projetada sobre a esfera maior é claramente igual a $4\,dA$. Porém, como o campo elétrico de uma carga puntiforme é inversamente proporcional a r^2, o módulo do campo elétrico sobre a esfera de raio $2R$ é $\frac{1}{4}$ do módulo do campo elétrico sobre a esfera de raio R. Portanto, o fluxo elétrico é o mesmo para ambas as áreas e não depende do raio da esfera.

Carga puntiforme no interior de uma superfície não esférica

Essa técnica de projeção mostra como generalizar a discussão para superfícies com formas não-esféricas. Em vez de uma segunda esfera, vamos circundar a esfera de raio R com uma superfície de forma irregular, como indica a Figura 22.12a. Considere um pequeno elemento de área dA sobre a superfície irregular; notamos que essa área é *maior* do que um elemento de área correspondente sobre a superfície esférica que estivesse à mesma distância de q. Se a normal dA forma um ângulo ϕ com o raio que parte da carga q, a projeção dessa área sobre a superfície esférica mostra que dois lados se encurtam na medida de cos ϕ (Figura 22.12b). Os outros dois lados não variam. Portanto, o fluxo sobre o elemento da superfície esférica é igual ao fluxo elétrico $E\,dA$ cos ϕ sobre o elemento correspondente da superfície irregular.

Podemos dividir a superfície irregular inteira em elementos dA, calcular o fluxo elétrico $E\,dA$ cos ϕ para cada elemento e somar os resultados fazendo a integral, tal

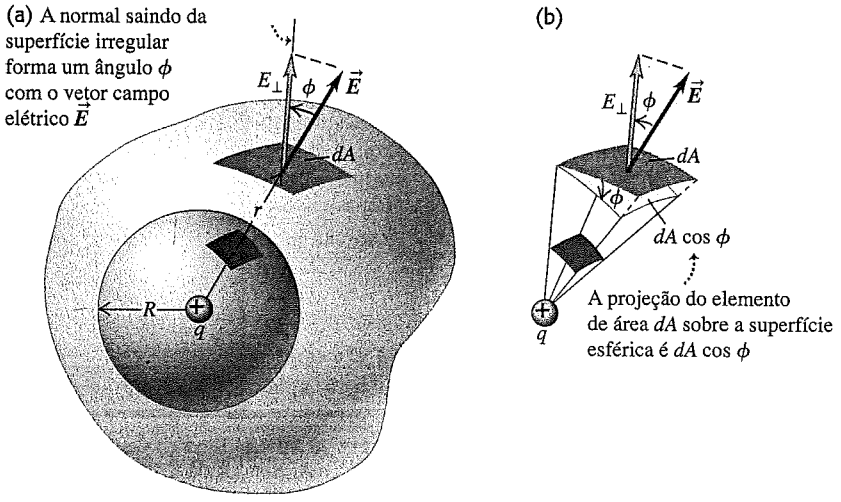


Figura 22.12 Cálculo do fluxo elétrico através de uma superfície não-esférica.

como procedemos para obter a Equação (22.5). Cada um dos elementos de área se projeta sobre um elemento correspondente da superfície esférica. Logo, o fluxo elétrico *total* através da superfície irregular, dado por uma das formas da Equação (22.5), deve ser igual ao fluxo elétrico total sobre a superfície esférica, o qual a Equação (22.6) mostra que é igual a q/ϵ_0. Portanto, para a superfície irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (22.7)$$

A Equação (22.7) vale para *qualquer* forma e tamanho da superfície, desde que esta seja *fechada* e contenha uma carga q em seu interior. A circunferência em torno do sinal da integral serve para lembrar que a integração deve sempre ser feita sobre uma superfície *fechada*.

Os elementos de área $d\vec{A}$ e os vetores unitários $\hat{n}$ correspondentes sempre apontam *para fora* do volume delimitado pela superfície. Logo, o fluxo elétrico é positivo nas áreas sobre as quais o campo elétrico aponta para fora da superfície; e negativo quando ele aponta para dentro da superfície. Portanto, $E_\perp$ é positivo nos pontos onde $\vec{E}$ aponta para fora da superfície e negativo quando ele aponta para dentro da superfície.

Quando a carga puntiforme na Figura 22.12 for negativa, o campo elétrico $\vec{E}$ estará orientado radialmente *para dentro*; o ângulo ϕ será então maior do que 90°, seu coseno será negativo e a integral na Equação (22.7) será negativa. Porém, como q também é negativa, a Equação (22.7) continua válida.

Se no interior de uma superfície *não* existe nenhuma carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

A relação anterior é uma afirmação matemática de que, quando em uma região não existe nenhuma carga, qualquer linha de campo produzida por uma carga puntiforme, no *exterior* dessa região, que entre na superfície em um dado ponto, deve sair da superfície em outro ponto. (Obtivemos essa mesma conclusão na Seção 22.1, considerando o caso especial de uma caixa retangular em um campo elétrico uniforme.) A Figura 22.13 ilustra essa conclusão. *Um campo elétrico só pode começar ou terminar em uma dada região quando existem cargas no interior dessa região.*

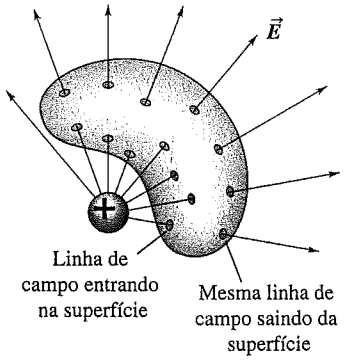


Figura 22.13 Uma carga puntiforme *no exterior* de uma superfície fechada que não engloba nenhuma carga. Se uma linha de campo elétrico da carga externa entra na superfície em um ponto, ela deve sair por outro ponto.

Forma geral da lei de Gauss

Agora atingimos a etapa final para obtermos a forma geral da lei de Gauss. Suponha que, no interior da superfície, exista não apenas uma carga puntiforme q, mas diversas cargas q_1, q_2, q_3, ... O campo elétrico total (resultante) $\vec{E}$ em qualquer ponto é dado pela soma vetorial do campo elétrico $\vec{E}$ oriundo da ação de cada carga individual. Vamos designar por Q_{inte} a carga *total* existente no interior da superfície: $Q_{\text{inte}} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$. Seja também $\vec{E}$ o campo elétrico *total* no ponto da superfície correspondente ao elemento de área $d\vec{A}$ e seja $E_\perp$ o componente perpendicular ao plano desse elemento (ou seja, paralelo a $d\vec{A}$). Então, podemos escrever uma equação análoga à Equação (22.7) para cada carga com seu campo elétrico correspondente e somar os resultados. Fazendo isso, obtemos o enunciado matemático geral da lei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0} \quad \text{(lei de Gauss)} \qquad (22.8)$$

O fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada é igual à carga elétrica total (líquida) existente no interior da superfície dividida por ϵ_0.

ATENÇÃO As superfícies gaussianas são imaginárias Lembre-se de que a superfície fechada na lei de Gauss é *imaginária*. Não é necessário nenhum objeto material na posição da superfície. Freqüentemente, nos referimos à superfície fechada usada na lei de Gauss como uma **superfície gaussiana**.

Usando a definição de Q_{inte} e os diversos modos de escrever a Equação (22.5), podemos escrever a lei de Gauss nas seguintes formas equivalentes:

$$\Phi_E = \oint E \cos\phi \, dA = \oint E_\perp \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0}$$

(várias formas da lei de Gauss) (22.9)

Tal como na Equação (22.5), as diversas formas da integral expressam a mesma coisa: o fluxo elétrico total através da superfície gaussiana, usando-se termos diferentes. Às vezes, uma forma é mais conveniente do que outra.

A título de exemplo, a Figura 22.14a mostra uma superfície gaussiana esférica com raio r em torno de uma carga puntiforme positiva $+q$. O campo elétrico aponta para fora da superfície, de modo que cada ponto sobre a superfície $\vec{E}$ aponta no mesmo sentido que $d\vec{A}$, $\phi = 0$ e $E_\perp$ é igual ao módulo do campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Como E é o mesmo em todos os pontos sobre a superfície, podemos retirá-lo da integral na Equação (22.9). Então o restante da integral é $\int dA = A = 4\pi r^2$, a área da esfera. Portanto, a Equação (22.9) torna-se

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A carga englobada Q_{inte} é exatamente a carga $+q$, o que está de acordo com a lei de Gauss. Se a superfície gaussiana engloba uma carga puntiforme *negativa*, como indica a Figura 22.14b, então $\vec{E}$ aponta *para o interior* da superfície em cada ponto, no sentido oposto a $d\vec{A}$. Logo $\phi = 180°$ e $E_\perp$ é igual à negativa do módulo do campo: $E_\perp = -E = -|-q|/4\pi\epsilon_0 r^2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Então a Equação (22.9) torna-se

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA$$

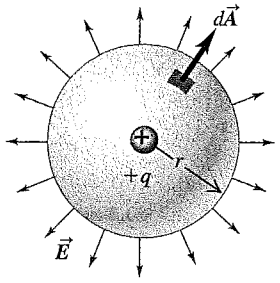
$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Isso está novamente de acordo com a lei de Gauss porque a carga englobada na Figura 22.14b é $Q_{\text{inte}} = -q$.

Nas equações (22.8) e (22.9), o termo Q_{inte} é sempre obtido fazendo-se a soma algébrica de todas as cargas positivas e negativas existentes no interior da superfície gaussiana; e $\vec{E}$ é o campo elétrico *total* sobre cada ponto da superfície. Observe também que, geralmente, esse campo elétrico é produzido por cargas que estão dentro da superfície e cargas que estão fora dela. Porém, como mostramos na Figura 22.13, as cargas que estão fora da superfície *não* contribuem para o fluxo elétrico total (líquido) através dela. Portanto, as equações (22.8) e (22.9) continuam válidas, mesmo quando existem cargas fora da superfície que contribuem para o campo elétrico sobre a superfície considerada. Quando $Q_{\text{inte}} = 0$, o fluxo elétrico total através da superfície gaussiana deve ser igual a zero, ainda que algumas de suas partes possam ter um fluxo elétrico positivo e outras partes possam ter um fluxo elétrico negativo (Figura 22.3b).

A lei de Gauss fornece uma resposta definitiva para a pergunta feita na Seção 22.1: 'Caso você soubesse a configuração do campo elétrico em uma dada região, o que poderia afirmar sobre a distribuição de cargas nessa região?' Essa lei fornece uma relação entre o campo elétrico sobre uma superfície fechada e a distribuição de cargas existentes no interior da superfície. Porém, em alguns casos, podemos usar a lei de Gauss para responder à pergunta inversa: 'Caso você conhecesse a distribuição de cargas em uma dada região, como poderia determinar a configuração do campo elétrico produzido por essa distribuição de cargas?' A lei de Gauss, aparentemente, não seria razoável para fornecer uma resposta para essa questão, visto que o cálculo da integral na Equação (22.8) pode parecer uma tarefa difícil. Em alguns casos, realmente é. Contudo, em outros, essa tarefa torna-se surpreendentemente simples. A seguir, damos um exemplo no qual *não* é necessário fazer nenhuma integral; na próxima seção, desenvolveremos outros exemplos.

(a) Superfície gaussiana em torno de uma carga positiva: fluxo positivo (para fora)



(b) Superfície gaussiana em torno de uma carga negativa: fluxo positivo (para dentro)

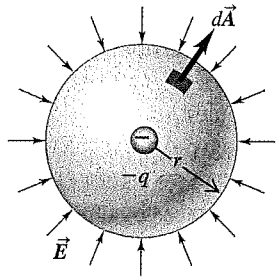


Figura 22.14 Superfícies gaussianas esféricas em torno de (a) uma carga puntiforme positiva e (b) uma carga puntiforme negativa.

Exemplo conceitual 22.4

FLUXO ELÉTRICO E CARGA INTERNA A Figura 22.15 indica o campo elétrico produzido por duas cargas puntiformes de mesmo módulo e sinais contrários $+q$ e $-q$ (um dipolo elétrico). Determine o fluxo elétrico através das superfícies fechadas A, B, C e D.

SOLUÇÃO

A definição de fluxo elétrico dada pela Equação (22.5) envolve uma integral de superfície, de modo que pode parecer que a integral deve ser calculada. Contudo, a lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada é igual ao valor da carga elétrica total no interior da superfície, dividido por ϵ_0. Examinando a Figura 22.15, vemos que a superfície A

engloba a carga positiva; logo, $Q_{\text{inte}} = +q$; a superfície B engloba a carga negativa; logo, $Q_{\text{inte}} = -q$; a superfície C engloba *ambas* as cargas; logo, $Q_{\text{inte}} = +q + (-q) = 0$; e a superfície D não possui nenhuma carga em seu interior; logo, $Q_{\text{inte}} = 0$. Portanto, não é necessário fazer nenhuma integração e concluímos que o fluxo elétrico total para a superfície A é dado por $\Phi_E = +q/\epsilon_0$; o fluxo elétrico total para a superfície B é dado por $\Phi_E = -q/\epsilon_0$; e, para as superfícies C e D, o fluxo elétrico total é dado por $\Phi_E = 0$.

Esses resultados dependem somente das cargas existentes no interior da superfície gaussiana, e não da forma precisa de cada superfície. Por exemplo, compare a superfície C com a superfície retangular indicada na Figura 22.3b, que também engloba ambas as cargas de um dipolo elétrico. Também naquele caso concluímos que o fluxo elétrico de $\vec{E}$ era igual a zero; o fluxo elétrico de fora para dentro sobre uma parte da superfície era compensado por um fluxo de dentro para fora sobre a parte restante da superfície.

Podemos obter conclusões semelhantes examinando as linhas de campo elétrico. A superfície A engloba somente uma carga positiva; na Figura 22.15, existem 18 linhas atravessando a superfície A de dentro para fora. A superfície B engloba somente uma carga negativa; também 18 linhas atravessam a superfície B, porém de fora para dentro. A superfície C engloba *ambas* as cargas. Ela é interceptada em 16 pontos; em 8 deles as linhas atravessam essa superfície de dentro para fora e, nos outros 8, as linhas cruzam a superfície de fora para dentro. O número *total* de linhas é igual a zero, assim como a carga total no interior da superfície. A superfície D é interceptada em 6 pontos; em 3 deles as linhas atravessam a superfície de dentro para fora e nos outros 3 as linhas são orientadas de fora para dentro. Tanto o número total de linhas quanto a carga total no interior da superfície são iguais a zero. Existem pontos sobre a superfície para os quais $\vec{E}$ não é perpendicular a ela, porém isso não altera a contagem das linhas de campo elétrico.

Teste sua compreensão da Seção 22.3 A Figura 22.16 mostra seis cargas puntiformes, todas elas localizadas no mesmo plano. Cinco superfícies gaussianas – S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 – englobam cada qual uma parte desse plano, e a Figura 22.16 mostra a intersecção de cada superfície com o plano. Classifique essas cinco superfícies por ordem do fluxo elétrico que as atravessa, desde o mais positivo até o mais negativo. ∎

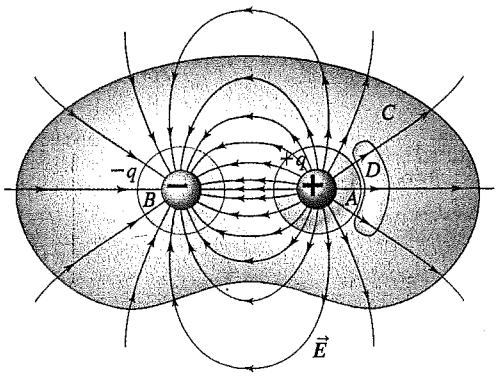


Figura 22.15 O número total de linhas de campo que atravessam uma superfície fechada é proporcional à carga elétrica total existente no interior da superfície.

22.4 Aplicações da lei de Gauss

A lei de Gauss é válida para *qualquer* distribuição de cargas e para *qualquer* superfície fechada. Ela pode ser usada de dois modos. Quando conhecemos a distribuição de cargas e a integral na lei de Gauss possui simetria suficiente, podemos determinar o campo. Ou, quando conhecemos o campo elétrico, podemos usar a lei de Gauss para definirmos a distribuição de cargas, tal como as cargas sobre uma superfície condutora.

Nesta seção, apresentaremos exemplos de ambos os tipos de aplicação. À medida que você os estudar, observe atentamente o papel desempenhado pelas propriedades de simetria de cada sistema. Utilizaremos a lei de Gauss para determinarmos o campo elétrico produzido por diversas distribuições de cargas, e os resultados serão apresentados em uma tabela no resumo do final do capítulo.

Em problemas práticos, geralmente encontramos situações nas quais precisamos saber o campo elétrico produzido por distribuições de cargas sobre um condutor. Esses cálculos são facilitados pelo seguinte fato crucial: *quando existe um excesso de carga em um condutor sólido em equilíbrio, o excesso de carga fica inteiramente localizado sobre a superfície do condutor, e não no interior do material.* (Por *excesso* queremos dizer cargas além dos íons e dos elétrons livres que compõem o condutor neutro.) Vamos agora demonstrar esse resultado. Sabemos da Seção 21.4 que, quando existe equilíbrio eletrostático (no qual todas as cargas estão em repouso), o campo elétrico $\vec{E}$ é igual a zero em qualquer ponto no interior de um condutor. Caso $\vec{E}$ fosse *diferente* de zero, as cargas estariam em movimento. Suponha que você desenhe uma superfície gaussiana no interior do condutor, como a superfície A indicada na Figura 22.17. Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ em todos os pontos sobre essa superfície, a lei de Gauss exige que a carga total no interior da superfície seja igual a zero. Imagine agora que você faça o volume delimitado por essa superfície tender a zero, de modo que a superfície se reduza a um ponto P; então, a carga nesse ponto deve ser igual a zero. Podemos repetir esse raciocínio para todos os pontos do condutor. Disso se conclui que *não pode existir nenhum excesso de carga no interior de um condutor sólido em equilíbrio; qualquer excesso de carga deve ficar localizado sobre a superfície do condutor.* (Esse resultado vale para um condutor *sólido*. Na próxima seção, discutiremos o que ocorre quando existem cavidades no interior do condutor.) O resultado demonstrado será usado com freqüência nos exemplos apresentados a seguir.

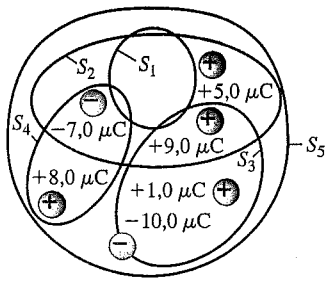


Figura 22.16 Cinco superfícies gaussianas e seis cargas puntiformes.

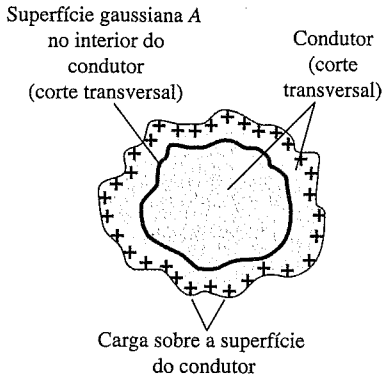


Figura 22.17 No equilíbrio eletrostático (as cargas não se movem), qualquer excesso de carga deve ficar localizado sobre a superfície de um condutor sólido.

Estratégia para a solução de problemas 22.1

LEI DE GAUSS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a lei de Gauss é mais útil nas situações em que a distribuição de carga possui simetria esférica ou cilíndrica; ou se está uniformemente distribuída sobre um plano. Nessas situações, determinamos o sentido de $\vec{E}$ pela simetria da distribuição de carga. Quando conhecemos a distribuição de carga, podemos usar a lei de Gauss para determinar o módulo de $\vec{E}$. Alternativamente, quando conhecemos o campo, podemos usar a lei de Gauss para determinar os detalhes da distribuição de carga. Em qualquer desses casos, inicie sua análise perguntando: o que é simetria?

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. A primeira etapa consiste na escolha da superfície à qual será aplicada a lei de Gauss. Geralmente, essa superfície é chamada de *superfície gaussiana*. Se você está tentando encontrar o campo em um dado ponto, então esse ponto deve estar sobre a superfície gaussiana escolhida.
2. A superfície gaussiana não precisa ser uma superfície real, tal como a superfície de um corpo sólido. A superfície apropriada é imaginária; ela pode estar no vácuo, no interior de um material ou parcialmente em ambos.
3. Você pode fazer a integral usando a lei de Gauss (sem usar um computador) somente quando a distribuição de cargas e a superfície gaussiana escolhida possuem propriedades de simetria. Quando a distribuição de cargas possui simetria cilíndrica ou esférica, escolha como superfície gaussiana um cilindro ou uma esfera, respectivamente.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Calcule a integral na Equação (22.9). Isso pode parecer complicado, mas a simetria da distribuição de carga e uma escolha cuidadosa da superfície gaussiana facilitarão a tarefa.
2. Geralmente, a superfície gaussiana escolhida pode ser composta por diversas superfícies, como no caso de um cilindro que contém dois planos nas extremidades. Nesses casos, a integral $\oint E_\perp \, dA$ sobre toda a superfície fechada é igual à soma das integrais sobre todas as superfícies separadas. Algumas dessas integrais podem se anular, como indicamos nos itens 4 e 5 deste quadro.
3. Quando $\vec{E}$ for *perpendicular* (normal) em todos os pontos de uma superfície com área A, se ele apontar *para fora* da superfície e seu *módulo* for constante em todos os pontos ao longo da superfície, então $E_\perp = E$ = constante, e $\int E_\perp \, dA$ sobre essa superfície será igual a EA. Se, em vez disso, $\vec{E}$ for perpendicular e *para dentro* da superfície, $E_{\perp -} = -E$, logo $\int E_\perp \, dA = -EA$.
4. Quando $\vec{E}$ for *tangente* em todos os pontos ao longo de uma superfície, então $E_{\perp -} = 0$ e a integral sobre essa superfície é igual a zero.
5. Quando $\vec{E} = \mathbf{0}$ em todos os pontos ao longo de uma superfície, então a integral sobre essa superfície será igual a zero.
6. Finalmente, na integral $\oint E_\perp \, dA$, $E_{\perp -}$ é sempre o componente perpendicular do campo elétrico *total* em cada ponto sobre a superfície gaussiana fechada. Em geral, esse campo elétrico pode ser produzido parcialmente pelas cargas no interior da superfície e por cargas no exterior da superfície. Mesmo quando *não* existe nenhuma carga no interior da superfície, o campo elétrico sobre a superfície gaussiana não é necessariamente igual a zero; contudo, nesse caso, a *integral* sobre a superfície gaussiana — ou seja, o fluxo elétrico total através dela — é sempre igual a zero.
7. Após avaliar a integral, use a Equação (22.9) para solucionar a incógnita do problema.

AVALIAR *a resposta*: em geral, o resultado será uma *função* que descreve como o módulo do campo elétrico varia conforme a posição. Examine essa função com um olhar crítico para verificar se faz sentido.

Exemplo 22.5

CAMPO DE UMA ESFERA CONDUTORA CARREGADA

Colocamos uma carga positiva q sobre uma esfera condutora sólida de raio R (Figura 22.18). Determine o campo elétrico $\vec{E}$ dentro e fora da esfera.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conforme discutimos anteriormente nesta seção, toda carga deve ficar localizada sobre a superfície da esfera. O sistema possui simetria esférica.

PREPARAR: para tirar proveito da simetria, tomamos como a superfície gaussiana uma esfera imaginária com raio r, centralizada sobre o condutor. Para calcular o campo fora do condutor,

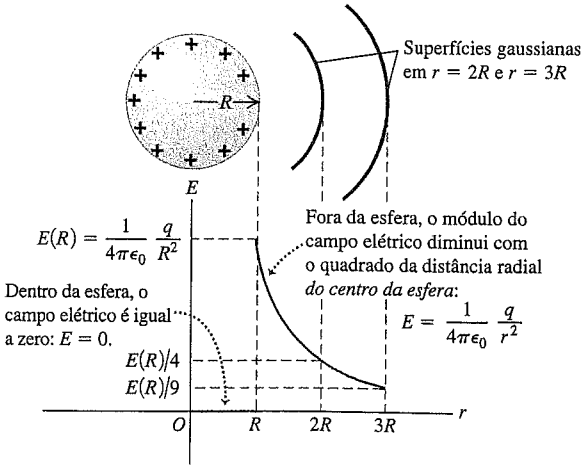


Figura 22.18 Cálculo do campo elétrico de uma esfera condutora com carga positiva q. Fora da esfera, o campo é o mesmo como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera.

supomos r maior do que o raio R do condutor; para calcular o campo interior, supomos r menor do que R. Em qualquer desses casos, o ponto em que desejamos calcular $\vec{E}$ localiza-se sobre a superfície gaussiana.

EXECUTAR: o papel desempenhado pela simetria merece uma discussão cuidadosa. Quando afirmamos que o sistema é esfericamente simétrico, queremos dizer que, se girarmos em um ângulo qualquer a esfera em torno de qualquer reta, passando pelo seu centro, obtemos uma esfera exatamente igual à original. A carga pode se mover livremente no condutor, e não existe nada no condutor que possibilite a concentração de carga mais em uma região do que em outra. Logo, concluímos que a distribuição das cargas deve ser *uniforme*.

A simetria também mostra que o campo elétrico deve ser *radial*, como indica a Figura 22.18. Se girarmos novamente o sistema, a configuração do campo elétrico deve ser igual à configuração do sistema inicial. Caso o campo elétrico tivesse um componente perpendicular à direção radial em algum ponto, esse componente seria diferente depois de alguma rotação. Logo, esse componente não existe e o campo elétrico é radial. Pelo mesmo motivo, concluímos que o módulo E do campo elétrico depende apenas da distância r entre o ponto considerado e o centro da esfera, e deve possuir sempre o mesmo valor sobre todos os pontos sobre qualquer superfície esférica concêntrica com o condutor.

A escolha de uma esfera como uma superfície gaussiana tira proveito dessas propriedades da simetria. Inicialmente, consideramos o campo fora do condutor, por isso escolhemos $r > R$. Todo o condutor está localizado no interior da superfície gaussiana, de modo que a carga no interior da superfície é igual a q. A área da superfície gaussiana é $4\pi r^2$; $\vec{E}$ é uniforme e perpendicular à superfície em todos os seus pontos. O fluxo elétrico dado pela integral na lei de Gauss $\oint E_\perp \, dA$ é, portanto, $E(4\pi r^2)$, e a Equação (22.8) fornece

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{e}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(fora de uma esfera condutora carregada)}$$

Essa expressão para o campo elétrico em qualquer ponto *fora* da esfera ($r > R$) é igual ao campo elétrico produzido por uma carga puntiforme; o campo elétrico de uma esfera carregada se comporta como se toda carga da esfera estivesse concentrada em seu centro. Imediatamente fora da superfície da esfera, para $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

(sobre a superfície de uma esfera condutora carregada)

ATENÇÃO O fluxo pode ser positivo ou negativo Lembre-se de que escolhemos a carga q como *positiva*. Quando a carga é negativa, o campo elétrico é orientado radialmente *para dentro* da esfera em vez de para fora, e o fluxo elétrico através da superfície gaussiana é negativo. Os módulos dos campos elétricos fora da esfera e sobre a superfície da esfera são dados pelas mesmas expressões anteriores, lembrando que, nesse caso, q representa o *módulo* (valor absoluto) da carga.

Para determinar $\vec{E}$ no interior do condutor, usamos uma superfície gaussiana esférica com raio $r < R$. A simetria esférica novamente nos diz que $E\,(4\pi r^2) = Q_{\text{inte}}/\,\epsilon_0$. Mas, como toda a carga está sobre a superfície do condutor, a superfície gaussiana escolhida (que se localiza inteiramente dentro do condutor) *não* contém carga. Portanto $Q_{\text{inte}} = 0$ e, portanto, o campo elétrico no interior do condutor é nulo.

AVALIAR: já sabíamos que $\vec{E} = \mathbf{0}$ no interior do condutor, como em qualquer condutor sólido quando as cargas estão em repouso. A Figura 22.18 mostra E em função da distância r a partir do centro da esfera. Note que no limite $R \to 0$, a esfera se comporta como uma carga puntiforme e, 'para fora' dessa carga puntiforme, o campo elétrico é dado por $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Portanto, deduzimos a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss. (Na Seção 22.3, deduzimos a lei de Gauss a partir da lei de Coulomb, de modo que agora completamos a prova da equivalência lógica entre essas duas leis.)

Podemos usar esse método para uma *coroa* esférica (uma esfera condutora com um buraco esférico concêntrico), supondo que não haja carga no interior do buraco. Usamos uma superfície gaussiana esférica com raio r menor do que o raio do buraco. Se *houvesse* carga no interior do buraco, o campo elétrico seria radial e esfericamente simétrico como antes; logo, $E = Q_{\text{inte}}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Como nesse caso não estamos considerando nenhuma carga, $Q_{\text{inte}} = 0$; logo, $E = 0$ no interior do buraco.

Você é capaz de usar esse método para determinar o campo elétrico no espaço existente entre uma esfera carregada com outra esfera oca condutora, concêntrica, que esteja na parte de fora dessa esfera?

Exemplo 22.6

CAMPO DE UMA CARGA DISTRIBUÍDA AO LONGO DE UM FIO RETILÍNEO Uma carga elétrica é distribuída uniformemente ao longo de um fio retilíneo infinito. A carga por unidade de comprimento é λ (considerado positivo). Calcule o campo elétrico. (Isto é, uma representação aproximada para o campo elétrico produzido por uma carga distribuída uniformemente ao longo de um fio retilíneo *finito*, desde que a distância entre o ponto do campo e o fio seja muito menor do que o comprimento do fio.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o sistema possui simetria *cilíndrica*. O campo elétrico deve apontar para fora das cargas positivas. Para determinar o sentido de $\vec{E}$ com mais precisão, e também determinar como o seu módulo depende da posição, usamos a simetria como no Exemplo 22.5.

PREPARAR: a simetria cilíndrica significa que podemos girar o fio em qualquer ângulo em torno do eixo e que podemos movê-lo por qualquer distância ao longo do eixo; em todos os casos, o sistema resultante não se distingue do sistema original. Usando o raciocínio do Exemplo 22.5, vemos que o campo elétrico $\vec{E}$ é o mesmo quando realizamos essas operações. O campo elétrico não pode ter nenhum componente paralelo ao fio; caso tivesse, teríamos de explicar a possibilidade da existência simultânea de dois sentidos para o campo elétrico. Além disso, o campo elétrico não pode ter nenhum componente tangente a um círculo perpendicular ao fio com centro sobre o fio; caso tivesse, precisaríamos explicar a possibilidade da existência simultânea de dois sentidos do campo elétrico em torno da circunferência. Resta somente a

hipótese de um componente que aponta radialmente para fora do fio em cada ponto. Logo, as linhas de campo elétrico de um fio retilíneo infinito uniformemente carregado são *radiais* e estão contidas em planos perpendiculares ao fio. O *módulo* do fio só pode depender da distância radial entre o ponto e o fio.

Essas propriedades de simetria sugerem o uso de uma superfície gaussiana *cilíndrica* com um raio arbitrário r e um comprimento arbitrário l, com suas extremidades perpendiculares ao fio (Figura 22.19).

EXECUTAR: dividimos a integral da superfície para o fluxo elétrico Φ_E em uma integral sobre a superfície lateral curva do cilindro e em duas outras sobre os planos das bases do cilindro. O fluxo elétrico sobre cada plano da extremidade do cilindro é igual a zero porque $\vec{E}$ está sobre o plano; logo, $E_\perp = 0$. Para encontrar o campo elétrico sobre a superfície lateral do cilindro, note que $\vec{E}$ é perpendicular a essa superfície em todos os seus pontos, portanto $E_\perp = E$; por simetria, concluímos que o valor de E é o mesmo em todos os pontos da superfície lateral. A área da superfície lateral é igual a $2\pi rl$. (Para fazer um cilindro de papel com raio r e comprimento l, você deve cortar um papel retangular de dimensão $2\pi r$, comprimento l e área $2\pi rl$.) Portanto, o fluxo elétrico total Φ_E através do cilindro é a soma dos fluxos nulos sobre as bases e do fluxo $(E)(2\pi rl)$ sobre a superfície lateral. Finalmente, precisamos da carga interna total, que é a carga por unidade de comprimento do fio multiplicada pelo comprimento do fio no interior da superfície gaussiana, ou seja, $Q_{\text{inte}} = \lambda l$. Usando a lei de Gauss, Equação (22.8), obtemos

$$\Phi_E = (E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

(campo de um fio infinito carregado)

Esse resultado é igual ao encontrado no Exemplo 21.11 (Seção 21.5) por meio de uma técnica muito mais trabalhosa.

Consideramos λ *positivo*. Caso ele fosse *negativo*, o campo elétrico $\vec{E}$ seria orientado para dentro do fio e, na expressão anterior para o módulo E, deveríamos interpretar λ como o *módulo* (valor absoluto) da carga por unidade de comprimento do fio.

AVALIAR: note que, embora a carga *inteira* sobre o fio contribua para o campo elétrico, somente a parte que está no interior da superfície fechada deve ser considerada quando aplicamos a lei de Gauss. Isso pode parecer estranho; tudo se passa como se o campo de um fio *curto* fosse igual ao do fio todo. Contudo, quando estudamos a *simetria* do problema, já *incluímos* a carga total existente no fio. Se o fio fosse curto, a simetria ao longo do eixo não existiria e o campo não seria uniforme ao longo da superfície gaussiana. Nesse caso, a lei de Gauss *não* seria útil para determinar o campo elétrico; o problema seria mais facilmente resolvido mediante a técnica de integração empregada no Exemplo 21.11.

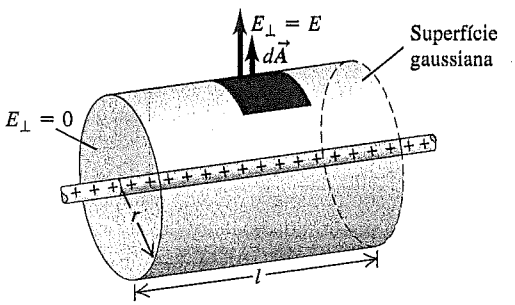


Figura 22.19 Uma superfície gaussiana cilíndrica coaxial é usada para a determinação do campo elétrico produzido no exterior de um fio carregado, infinitamente longo.

Podemos usar uma superfície gaussiana, semelhante à indicada na Figura 22.19, para mostrar que o campo elétrico para os pontos externos de um cilindro muito longo uniformemente carregado é igual ao campo de um fio infinito, colocado no eixo do cilindro com a mesma carga por unidade de comprimento do cilindro considerado. Também podemos aplicar a lei de Gauss para determinarmos o campo elétrico no espaço entre um cilindro longo uniformemente carregado e um cilindro oco concêntrico em seu exterior. Deixaremos esses cálculos para você resolver (veja os problemas 22.37 e 22.40).

Exemplo 22.7

CAMPO DE UMA CARGA DISTRIBUÍDA AO LONGO DE UM PLANO INFINITO Determine o campo elétrico produzido por um plano infinito com uma distribuição de carga uniforme positiva por unidade de área igual a σ.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o campo elétrico deve apontar para fora das cargas positivas do plano carregado. Como nos exemplos 22.5 e 22.6, antes de fazer os cálculos, usamos a simetria (neste caso, simetria *planar*) para aprender mais sobre a direção, o sentido e a dependência de posição do vetor $\vec{E}$.

PREPARAR: simetria planar significa que a distribuição de carga não se distingue da original quando deslocamos o plano em qualquer direção paralela ao plano. A partir disso, podemos concluir que $\vec{E}$ deve ser perpendicular ao plano. Pela simetria, também concluímos que o módulo do campo, em qualquer lado do plano, deve sempre possuir o mesmo valor E sobre pontos situados a uma mesma distância do plano. Essas propriedades de simetria sugerem o uso de uma superfície gaussiana cilíndrica, com um eixo perpendicular ao plano de cargas, e cujas bases possuam área A (Figura 22.20).

EXECUTAR: o plano carregado passa no meio da superfície cilíndrica, de modo que as extremidades do cilindro estão eqüidistantes do plano. Em cada uma das extremidades do cilindro, $\vec{E}$ é perpendicular à base do cilindro e o módulo $E_\perp$ é igual a E; portanto, o fluxo elétrico é igual a $+EA$.

Como $\vec{E}$ é perpendicular à superfície plana, ele é paralelo à superfície *lateral* curva do cilindro, de modo que $E_\perp$ é igual a zero sobre essa superfície, portanto o fluxo elétrico sobre a superfície lateral do cilindro é igual a zero. Logo, o fluxo elétrico total da integral da lei de Gauss é igual a $2EA$. (Cada extremidade contribui com EA e o fluxo sobre a superfície lateral é nulo.) A carga líquida no interior da superfície gaussiana é a carga por unidade de área multiplicada pela área do plano no interior da superfície, ou seja, $Q_{\text{inte}} = \sigma A$. Usando a lei de Gauss, Equação (22.8), obtemos

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(campo de um plano carregado infinito)

Esse resultado é igual ao que foi obtido no Exemplo 21.12 (Seção 21.5) por meio de um cálculo muito mais complicado. O campo elétrico é uniforme e sua direção é perpendicular ao plano de

cargas. Seu módulo é *independente* da distância entre o ponto e o plano. As linhas de campo são, portanto, paralelas entre si e perpendiculares ao plano.

Caso a densidade de cargas fosse negativa, o campo elétrico $\vec{E}$ seria orientado para *dentro* do plano; o fluxo elétrico através da superfície gaussiana na Figura 22.20 seria negativo; e σ na expressão $E = \sigma/2\epsilon_0$ designaria o módulo (valor absoluto) da densidade de cargas.

AVALIAR: a hipótese de um plano infinito é uma idealização; na natureza nada pode ser infinito. Contudo, o resultado $E = \sigma/2\epsilon_0$ é uma boa aproximação para pontos situados perto do plano (em comparação às dimensões do plano) e que não estejam muito próximos de suas bordas. Para esses pontos, o campo elétrico é aproximadamente uniforme e perpendicular ao plano.

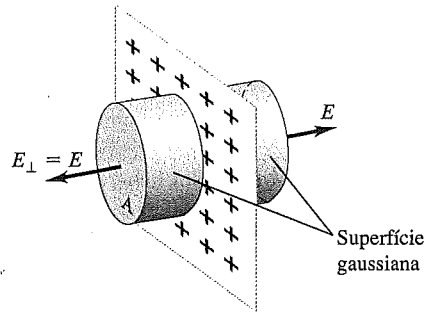


Figura 22.20 Uma superfície gaussiana cilíndrica é usada para a determinação do campo elétrico produzido por um plano infinito com uma distribuição de carga uniforme.

Exemplo 22.8

CAMPO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS CARREGADAS COM CARGAS OPOSTAS Duas placas paralelas grandes possuem cargas com módulos iguais, mas com sinais contrários; a carga por unidade de área é $+\sigma$ para uma das placas e $-\sigma$ para a outra. Determine o campo elétrico na região entre as duas placas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o campo elétrico entre as placas e em suas vizinhanças é aproximadamente indicado na Figura 22.21a. Como cargas de sinais opostos se atraem, as cargas se acumulam mais nas superfícies opostas das placas. Algumas cargas permanecem nas superfícies *externas* das placas, de modo que existe certo espalhamento e 'encurvamento' das linhas de campo nas bordas das placas. Contudo, quando as placas são muito grandes em comparação à distância entre elas, as cargas nas superfícies externas das placas são muito pequenas, e desprezamos os efeitos de encurvamento, exceto sobre as bordas. Nesse caso, podemos supor que o campo elétrico seja uniforme na região entre as placas, como indicado na Figura 22.21b, e que as cargas se distribuam uniformemente sobre as superfícies planas opostas.

PREPARAR: para explorar essa simetria, desenhamos as superfícies gaussianas sombreadas S_1, S_2, S_3 e S_4. Essas superfícies são cilindros que possuem extremidades com área A, tal como está indicado na vista em perspectiva da Figura 22.20. Elas são indicadas pela seção reta lateral na Figura 22.21b. Cada extremidade dessas superfícies está no interior de uma das placas condutoras.

EXECUTAR: para a superfície S_1, a extremidade da esquerda está no interior da placa 1 (a placa positiva). Como o campo elétrico é igual a zero no interior da parte maciça de qualquer condutor em equilíbrio eletrostático, não existe nenhum fluxo elétrico através dessa extremidade. O campo elétrico entre as placas é perpendicular à extremidade da direita e o módulo E é igual a $E_\perp$, portanto o fluxo elétrico é positivo e igual a EA, visto que $\vec{E}$ é orientado para fora da superfície gaussiana. Não existe nenhum fluxo elétrico através da superfície lateral do cilindro, visto que $\vec{E}$ é paralelo a ela. Logo, o fluxo elétrico total da integral da lei de Gauss é igual a EA. A carga líquida no interior da superfície gaussiana é igual a σA. Usando a Equação (22.8), obtemos

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(campo entre placas carregadas com cargas opostas)

O campo elétrico é uniforme, sua direção é perpendicular ao plano das placas e seu módulo é independente da distância entre o ponto e qualquer uma das placas. Esse mesmo resultado pode ser obtido usando-se a superfície gaussiana S_4; além disso, as superfícies gaussianas S_2 e S_3 podem servir para mostrar que $E = 0$ à esquerda do plano 1 e à direita do plano 2. Deixamos esses cálculos para você como um problema (veja o Exercício 22.27).

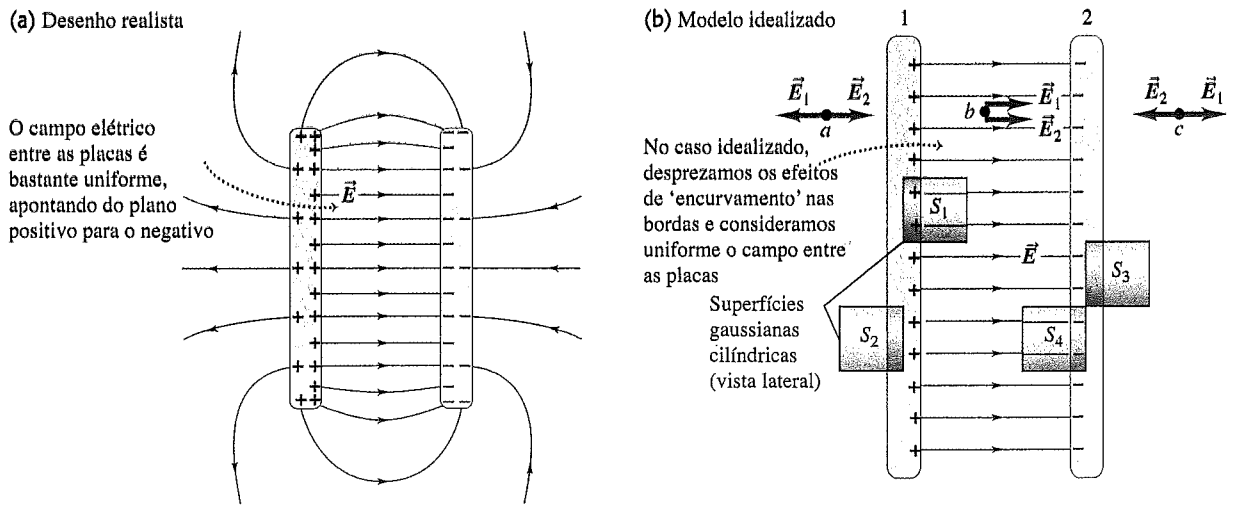


Figura 22.21 Campo elétrico produzido por duas placas carregadas com cargas opostas.

AVALIAR: no Exemplo 21.13 (Seção 21.5), obtivemos o resultado anterior usando o princípio da superposição para o campo elétrico. Os campos produzidos pelos planos de cargas (um em cada placa) são $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$; pelo Exemplo 22.7, ambos possuem módulo $\sigma/2\epsilon_0$. O campo elétrico resultante é dado pela soma vetorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Nos pontos *a* e *c*, indicados na Figura 22.21b, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ possuem sentidos opostos e a resultante é igual a zero. Isso também é verdade em qualquer ponto no interior do material das placas, consistente com o resultado de que o campo elétrico é igual a zero no interior da parte maciça de qualquer condutor em equilíbrio eletrostático. Para qualquer ponto *b* entre as placas, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ possuem o mesmo sentido; logo, a resultante é igual a $E = \sigma/\epsilon_0$, exatamente como acabamos de concluir, usando a lei de Gauss.

Exemplo 22.9

CAMPO DE UMA ESFERA UNIFORME CARREGADA Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente *ao longo do volume de uma esfera isolante* de raio R. Determine o módulo do campo elétrico em um ponto P a uma distância r do centro da esfera.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assim como no Exemplo 22.5, o sistema possui simetria esférica. Logo, podemos usar as conclusões desse exemplo sobre a direção, o sentido e o módulo de $\vec{E}$.

PREPARAR: para usarmos essa simetria, escolhemos como superfície gaussiana uma esfera de raio r concêntrica à distribuição de cargas.

EXECUTAR: pela simetria, o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ é o mesmo em todos os pontos sobre a superfície gaussiana e a direção do vetor $\vec{E}$ é radial em todos os pontos da superfície; logo, $E_\perp = E$. Portanto, o fluxo elétrico total através da superfície gaussiana é igual ao produto de E pela área total da superfície $A = 4\pi r^2$. Portanto, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

A quantidade de cargas no interior da superfície gaussiana depende do raio r da esfera. Vamos calcular, inicialmente, o módulo do campo elétrico *dentro* da esfera de raio R; o módulo E será calculado sobre a superfície gaussiana, de modo que escolhemos $r < R$. A densidade volumétrica de carga ρ é igual à carga Q dividida pelo volume total da esfera de raio R:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

O volume V_{inte} englobado pela superfície gaussiana é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$, de modo que a carga total Q_{inte} no interior dessa superfície é

$$Q_{\text{inte}} = \rho V_{\text{inte}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Usando a lei de Gauss, Equação (22.8), obtemos

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{ou}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

(campo no interior de uma esfera uniformemente carregada)

O módulo do campo elétrico é proporcional à distância r entre o ponto do campo e o centro da esfera. No centro ($r = 0$), $E = 0$.

Para determinarmos o módulo do campo elétrico *fora* da esfera, escolhemos uma superfície gaussiana esférica com raio $r > R$. Essa superfície engloba a carga total da esfera; logo, $Q_{\text{inte}} = Q$, e, usando a lei de Gauss, obtemos

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{ou}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

(campo no exterior de uma esfera uniformemente carregada)

Para *qualquer* corpo com uma distribuição de cargas com simetria esférica, o campo elétrico para pontos situados no exterior do corpo é o mesmo que aquele produzido caso toda carga do corpo estivesse concentrada no centro da esfera. (Já fizemos essa mesma observação no Exemplo 22.5.)

A Figura 22.22 mostra um gráfico de E em função de r para esse problema. Para $r < R$, E é diretamente proporcional a r e, para $r > R$, E varia em $1/r^2$. Quando a carga é negativa em vez de positiva, $\vec{E}$ é radialmente *voltado para dentro* e Q, nas expressões para E, é interpretado como o módulo (valor absoluto) da carga.

AVALIAR: note que, quando substituímos $r = R$ em qualquer uma das expressões de E (dentro ou fora da esfera), obtemos o mesmo resultado, $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ para o módulo do campo elétrico na superfície da esfera; isso decorre do fato de o módulo E ser uma função *contínua* de r. Em contraste, para o caso da esfera condutora do Exemplo 22.5, o módulo do campo elétrico E é uma função *descontínua* no ponto $r = R$ (ela salta de um valor $E = 0$ em um ponto interno até um valor $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ em um ponto externo quase sobre a superfície). Geralmente, o campo elétrico $\vec{E}$ sofre uma descontinuidade, em módulo, direção e sentido, sempre que existir uma *película* com cargas, tais como no caso das cargas distribuídas sobre a superfície de uma esfera condutora (Exemplo 22.5), no caso das cargas distribuídas sobre a superfície de um plano (Exemplo 22.7) ou no das cargas distribuídas sobre uma placa condutora (Exemplo 22.8).

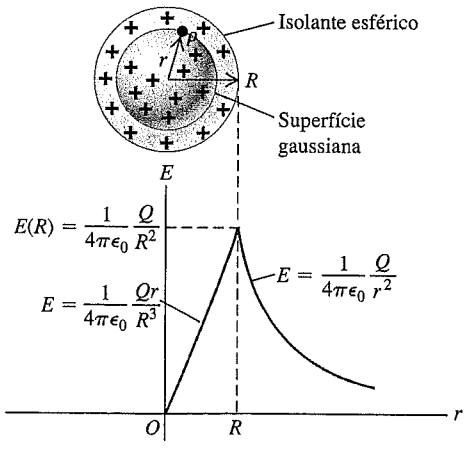


Figura 22.22 O módulo do campo elétrico de uma esfera isolante uniformemente carregada. Compare esse caso com o campo elétrico de uma esfera condutora (Figura 22.18).

A técnica geral aplicada nesse exemplo pode ser usada para *qualquer* corpo com uma distribuição de cargas com simetria esférica, tanto para uma distribuição de cargas uniforme quanto para uma distribuição não uniforme. Esses tipos de distribuição ocorrem em muitos átomos e em núcleos atômicos, sendo essa a razão pela qual a lei de Gauss é uma ferramenta útil na física atômica e na física nuclear.

Exemplo 22.10

CAMPO DE UMA ESFERA OCA CARREGADA Um esfera oca com paredes finas possui raio de 0,250 m e uma quantidade desconhecida de carga distribuída uniformemente sobre sua superfície. A uma distância de 0,300 m do centro da esfera, o campo elétrico aponta diretamente para o centro da esfera e possui módulo $1{,}80 \times 10^2$ N/C. Quanta carga há na esfera?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a distribuição de carga é uma simetria esférica. Assim como nos exemplos 22.5 e 22.9, ocorre que o campo elétrico é radial em todos os pontos e seu módulo é uma função somente da distância radial r do centro da esfera.

PREPARAR: novamente usamos uma superfície gaussiana, que é concêntrica em relação à distribuição de carga e que passa pelo ponto de interesse em $r = 0{,}300$ m.

EXECUTAR: a distribuição de carga é a mesma que se a carga estivesse sobre a superfície de uma esfera condutora com raio de 0,250 m. Logo, podemos tomar emprestados os resultados do Exemplo 22.5. A principal diferença é que, como o campo elétrico, neste caso, está direcionado para a esfera, a carga deve ser *negativa*. Além disso, como o campo elétrico está direcionado para a superfície gaussiana, $E_\perp = -E$ e o fluxo é $\oint E_\perp \, dA = -E(4\pi r^2)$.

Pela lei de Gauss, o fluxo é igual à carga q sobre a esfera (que está toda englobada pela superfície gaussiana) dividida por ϵ_0. Explicitando q, obtemos

$$\begin{aligned} q &= -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1{,}80 \times 10^2 \text{ N/C})(4\pi) \\ &\quad \times (8{,}854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0{,}300 \text{ m})^2 \\ &= -8{,}01 \times 10^{-10} \text{ C} = -0{,}801 \text{ nC} \end{aligned}$$

AVALIAR: para determinar a carga, tivemos que determinar o campo elétrico em *todos* os pontos sobre a superfície gaussiana, para podermos calcular a integral do fluxo. Isso foi possível neste caso porque a distribuição de carga é altamente simétrica. Quando, porém, a distribuição de carga é irregular ou carece de simetria a lei de Gauss não é muito útil para o cálculo da distribuição de carga a partir do campo, ou vice-versa.

Teste sua compreensão da Seção 22.4 Você coloca uma determinada quantidade de carga Q no condutor de formato irregular mostrado na Figura 22.17. Conhecendo o tamanho e o formato do condutor, você pode usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico em uma posição arbitrária fora do condutor? ▮

22.5 Cargas em condutores

Já vimos que, no equilíbrio eletrostático (ou seja, quando não existe movimento das cargas), o campo elétrico em qualquer ponto no interior do condutor é igual a zero; e qualquer excesso de carga de um condutor sólido deve ficar localizado inteiramente sobre sua superfície (Figura 22.23a). Mas, o que ocorre quando existe, no interior do condutor, uma *cavidade* (Figura 22.23b)? Quando não existe nenhuma carga no interior da cavidade, podemos usar uma superfície gaussiana tal como a superfície A (que está contida completamente na parte maciça do condutor) para mostrar que a carga total sobre a *superfície da cavidade* deve ser igual a zero, pois $\vec{E} = \mathbf{0}$ sobre todos os pontos da superfície gaussiana. De fato, podemos mostrar que não existe carga sobre *nenhum ponto* da superfície da cavidade. Deixamos para fazer uma demonstração detalhada desse resultado no Capítulo 23.

Suponha que um pequeno corpo com carga q seja colocado no interior de uma cavidade no seio de um condutor (Figura 22.23c). O condutor está descarregado e isolado da carga q. Novamente, $\vec{E} = \mathbf{0}$ sobre todos os pontos da superfície A; logo, de acordo com a lei de Gauss, a carga *total* no interior da superfície deve ser igual a zero. Concluímos, portanto, que deve existir uma carga $-q$ distribuída sobre a superfície da cavidade, atraída pela carga q existente no interior da cavidade. A carga *total* do condutor deve continuar igual a zero, o que permite concluir que uma carga $+q$ deve aparecer na superfície externa do material ou na parte maciça do condutor. Porém, já demonstramos na Seção 22.4 que, no equilíbrio eletrostático, não pode existir nenhum excesso de carga na parte maciça de um condutor. Assim, a carga $+q$ deve aparecer na superfície externa. Usando o mesmo raciocínio, se o condutor estivesse inicialmente carregado com uma carga q_C, surgiria em sua superfície externa uma carga $q_C + q$ depois que a carga q fosse colocada no interior da cavidade.

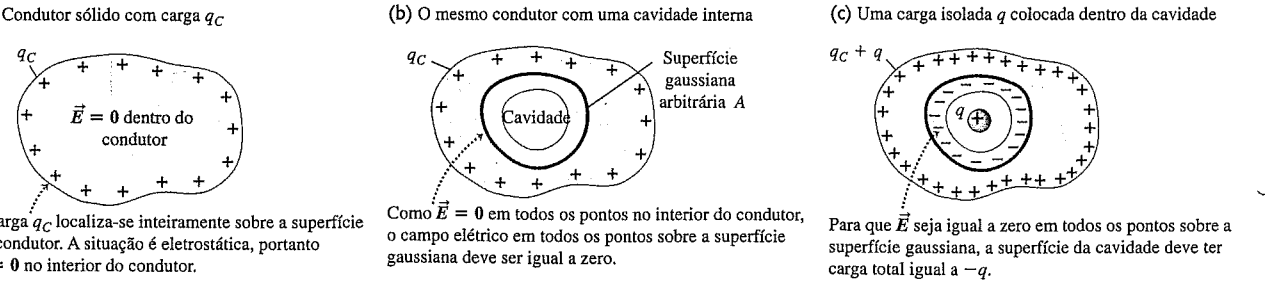


Figura 22.23 Cálculo do campo elétrico no interior de um condutor carregado.

Exemplo conceitual 22.11

UM CONDUTOR COM CAVIDADE Um condutor sólido com uma cavidade possui uma carga total igual a +7 nC. A carga no interior da cavidade, isolada do condutor, é igual a –5 nC. Qual deve ser a carga existente em cada superfície (interna e externa) do condutor?

SOLUÇÃO

A Figura 22.24 mostra a situação. Como a carga no interior da cavidade é $q = -5$ nC, a carga sobre a superfície interna da cavidade é $-q = -(-5\,\text{nC}) = +5\,\text{nC}$. O condutor possui uma carga *total* igual a +7 nC, que não pode estar localizada na parte maciça do condutor. Como já existe uma carga igual a +5 nC na superfície interna da cavidade, então deve existir uma carga (+ 7 nC) – (+ 5 nC) = + 2 nC sobre a superfície externa do condutor.

Teste experimental da lei de Gauss

Podemos agora descrever uma experiência histórica, ilustrada na Figura 22.25. Colocamos um recipiente condutor, tal como um balde de metal com tampa, sobre uma base isolante. O recipiente, inicialmente, está descarregado. A seguir, usando um fio isolante, suspendemos uma bola metálica carregada (Figura. 22.25a), introduzimos a bola no balde e o fechamos com a tampa (Figura. 22.25b). Nas paredes do recipiente, surgem cargas induzidas, como indicado. Em seguida, deixamos a bola *tocar* a parede interna (Figura 22.25c). Na realidade, a superfície da bola passa a desempenhar o papel de uma parte da superfície de uma cavidade. Agora a situação é semelhante à descrita na Figura 22.23b; a lei de Gauss exige que a carga total sobre a superfície da cavidade seja igual a zero. Portanto, a bola perde todas as suas cargas. Finalmente, retirando-se a bola do balde, verificamos que ela realmente perdeu totalmente suas cargas.

Essa experiência foi realizada no século 19 pelo cientista inglês Michael Faraday, que usou um balde de gelo metálico com uma tampa. Tal experiência passou a ser conhecida como **experiência do balde de gelo de Faraday**.

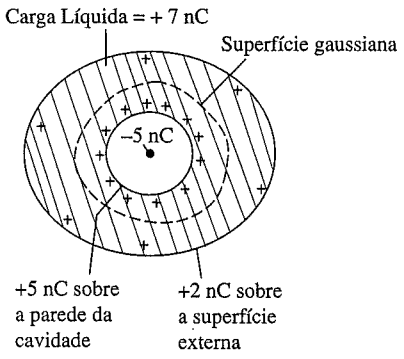


Figura 22.24 Nossa esquematização do problema. O campo elétrico no interior do condutor sólido é igual a zero e, portanto, é nulo o fluxo pela superfície gaussiana indicada, de modo que a carga na parede da cavidade deve ser oposta à da carga puntiforme.

(No século 18, Benjamin Franklin, nos Estados Unidos, e Joseph Priestley, na Inglaterra, realizaram experimentos semelhantes, embora com menor precisão.) O resultado confirma a validade da lei de Gauss e, portanto, também da lei de Coulomb. O resultado de Faraday foi bastante significativo porque o método experimental de Coulomb, usando uma balança de torção e dividindo cargas, não era muito preciso; é mais difícil verificar a dependência da força eletrostática com $1/r^2$ com grande precisão medindo-se diretamente a força. Em contraste, experiências semelhantes às de Faraday testam a validade da lei de Gauss, confirmando, portanto, a lei de Coulomb com uma precisão muito maior.

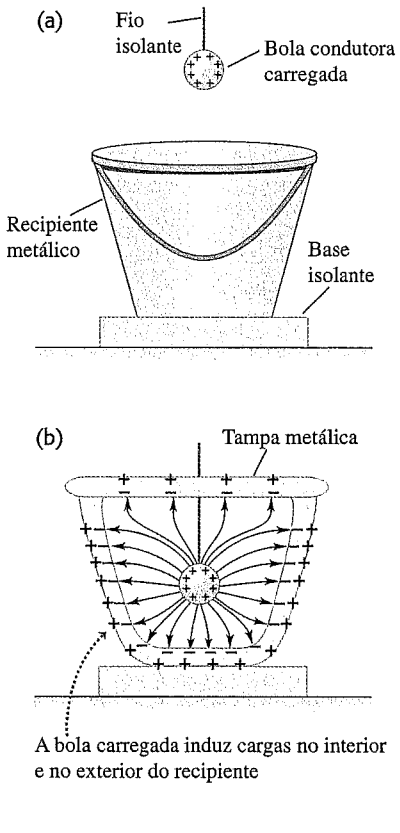


Figura 22.25 (a) Com um fio isolante, suspendemos uma bola condutora carregada sobre um recipiente condutor, apoiado sobre uma base isolante. (b) Abaixamos a bola, introduzindo-a no recipiente, e o fechamos com a tampa. (c) A bola toca a superfície interna do recipiente.

Uma versão moderna da experiência de Faraday é indicada na Figura 22.26. Os detalhes do sistema, indicados pelos dísticos 'fonte de potência', no interior da caixa, não são importantes; a função desse sistema é remover ou fornecer cargas para a esfera externa sob demanda. A caixa no interior da esfera, com um mostrador, representa simbolicamente um *eletrômetro*, um instrumento sensível que pode detectar variações extremamente pequenas das cargas existentes entre a superfície esférica interna e a superfície esférica externa. Se a lei de Gauss estiver correta, nunca haverá nenhuma carga sobre a superfície interna da esfera oca. Nesse caso, não pode ocorrer nenhum fluxo de cargas entre as duas superfícies enquanto a esfera estiver sendo carregada ou descarregada. O fato de nenhum fluxo ter sido detectado nas experiências é uma confirmação precisa da lei de Gauss e, portanto, confirma também a lei de Coulomb. A precisão da experiência é dada, principalmente, pelo eletrômetro, que possui uma sensibilidade extraordinariamente grande. As experiências mostraram que o expoente 2 da dependência com $1/r^2$ da lei de Coulomb é igual a 2 com uma precisão de 10^{-16}. Portanto, fica confirmado que o valor do expoente é exatamente igual a 2.

O mesmo princípio da experiência do balde de gelo de Faraday é usado em um *gerador eletrostático Van de Graaff* (Figura 22.27). A bola condutora carregada da Figura 22.26 é substituída por uma correia que transporta continuamente cargas para a superfície interna de uma esfera oca, que serve somente para que essas cargas sejam transportadas da superfície interna para o exterior da esfera. Como resultado, a carga da esfera oca e o campo elétrico em torno dela podem atingir rapidamente valores muito elevados. O gerador Van de Graaff pode ser usado como um acelerador de partículas carregadas e para fazer demonstrações de física.

Esse princípio também é a base para entender a *blindagem eletrostática*. Suponha que você queira proteger um instrumento eletrônico muito sensível da ação de campos elétricos ocasionais que poderiam produzir erros nas leituras do instrumento. Você deve colocar o instrumento no interior de uma caixa condutora ou então forrar as paredes, o pavimento e o teto com um material condutor, tal como uma folha de cobre. O campo elétrico externo produz uma redistribuição dos elétrons livres do condutor, resultando no acúmulo de cargas negativas sobre uma parte da superfície do condutor e uma igual quantidade de cargas positivas em outra parte da superfície (Figura 22.28). Essa distribuição de cargas produz um campo elétrico adicional, que se sobrepõe ao campo elétrico inicial, de tal modo que o campo elétrico *total* é igual a zero em todos os pontos no interior da caixa, conforme previsto pela lei de Gauss. A distribuição de cargas sobre a caixa também produz uma alteração da forma das linhas de campo nas vizinhanças da caixa, como indicado na figura. Esse dispositivo é geralmente conhecido como *gaiola de Faraday*. O mesmo princípio físico ensina que o interior do automóvel é o lugar mais seguro para você ficar quando ocorre uma tempestade com raios; caso um raio atinja o automóvel, as cargas tendem a se redistribuir sobre a superfície metálica do veículo, e quase nenhum campo elétrico atinge o compartimento de passageiros.

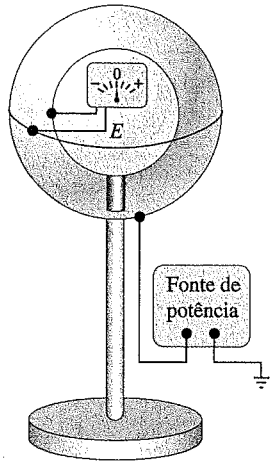


Figura 22.26 A superfície externa da esfera oca pode ser carregada ou descarregada usando-se a fonte de potência. Caso ocorresse qualquer fluxo de cargas entre a superfície esférica interna e a superfície esférica externa, ele seria detectado pelo eletrômetro colocado no interior da cavidade da esfera oca.

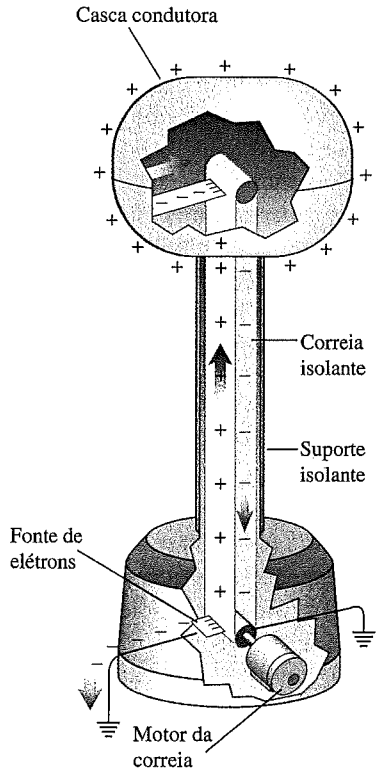


Figura 22.27 Corte mostrando as partes essenciais de um gerador eletrostático Van de Graaff. A fonte de elétrons retira elétrons da parte inferior da correia, de modo que a correia fica positiva; na parte superior, a correia retira elétrons da superfície interna da casca esférica, fazendo-a adquirir uma carga positiva.

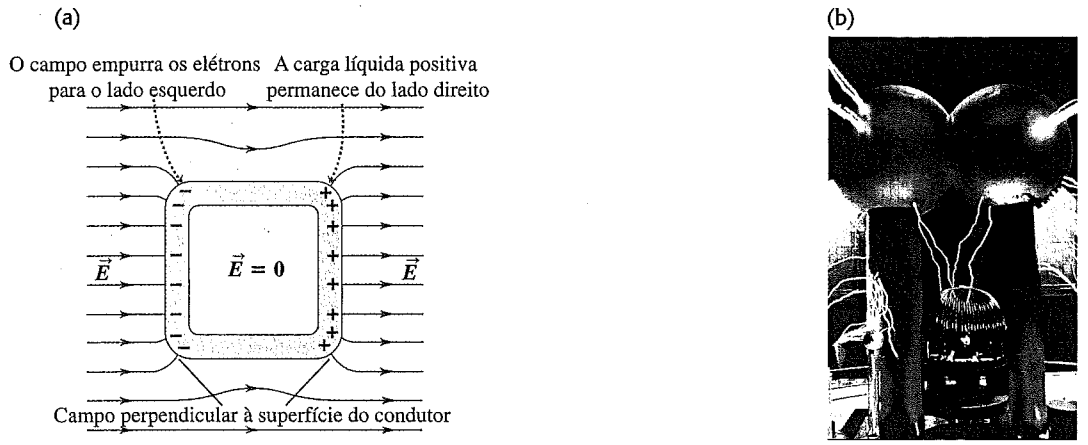


Figura 22.28
(a) Uma caixa condutora (uma gaiola de Faraday) imersa em um campo elétrico uniforme. O campo das cargas induzidas sobre a caixa junta-se ao campo uniforme para produzir um campo total nulo no interior da caixa. (b) Um escudo eletrostático pode proteger você de uma perigosa descarga elétrica.

Campo elétrico na superfície de um condutor

Finalmente, notamos que existe uma relação direta entre o campo elétrico $\vec{E}$, no exterior de um condutor, para todo ponto muito próximo da superfície externa de um condutor e a densidade superficial de carga σ do condutor nas vizinhanças do ponto considerado. Geralmente, σ varia de um ponto para outro ao longo da superfície do condutor. No Capítulo 23, mostraremos que, em qualquer ponto sobre a superfície de um condutor, o campo elétrico $\vec{E}$ é sempre *perpendicular* à superfície (veja a Figura 22.28a).

Para estabelecer uma relação entre σ em qualquer ponto ao longo da superfície do condutor e o componente perpendicular do campo elétrico nesse ponto, desenhamos uma superfície gaussiana em forma de cilindro (Figura 22.29). Uma das bases, de área A, do cilindro se encontra no interior do condutor, e a outra base, no exterior do condutor, muito próximo de sua superfície. O campo elétrico é igual a zero em todos os pontos no interior do condutor. No exterior do condutor, o componente de $\vec{E}$, perpendicular à superfície lateral do cilindro, é igual a zero e o campo elétrico sobre a base do cilindro é igual a $E_\perp$. (Quando σ é positivo, $E_\perp$ orienta-se para fora da superfície, e quando σ é negativo, $E_\perp$ orienta-se para dentro da superfície.) Portanto, o fluxo elétrico total através da superfície é igual a $E_\perp A$. A carga líquida no interior da superfície gaussiana é igual a σA; logo, pela lei de Gauss, obtemos

$$E_\perp A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (22.10)$$

(campo sobre a superfície de um condutor)

Você pode conferir esse resultado comparando-o com o campo elétrico obtido para uma esfera, para um cilindro e para um plano infinito.

Mostramos no Exemplo 22.8 que o módulo do campo elétrico entre duas grandes placas condutoras também é igual a σ/ϵ_0. Nesse caso, o módulo do campo elétrico é o mesmo em *todos* os pontos entre as placas; contudo, nas demais situações, ele sempre diminui com o aumento da distância entre o ponto e a superfície externa do corpo.

Exemplo conceitual 22.12

CAMPO NA SUPERFÍCIE DE UMA ESFERA CONDUTORA
Verifique a validade da Equação (22.10) para uma esfera condutora de raio R que possui carga q.

SOLUÇÃO

No Exemplo 22.5 (Seção 22.4), mostramos que o campo elétrico no exterior de uma esfera é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

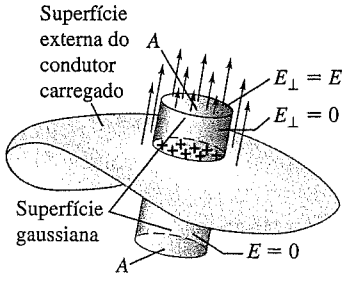


Figura 22.29 O campo elétrico próximo à parte externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície; e seu componente $E_\perp$ ao longo da direção perpendicular é igual a σ/ϵ_0.

A densidade superficial de carga é uniforme e igual a q dividido pela área da superfície da esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Comparando as duas relações anteriores, vemos que $E = \sigma/\epsilon_0$, o que confirma o resultado indicado pela Equação (22.10).

Exemplo 22.13

CAMPO ELÉTRICO DA TERRA A Terra (um condutor) possui uma carga elétrica líquida. O campo elétrico resultante nas proximidades da superfície da Terra pode ser medido usando-se um instrumento eletrônico sensível; seu valor médio é aproximadamente igual a 150 N/C e está orientado para o centro da Terra. (a) Qual é a densidade superficial de carga correspondente? (b) Qual é a carga *total* na superfície da Terra?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos o módulo do campo elétrico na superfície do condutor Terra e devemos calcular a densidade superficial de carga e a carga total sobre toda a superfície terrestre.

PREPARAR: dado o campo elétrico perpendicular, determinamos a densidade superficial de carga σ usando a Equação (22.10). A carga superficial total sobre a Terra é o produto de σ e a área da superfície terrestre.

EXECUTAR: (a) Pela direção do campo elétrico, sabemos que σ é negativa (correspondente ao fato de $\vec{E}$ ser direcionado *para dentro* da superfície, portanto $E_\perp$ é negativo). Usando a Equação (22.10),

$$\begin{aligned}\sigma = \epsilon_0 E_\perp &= (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(-150\ \mathrm{N/C}) \\ &= -1{,}33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2} = -1{,}33\ \mathrm{nC/m^2}\end{aligned}$$

(b) A área da superfície é igual a $4\pi R_T^2$, em que $R_T = 6{,}38 \times 10^6$ m é o raio da Terra (veja o Apêndice F). A carga total Q é igual ao produto $4\pi R_T^2 \sigma$ ou:

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi(6{,}38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-1{,}33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}) \\ &= -6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C} = -680\ \mathrm{kC}\end{aligned}$$

AVALIAR: podemos conferir o resultado do item (b) pelo resultado do Exemplo 22.5. Explicitando o valor de Q, obtemos

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi\epsilon_0 R^2 E_\perp \\ &= \frac{1}{9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}}(6{,}38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-150\ \mathrm{N/C}) \\ &= -6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C}\end{aligned}$$

A carga do elétron é dada por $-1{,}60 \times 10^{-19}$. Portanto, a carga elétrica negativa encontrada corresponde a um número de elétrons excedentes sobre a superfície da Terra, dado por $(-6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C}) / (-1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 4{,}2 \times 10^{24}$ ou cerca de 7 moles de elétrons excedentes. Isso é compensado por uma igual *deficiência* de elétrons na camada superior da atmosfera terrestre; assim, combinando-se as cargas existentes em sua superfície com as existentes na atmosfera terrestre, concluímos que a Terra é eletricamente neutra.

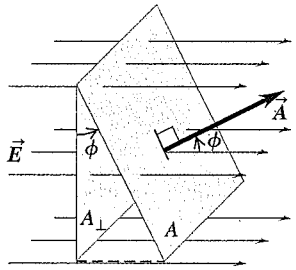
Teste sua compreensão da Seção 22.5 Uma esfera condutora oca não possui carga líquida. Há uma carga puntiforme positiva q no centro da cavidade esférica no interior da esfera. Você conecta um fio condutor da superfície externa da esfera ao solo. Você conseguirá medir um campo elétrico no exterior da esfera? ■

Resumo

Fluxo elétrico: o fluxo elétrico é a medida do 'escoamento' do campo elétrico através de uma superfície. Ele é dado pelo produto do elemento de área vezes o componente perpendicular de $\vec{E}$ integrado sobre a superfície considerada (exemplos 22.1 a 22.3).

$$\Phi_E = \int E\cos\phi\, dA$$

$$= \int E_\perp\, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (22.5)$$



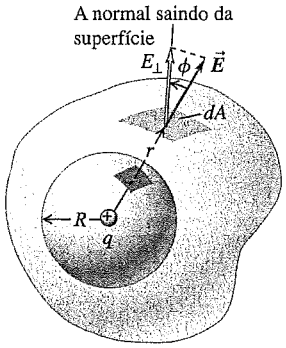
Lei de Gauss: a lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada — que pode ser escrita como uma integral de superfície do componente de $\vec{E}$ perpendicular à superfície — é igual a uma constante multiplicada pela carga total Q_{inte} no interior da superfície fechada. A lei de Gauss é logicamente equivalente à lei de Coulomb, porém seu uso facilita muito a solução de problemas que possuem elevado grau de simetria (exemplos 22.4 a 22.10).

Quando um excesso de carga é colocado sobre um condutor em repouso, as cargas se distribuem inteiramente sobre a superfície e $\vec{E} = \mathbf{0}$ em todas as partes do condutor, exceto em sua superfície (exemplos 22.11 a 22.13).

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi\, dA$$

$$= \oint E_\perp\, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0} \qquad (22.8),\ (22.9)$$



Campo elétrico de várias distribuições de cargas simétricas: a tabela seguinte indica os campos elétricos produzidos por diversas distribuições de cargas simétricas. Nessa tabela, q, Q, λ e σ representam os módulos das grandezas.

Distribuição de cargas	Ponto de campo elétrico	Módulo do campo elétrico
Uma única carga puriforme q	Distância r de q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Carga q sobre a superfície de uma esfera condutora com o raio R	Fora da esfera, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
	Dentro da esfera, $r < R$	$E = 0$
Fio infinito, carga por unidade de comprimento λ	Distância r do fio	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
Cilindro condutor infinito com o raio R, carga por unidade de comprimento λ	Fora do cilindro, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
	Dentro do cilindro, $r < R$	$E = 0$
Esfera isolante sólida com raio R, carga Q distribuída uniformemente no volume	Fora da esfera, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$
	Dentro da esfera, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$
Plano infinito com distribuição superficial de carga uniforme σ	Qualquer ponto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Duas placas condutoras com cargas contrárias e densidades superficiais de carga $+\sigma$ e $-\sigma$	Qualquer ponto entre as placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Principais termos

superfície fechada, 41
fluxo elétrico, 42
integral de superfície, 45
lei de Gauss, 47
superfície gaussiana, 49
experiência do balde de gelo de Faraday, 58

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Não. O campo elétrico dentro de uma cavidade no interior de um condutor é igual a zero, portanto não há nenhum efeito elétrico sobre a criança (veja a Seção 22.5).

Resposta às Perguntas dos Testes de Compreensão

22.1 Resposta: (iii) Cada parte da superfície da caixa estará a uma distância três vezes maior da carga $+q$, portanto o campo elétrico será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ mais forte. Mas a área da caixa aumentará por um fator de $3^2 = 9$. Logo, o fluxo elétrico será multiplicado por um fator de $(\frac{1}{9})(9) = 1$. Em outras palavras, o fluxo permanecerá inalterado.

22.2 Resposta: (iv), (ii), (i), (iii) Em cada caso, o campo elétrico é uniforme, portanto o fluxo é $\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$. Usamos as relações para os produtos escalares de vetores unitários: $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1, \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$. No item (i), temos $\Phi_E = (4{,}0\ \text{N/C})(6{,}0\ \text{m}^2)\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$ (o campo elétrico e a área do vetor são perpendiculares, portanto o fluxo é igual a zero). No item (ii), temos $\Phi_E = [(4{,}0\ \text{N/C})\hat{\imath} + (2{,}0\ \text{N/C})\hat{\jmath}]\cdot(3{,}0\ \text{m}^2)\hat{\jmath} = (2{,}0\ \text{N/C})\cdot(3{,}0\text{m}^2) = 6{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. Analogamente, no item (iii), temos $\Phi_E = [(4{,}0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2{,}0\ \text{N/C})\hat{\jmath}]\cdot[(3{,}0\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (7{,}0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}] = (4{,}0\ \text{N/C})(3{,}0\ \text{m}^2) - (2{,}0\ \text{N/C})(7{,}0\ \text{m}^2) = -2\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ e, no item (iv), temos $\Phi_E = [(4{,}0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2{,}0\ \text{N/C})\hat{\jmath}]\cdot[(3{,}0\ \text{m}^2)\hat{\imath} - (7{,}0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}] = (4{,}0\ \text{N/C})(3{,}0\ \text{m}^2) + (2{,}0\ \text{N/C})\cdot(7{,}0\ \text{m}^2) = 26\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$.

22.3 Resposta: S_2, S_5, S_4, S_1 e S_3 (empate) A lei de Gauss afirma que o fluxo através de uma superfície fechada é proporcional à quantidade de carga englobada no interior dessa superfície. Portanto, ordenar essas superfícies de acordo com seus fluxos é o mesmo que ordenar pela quantidade de carga englobada. A superfície S_1 não possui nenhuma carga, S_2 engloba $9{,}0\ \mu\text{C} + 5{,}0\ \mu\text{C} + (-7{,}0\ \mu\text{C}) = 7{,}0\ \mu\text{C}$, S_3 engloba $9{,}0\ \mu\text{C} + 1{,}0\ \mu\text{C} + (-10{,}0\ \mu\text{C}) = 0$, S_4 engloba $8{,}0\ \mu\text{C} + (-7{,}0\ \mu\text{C}) = 1{,}0\ \mu\text{C}$ e S_5 engloba $8{,}0\ \mu\text{C} + (-7{,}0\ \mu\text{C}) + (-10{,}0\ \mu\text{C}) + (1{,}0\ \mu\text{C}) + (9{,}0\ \mu\text{C}) + (5{,}0\ \mu\text{C}) = 6{,}0\ \mu\text{C}$.

22.4 Resposta: não Você pode ficar tentado a desenhar uma superfície gaussiana que seja uma versão ampliada do condutor, com o mesmo formato, e posicionado de modo que englobe completamente o condutor. Embora você conheça o fluxo que passa por essa superfície gaussiana (pela lei de Gauss, é $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), a direção e o sentido do campo elétrico não será necessariamente perpendicular à superfície e o módulo do campo não será necessariamente o mesmo em todos os pontos da superfície. Não é possível calcular a integral do fluxo $\oint E_\perp dA$, e não podemos calcular o campo elétrico. A lei de Gauss é útil para o cálculo do campo elétrico, somente quando a distribuição de cargas é *altamente* simétrica.

22.5 Resposta: não Antes de se conectar o fio à esfera, a presença da carga puntiforme induzirá uma carga $-q$ sobre a superfície interna da esfera oca e uma carga q sobre a superfície externa (a carga líquida sobre a esfera é igual a zero). Haverá um campo elétrico fora da esfera produzido pela carga sobre a superfície externa. Quando se dá o contato entre o fio condutor e a esfera, entretanto, os elétrons escoarão do solo para a superfície externa da esfera, de modo a neutralizar a carga ali (veja a Figura 21.7c). Por conseguinte, a esfera não terá nenhuma carga sobre a sua superfície externa e nenhum campo elétrico externo.

Questões para discussão

Q22.1 Um balão de borracha possui uma única carga puntiforme em seu interior. O fluxo elétrico através do balão quando ele está parcialmente cheio é igual ao fluxo elétrico quando ele está completamente inflado? Explique seu raciocínio.

Q22.2 Suponha que na Figura 22.15 ambas as cargas sejam positivas. Quais seriam os fluxos que passariam por cada uma das quatro superfícies nesse exemplo?

Q22.3 Na Figura 22.15, suponha que uma terceira carga puntiforme fosse colocada fora da superfície gaussiana C. Isso produziria alguma mudança no fluxo elétrico através das superfícies A, B, C ou D indicadas na figura? Por quê?

Q22.4 Uma certa região do espaço está limitada por uma superfície fechada imaginária que não contém nenhuma carga. O campo elétrico é sempre igual a zero em todos os pontos dessa superfície? Caso não seja, em que circunstâncias ele é igual a zero sobre a superfície?

Q22.5 Uma carga puntiforme q está no interior de uma superfície gaussiana esférica. Se a carga for removida para um ponto afastado do centro dessa superfície esférica, o campo elétrico em um ponto sobre essa superfície se modifica? O fluxo total através da superfície gaussiana sofre alteração? Explique.

Q22.6 Você encontra uma caixa lacrada na soleira da porta e suspeita que ela contenha várias esferas metálicas embaladas em material isolante. Como você pode determinar a carga líquida total no interior da caixa sem abri-la? Ou isso não é possível?

Q22.7 Durante o fluxo de uma corrente elétrica em um fio condutor, um ou mais elétrons de cada átomo são livres para se mover ao longo do fio, como a água que flui por um cano. Você esperaria encontrar um campo elétrico fora do fio carregando esse fluxo uniforme de elétrons? Explique.

Q22.8 Caso o campo elétrico de uma carga puntiforme fosse proporcional a $1/r^3$ em vez de $1/r^2$, a lei de Gauss ainda seria válida? Explique seu raciocínio. (*Sugestão*: Considere uma superfície gaussiana esférica centralizada sobre uma única carga puntiforme.)

Q22.9 Suponha que o disco no Exemplo 22.1 (Seção 22.2), em vez de possuir seu vetor normal orientado somente para dois ou três ângulos em particular do campo elétrico, começasse a girar de forma contínua, de modo que seu vetor normal ficasse inicialmente paralelo ao campo e, a seguir, perpendicular a ele; depois, em sentido contrário a ele e assim por diante. Faça um gráfico do fluxo elétrico resultante *versus* o tempo para uma rotação completa de 360°.

Q22.10 Em um condutor, cada átomo contribui com um ou mais elétrons que podem se mover livremente ao longo do volume do condutor. Esse fato contradiz a afirmação de que qualquer excesso de carga no interior de um condutor deve permanecer sobre a superfície do condutor? Por quê?

Q22.11 Você carrega o gerador de Van de Graaff, indicado na Figura 22.27, e, a seguir, aproxima dele uma esfera condutora oca descarregada sem deixar que as duas esferas se toquem. Desenhe a distribuição de cargas na segunda esfera. Qual é o fluxo líquido através da segunda esfera? Qual é o campo elétrico no interior da segunda esfera?

Q22.12 O módulo de um campo elétrico $\vec{E}$ na superfície de um condutor sólido de forma irregular deve ser maior nas proximidades de pontos onde a superfície se encurva fortemente, tal como o ponto A da Figura 22.30, e deve ser menor nas proximidades de pontos onde a superfície é mais larga, tal como o ponto B da Figura 22.30. Explique por que isso deve ocorrer, levando em consideração a distribuição das linhas de campo ao longo da superfície de um condutor. Como a densidade superficial de carga no ponto B se compara à densidade superficial de carga no ponto A? Explique seu raciocínio.

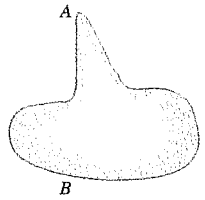


Figura 22.30 Questão 22.12.

Q22.13 Um pára-raios é uma barra de cobre pontiaguda, montada no topo de um edifício e soldada com um cabo de cobre pesado, que penetra no solo. Os pára-raios são usados para proteger casas e celeiros dos raios; a corrente do raio passa pelo cobre em vez de passar pelo edifício. Por quê? Por que sua extremidade deve ser pontiaguda? (*Sugestão*: A resposta da Q22.12 pode ser útil.)

Q22.14 Um condutor sólido possui uma cavidade em seu interior. Uma carga puntiforme dentro da cavidade pode afetar o campo elétrico fora do condutor? Por quê? A presença de uma carga puntiforme no exterior do condutor pode afetar o campo elétrico no interior da cavidade? Por quê?

Q22.15 Explique a seguinte afirmação: 'Em uma situação de equilíbrio estático, o campo elétrico resultante na superfície de um condutor não pode ter componente paralelo à superfície, porque isso violaria a condição de equilíbrio estático das cargas sobre a superfície'. Essa afirmação seria válida para o campo elétrico resultante na superfície de um *isolante*? Explique seu raciocínio e diga qual é a razão de qualquer diferença que você encontre entre o caso do condutor e o caso do isolante.

Q22.16 Uma esfera maciça de cobre possui carga líquida positiva. A distribuição das cargas é uniforme sobre a superfície esférica, e o campo elétrico no interior da esfera é igual a zero. A seguir, uma carga puntiforme negativa é aproximada da superfície da esfera. Toda a carga líquida sobre a esfera continua na sua superfície? Em caso afirmativo, essa carga está uniformemente distribuída? Caso não, como ela está distribuída? O campo elétrico no interior da esfera continua sendo igual a zero? Em cada caso, justifique suas respostas.

Q22.17 Algumas aeronaves modernas são fabricadas com materiais compósitos que não conduzem eletricidade. Nos Estados Unidos existe uma lei que obriga o uso de fios condutores nas vizinhanças da superfície desses materiais para proteção quando a aeronave atravessa uma nuvem de tempestade. Explique o fundamento físico usado na elaboração dessa lei.

Exercícios

Seção 22.2 Determinação do fluxo elétrico

22.1 Uma folha de papel plana, com área igual a 0,250 m^2, é orientada de tal modo que a normal ao plano forma um ângulo de 60° com a direção de um campo elétrico uniforme, de módulo igual a 14 N/C. (a) Calcule o módulo do fluxo elétrico através da folha. (b) A resposta do item (a) depende da forma geométrica da folha? Por quê? (c) Para que ângulo ϕ, entre a normal ao plano e a direção do campo elétrico, o módulo do fluxo elétrico através da folha se torna (i) máximo? (ii) mínimo? Explique seu raciocínio.

22.2 Uma placa plana possui a forma de um retângulo com lados de 0,400 m e 0,600 m. A placa está imersa em um campo elétrico uniforme com módulo igual a 75,0 N/C e cuja direção forma um ângulo de 20° com o plano da placa (Figura 22.31). Calcule o módulo do fluxo elétrico total através da placa.

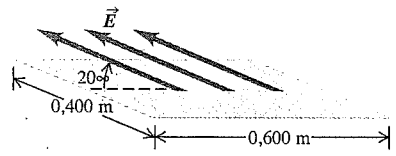


Figura 22.31 Exercício 22.2.

22.3 Você mede um campo elétrico de $1,25 \times 10^6$ N/C a uma distância de 0,150 m de uma carga puntiforme. (a) Qual é o fluxo elétrico através de uma esfera nessa distância da carga? (b) Qual é o módulo da carga?

22.4 Um cubo possui uma aresta de comprimento $L = 0,300$ m. Ele é colocado com um vértice na origem, como indica a Figura 22.32. O campo elétrico não é uniforme, mas é dado por $\vec{E} = (-5,0\ \text{N/C} \cdot \text{m})x\hat{i} + (3,0\ \text{N/C} \cdot \text{m})z\hat{k}$. (a) Qual é o fluxo elétrico através de cada uma das seis faces do cubo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6? (b) Determine o fluxo elétrico total no interior do cubo.

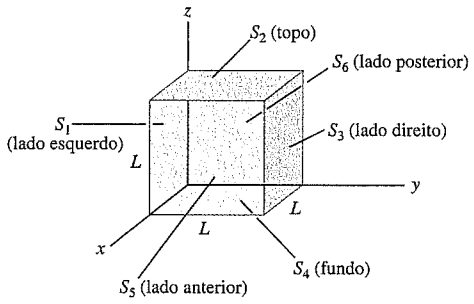


Figura 22.32 Exercícios 22.4 e 22.6; Problema 22.32.

22.5 Uma superfície hemisférica com raio r, em uma região de campo elétrico uniforme $\vec{E}$, possui eixo alinhado paralelamente ao sentido do campo. Calcule o fluxo através dessa superfície.

22.6 O cubo na Figura 22.32 possui uma aresta $L = 10,0$ cm. O campo elétrico é uniforme, paralelo ao plano xy, formando um ângulo de 36,9°, medido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$, e possui módulo $E = 4,0 \times 10^3$ N/C. (a) Qual é o fluxo elétrico através de cada uma das seis faces do cubo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6? (b) Qual é o fluxo elétrico total através de todas as faces do cubo?

22.7 No Exemplo 21.11 (Seção 21.5), verificamos que o campo elétrico produzido por um fio retilíneo infinito carregado é perpendicular ao fio e possui módulo $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Considere uma superfície cilíndrica imaginária de raio $r = 0,250$ m e comprimento $l = 0,400$ m com uma carga positiva distribuída uniformemente sobre seu comprimento. A carga por unidade de comprimento sobre a linha é $\lambda = 6,0\ \mu$C/m. (a) Qual é o fluxo elétrico através do cilindro produzido pelo fio infinito? (b) Qual é o fluxo elétrico através do cilindro quando seu raio aumenta para $r = 0,500$ m? (c) Qual é o fluxo elétrico através do cilindro quando seu comprimento aumenta para $l = 0,800$ m?

Seção 22.3 Lei de Gauss

22.8 As três pequenas esferas indicadas na Figura 22.33 possuem cargas $q_1 = 4,0$ nC, $q_2 = -7,80$ nC e $q_3 = 2,40$ nC. Determine o fluxo elétrico total através de cada uma das superfícies fechadas cujas seções retas são indicadas na figura: (a) S_1; (b) S_2; (c) S_3; (d) S_4; (e) S_5. (f) As respostas dos itens de (a) até (e) dependem de como a carga está distribuída em cada esfera pequena? Por quê?

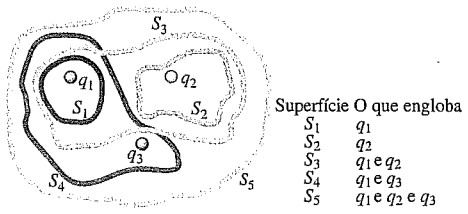


Figura 22.33 Exercício 22.8.

22.9 Uma fina e uniforme camada de tinta carregada é espalhada sobre a superfície de uma esfera plástica com diâmetro de 12,0 cm, produzindo uma carga de $-15,0\ \mu$C. Determine o campo elétrico (a) dentro da camada de tinta; (b) fora da camada de tinta; (c) 5,0 cm fora da superfície da camada de tinta.

22.10 Uma carga puntiforme $q_1 = 4,0$ nC está localizada sobre o eixo Ox, no ponto $x = 2,0$ m, e uma segunda carga puntiforme $q_2 = -6,0$ nC está localizada sobre o eixo Oy, no ponto $y = 1,0$ m. Qual é o fluxo elétrico total produzido por essas cargas através de uma superfície esférica centralizada na origem e com um raio de (a) 0,50 m? (b) 1,50 m? (c) 2,50 m?

22.11 Em certa região do espaço, existe um campo elétrico $\vec{E}$ uniforme. (a) Use a lei de Gauss para provar que essa região deve ser eletricamente neutra, ou seja, a densidade de carga ρ deve ser igual a zero. (b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, em uma região do espaço na qual não existe nenhuma carga, o campo elétrico $\vec{E}$ deve ser uniforme? Explique seu raciocínio.

22.12 (a) Em certa região do espaço, a densidade de carga ρ é positiva. O campo elétrico $\vec{E}$ pode ser uniforme nessa região? Explique. (b) Suponha que, nessa região com densidade de carga ρ positiva, exista uma 'cavidade' com $\rho = 0$. O campo elétrico $\vec{E}$ pode ser uniforme no interior dessa cavidade? Explique.

22.13 Uma carga puntiforme igual a 9,60 μC está no centro de um cubo cuja aresta possui um comprimento de 0,500 m. (a) Qual é o fluxo elétrico através de cada uma das seis faces do cubo? (b) O que mudaria em sua resposta da parte (a) se a aresta do cubo tivesse um comprimento igual a 0,250 m? Explique seu raciocínio.

22.14 Campos elétricos em um átomo. Os núcleos de grandes átomos, como o urânio com 92 prótons, podem ser modelados

como esferas simétricas de carga. O raio do núcleo de urânio é de aproximadamente $7,4 \times 10^{-15}$ m. (a) Qual é o campo elétrico que esse núcleo produz fora da sua superfície? (b) Qual módulo do campo elétrico ele produz na distância dos elétrons, que é de aproximadamente $1,0 \times 10^{-10}$ m? (c) Os elétrons podem ser modelados de modo a formar uma casca uniforme com carga negativa. Qual campo elétrico líquido eles produzem no local do núcleo?

22.15 Uma carga puntiforme de +5,0 μC está localizada no eixo x, em $x = 4,0$ m, próxima a uma superfície esférica de raio igual a 3,0 m e centralizado na origem. (a) Calcule o módulo do campo elétrico em $x = 3,0$ m. (b) Calcule o módulo do campo elétrico em $x = -3,0$ m. (c) De acordo com a lei de Gauss, o fluxo líquido através da esfera é igual a zero porque ele não contém nenhuma carga. Entretanto, o campo produzido pela carga externa é muito mais forte no lado mais próximo da esfera (isto é, em $x = 3,0$ m) do que no lado distante (em $x = -3,0$ m). Como, então, pode o fluxo dentro da esfera (no lado mais próximo) ser igual ao fluxo fora dela (no lado mais distante)? Explique. Um desenho pode ajudar.

Seção 22.4 Aplicações da lei de Gauss e Seção 22.5 Cargas em condutores

22.16 Uma esfera metálica sólida sem buracos, com raio igual a 0,450 m, possui uma carga líquida de 0,250 nC. Encontre o módulo do campo elétrico (a) em um ponto situado fora da esfera, a uma distância de 0,100 m de sua superfície; (b) em um ponto interno, a uma distância de 0,100 m abaixo da superfície.

22.17 Em um dia úmido, um campo elétrico de $2,0 \times 10^4$ N/C é suficiente para produzir faíscas de cerca de uma polegada de comprimento. Suponha que, na sua aula de física, um gerador Van de Graaff (veja a Figura 22.27), com um raio de esfera de 15,0 cm, produza faíscas de 6 polegadas de comprimento. (a) Use a lei de Gauss para calcular a quantidade de carga armazenada na superfície da esfera, antes que você corajosamente descarregue-a com as mãos. (b) Suponha que toda a carga esteja concentrada no centro da esfera e use a lei de Coulomb para calcular o campo elétrico na superfície da esfera.

22.18 Alguns cientistas planetários sugeriram que Marte possui um campo elétrico semelhante ao da Terra, produzindo um fluxo elétrico líquido de $3,63 \times 10^{16}$ N · m^2/C na superfície do planeta. Calcule: (a) a carga elétrica total sobre o planeta; (b) o campo elétrico na superfície do planeta (consulte os dados de astronomia na capa de trás); (c) a densidade de carga em Marte, supondo que toda carga esteja uniformemente distribuída pela superfície do planeta.

22.19 Qual é o excesso de elétrons que deve ser adicionado a um condutor esférico isolado, com diâmetro de 32,0 cm, para produzir um campo elétrico de 1150 N/C em um ponto quase sobre a superfície externa da esfera?

22.20 O campo elétrico a uma distância de 0,400 m de uma linha infinita muito longa de carga é de 840 N/C. Quanta carga está contida em uma seção de 2,0 cm dessa linha?

22.21 Uma linha de carga muito longa e uniforme possui carga por unidade de comprimento igual a 4,80 μC e está ao longo do eixo x. Uma segunda linha, de carga longa e uniforme, possui carga por unidade de comprimento igual a –2,40 μC e está paralela ao eixo Ox, em $y = 0,400$ m. Qual é o campo elétrico líquido (módulo, direção e sentido) nos seguintes pontos sobre o eixo Oy: (a) $y = 0,200$ m e (b) $y = 0,600$ m?

22.22 (a) A uma distância de 0,200 cm do centro de uma esfera condutora carregada com raio igual a 0,100 cm, o campo elétrico é de 480 N/C. Qual é o campo elétrico a uma distância de 0,600 cm do centro da esfera? (b) A uma distância de 0,200 cm do eixo de um cilindro condutor carregado muito longo com raio igual a 0,100 cm, o campo elétrico é igual a 480 N/C. Qual é o campo elétrico a uma distância de 0,600 cm do eixo do cilindro? (c) A uma distância de 0,200 cm de um plano de carga grande e uniforme, o campo elétrico é de 480 N/C. Qual é o campo elétrico a 1,20 cm do plano?

22.23 Uma esfera condutora oca, com raio externo de 0,250 m e raio interno de 0,200 m, possui uma densidade superficial de carga uniforme de $+6,37 \times 10^{-6}$ C/m^2. Uma carga de –0,500 μC é introduzida na cavidade no interior da esfera. (a) Qual é a nova densidade de carga na parte externa da esfera? (b) Calcule a força do campo elétrico fora da esfera. (c) Qual é o fluxo elétrico através de uma superfície esférica na superfície interior da esfera?

22.24 Uma carga puntiforme de –2,0 μC está localizada no centro de uma cavidade esférica com raio igual a 6,50 cm no interior de um corpo sólido isolado. A densidade de carga no sólido é $\rho = 7,35 \times 10^{-4}$ C/m^3. Calcule o campo elétrico no interior do sólido a uma distância de 9,50 cm do centro da cavidade.

22.25 O campo elétrico a uma distância de 0,145 m da superfície de uma esfera isolante maciça, com raio igual a 0,355 m, é de 1750 N/C. (a) Supondo que a carga da esfera esteja uniformemente distribuída, qual é a densidade de carga dentro dela? (b) Calcule o campo elétrico no interior da esfera a uma distância de 0,200 m do centro.

22.26 Um condutor com uma cavidade tal como aquela indicada na Figura 22.23c possui uma carga total igual a +5,0 nC. A carga existente no interior da cavidade, isolada do condutor, é igual a –6,0 nC. Qual é a quantidade de carga existente sobre (a) a superfície interna do condutor? (b) a superfície externa do condutor?

22.27 Aplique a lei de Gauss para as superfícies gaussianas S_2, S_3 e S_4 na Figura 22.21b para calcular o campo elétrico na região entre as placas e fora delas.

22.28 Uma folha isolante quadrada, com lado igual a 80,0 cm, é mantida em uma posição horizontal. A folha possui uma carga de 7,50 nC distribuída uniformemente sobre sua superfície. (a) Calcule o campo elétrico em um ponto a uma distância de 0,100 mm acima do centro da folha. (b) Estime o campo elétrico em um ponto situado a 100 m acima do centro da folha. (c) Suas respostas dos itens (a) e (b) seriam diferentes se a folha fosse feita de um material condutor? Por quê?

22.29 Um condutor cilíndrico infinito possui raio R e uma densidade superficial de carga σ. (a) Com base em σ e em R, qual é a carga por unidade de comprimento λ para o cilindro? (b) Em termos de σ, qual é o módulo do campo elétrico produzido pelo cilindro carregado a uma distância $r > R$ do seu eixo? (c) Expresse o resultado do item (b) em termos de λ e mostre que o campo elétrico para fora do cilindro se comporta como se toda carga elétrica do cilindro estivesse concentrada em seu eixo. Compare suas respostas com o resultado obtido para um fio carregado no Exemplo 22.6 (Seção 22.4).

22.30 Duas placas de plástico muito grandes e não-condutoras, cada qual com espessura de 10,0 cm, carregam densidades de carga uniforme σ_1, σ_2, σ_3 e σ_4 sobre suas superfícies, como indica a Figura 22.34. Essas densidades superficiais de carga possuem os valores $\sigma_1 = -6,0$ μC/m^2, $\sigma_2 = +5,0$ μC/m^2, $\sigma_3 = +2,0$ μC/m^2 e $\sigma_4 = +4,0$ μC/m^2. Use a lei de Gauss para determinar o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico nos seguintes pontos, afastados das bordas dessas placas: (a) ponto A, a 5,0 cm da face esquerda

da placa à esquerda; (b) ponto B, a 1,25 cm da superfície interna da placa à direita; (c) ponto C, no meio da placa à direita.

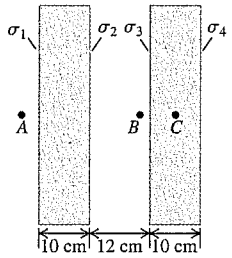


Figura 22.34 Exercício 22.30.

22.31 Uma carga negativa $-Q$ é colocada no interior da cavidade de um sólido metálico oco. A parte externa do sólido está aterrada por um fio condutor entre ele e a Terra. (a) Há algum excesso de carga induzida na superfície interna do pedaço de metal? Em caso afirmativo, determine o seu sinal e módulo. (b) Há qualquer excesso de carga na superfície externa do pedaço de metal? Por quê? (c) Há um campo elétrico na cavidade? Explique. (d) Há um campo elétrico dentro do metal? Por quê? Há um campo elétrico fora do pedaço de metal? Explique. (e) Alguém fora do sólido poderia medir um campo elétrico produzido pela carga $-Q$? É razoável afirmar que o condutor aterrado *blindou* a região dos efeitos da carga $-Q$? Em princípio, o mesmo poderia ser feito com a gravidade? Por quê?

Problemas

22.32 Um cubo possui arestas com comprimento L e é colocado com um dos vértices na origem, como indica a Figura 22.32. O campo elétrico não é uniforme, porém é dado por $\vec{E} = -B\hat{i} + C\hat{j} - D\hat{k}$, onde B, C e D são constantes positivas. (a) Determine o fluxo elétrico através de cada uma das seis faces do cubo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6. (b) Calcule o fluxo elétrico total no interior do cubo.

22.33 O campo elétrico $\vec{E}$ na Figura 22.35 é paralelo ao eixo Ox em todos os pontos da região, portanto os componentes E_y e E_z são nulos. O componente x do campo elétrico E_x depende de x, mas não depende de y nem de z. Sobre os pontos do plano yz (em que $x = 0$), $E_x = 125$ N/C. (a) Calcule o fluxo elétrico através da superfície I na Figura 22.35. (b) Qual é o fluxo elétrico através da superfície II? (c) O volume indicado na figura é uma pequena seção de uma viga isolante muito grande, com espessura igual a 1,0 m. Sabendo que existe uma carga igual a –24,0 nC no interior do volume indicado, determine o módulo, a direção e o sentido de $\vec{E}$ sobre a face oposta à face I. (d) O campo elétrico existente é produzido somente pelas cargas no interior da viga ou pode ser produzido também por cargas existentes fora da viga? Como se pode ter certeza disso?

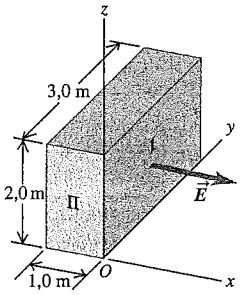


Figura 22.35 Problema 22.33.

22.34 Uma superfície plana quadrada com lado igual a L é descrita pelas equações

$$x = L \qquad (0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L)$$

(a) Caça um desenho do quadrado e mostre os eixos x, y e z. (b) Calcule o fluxo elétrico através do quadrado produzido por uma carga puntiforme q positiva localizada na origem ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). (*Sugestão*: Imagine o quadrado como parte de um cubo centralizado na origem.)

22.35 O campo elétrico $\vec{E}_1$ em uma das faces de um paralelepípedo é uniforme em todos os pontos dessa face e aponta perpendicularmente para fora da face. Na face oposta, o campo elétrico $\vec{E}_2$ também é uniforme em todos os pontos e aponta perpendicularmente para dentro da face (Figura 22.36). As duas faces mencionadas possuem uma inclinação de 30° em relação à horizontal, enquanto $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ são, ambos, horizontais; o módulo de $\vec{E}_1$ é igual a $2{,}50 \times 10^4$ N/C e o módulo de $\vec{E}_2$ é igual a $7{,}0 \times 10^4$ N/C. (a) Supondo que nenhuma outra linha de campo atravesse as superfícies do paralelepípedo, determine a carga líquida contida em seu interior. (b) O campo elétrico existente é produzido somente pelas cargas no interior do paralelepípedo ou pode ser produzido também por cargas existentes fora dele? Como se pode ter certeza disso?

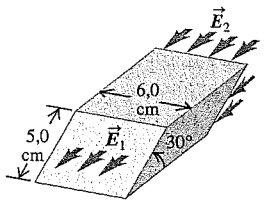


Figura 22.36 Problema 22.35.

22.36 Uma linha longa que possui densidade linear de carga uniforme +50,0 μC/m corre paralelamente à superfície de uma placa de plástico plana e grande, a 10,0 cm de distância, e que possui uma densidade superficial de carga uniforme de $-100\ \mu C/m^2$ em um dos lados. Ache a localização de todos os pontos em que uma partícula α não sofreria nenhuma força produzida por essa combinação de objetos carregados.

22.37 O cabo coaxial. Um cabo coaxial longo é constituído por um cilindro interno condutor de raio a e por um cilindro externo coaxial com raio interno b e raio externo c. O cilindro externo está apoiado em suportes isolantes e não possui nenhuma carga líquida. O cilindro interno possui uma carga por unidade de comprimento uniforme λ. Determine o campo elétrico (a) em qualquer ponto entre os dois cilindros, a uma distância r do eixo; (b) em qualquer ponto no exterior do cilindro. (c) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico em função da distância r ao eixo do cabo, desde $r = 0$ até $r = 2c$. (d) Calcule a carga por unidade de comprimento da superfície interna e da superfície externa do cilindro externo.

22.38 Um tubo cilíndrico condutor muito longo (cilindro oco) possui raio interno a e raio externo b. Ele possui carga por unidade de comprimento igual a $+\alpha$, em que α é uma constante positiva com unidades de C/m. Um fio carregado está sobre o eixo do tubo. O fio possui uma carga por unidade de comprimento igual a $+\alpha$. (a) Determine o campo elétrico em função de α e da distância r ao eixo do tubo para (i) $r < a$; (ii) $a < r < b$; (iii) $r > b$. Mostre seus

resultados em um gráfico de E em função da distância r. (b) Qual é a carga por unidade de comprimento sobre (i) a superfície interna do tubo; (ii) a superfície externa do tubo?

22.39 Repita o Problema 22.38, porém agora supondo que o tubo condutor possua uma carga por unidade de comprimento igual a $-\alpha$. Como no Problema 22.38, o fio carregado possui uma carga por unidade de comprimento igual a $+\alpha$.

22.40 Um cilindro sólido muito longo de raio R possui uma distribuição uniforme de carga positiva, sendo ρ a carga por unidade de volume. (a) Deduza uma expressão para o campo elétrico no interior do volume, a uma distância r do eixo do cilindro, em termos da densidade de carga ρ. (b) Qual é o campo elétrico em um ponto fora do volume, em termos da carga por unidade de comprimento λ do cilindro? (c) Compare os resultados dos itens (a) e (b) para $r = R$. (d) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico em função da distância r, de $r = 0$ até $r = 3R$.

22.41 Uma pequena esfera com massa de 0,002 g e carga de $5{,}0 \times 10^{-8}$ C está suspensa por um fio, próxima a uma grande placa condutora carregada, como indica a Figura 22.37. A densidade de carga sobre a placa é $2{,}50 \times 10^{-9}$ C/m^2. Determine o ângulo do fio.

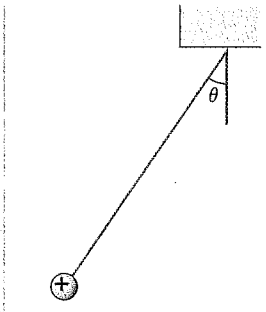


Figura 22.37 Problema 22.41.

22.42 **Uma esfera dentro de uma esfera.** Uma esfera condutora sólida de raio a possui carga q. Ela está no interior de uma esfera condutora oca concêntrica com raio interno b e raio externo c. A esfera condutora oca não possui nenhuma carga líquida. (a) Deduza uma expressão para o módulo do campo elétrico em função da distância r ao centro para as regiões $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$, e $r > c$. (b) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico em função da distância r, de $r = 0$ até $r = 2c$. (c) Qual é a carga sobre a superfície interna da esfera oca? (d) Qual é a carga sobre a superfície externa da esfera oca? (e) Represente as cargas da pequena esfera usando quatro sinais de adição. Faça um esboço das linhas de campo do sistema no interior de um volume esférico de raio igual a $2c$.

22.43 Uma esfera condutora sólida de raio R com carga Q está no interior de uma casca esférica muito fina isolante e concêntrica, com raio $2R$ e que possui também uma carga Q. A carga Q está distribuída uniformemente sobre a casca esférica isolante. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico em cada uma das regiões $0 < r < R$, $R < r < 2R$ e $r > 2R$. (b) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico em função da distância r.

22.44 Uma esfera oca condutora com raio interno a e raio externo b possui uma carga puntiforme positiva Q, localizada em seu centro. A carga total sobre a esfera oca é igual a $-3Q$ e está isolada de suas vizinhanças (Figura 22.38). (a) Deduza uma expressão para o módulo do campo elétrico em função da distância r ao centro para as regiões $r < a$, $a < r < b$, e $r > b$. (b) Qual é a densidade superficial de carga sobre a superfície interna da esfera oca condutora? (c) Qual é a densidade superficial de carga sobre a superfície externa da esfera oca? (d) Faça um desenho indicando as linhas de campo elétrico e a localização de todas as cargas. (e) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico em função da distância r.

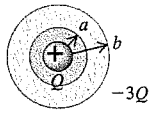


Figura 22.38 Problema 22.44.

22.45 **Esferas ocas concêntricas.** Uma pequena esfera oca condutora, com raio interno a e raio externo b, é concêntrica com uma grande esfera oca condutora, com raio interno c e raio externo d (Figura 22.39). A carga total sobre a esfera oca interna é igual a $+2q$ e a carga total sobre a esfera oca externa é igual a $+4q$. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico em função da distância r ao centro comum para as regiões (i) $r < a$; (ii) $a < r < b$; (iii) $b < r < c$; (iv) $c < r < d$; (v) $r > d$. Mostre seus resultados em um gráfico do componente radial de $\vec{E}$ em função da distância r. (b) Qual é carga total sobre (i) a superfície interna da esfera oca pequena; (ii) a superfície externa da esfera oca pequena; (iii) a superfície interna da esfera oca grande; (iv) a superfície externa da esfera oca grande?

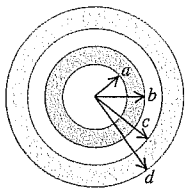


Figura 22.39 Problema 22.45.

22.46 Repita o Problema 22.45, porém agora supondo que a esfera oca grande possua uma carga igual a $-2q$. Como no Problema 22.45, a esfera oca pequena continua com uma carga $+2q$.

22.47 Repita o Problema 22.45, porém agora supondo que a esfera oca grande possua uma carga igual a $-4q$. Como no Problema 22.45, a esfera oca pequena continua com uma carga igual a $+2q$.

22.48 Uma esfera condutora sólida de raio R possui uma carga positiva Q. A esfera está no interior de uma esfera oca isolante e concêntrica com raio interno R e raio externo $2R$. A esfera isolante possui uma densidade de carga uniforme ρ. (a) Calcule o valor de ρ para que a carga total do sistema seja igual a zero. (b) Usando o valor de ρ encontrado na parte (a), determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico em cada uma das regiões $0 < r < R$, $R < r < 2R$, e $r > 2R$. Mostre seus resultados em um gráfico do componente radial de $\vec{E}$ em função da distância r. (c) Sabemos que, geralmente, o campo elétrico é descontínuo somente através de uma fronteira onde existe uma fina camada de cargas. Explique como seu resultado da parte (b) confirma essa regra.

22.49 Uma carga negativa $-Q$ está distribuída uniformemente sobre uma casca esférica isolante fina, de raio R. Encontre o módulo, a direção e o sentido da força que essa casca esférica exerce sobre uma carga puntiforme q localizada (a) a uma distância $r > R$ do centro da esfera (no exterior da casca esférica); (b) a uma distância $r < R$ do centro da esfera (dentro da casca esférica).

22.50 (a) Qual o excesso de elétrons que deve ser distribuído uniformemente dentro do volume de uma esfera plástica isolada, com 30,0 cm de diâmetro, para produzir um campo elétrico de 1150 N/C na área externa da esfera? (b) Qual é o campo elétrico em um ponto a 10,0 cm fora da superfície da esfera?

22.51 Uma única placa condutora isolada (Figura 22.40) possui uma carga por unidade de área σ em sua superfície. Como a placa é condutora, o campo elétrico sobre sua superfície é perpendicular ao plano e possui módulo $E = \sigma/\epsilon_0$. (a) No Exemplo 22.7 (Seção 22.4), verificamos que o campo elétrico produzido por um plano infinito uniformemente carregado com carga por unidade de área σ possui módulo $E = \sigma/2\epsilon_0$, exatamente a *metade* do valor do campo elétrico de uma placa condutora. Por que existe essa diferença? (b) Considerando a distribuição de cargas sobre a placa condutora como dois planos carregados (um de cada lado da placa), cada um deles com uma carga por unidade de área σ, use o resultado do Exemplo 22.7 e o princípio da superposição para mostrar que $E = 0$ no interior da placa e $E = \sigma/\epsilon_0$ fora da placa.

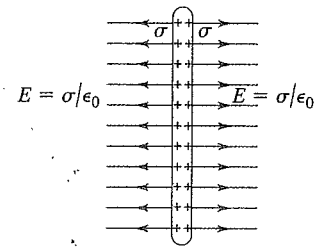


Figura 22.40 Problema 22.51.

22.52 Modelo de Thomson para o átomo. Nos primeiros anos do século 20, um dos modelos pioneiros para a estrutura foi proposto pelo físico inglês J. J. Thomson (o descobridor do elétron). Segundo o modelo de Thomson, um átomo era constituído por uma esfera carregada positivamente com elétrons negativos, espalhados no interior de seu volume, tal como passas no interior de um bolo. Imagine um átomo constituído por um elétron de massa m e carga $-e$, que pode ser considerado uma carga puntiforme, e uma esfera de raio R uniformemente carregada com uma carga total $+e$. (a) Explique por que a posição de equilíbrio do elétron seria o centro do núcleo. (b) No modelo de Thomson, suponha que o material positivo do átomo não oferecesse resistência ao movimento do elétron. Mostre que, se o elétron se deslocar de sua posição de equilíbrio até uma distância menor do que R, o movimento resultante do elétron deve ser harmônico simples; e calcule a freqüência das oscilações. (*Sugestão*: Faça uma revisão da definição do movimento harmônico simples, na Seção 13.2. É possível mostrar que, se a força resultante sobre o elétron possui essa forma, então o movimento resultante é harmônico simples. Reciprocamente, se a força resultante sobre o elétron não possui essa forma, então o movimento resultante não é harmônico simples.) (c) Na época de Thomson, já se sabia que átomos excitados só emitiam ondas luminosas com certas freqüências. Nesse modelo, a freqüência das ondas emitidas seria a mesma das oscilações do elétron ou a dos elétrons no átomo. Qual deveria ser o raio do átomo no modelo de Thomson para que ele emitisse luz vermelha com uma freqüência igual a $4{,}57 \times 10^{14}$ Hz? Compare sua resposta com o raio de um átomo real, que é da ordem de 10^{-10} m (veja o Apêndice F para os dados sobre o elétron). (d) Se o elétron se deslocasse de sua posição de equilíbrio até uma distância maior do que R, ocorreria oscilação do elétron? O movimento resultante do elétron seria harmônico simples? Explique sua resposta. (*Nota histórica*: Em 1910, o núcleo do átomo foi descoberto, provando que o modelo de Thomson não era correto. A carga positiva do átomo não se encontra espalhada em seu volume, como Thomson imaginava, mas concentrada em um núcleo minúsculo, com raio da ordem de 10^{-14} a 10^{-15} m.)

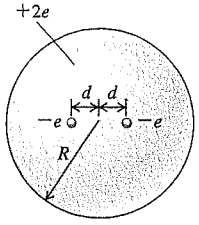


Figura 22.41 Problema 22.53.

22.53 Modelo de Thomson para o átomo, continuação. Usando o modelo (desatualizado) de Thomson para o átomo, descrito no Problema 22.52, considere um átomo constituído por dois elétrons, cada um com carga $-e$, espalhados no interior de uma esfera de raio R, com uma carga total $+2e$. No equilíbrio, cada elétron está a uma distância d do centro do átomo (Figura 22.41). Calcule a distância d em termos das outras propriedades do átomo.

22.54 Uma placa uniformemente carregada. Uma placa de material isolante com espessura $2d$ é orientada de modo que suas faces fiquem paralelas ao plano yz e sejam dadas pelos planos $x = d$ e $x = -d$. As dimensões da placa nas direções y e z são muito maiores do que d, de modo que podem ser consideradas infinitas. A placa possui uma densidade de carga uniforme ρ. (a) Explique por que o campo elétrico no centro da barra ($x = 0$) é igual a zero. (b) Usando a lei de Gauss, determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico em todos os pontos do espaço.

22.55 Uma placa carregada de forma não uniforme. Repita o Problema 22.54, porém agora supondo que a densidade de carga da placa seja dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, onde ρ_0 é uma constante positiva.

22.56 Pode ocorrer equilíbrio estável quando forças elétricas atuam sem nenhuma outra força? No Capítulo 21, fornecemos diversos exemplos para o cálculo de uma força elétrica exercida sobre uma carga puntiforme por outras cargas puntiformes existentes em suas vizinhanças. (a) Considere uma carga puntiforme positiva $+q$. Forneça um exemplo de como colocar duas outras cargas puntiformes escolhidas por você, de modo que a força elétrica resultante exercida sobre a carga $+q$ seja igual a zero. (b) Se a força elétrica sobre a carga $+q$ é igual a zero, essa carga está em equilíbrio. Dizemos que o equilíbrio é estável quando, ao deslocarmos ligeiramente a carga em qualquer direção a partir da posição de equilíbrio, a força elétrica resultante empurra a carga de volta à sua posição de equilíbrio. Para que isso ocorra, qual deve ser a direção do campo elétrico $\vec{E}$ produzido pelas outras cargas puntiformes existentes nas vizinhanças da carga em equilíbrio $+q$? (c) Suponha que a carga $+q$ seja removida para uma distância muito grande das outras cargas; e imagine uma pequena superfície gaussiana centralizada no ponto onde a carga $+q$ estava em equilíbrio. Aplicando a lei de Gauss para essa superfície, mostre que é *impossível* obter a condição de equilíbrio estável mencionada no item (b), supondo que existam apenas as forças elétricas atuando sobre a partícula. Em outras palavras, uma carga $+q$ não pode atingir um equilíbrio estável quando sobre ela atuam forças exclusivamente eletrostáticas. Esse resultado é conhecido como *teorema de Earnshaw*. (d) Os itens de (a) até (c) referem-se ao equilíbrio estável de uma carga puntiforme positiva $+q$. Prove o teorema de Earnshaw para uma carga puntiforme negativa $-q$.

22.57 Uma distribuição de cargas esfericamente simétricas, porém não uniformes, possui uma densidade $\rho(r)$ dada por:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - r/R) \quad \text{para } r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para } r \geq R$$

em que $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ é uma constante positiva. (a) Mostre que a carga total contida na distribuição é igual a Q. (b) Demonstre que o campo elétrico na região $r \geq R$ é idêntico ao campo elétrico produzido por uma carga puntiforme Q, situada em $r = 0$. (c) Obtenha uma expressão para o campo elétrico na região $r \leq R$. (d) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico E em função da distância r. (e) Encontre o ponto r para o qual o campo elétrico atinge seu valor máximo e calcule o valor desse campo elétrico máximo.

22.58 Uma distribuição de cargas esfericamente simétricas, porém não uniformes, possui uma densidade $\rho(r)$ dada por:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - 4r/3R) \quad \text{para } r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para } r \geq R$$

em que ρ_0 é uma constante positiva. (a) Calcule a carga total contida na distribuição de cargas. (b) Obtenha uma expressão para o campo elétrico na região $r \geq R$. (c) Determine uma expressão para o campo elétrico na região $r \leq R$. (d) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico E em função da distância r. (e) Encontre o ponto r para o qual o campo elétrico atinge seu valor máximo e calcule o valor desse campo elétrico máximo.

22.59 Lei de Gauss para a gravitação. A força gravitacional entre duas massas puntiformes separadas por uma distância r é proporcional a $1/r^2$, tal como no caso da força elétrica entre duas cargas puntiformes. Em virtude dessa semelhança entre uma força gravitacional e uma força elétrica, também existe uma lei de Gauss para a gravitação. (a) Seja $\vec{g}$ a aceleração da gravidade produzida por uma massa puntiforme m na origem, de modo que $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$. Considere uma superfície gaussiana esférica com raio r, centralizada sobre essa massa puntiforme, e demonstre que o fluxo de $\vec{g}$ através dessa superfície é dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm$$

(b) Usando as mesmas etapas lógicas adotadas na Seção 22.3 para deduzir a lei de Gauss para um campo elétrico, demonstre que o fluxo de $\vec{g}$ através de *qualquer* superfície fechada é dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{\text{inte}}$$

em que M_{inte} é a massa total no interior da superfície fechada.

22.60 Aplicação da lei de Gauss para a gravitação. Usando a lei de Gauss para a gravitação (deduzida na parte (b) do Problema 22.59), mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras: (a) Para qualquer distribuição de massas esfericamente simétrica com massa total M, a aceleração da gravidade fora da distribuição é a mesma que aquela produzida se toda a massa da esfera estivesse concentrada em seu centro. (*Sugestão*: Veja o Exemplo 22.5 na Seção 22.4.) (b) Para qualquer ponto no interior de uma casca esférica com massa distribuída uniformemente em sua superfície, a aceleração da gravidade é igual a zero. (*Sugestão:* Veja o Exemplo 22.5.) (c) Caso fosse possível fazer um buraco retilíneo através do centro de um planeta esfericamente simétrico, com densidade uniforme, verificaríamos que o módulo de $\vec{g}$ seria diretamente proporcional à distância r ao seu centro. (*Sugestão*: Veja o Exemplo 22.9 na Seção 22.4.) Provamos esses resultados na Seção 12.6 fazendo cálculos muito trabalhosos; as provas mediante o uso da lei de Gauss da gravitação são *muito mais* simples.

22.61 (a) Uma esfera isolante com raio a possui uma densidade de carga uniforme ρ. A esfera não está centralizada na origem, porém seu centro está localizado no ponto $\vec{r} = \vec{b}$. Demonstre que o campo elétrico no interior da esfera é dado por $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$. (b) Uma esfera isolante com raio R possui um buraco esférico com raio a, localizado no interior de seu volume, e está centralizado em um ponto a uma distância b do centro da esfera, em que $a < b < R$ (uma seção reta da esfera é indicada na Figura 22.42). A parte maciça da esfera possui uma densidade volumétrica de carga ρ uniforme. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico $\vec{E}$ no interior do buraco e mostre que $\vec{E}$ é uniforme em todos os pontos do volume do buraco. (*Sugestão*: Use o princípio da superposição e o resultado do item (a).)

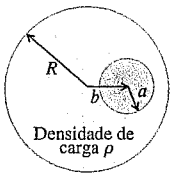


Figura 22.42 Problema 22.61.

22.62 Um cilindro isolante muito longo, de raio R, possui um buraco cilíndrico, com raio a, perfurado ao longo de toda a extensão do eixo paralelo ao eixo do cilindro. O eixo do buraco está a uma distância b do eixo do cilindro, em que $a < b < R$ (Figura 22.43). A parte maciça do cilindro possui uma densidade volumétrica de carga uniforme ρ. Encontre o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico $\vec{E}$ no interior do buraco e mostre que $\vec{E}$ é uniforme em todos os pontos do volume do buraco. (*Sugestão*: Veja o Problema 22.61.)

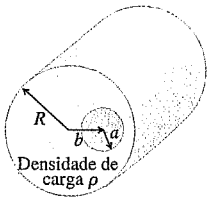


Figura 22.43 Problema 22.62.

22.63 Uma carga positiva Q está distribuída uniformemente ao longo de cada volume de duas esferas de raio R. Uma das esferas está centralizada na origem e a outra está centralizada no ponto $x = 2R$ (Figura 22.44). Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico produzido por essas duas distribuições de cargas nos seguintes pontos sobre o eixo Ox: (a) $x = 0$; (b) $x = R/2$; (c) $x = R$; (d) $x = 3R$.

22.64 Repita o Problema 22.63, porém agora supondo que a esfera da esquerda possua carga Q e que a esfera da direita possua carga $-Q$.

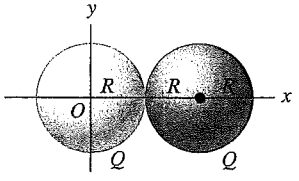


Figura 22.44 Problema 22.63.

22.65 Campo elétrico no interior de um átomo de hidrogênio. Um átomo de hidrogênio é constituído por um próton com carga $+Q = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C e um elétron com carga $-Q = -1{,}60 \times 10^{-19}$C. Podemos considerar o próton uma carga puntiforme situada em $r = 0$, o centro do átomo. O movimento do elétron faz com que sua carga seja 'espalhada' ao longo de uma distribuição esférica em torno do próton, de modo que o elétron seja equivalente a uma carga por unidade de volume dada por

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

em que $a_0 = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m é o chamado *raio de Bohr*. (a) Calcule a carga total do átomo de hidrogênio contida em uma esfera de raio r centralizada sobre o próton. Mostre que, quando $r \to \infty$, a carga contida nesse volume tende a zero. Explique esse resultado. (b) Encontre o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico produzido pelo átomo de hidrogênio em função da distância r. (c) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico E em função de r.

Problemas desafiadores

22.66 Uma região do espaço contém uma carga positiva Q que está distribuída uniformemente ao longo de uma esfera de tal modo que a densidade volumétrica de carga $\rho(r)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \alpha && \text{para } r \le R/2 \\ \rho(r) &= 2\alpha(1 - r/R) && \text{para } R/2 \le r \le R \\ \rho(r) &= 0 && \text{para } r \ge R \end{aligned}$$

Nessas relações, α é uma constante positiva com unidades de C/m^3. (a) Determine α em função de Q e de R. (b) Aplicando a lei de Gauss, deduza uma expressão para o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ em função da distância r. Faça esse cálculo separadamente para cada uma das três regiões. Expresse suas respostas em termos da carga total Q. Verifique cuidadosamente se seus resultados coincidem quanto às fronteiras entre as três regiões. (c) Que fração da carga total está contida no interior da região $r \le R/2$? (d) Se um elétron com carga $q' = -e$ está oscilando em torno do ponto $r = 0$ (o centro da distribuição) com amplitude menor do que $R/2$, mostre que o movimento é harmônico simples. (*Sugestão*: Faça uma revisão da definição do movimento harmônico simples na Seção 13.2. Se, e somente se, a força resultante sobre o elétron for proporcional ao seu deslocamento do equilíbrio, então o movimento resultante será harmônico simples.) (e) Qual é o período do movimento da parte (d)? (f) Se a amplitude do movimento descrito na parte (e) é maior do que $R/2$, o movimento resultante é harmônico simples? Por quê?

22.67 Uma região do espaço contém uma carga positiva Q que está distribuída uniformemente ao longo de uma esfera de tal modo que a densidade volumétrica de carga $\rho(r)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 3\alpha r/(2R) && \text{para } r \le R/2 \\ \rho(r) &= \alpha[1 - (r/R)^2] && \text{para } R/2 \le r \le R \\ \rho(r) &= 0 && \text{para } r \ge R \end{aligned}$$

Nessas relações, α é uma constante positiva com unidades de C/m^3. (a) Determine α em função de Q e R. (b) Aplicando a lei de Gauss, deduza uma expressão para o módulo do campo elétrico em função da distância r. Faça esse cálculo separadamente para cada uma das três regiões. Expresse suas respostas em termos da carga total Q. (c) Que fração da carga total está contida no interior da região $R/2 \le r \le R$? (d) Qual é o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ para $r = R/2$? (e) Se um elétron com carga $q' = -e$ for liberado a partir do repouso, em qualquer ponto de qualquer uma das três regiões, o movimento resultante será oscilatório, porém não será harmônico simples. Por quê? (Veja o problema desafiador 22.66.)

POTENCIAL ELÉTRICO 23

Em um tipo de soldagem, a carga elétrica flui entre a ferramenta e as partes de metal a serem soldadas. Isso produz um arco luminoso, cuja alta temperatura funde as peças. Por que a ferramenta deve ser mantida próxima às peças a serem soldadas?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como calcular a energia potencial elétrica de um conjunto de cargas.
- O significado e a importância do potencial elétrico.
- Como calcular o potencial elétrico que um conjunto de cargas produz em um ponto no espaço.
- Como usar superfícies equipotenciais para visualizar como o potencial elétrico varia no espaço.
- Como usar o potencial elétrico para calcular o campo elétrico.

Este capítulo trata da energia associada às interações elétricas. Toda vez que você liga uma lâmpada, ouve um CD ou usa um aparelho eletrodoméstico, está utilizando a energia elétrica, um ingrediente indispensável em nossa sociedade tecnológica. Nos capítulos 6 e 7, introduzimos os conceitos de *trabalho* e *energia* no contexto da mecânica; agora, vamos combinar esses conceitos com tudo aquilo que você aprendeu sobre cargas elétricas, forças elétricas e campos elétricos. Assim como o conceito de energia possibilitou a solução de alguns tipos de problemas mecânicos de forma muito simples, a aplicação das noções de energia facilita a solução de uma série de problemas relativos à eletricidade.

Quando uma partícula carregada se desloca em um campo elétrico, o campo exerce uma força que realiza um *trabalho* sobre a partícula. Esse trabalho realizado pode ser sempre expresso em termos da energia potencial elétrica. Tal como a energia potencial gravitacional depende da altura em que se encontra a massa sobre a superfície terrestre, a energia potencial elétrica depende da posição da partícula carregada no campo elétrico. Descreveremos a energia potencial elétrica usando um conceito novo, chamado de *potencial elétrico* ou simplesmente *potencial*. Nos circuitos, a diferença de potencial entre dois pontos é, geralmente, chamada de *voltagem*. Os conceitos de potencial e de voltagem são cruciais para entendermos o funcionamento de um circuito elétrico; e possuem aplicações igualmente importantes nos feixes de elétrons utilizados em radioterapia no tratamento do câncer, em aceleradores de partículas e em muitos outros dispositivos.

23.1 Energia potencial elétrica

Os conceitos de trabalho, energia potencial e conservação da energia foram extremamente úteis em nossos estudos de mecânica. Nesta seção, mostraremos que esses conceitos são igualmente úteis para entender e analisar as interações elétricas.

Vamos começar fazendo a revisão de alguns pontos essenciais dos capítulos 6 e 7. Inicialmente, quando uma força $\vec{F}$ atua sobre uma partícula que se move de um ponto a até um ponto b, o trabalho $W_{a\to b}$ realizado pela força é dado pela *integral de linha*:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b F\cos\phi\, dl \qquad (23.1)$$

(trabalho realizado por uma força)

em que $d\vec{l}$ é um deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória da partícula e ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $d\vec{l}$ em cada ponto da trajetória.

Em segundo lugar, se a força $\vec{F}$ for *conservativa*, conforme definimos na Seção 7.3, o trabalho realizado

por $\vec{F}$ pode ser sempre expresso em função da **energia potencial elétrica** U. Quando a partícula que se move de um ponto no qual a energia potencial é U_a até um ponto no qual a energia potencial é U_b, a variação da energia potencial é $\Delta U = U_b - U_a$ e o trabalho $W_{a\to b}$ realizado pela força é dado por

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \qquad (23.2)$$

(trabalho realizado por uma força conservativa)

Quando $W_{a\to b}$ é positivo, U_a é maior do que U_b; logo, ΔU é negativa e a energia potencial *diminui*. Isso é o que ocorre quando uma bola de beisebol cai de um ponto mais elevado (*a*) até um ponto mais baixo (*b*) sob a influência da gravidade da Terra; a força da gravidade realiza um trabalho positivo, e a energia potencial gravitacional diminui (Figura 23.1). Quando uma bola é atirada de baixo para cima, a força da gravidade realiza um trabalho negativo durante o intervalo em que a bola está subindo e a energia potencial aumenta.

Em terceiro lugar, o teorema do trabalho-energia afirma que a variação da energia cinética $\Delta K = K_b - K_a$ durante qualquer deslocamento é igual ao trabalho *total* realizado sobre a partícula. Quando somente forças conservativas realizam um trabalho sobre a partícula, então a Equação (23.2) fornece o trabalho total realizado e $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$. Geralmente, escrevemos esse resultado na forma

$$K_a + U_a = K_b + U_b \qquad (23.3)$$

Ou seja, a energia mecânica total (energia cinética mais energia potencial) é *conservada* nas circunstâncias mencionadas.

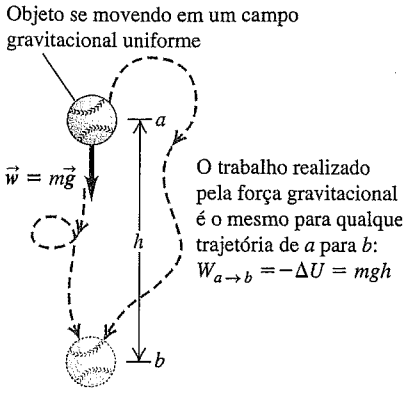


Figura 23.1 O trabalho realizado sobre uma bola de beisebol que se desloca em um campo gravitacional uniforme.

Energia potencial elétrica em um campo uniforme

Vamos examinar um exemplo elétrico desses conceitos básicos. A Figura 23.2 indica um par de placas metálicas paralelas carregadas, produzindo um campo elétrico uniforme orientado de cima para baixo, com módulo E. O campo elétrico exerce uma força de cima para baixo com módulo $F = q_0E$ sobre uma carga de teste positiva q_0. À medida que a carga se move uma distância d de um ponto a até um ponto b, a força sobre a carga de teste é constante e não depende da localização da carga. Portanto, o trabalho realizado pelo campo elétrico é igual ao produto do módulo da força pelo componente do deslocamento, na direção e no sentido (de cima para baixo) da força:

$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed \qquad (23.4)$$

Esse valor é positivo porque a força possui a mesma direção e o mesmo sentido do deslocamento da carga de teste.

O componente y da força elétrica, $F_y = -q_0E$, é constante e não existe nenhum componente x nem componente z. Isso é exatamente análogo ao caso da força gravitacional sobre um corpo de massa m nas vizinhanças da superfície terrestre; para essa força, existe um componente y, $F_y = -mg$, e os componentes x e z são iguais a zero. A partir dessa analogia, concluímos que a força exercida sobre

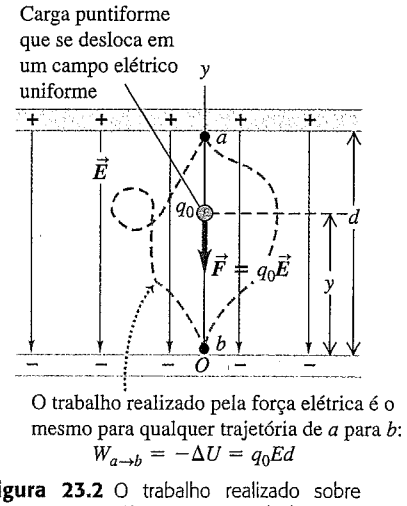


Figura 23.2 O trabalho realizado sobre uma carga puntiforme que se desloca em um campo elétrico uniforme. Compare com a Figura 23.1.

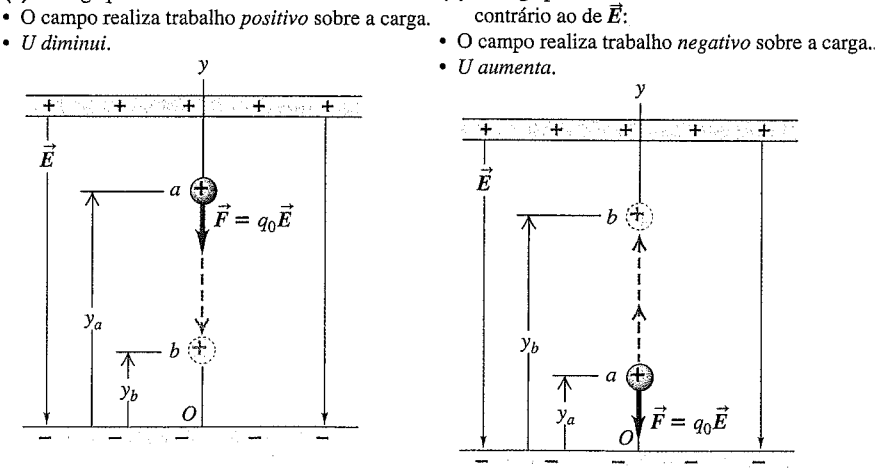


Figura 23.3 Uma carga positiva que se move (a) no sentido do campo elétrico $\vec{E}$ e (b) no sentido contrário a $\vec{E}$.

q_0 pelo campo elétrico uniforme na Figura 23.2 é *conservativa*, como no caso da força gravitacional. Isso significa que o trabalho $W_{a\to b}$ realizado pelo campo elétrico não depende da trajetória descrita pela partícula para ir de um ponto a até um ponto b. Podemos representar esse trabalho usando a função *energia potencial* U, tal como no caso da energia potencial gravitacional descrita na Seção 7.1. A energia potencial para a força gravitacional $F_y = -mg$ é dada por $U = mgy$; logo, a energia potencial para a força elétrica $F_y = -q_0E$ é dada por

$$U = q_0Ey \tag{23.5}$$

Quando uma carga de teste se move de uma altura y_a até uma altura y_b, o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre a carga é dado por

$$W_{a\to b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) = q_0E(y_a - y_b) \tag{23.6}$$

Quando y_a é maior do que y_b (Figura 23.3a), a carga de teste positiva q_0 se move de cima para baixo, no mesmo sentido de $\vec{E}$; o deslocamento possui a mesma direção e o mesmo sentido da força $\vec{F} = q_0\vec{E}$, de modo que o campo realiza um trabalho positivo e U diminui. (Em particular, quando $y_a - y_b = d$, como na Figura 23.2, a Equação (23.6) fornece $W_{a\to b} = q_0Ed$, de acordo com a Equação (23.4).) Quando y_a é menor do que y_b (Figura 23.3b), a carga de teste positiva q_0 se desloca de baixo para cima, em sentido contrário ao de $\vec{E}$; o deslocamento possui sentido contrário ao da força, de modo que o campo realiza um trabalho negativo e U aumenta.

Para uma carga de teste q_0 *negativa*, a energia potencial aumenta quando ela se move no mesmo sentido do campo e diminui quando ela se move em sentido contrário ao do campo (Figura 23.4).

Tanto para cargas positivas quanto para cargas negativas, as seguintes regras gerais são válidas: *U aumenta* quando a carga de teste q_0 se move em sentido *contrário* ao da força elétrica $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (figuras 23.3b e 23.4a); *U diminui* quando a carga de teste q_0 se move no *mesmo* sentido da força elétrica $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (figuras 23.3a e 23.4b). Esse comportamento é semelhante ao da energia potencial gravitacional, que aumenta quando a massa m se desloca de baixo para cima (deslocamento contrário ao da força gravitacional) e diminui quando a massa m se desloca de cima para baixo (deslocamento no mesmo sentido da força gravitacional).

ATENÇÃO Energia potencial elétrica A relação entre a alteração na energia potencial elétrica e o movimento em um campo elétrico é importante e será usada com freqüência. Também se trata de uma relação um pouco difícil de entender. Revise o parágrafo anterior integralmente e estude as figuras 23.3 e 23.4 com atenção. Fazer isso ajudará muito posteriormente!

Energia potencial elétrica de duas cargas puntiformes

A idéia da energia potencial elétrica não se restringe apenas ao caso especial do campo elétrico uniforme. Na verdade, podemos aplicar esse conceito para uma carga puntiforme situada em *qualquer* campo elétrico produzido por uma distribuição estática de cargas. Lembre-se de que, no Capítulo 21, dissemos que podemos representar qualquer distribuição de cargas como uma coleção de cargas puntiformes. Portanto, é útil calcular o trabalho realizado sobre uma carga de teste q_0 que se move no campo elétrico produzido por uma única carga puntiforme estática q.

Consideraremos, inicialmente, um deslocamento *radial*, como indicado na Figura 23.5, de um ponto a até um ponto b. A força sobre q_0 é dada pela lei de Coulomb e seu componente radial é

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} \tag{23.7}$$

(a) A carga negativa se move no sentido de $\vec{E}$:
- O campo realiza trabalho *negativo* sobre a carga.
- *U aumenta.*

(b) A carga negativa se move no sentido contrário ao de $\vec{E}$:
- O campo realiza trabalho *positivo* sobre a carga.
- *U diminui.*

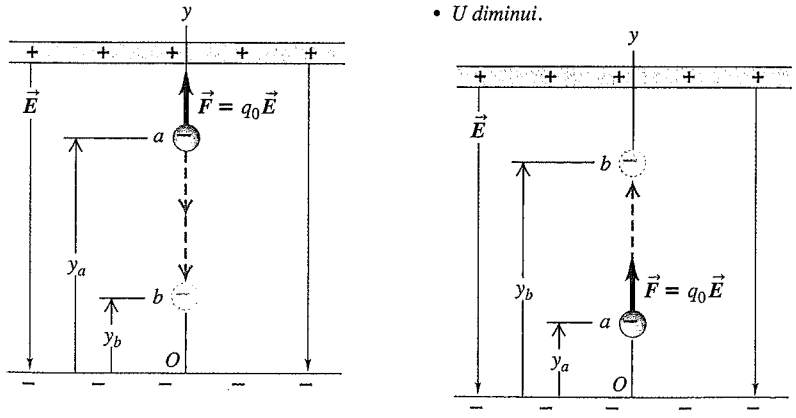


Figura 23.4 Uma carga negativa que se move (a) no sentido do campo elétrico $\vec{E}$ e (b) no sentido contrário a $\vec{E}$. Compare com a Figura 23.3.

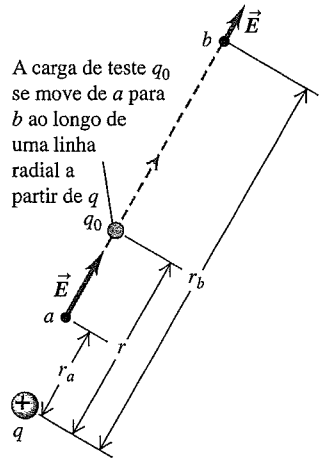


Figura 23.5 A carga de teste q_0 se move ao longo de uma linha reta que se estende radialmente a partir da carga q. À medida que ela se desloca de a até b, a distância varia de r_a até r_b.

Quando q e q_0 possuem o mesmo sinal (+ ou –), a força é repulsiva e F_r é positiva; quando o sinal de uma das cargas é contrário ao da outra, a força é atrativa e F_r é negativa. A força *não* é constante durante o deslocamento; é preciso integrar para calcular o trabalho $W_{a \to b}$ realizado por essa força sobre q_0 quando ela se desloca de a até b. Encontramos

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \quad (23.8)$$

O trabalho realizado pela força elétrica para essa trajetória particular depende apenas do ponto inicial e do ponto final.

Na verdade, o trabalho realizado é sempre o mesmo para *todas as possíveis* trajetórias entre a e b. Para provar isso, considere um deslocamento geral (Figura 23.6), no qual a e b não estejam situados sobre a mesma reta radial. Pela Equação (23.1), o trabalho realizado sobre q_0 durante esse deslocamento é dado por

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\, dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\, dl$$

Porém, a figura mostra que $\cos\phi\, dl = dr$. Ou seja, o trabalho realizado durante um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ depende somente da variação dr da distância r entre as duas cargas, que fornece o *componente radial* do deslocamento. Portanto, a Equação (23.8) é válida também para esse deslocamento mais geral; o trabalho realizado pelo campo elétrico $\vec{E}$ produzido por q depende somente de r_a e r_b, e não dos detalhes da trajetória. Concluímos também que, se q_0 volta ao seu ponto inicial, o trabalho realizado nessa trajetória fechada é igual a zero (pois a integral na Equação (23.8) vai de r_a para r_a). Essas são as características necessárias de uma força conservativa, conforme definimos na Seção 7.3. Logo, a força que atua sobre q_0 é uma força *conservativa*.

Vemos que as equações (23.2) e (23.8) são consistentes se definirmos a grandeza $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$ como a energia potencial U_a, quando a carga q_0 está no ponto a a uma distância r_a de q, e se definirmos a grandeza $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$ como a energia potencial U_b, quando a carga q_0 está no ponto b a uma distância r_b de q. Logo, a energia potencial U quando a carga de teste q_0 está em um ponto situado a *qualquer* distância r de q é dada por

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

(energia potencial elétrica de duas cargas puntiformes q e q_0)

Observe que *não* fizemos nenhuma restrição aos sinais de q e q_0; a Equação (23.9) vale para qualquer combinação de sinais. A energia potencial é positiva quando q e q_0 possuem o mesmo sinal (Figura 23.7a) e negativa quando as cargas possuem sinais contrários (Figura 23.7b).

ATENÇÃO Energia potencial elétrica *versus* força elétrica Tome cuidado para não confundir a Equação (23.9), da energia potencial de duas cargas puntiformes, com a expressão parecida indicada na Equação (23.7), para o componente radial da força elétrica que uma carga exerce sobre a outra. A energia potencial U é proporcional a $1/r$, enquanto o componente da força F_r é proporcional a $1/r^2$.

A energia potencial é sempre definida em relação a algum ponto, no qual $U = 0$. Na Equação (23.9), U é igual a zero quando a distância entre q e q_0 é muito grande e $r = \infty$. Portanto, U é igual ao trabalho realizado pelo campo elétrico de q para deslocar q_0 de uma distância inicial r até o infinito. Quando q e q_0 possuem o mesmo sinal, a interação é repulsiva e o trabalho é positivo, de modo que U é positiva para qualquer distância finita (Figura 23.7a). Quando as cargas possuem sinais contrários, a interação é atrativa e o trabalho é negativo, de modo que U é negativa (Figura 23.7b).

Enfatizamos que a energia potencial U, dada pela Equação (23.9), é uma propriedade *comum* das duas cargas q e q_0; ela decorre da *interação* entre esses dois corpos. Quando a distância entre as duas cargas varia de

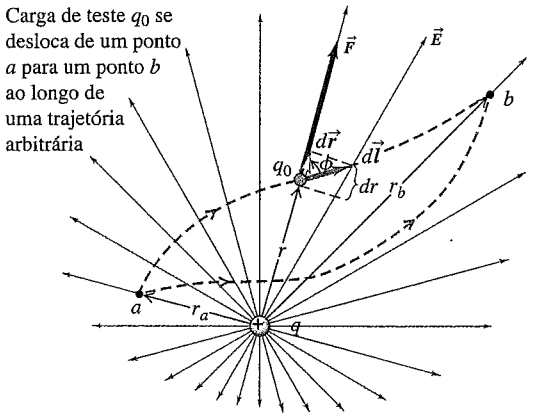


Figura 23.6 O trabalho realizado sobre a carga q_0 pelo campo elétrico produzido por uma carga q não depende da trajetória percorrida, mas somente das distâncias r_a e r_b.

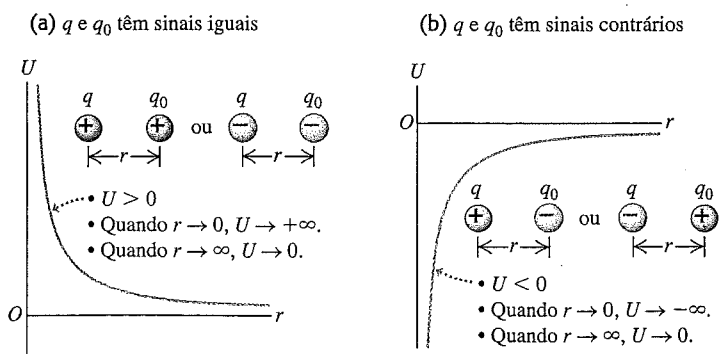


Figura 23.7 Gráficos da energia potencial U de duas cargas puntiformes q e q_0 *versus* a distância r entre elas.

r_a até r_b, a variação da energia potencial quando q é mantida fixa e q_0 se move é a mesma que ocorre quando q_0 é mantida fixa e q se move. Por essa razão, nunca usaremos a frase 'a energia potencial *de* uma carga puntiforme'. (Analogamente, quando um corpo de massa m está a uma altura h acima da superfície terrestre, a energia potencial gravitacional é uma propriedade comum da massa m e da Terra. Nas seções 7.1 e 12.3, enfatizamos essa observação.)

A lei de Gauss nos ensina que o campo elétrico fora de qualquer distribuição esfericamente simétrica de cargas é o mesmo campo produzido quando a carga total da distribuição é concentrada em seu centro. Portanto, a Equação (23.9) também vale quando a carga de teste q_0 está fora de uma distribuição esfericamente simétrica de cargas com carga total q a uma distância r do centro da distribuição.

Exemplo 23.1

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA COM FORÇAS ELÉTRICAS O pósitron (a antipartícula do elétron) possui massa igual a $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg e carga $+e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Suponha que um pósitron esteja se movendo nas vizinhanças de uma partícula alfa, que possui carga $+2e = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C. A partícula alfa possui massa aproximadamente 7000 vezes maior do que a massa do pósitron, de modo que vamos considerar a partícula alfa em repouso em algum sistema de referência inercial. Quando o pósitron está a uma distância igual a $1{,}0 \times 10^{-10}$ m da partícula alfa, ele se afasta da partícula alfa com uma velocidade igual a $3{,}0 \times 10^{6}$ m/s. (a) Qual é a velocidade do pósitron quando ele está a uma distância de $2{,}0 \times 10^{-10}$ m da partícula alfa? (b) Qual é a velocidade do pósitron quando ele está a uma distância muito grande da partícula alfa? (c) Qual seria a alteração da situação supondo que a partícula que se desloca fosse, em vez de um pósitron, um elétron (de mesma massa do pósitron, mas de carga contrária)?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a força elétrica entre o pósitron e a partícula alfa é conservativa, de modo que a energia mecânica (energia cinética mais a potencial) se conserva.

PREPARAR: as energias cinéticas e potenciais em quaisquer pontos a e b são relacionadas pela Equação (23.3), $K_a + U_a = K_b + U_b$, e a energia potencial em qualquer distância r é dada pela Equação (23.9). Temos informação completa sobre o sistema em um ponto a, em que as duas cargas estão apartadas em $1{,}0 \times 10^{-10}$ m. Usamos as equações (23.3) e (23.9) para determinar a velocidade escalar para dois valores diferentes de r, nos itens (a) e (b), e para o caso em que a carga $+e$ é substituída por $-e$ no item (c).

EXECUTAR: (a) nesse item, $r_b = 2{,}0 \times 10^{-10}$ m e desejamos encontrar a velocidade escalar final v_b do pósitron. Ela aparece na expressão da energia cinética final, $K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$. Explicitando K_b da equação da conservação da energia, obtemos

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$

Os valores das energias indicadas no membro direto dessa relação são dados por

$$K_a = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}(9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(3{,}0 \times 10^{6}\,\text{m/s})^2$$
$$= 4{,}10 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_a}$$
$$= (9{,}0 \times 10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3{,}20 \times 10^{-19}\,\text{C})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})}{1{,}0 \times 10^{-10}\,\text{m}}$$
$$= 4{,}61 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$U_b = (9{,}0 \times 10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3{,}20 \times 10^{-19}\,\text{C})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})}{2{,}0 \times 10^{-10}\,\text{m}}$$
$$= 2{,}30 \times 10^{-18}\,\text{J}$$

Logo, a energia cinética final é

$$K_b = \frac{1}{2}mv_b^2 = K_a + U_a - U_b$$
$$= 4{,}10 \times 10^{-18}\,\text{J} + 4{,}61 \times 10^{-18}\,\text{J} - 2{,}30 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$= 6{,}41 \times 10^{-18}\,\text{J}$$

e a velocidade escalar final do pósitron é

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6{,}41 \times 10^{-18}\,\text{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}}} = 3{,}8 \times 10^{6}\,\text{m/s}$$

A força é repulsiva, de modo que o pósitron é acelerado à medida que ele se afasta da partícula alfa.

(b) Quando a posição final do pósitron for muito afastada da partícula alfa, a distância r_b tenderá ao infinito e a energia potencial U_b tenderá a zero. Então, a energia cinética final do pósitron será

$$K_b = K_a + U_a - U_b = 4{,}10 \times 10^{-18}\,\text{J} + 4{,}61 \times 10^{-18}\,\text{J} - 0$$
$$= 8{,}71 \times 10^{-18}\,\text{J}$$

e a velocidade escalar final do pósitron será

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(8{,}71 \times 10^{-18}\,\text{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}}} = 4{,}4 \times 10^{6}\,\text{m/s}$$

Comparando essa resposta ao resultado do item (a), vemos que, quando o pósitron se afasta partindo da distância $r = 2{,}0 \times 10^{-10}$ m até o infinito, o trabalho adicional realizado sobre ele pelo campo elétrico da partícula alfa faz a velocidade aumentar apenas 16%. Esse comportamento decorre do fato de a força diminuir rapidamente com a distância.

(c) Quando a carga que se move é negativa, a força que atua sobre ela é de atração e não de repulsão, e devemos esperar que, em vez de acelerar, a velocidade da partícula diminua. A única diferença nos cálculos anteriores é que as energias potenciais envolvidas são negativas. Para o item (a), considerando uma distância $r_b = 2{,}0 \times 10^{-10}$ m, temos

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$
$$= 4{,}10 \times 10^{-18}\,\text{J} + (-4{,}61 \times 10^{-18}\,\text{J}) - (-2{,}30 \times 10^{-18}\,\text{J})$$
$$= 1{,}79 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = 2{,}0 \times 10^{6}\,\text{m/s}$$

Para o item (b), considerando uma distância $r_b = \infty$, obtemos para a energia cinética do elétron

$$\begin{aligned} K_b &= K_a + U_a - U_b \\ &= 4{,}10 \times 10^{-18}\,\text{J} + (-4{,}61 \times 10^{-18}\,\text{J}) - 0 \\ &= -5{,}1 \times 10^{-19}\,\text{J} \end{aligned}$$

Porém uma energia cinética *nunca* pode ser negativa! A partir desse resultado, podemos concluir que o elétron nunca poderá atingir a distância $r_b = \infty$; a força de atração obriga o elétron a diminuir sua velocidade, até que ele pare momentaneamente ao atingir uma distância finita da partícula alfa. Em seguida, o elétron inverte o sentido do movimento e se aproxima da partícula alfa. Você pode calcular em que distância r_b o elétron pára momentaneamente, fazendo o valor de K_b ser igual a zero na equação da conservação da energia mecânica.

AVALIAR: é útil comparar esses cálculos à Figura 23.7. Nos itens (a) e (b), as cargas possuem o mesmo sinal; como $r_b > r_a$, a energia potencial U_b é menor que U_a. No item (c), as cargas possuem sinais contrários; como $r_b > r_a$, a energia potencial U_b é maior (ou seja, menos negativa) do que U_a.

Energia potencial elétrica com diversas cargas puntiformes

Suponha que o campo elétrico $\vec{E}$, no qual uma carga q_0 se move, seja produzido por um *conjunto* de cargas puntiformes q_1, q_2, q_3, ... separadas de q_0 pelas distâncias r_1, r_2, r_3, ... como indica a Figura 23.8. Por exemplo, q_0 poderia ser um íon positivo se movendo na presença de outros íons (Figura 23.9). O campo elétrico total é dado pela *soma vetorial* dos campos elétricos produzidos pelas cargas individuais do conjunto, e o trabalho total realizado sobre q_0 durante qualquer deslocamento é a soma das contribuições das cargas individuais. De acordo com a Equação (23.9), concluímos que a energia potencial associada à carga de teste q_0 no ponto *a*, indicado na Figura 23.8, é a soma *algébrica* (e *não* a soma vetorial) dada por:

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.10)$$

(carga puntiforme q_0 e um conjunto de cargas q_i)

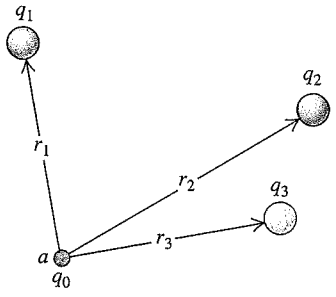


Figura 23.8 A energia potencial associada à carga q_0 no ponto *a* depende das outras cargas q_1, q_2 e q_3, bem como das distâncias r_1, r_2 e r_3 entre essas cargas e o ponto *a*.

Quando a carga q_0 está em outro ponto *b*, a energia potencial é dada pela mesma expressão, porém agora r_1, r_2, ... são as distâncias entre q_1, q_2, ... e o ponto *b*. O trabalho realizado sobre a carga q_0 quando ela se desloca de um ponto *a* até um ponto *b*, ao longo de qualquer trajetória, é igual à diferença $U_a - U_b$ de energia potencial quando q_0 está em *a* e no ponto *b*.

Podemos representar *qualquer* distribuição de cargas como um conjunto de cargas puntiformes. Portanto, a Equação (23.10) mostra que é sempre possível encontrar uma função de energia potencial para *qualquer* campo elétrico estático. A partir disso, podemos concluir que **qualquer campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas estáticas dá origem a uma força conservativa**.

As equações (23.9) e (23.10) definem U igual a zero quando todas as distâncias r_1, r_2, ... são infinitas; ou seja, quando a carga de teste q_0 está muito afastada de todas as cargas que produzem o campo elétrico. Sabemos que, para qualquer função de energia potencial, o ponto em que $U = 0$ é arbitrário; logo, podemos sempre somar uma constante para fazer U igual a zero em qualquer ponto escolhido. Em problemas de eletrostática, é geralmente mais simples escolher esse ponto no infinito. Quando analisarmos circuitos elétricos, nos capítulos 25 e 26, outras escolhas poderão ser mais convenientes.

A Equação (23.10) fornece a energia potencial associada à presença da carga de teste q_0 no campo elétrico $\vec{E}$, produzido por q_1, q_2, q_3, ... Porém, também existe uma energia potencial associada ao conjunto dessas outras cargas. Se, inicialmente, as cargas q_1, q_2, q_3, ... estão separadas por distâncias infinitas e, a seguir, aproximamos duas cargas q_i e q_j, de modo que a distância entre elas seja r_{ij}, a

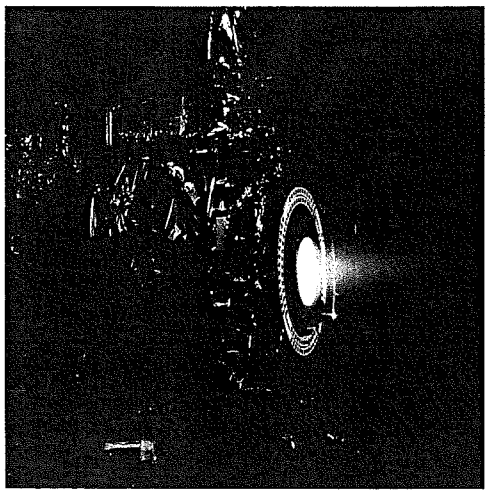


Figura 23.9 Este motor a íon para propulsão espacial usa forças elétricas para ejetar uma corrente de íons xenônio positivos (Xe^+) a velocidades escalares acima de 30 km/s. A propulsão produzida é muito baixa (cerca de 0,09 newton), mas pode ser mantida continuamente por dias, em contraste a foguetes tradicionais de combustível químico, que produzem um grande impulso por curto intervalo de tempo (veja a Figura 8.33). Esses motores a íon têm sido usados para manobrar naves espaciais interplanetárias.

energia potencial *total* U é a soma das energias potenciais oriundas das interações de cada par de cargas. Podemos escrever o resultado na forma

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (23.11)$$

Essa soma deve ser estendida para todos os *pares* de cargas; não podemos fazer $i = j$ (porque isso equivaleria a introduzir um termo da interação da carga com ela mesma), e consideramos apenas $i < j$, para garantir que contamos apenas uma vez cada par de cargas. Portanto, para levarmos em conta a interação da carga q_3 com a carga q_4, incluímos um termo com $i = 3$ e $j = 4$, porém não um termo $i = 4$ e $j = 3$.

Interpretação da energia potencial elétrica

Como um comentário final, vamos apresentar dois pontos de vista sobre a energia potencial elétrica. Ela foi definida em termos do trabalho realizado pelo *campo elétrico* sobre uma partícula carregada que se move no campo; da mesma maneira que no Capítulo 7, definimos a energia potencial em termos do trabalho realizado pela gravidade ou por uma mola. Quando uma partícula se desloca de um ponto a até um ponto b, o trabalho realizado sobre ela pelo campo elétrico é $W_{a\to b} = U_a - U_b$. Portanto, a diferença de energia potencial $U_a - U_b$ é igual ao *trabalho realizado pela força elétrica quando a partícula se move de* a *até* b. Quando U_a é maior do que U_b, o campo elétrico realiza um trabalho positivo quando a partícula 'cai' de um ponto com energia potencial mais elevada (a) até um ponto com energia potencial mais baixa (b).

Um ponto de vista alternativo, porém equivalente, é verificar qual é o trabalho realizado para 'elevar' a partícula de um ponto b, no qual a energia potencial é U_b, até um ponto a, no qual a energia potencial possui valor mais elevado U_a (empurrando duas cargas positivas uma contra a outra, por exemplo). Para mover a partícula lentamente (a fim de não fornecer a ela nenhuma energia cinética), precisamos exercer uma força externa adicional $\vec{F}_{\text{ext}}$, igual e oposta à força elétrica, e exercer um trabalho positivo. Nesse caso, a diferença de energia potencial $U_a - U_b$ é então definida como o *trabalho que deve ser realizado por uma força externa para mover a partícula lentamente de* b *até* a *contra a força elétrica.* Como $\vec{F}_{\text{ext}}$ possui sinal contrário ao da força elétrica e o deslocamento ocorre em sentido oposto, essa definição da diferença de energia potencial $U_a - U_b$ é equivalente àquela dada anteriormente. Esse ponto de vista alternativo também é válido quando U_a é menor do que U_b, o que corresponde a fazer a partícula se deslocar para 'baixo'; um exemplo seria afastar uma carga positiva de outra carga positiva. Nesse caso, $U_a - U_b$ seria novamente igual ao trabalho realizado pela força externa, porém esse trabalho seria então negativo.

Na próxima seção, usaremos ambos os pontos de vista para interpretar o significado do *potencial* elétrico, ou energia potencial por unidade de carga.

Exemplo 23.2

UM SISTEMA DE CARGAS PUNTIFORMES Duas cargas puntiformes estão localizadas sobre o eixo Ox, $q_1 = -e$ no ponto $x = 0$ e $q_2 = +e$ no ponto $x = a$. (a) Calcule o trabalho realizado por uma força externa para trazer uma terceira carga puntiforme $q_3 = +e$ do infinito até o ponto $x = 2a$. (b) Calcule a energia potencial total do sistema constituído pelas três cargas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a relação entre o trabalho realizado para mover uma carga puntiforme e a alteração na energia potencial. Também envolve a expressão para a energia potencial de um conjunto de cargas puntiformes.

PREPARAR: a Figura 23.10 mostra a disposição final das três cargas puntiformes. Para determinar o trabalho exigido para trazer q_3 do infinito, usamos a Equação (23.10) para obter a energia potencial associada a q_3 na presença de q_1 e q_2. A seguir, usamos a Equação (23.11) para obter a energia potencial total do sistema.

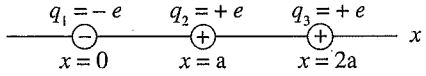


Figura 23.10 Nossa esquematização da situação após a terceira carga ter sido trazida do infinito.

EXECUTAR: (a) o trabalho realizado sobre q_3 por uma força externa $\vec{F}_{\text{ext}}$ é igual à diferença de duas grandezas: a energia potencial U associada a q_3 quando ela está no ponto $x = 2a$ e a energia potencial quando ela está no infinito. Esse último valor é zero, de modo que o trabalho realizado é igual a U. As distâncias entre as cargas são: $r_{13} = 2a$ e $r_{23} = a$, então, de acordo com a Equação (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a}\right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Quando trazemos q_3 do infinito ao longo do eixo $+Ox$, ela é atraída por q_1, porém é repelida mais fortemente por q_2; portanto, o trabalho realizado para trazer q_3 até $x = 2a$ deve ser positivo.

(b) A energia potencial total do conjunto das três cargas é dada pela Equação (23.11):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a}\right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

AVALIAR: como o resultado do item (b) é negativo, o sistema possui uma energia potencial mais baixa do que teria se as distâncias entre as cargas fossem infinitas. Uma força externa precisaria realizar um trabalho *negativo* para trazer do infinito as três cargas até suas posições no conjunto e realizar um trabalho *positivo* para afastá-las de volta para o infinito.

Teste sua compreensão da Seção 23.1 Considere o sistema das três cargas puntiformes no Exemplo 21.4 (Seção 21.3) e indicado na Figura 21.14. (a) Qual é o sinal da energia potencial total desse sistema? (i) positivo; (ii) negativo; (iii) igual a zero. (b) Qual é o sinal da quantidade total de trabalho que você teria

de realizar para separar essas cargas infinitamente umas das outras? (i) positivo; (ii) negativo; (iii) igual a zero. ■

23.2 Potencial elétrico

Na seção anterior, examinamos a energia potencial U associada a uma carga de teste q_0 em um campo elétrico. Agora vamos examinar a energia potencial em uma base 'por unidade de carga', análoga ao caso do campo elétrico, que é a força elétrica por unidade de carga que atua sobre uma partícula no campo. Isso conduz ao conceito de *potencial elétrico*, em geral chamado simplesmente de *potencial*. Esse conceito é muito útil para o cálculo das energias envolvidas em partículas carregadas. Ele também facilita a determinação de um campo elétrico, visto que o potencial elétrico está intimamente relacionado ao campo elétrico $\vec{E}$. Para determinar um campo elétrico, geralmente é mais fácil calcular, inicialmente, o potencial elétrico e, a seguir, obter o campo elétrico a partir do potencial elétrico.

Denomina-se **potencial elétrico** a *energia potencial por unidade de carga*. Definimos o potencial elétrico V em qualquer ponto de um campo elétrico como a energia potencial U *por unidade de carga* associada a uma carga de teste q_0 nesse ponto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{ou} \quad U = q_0 V \tag{23.12}$$

A energia potencial e a carga são escalares, de modo que o potencial elétrico é uma grandeza escalar. De acordo com a Equação (23.12), suas unidades são obtidas dividindo-se as unidades de energia pelas unidades de carga. A unidade SI de potencial elétrico é chamada de **volt** (1 V), em homenagem ao cientista italiano e pesquisador experimental da eletricidade Alessandro Volta (1745-1827), sendo igual a 1 joule por coulomb:

$$1\ \text{V} = 1\ \text{volt} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{joule/coulomb}$$

Vamos escrever a Equação (23.2), que iguala o trabalho realizado pela força elétrica durante um deslocamento de a até b com a grandeza $-\Delta U = -(U_b - U_a)$, usando-se uma base de 'trabalho por unidade de carga'. Dividimos essa grandeza por q_0 e obtemos

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_a - V_b)$$
$$= V_a - V_b \tag{23.13}$$

em que $V_a = U_a/q_0$ é a energia potencial por unidade de carga no ponto a e V_b é definido de modo análogo. Chamamos V_a de *potencial no ponto* a e V_b de *potencial no ponto* b. Logo, o trabalho realizado por unidade de carga pela força elétrica quando a carga se desloca de a até b é igual ao potencial no ponto a menos o potencial no ponto b.

A diferença $V_a - V_b$ denomina-se *potencial de* a *em relação a* b; algumas vezes, essa diferença será abreviada como $V_{ab} = V_a - V_b$ (observe a ordem dos índices). Geralmente, chamamos isso de diferença de potencial entre a e b, porém, trata-se de algo que pode ser ambíguo, a menos que o ponto de referência seja especificado. Em circuitos elétricos, que examinaremos em capítulos posteriores, a diferença de potencial entre dois pontos será chamada de **voltagem** (Figura 23.11). A Equação (23.13) afirma que **V_{ab}, o potencial de a em relação a b, é igual ao trabalho realizado pela força elétrica quando uma carga UNITÁRIA se desloca de a até b.**

Outra maneira de interpretar a diferença de potencial V_{ab} na Equação (23.13) consiste em usar o ponto de vista alternativo, comentado no final da Seção 23.1, em que $U_a - U_b$ é igual ao trabalho realizado por uma força *externa*, quando a partícula com carga q_0 se move lentamente de b até a contra a força elétrica. O trabalho que deve ser realizado *por unidade de carga* pela força externa será, então, $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$. Em outras palavras, **$V_{ab}$, o potencial de a em relação a b, é igual ao trabalho realizado contra a força elétrica para deslocar lentamente uma carga UNITÁRIA de b até a.**

O *voltímetro* é um instrumento que mede a diferença de potencial entre dois pontos. No Capítulo 26, descreveremos o princípio de funcionamento de um voltímetro de bobina móvel comum. Existem também instrumentos que usam amplificação eletrônica e são mais sensíveis para as medidas de diferença de potencial. Instrumentos capazes de medir uma diferença de potencial da ordem de 1 μV são comuns; e sensibilidades até 10^{-12} V já foram atingidas.

Cálculo do potencial elétrico

Para encontrarmos o potencial V de uma única carga puntiforme q, dividimos a Equação (23.9) por q_0:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{23.14}$$

(potencial de uma carga puntiforme)

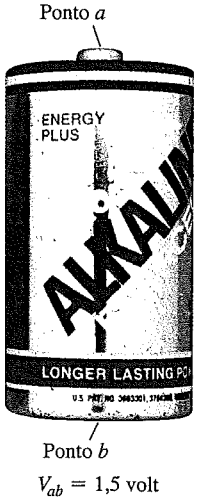


Figura 23.11 A voltagem desta pilha é igual à diferença de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre o terminal positivo (ponto a) e o terminal negativo (ponto b).

em que r é a distância entre a carga q e o ponto em que o potencial está sendo calculado. Quando q é positiva, o potencial por ela produzido é positivo em todos os pontos do espaço; quando q é negativa, o potencial por ela produzido é negativo em qualquer ponto. Em ambos os casos, V é igual a zero para $r = \infty$, quando a distância entre a carga e o ponto é infinita. Observe que o potencial, do mesmo modo que o campo elétrico, não depende da carga de teste q_0 que foi usada para defini-lo.

Analogamente, dividindo-se a Equação (23.10) por q_0, encontramos o potencial produzido por um conjunto de cargas:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.15)$$

(potencial de um conjunto de cargas puntiformes)

Nessa expressão, r_i é a distância entre a i-ésima carga, q_i, e o ponto em que o potencial está sendo calculado. Assim como o campo elétrico total de um conjunto de cargas é dado pela soma *vetorial* de todos campos elétricos produzidos pelas cargas individuais, o potencial elétrico produzido por um conjunto de cargas puntiformes é dado pela soma *escalar* dos potenciais produzidos pelas cargas individuais. No caso de uma distribuição contínua de cargas ao longo de uma linha, sobre uma superfície ou através de um volume, dividimos as cargas em elementos de carga dq, e a soma indicada na Equação (23.15) se transforma em uma integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (23.16)$$

(potencial de uma distribuição contínua de cargas)

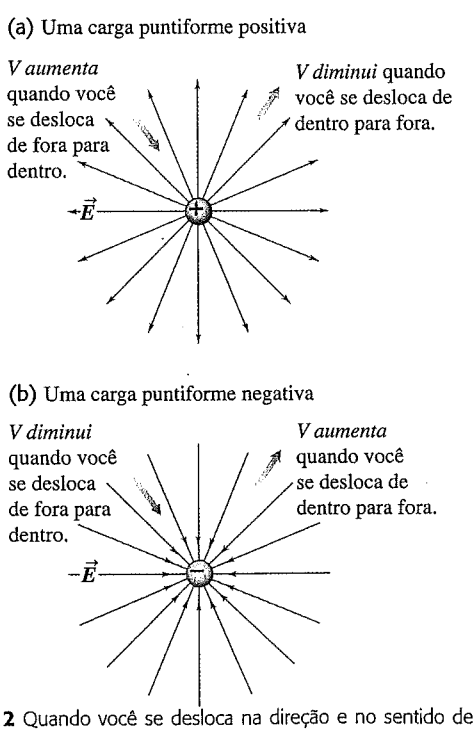


Figura 23.12 Quando você se desloca na direção e no sentido de $\vec{E}$, o potencial elétrico V diminui; quando você se desloca na direção e no sentido contrário a $\vec{E}$, V aumenta.

em que r é a distância entre o elemento de carga dq e o ponto em que o potencial V está sendo calculado. Resolveremos diversos exemplos desses casos. Os potenciais definidos pelas equações (23.15) e (23.16) são nulos em pontos infinitamente distantes de *qualquer* distribuição de cargas. Mais adiante, encontraremos casos nos quais a própria distribuição de cargas se estende até o infinito. Verificaremos que, para esses casos, não podemos fazer $V = 0$ no infinito e devemos tomar certos cuidados ao usar e interpretar as equações (23.15) e (23.16).

ATENÇÃO O que é um potencial elétrico? Antes de se envolver nos detalhes de como calcular o potencial elétrico, você deve parar e rever o que é o potencial. O *potencial* elétrico em um determinado ponto é a energia potencial que seria associada a uma *unidade* de carga nesse ponto. É por isso que o potencial é medido em joules por coulomb, ou volts. Lembre-se, também, de que não deve haver uma carga em um determinado ponto para que um V potencial exista nesse ponto. (Da mesma forma, um campo elétrico pode existir em um dado ponto, mesmo que não haja nenhuma carga ali para responder a ele.)

Como determinar o potencial elétrico a partir do campo elétrico

Quando conhecemos uma dada coleção de cargas, a Equação (23.15) geralmente fornece o método mais fácil para calcular o potencial V. Contudo, em alguns problemas para os quais o campo elétrico seja fornecido ou facilmente obtido, é mais fácil calcular V a partir de $\vec{E}$. A força $\vec{F}$ sobre uma carga de teste q_0 é dada por $\vec{F} = q_0\vec{E}$; logo, pela Equação (23.1), o trabalho realizado pela força elétrica quando a carga de teste se move de a até b é dado por

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Dividindo essa relação por q_0 e comparando-a à Equação (23.13), encontramos

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \qquad (23.17)$$

(diferença potencial como uma integral de $\vec{E}$)

Do mesmo modo que o valor de $W_{a\to b}$ independe da trajetória, o valor de $V_a - V_b$ não depende da trajetória que liga a até b. Para interpretar a Equação (23.17), lembre-se de que $\vec{E}$ é a força elétrica por unidade de carga sobre uma carga de teste. Quando a integral de linha $\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ é positiva, a força elétrica realiza um trabalho positivo sobre uma carga de teste que se desloca de a até b. Nesse caso, a energia potencial elétrica diminui à medida que a carga se desloca, portanto a energia potencial elétrica por unidade de carga também diminui; logo, V_b é menor do que V_a e $V_a - V_b$ é positiva.

A Figura 23.12a mostra uma carga puntiforme positiva. O campo elétrico aponta para fora da carga, e $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ é positivo para qualquer distância finita entre o ponto e a carga. Ao se afastar da carga, no mesmo sentido de $\vec{E}$, você se desloca para valores menores de V; aproximando-se da carga, no sentido contrário ao de $\vec{E}$, você se desloca para valores mais elevados de V. Para a carga negativa puntiforme indicada na Figura 23.12b, o campo elétrico $\vec{E}$ aponta para dentro da carga, e $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ é negativa para qualquer distância finita entre o ponto e a carga. Nesse caso, quando se aproxima da carga, no mesmo sentido de $\vec{E}$, você se desloca para valores decrescentes (mais negativos) de V. Quando se afasta da carga, no sentido oposto ao de $\vec{E}$, você se desloca para valores crescentes (menos negativos) de V. Regra geral válida para *qualquer* campo elétrico: ao se mover no *mesmo sentido* de $\vec{E}$, você se desloca para valores *decrescentes* de V e, movendo-se em sentido *oposto* ao de $\vec{E}$, você se desloca para valores *crescentes* de V.

Analogamente, uma carga de teste positiva q_0 sofre a ação de uma força elétrica no mesmo sentido de $\vec{E}$, para valores decrescentes de V; uma carga de teste negativa sofre a ação de uma força elétrica em sentido contrário ao de $\vec{E}$, para valores crescentes de V. Logo, uma carga positiva tende a 'cair' de uma região de potencial mais elevado para uma região de potencial mais baixo. Para uma carga negativa, ocorre o contrário.

Note que a Equação (23.17) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (23.18)$$

Essa forma possui um sinal negativo em comparação à Equação (23.17) e os limites da integral estão invertidos; logo, as equações (23.17) e (23.18) são equivalentes. Porém, a Equação (23.18) possui uma interpretação ligeiramente diferente. Para mover lentamente uma carga contra uma força elétrica, devemos aplicar uma força *externa* por unidade de carga igual a $-\vec{E}$, ou seja, uma força elétrica igual e oposta à força por unidade de carga $\vec{E}$. A Equação (23.18) afirma que $V_a - V_b = V_{ab}$, o potencial de a em relação a b, é igual ao trabalho realizado sobre a carga pela força externa para deslocar uma carga unitária de b até a. Essa é a mesma interpretação alternativa que fizemos depois da Equação (23.13).

As equações (23.17) e (23.18) mostram que a unidade de diferença de potencial (1 V) é igual à unidade de campo elétrico (1 N/C) multiplicada pela unidade de distância (1 m). Logo, a unidade de campo elétrico pode ser expressa como 1 *volt por metro* (1 V/m), ou então por 1 N/C:

$$1\ \text{V/m} = 1\ \text{volt/metro} = 1\ \text{N/C} = 1\ \text{newton/coulomb}$$

Na prática, usa-se mais volt por metro como unidade do módulo do campo elétrico.

Elétron-volt

O módulo e da carga do elétron pode ser empregado para a definição de uma unidade de energia muito usada em cálculos envolvendo sistemas atômicos ou nucleares. Quando uma partícula de carga q se move de um ponto no qual o potencial é V_a até um ponto no qual o potencial é V_b, a variação da energia potencial U da carga é dada por

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Quando a carga q possui módulo e igual ao da carga do elétron, $1{,}602 \times 10^{-19}$C, e a diferença de potencial é $V_{ab} = 1$ V, a variação da energia é dada por

$$U_a - U_b = (1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V}) = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Essa quantidade de energia denomina-se 1 **elétron-volt** (1 eV):

$$1\ \text{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Os múltiplos meV, keV, MeV, GeV e TeV são geralmente usados.

ATENÇÃO Elétron-volts *versus* volts Lembre-se de que o elétron-volt é uma unidade de energia, *não* é unidade de potencial nem de diferença de potencial!

Quando uma partícula com carga e se move entre dois pontos que possuem uma diferença de potencial de 1 volt, a variação da *energia* potencial é igual a 1 eV. Quando a carga possui valor múltiplo de e, digamos Ne, a variação da energia potencial em eV é N vezes a diferença de potencial em volts. Por exemplo, quando uma partícula alfa, que possui carga igual a $2e$, se desloca entre pontos que possuem uma diferença de potencial igual a 1000 V, a variação da energia potencial é 2(1000 eV) = 2000 eV. Para confirmar isso, escrevemos

$$U_a - U_b = qV_{ab} = (2e)\,(1000\ \text{V}) = (2)\,(1{,}602 \times 10^{-19}\text{C})\,(1000\ \text{V})$$
$$= 3{,}204 \times 10^{-16}\ \text{J} = 2000\ \text{eV}$$

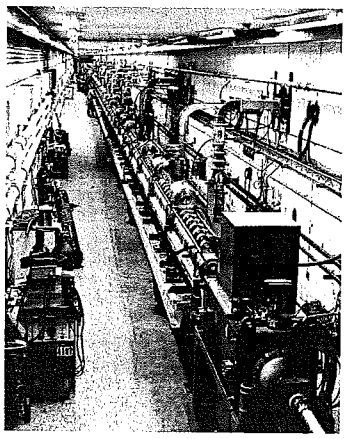


Figura 23.13 Este acelerador do Fermi National Accelerator Laboratory, em Illinois, nos Estados Unidos, fornece a um próton uma energia cinética igual a 400 MeV (4×10^8 eV). Uma aceleração adicional faz sua energia cinética aumentar para 980 GeV, ou 0,98 TeV ($9{,}8 \times 10^{11}$ eV).

Embora o elétron-volt tenha sido definido em termos de uma energia *potencial*, podemos usá-lo para *qualquer* forma de energia, tal como a energia cinética de uma partícula que se move. Quando falamos 'um próton com um milhão de elétron-volts, queremos dizer que a energia cinética do próton é igual a um milhão de elétron-volts (1 MeV), que é igual a $(10^6)\,(1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J}) = 1{,}602 \times 10^{-13}\,\text{J}$ (Figura 23.13).

Exemplo 23.3

FORÇA ELÉTRICA E POTENCIAL ELÉTRICO Um próton (carga $+e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C) se move ao longo de uma linha reta de um ponto a até um ponto b no interior de um acelerador linear, sendo $d = 0{,}50$ m a distância percorrida. O campo elétrico é uniforme ao longo dessa linha e possui módulo $E = 1{,}5 \times 10^7$ V/m $= 1{,}5 \times 10^7$ N/C no sentido de a para b. Determine (a) a força sobre o próton; (b) o trabalho realizado sobre ele pelo campo elétrico; (c) a diferença de potencial $V_a - V_b$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa a relação entre o campo elétrico (que nos é dado) e a força elétrica (que é uma das incógnitas). Também usa a relação entre força, trabalho e diferença de energia potencial.

PREPARAR: como nos é dado o campo elétrico, determinar o campo elétrico sobre o próton é direto. Assim como é direto calcular o trabalho realizado sobre o próton por essa força, porque $\vec{E}$ é uniforme, o que significa que a força é constante. Sendo o trabalho explicitado, determinamos a diferença de potencial pela Equação (23.13).

EXECUTAR: (a) A força possui a mesma direção e o mesmo sentido do campo elétrico e seu módulo é

$$F = qE = (1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C})\,(1{,}5 \times 10^7\,\text{N/C}) = 2{,}4 \times 10^{-12}\,\text{N}$$

(b) A força é constante e possui a mesma direção e o mesmo sentido do deslocamento; logo, o trabalho realizado sobre o próton é

$$W_{a\to b} = Fd = (2{,}4 \times 10^{-12}\,\text{N})\,(0{,}50\,\text{m}) = 1{,}2 \times 10^{-12}\,\text{J} = (1{,}2 \times 10^{-12}\,\text{J})\frac{1\,\text{eV}}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J}} = 7{,}5 \times 10^6\,\text{eV} = 7{,}5\,\text{MeV}$$

(c) De acordo com a Equação (23.13), a diferença de potencial é o trabalho realizado por unidade de carga; logo,

$$V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q} = \frac{1{,}2 \times 10^{-12}\,\text{J}}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}} = 7{,}5 \times 10^6\,\text{J/C} = 7{,}5 \times 10^6\,\text{V} = 7{,}5\,\text{MV}$$

Poderíamos obter esse mesmo resultado de modo muito mais fácil, recordando que um elétron-volt é igual a um volt multiplicado pela carga e. Uma vez que o trabalho realizado é igual a $7{,}5 \times 10^6$ eV e a carga é e, a diferença de potencial é dada por $(7{,}5 \times 10^6\,\text{eV})/e = 7{,}5 \times 10^6$ V.

AVALIAR: podemos conferir o resultado do item (c) usando a Equação (23.17) ou (23.18) para calcular a integral do campo elétrico. O ângulo ϕ entre $\vec{E}$ e o deslocamento é igual a zero, portanto a Equação (23.17) fornece

$$V_a - V_b = \int_a^b E\cos\phi\, dl = \int_a^b E\, dl = E\int_a^b dl$$

A integral de dl de a até b nada mais é do que a distância d, de modo que novamente encontramos

$$V_a - V_b = Ed = (1{,}5 \times 10^7\,\text{V/m})\,(0{,}50\,\text{m}) = 7{,}5 \times 10^6\,\text{V}$$

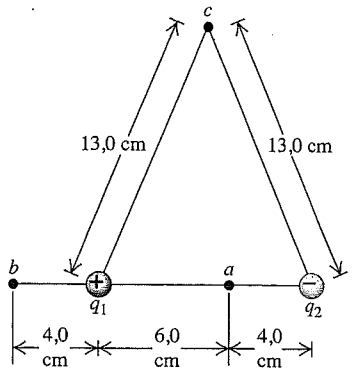


Figura 23.14 Quais são os potenciais nos pontos *a*, *b* e *c* produzidos por este dipolo elétrico?

Exemplo 23.4

POTENCIAL PRODUZIDO POR DUAS CARGAS PUNTIFORMES Um dipolo elétrico é constituído por duas cargas puntiformes $q_1 = +12$ nC e $q_2 = -12$ nC, sendo a distância entre elas igual a 10 cm (Figura 23.14). Calcule os potenciais nos pontos a, b e c somando os potenciais produzidos pelas cargas individuais como na Equação (23.15).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esse arranjo de cargas é o mesmo que o do Exemplo 21.9 (Seção 21.5). Naquele exemplo, calculamos o *campo* elétrico em cada ponto por meio de uma soma *vetorial*. Neste problema, a incógnita é o *potencial* elétrico em três pontos.

PREPARAR: para obter V em cada ponto, devemos calcular uma soma *algébrica*, como indica a Equação (23.15),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

EXECUTAR: no ponto a, o potencial produzido pela carga positiva q_1 é

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = (9{,}0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\,\text{C}}{0{,}060\,\text{m}} = 1800\,\text{N}\cdot\text{m/C} = 1800\,\text{J/C} = 1800\,\text{V}$$

e o potencial produzido pela carga negativa q_2 é

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = (9{,}0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-12 \times 10^{-9}\,\text{C})}{0{,}040\,\text{m}} = -2700\,\text{N}\cdot\text{m/C} = -2700\,\text{J/C} = -2700\,\text{V}$$

O potencial V_a é a soma dos resultados anteriores

$$V_a = 1800\ \text{V} + (-2700\ \text{V}) = -900\ \text{V}$$

Fazendo um cálculo análogo, você pode mostrar que, no ponto *b*, o potencial produzido pela carga positiva é igual a +2700 V, o potencial produzido pela carga negativa é igual a –770 V e

$$V_b = 2700\ \text{V} + (-700\ \text{V}) = 1930\ \text{V}$$

No ponto *c*, o potencial produzido pela carga positiva é

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = (9{,}0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0{,}13\ \text{m}} = 830\ \text{V}$$

O potencial produzido pela carga negativa é igual a –830 V e o potencial total é igual a zero:

$$V_c = 830\ \text{V} + (-830\ \text{V}) = 0$$

O potencial também é igual a zero em todos os pontos situados no infinito (pontos infinitamente distantes de ambas as cargas).

AVALIAR: a comparação entre este exemplo e o Exemplo 21.9 mostra que é muito mais fácil calcular o potencial elétrico (um escalar) do que o campo elétrico (um vetor). Adotaremos essa simplificação sempre que possível.

Exemplo 23.5

POTENCIAL E ENERGIA POTENCIAL Calcule a energia potencial associada à carga puntiforme de +4 nC quando ela é colocada nos pontos *a*, *b* e *c*, indicados na Figura 23.14.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conhecemos o valor do potencial elétrico em cada um desses pontos e precisamos determinar a energia potencial para uma carga puntiforme colocada em cada ponto.

PREPARAR: para qualquer carga puntiforme q, a energia potencial associada é $U = qV$. Usaremos os valores de V obtidos no Exemplo 23.4.

EXECUTAR: no ponto *a*

$$U_a = qV_a = (4{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})(-900\ \text{J/C}) = -3{,}6 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

No ponto *b*

$$U_b = qV_b = (4{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})(1930\ \text{J/C}) = 7{,}7 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

No ponto *c*

$$U_c = qV_c = 0$$

Todos esses valores correspondem à anulação de U e V no infinito.

AVALIAR: note que *nenhum* trabalho total é realizado sobre a carga de 4,0 nC quando ela se desloca do ponto *c* até o infinito, *qualquer que seja a trajetória*. Em particular, tome a trajetória como sendo a linha reta perpendicular que passa pela metade do segmento que liga as cargas q_1 e q_2, na Figura 23.14. Como indicado no Exemplo 21.9 (Seção 21.5), o vetor $\vec{E}$ possui uma direção ortogonal a uma linha reta. Portanto, a força sobre a carga de 4,0 nC é perpendicular à trajetória e o trabalho realizado é sempre igual a zero em todas as partes dessa trajetória.

Exemplo 23.6

DETERMINAÇÃO DO POTENCIAL POR INTEGRAÇÃO Integrando o campo elétrico, como na Equação (23.17), determine o potencial a uma distância r da carga q.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema requer a determinação do potencial elétrico a partir do campo elétrico.

PREPARAR: para encontrarmos o potencial V a uma distância r da carga puntiforme, consideramos o ponto *a* na Equação (23.17), situado a uma distância r, e o ponto *b*, a uma distância infinita da carga.

EXECUTAR: para fazermos a integral, podemos escolher qualquer trajetória que ligue esses dois pontos; a trajetória mais conveniente é uma linha reta radial, como a indicada na Figura 23.15, de modo que $d\vec{l}$ é a direção radial e possui módulo dr. Considerando q positiva, $\vec{E}$ e $d\vec{l}$ são sempre paralelos, portanto $\phi = 0$ e a Equação (23.17) fornece o resultado

$$V - 0 = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\bigg|_r^\infty = 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Isso está de acordo com a Equação (23.14). Considerando q negativa, $\vec{E}$ aponta radialmente para dentro e $d\vec{l}$ continua radialmente para fora, de modo que $\phi = 180°$. Como cos 180° = –1, isso introduz um sinal negativo no resultado anterior. Contudo, o módulo do campo elétrico E é sempre positivo, e como q é negativa, devemos escrever $E = |q|/4\pi\epsilon_0 r = -q/4\pi\epsilon_0 r$; isso introduz outro sinal negativo no resultado anterior. Os dois sinais negativos se cancelam e o resultado anterior vale tanto para cargas positivas quanto para cargas negativas.

AVALIAR: podemos obter o mesmo resultado usando a Equação (21.7) para o campo elétrico, que é válida qualquer que seja o sinal de q, e $d\vec{l} = \hat{r}\,dr$; logo,

$$V - 0 = V = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

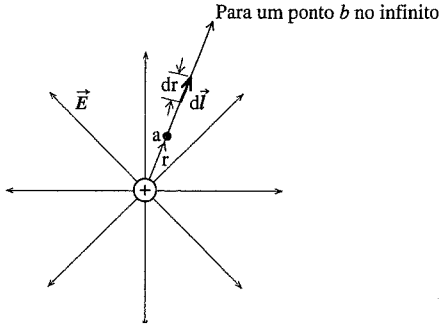


Figura 23.15 Cálculo do potencial pela integral do campo $\vec{E}$ para uma única carga puntiforme.

Exemplo 23.7

DESLOCAMENTO ATRAVÉS DE UMA DIFERENÇA DE POTENCIAL Na Figura 23.16, uma partícula de poeira, com massa $m = 5{,}0 \times 10^{-9}\,\text{kg} = 5{,}0\ \mu\text{g}$ e carga $q_0 = 2{,}0$ nC, parte do repouso no ponto a e se desloca em linha reta até o ponto b. Qual é sua velocidade escalar v no ponto b?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve a variação na velocidade escalar e, portanto, na energia cinética da partícula, de modo que podemos usar o método da energia. Sem o uso desse método, esse problema seria difícil de resolver, visto que o módulo da força varia quando a partícula se desloca do ponto a ao ponto b.

PREPARAR: somente a força elétrica conservativa atua sobre a partícula, portanto existe conservação da energia mecânica:

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

EXECUTAR: para essa situação, $K_a = 0$ e $K_b = \frac{1}{2}mv^2$. Obtemos as energias potenciais (U) a partir do potencial (V) de cada carga usando a Equação (23.12): $U_a = q_0V_a$ e $U_b = q_0V_b$. Substituindo esses resultados na equação da conservação da energia e explicitando o valor de v, encontramos

$$0 + q_0V_a = \frac{1}{2}mv^2 + q_0V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$

Podemos calcular os potenciais do mesmo modo como fizemos no Exemplo 23.4, mediante o uso da Equação (23.15):

$$V_a = (9{,}0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \left(\frac{3{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C}}{0{,}010\,\text{m}} + \frac{(-3{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C})}{0{,}020\,\text{m}}\right) = 1350\,\text{V}$$

$$V_b = (9{,}0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \left(\frac{3{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C}}{0{,}020\,\text{m}} + \frac{(-3{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C})}{0{,}010\,\text{m}}\right) = -1350\,\text{V}$$

$$V_a - V_b = (1350\,\text{V}) - (-1350\,\text{V}) = 2700\,\text{V}$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{2(2{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C})(2700\,\text{V})}{5{,}0 \times 10^{-9}\,\text{kg}}} = 46\,\text{m/s}$$

AVALIAR: o resultado obtido faz sentido; a velocidade escalar da carga de teste positiva aumenta à medida que ela se afasta da carga positiva e se aproxima da carga negativa. Podemos conferir a consistência das unidades notando que 1 V = 1 J/C, de modo que o numerador embaixo do sinal da raiz possui unidades de J ou $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$.

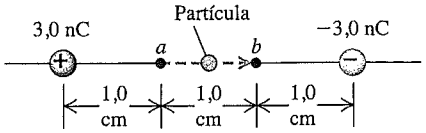


Figura 23.16 A partícula sai do ponto a e se desloca em linha reta até o ponto b; sua aceleração não é constante.

É possível aplicar esse mesmo método para determinar a velocidade de um elétron acelerado por uma diferença de potencial de 500 V no tubo de um osciloscópio ou por uma diferença de potencial de 20 kV no tubo do cinescópio de uma televisão. Os problemas propostos no final do capítulo incluem diversos exemplos para o uso desses cálculos.

Teste sua compreensão da Seção 23.2 Se o *potencial* elétrico em um dado ponto é igual a zero, o *campo* elétrico nesse ponto tem de ser igual a zero? (*Sugestão:* Considere o ponto c dos exemplos 23.4 e 21.9.) ▮

23.3 Determinação do potencial elétrico

Para calcular o potencial elétrico de uma distribuição de cargas, em geral, usa-se um destes dois procedimentos. Quando conhecemos a distribuição de cargas, podemos usar a Equação (23.15) ou (23.16). Ou, se conhecemos como o campo elétrico depende da posição, podemos aplicar a Equação (23.17), definindo como zero o potencial em algum ponto conveniente. Para certos problemas, precisamos fazer uma combinação desses dois procedimentos.

Ao estudar esses exemplos, compare-os aos exemplos correlatos de cálculo de *campo* elétrico na Seção 21.5. Você observará que é mais fácil calcular os potenciais elétricos escalares do que os campos elétricos vetoriais. A moral da história é clara: sempre que possível, solucione os problemas usando o método da energia (usando o potencial elétrico e a energia potencial elétrica) em vez do método da dinâmica (usando os campos elétricos e as forças elétricas).

Estratégia para a solução de problemas 23.1

DETERMINAÇÃO DO POTENCIAL ELÉTRICO

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: lembre-se de que o potencial é a *energia potencial por unidade de carga*. Entendendo essa definição, você poderá ir longe.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho, indicando claramente a localização das cargas (que podem ser cargas puntiformes ou uma distribuição contínua de cargas) e a escolha dos eixos de coordenadas.
2. Indique no desenho a posição do ponto em que você deseja calcular o potencial elétrico V. Algumas vezes essa posição será arbitrária (digamos, um ponto a uma distância r do centro de uma esfera carregada).

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Para encontrar o potencial produzido por um conjunto de cargas puntiformes, aplique a Equação (23.15). Quando o problema fornece uma distribuição contínua de cargas, descubra um modo de dividi-la em elementos infinitesimais e, a seguir, use a Equação (23.16). Faça a integral empregando os limites apropriados para incluir completamente a distribuição de cargas. Nessa integral, verifique cuidadosamente quais são as grandezas geométricas constantes e quais são aquelas que variam.

2. Se o campo elétrico for conhecido, ou se você for capaz de calculá-lo usando os métodos do Capítulo 21 ou do Capítulo 22, pode ser mais fácil aplicar a Equação (23.17) ou a Equação (23.18) para calcular a diferença de potencial entre dois pontos a e b. Quando for apropriado, use sua liberdade de definir como zero o potencial V em algum ponto conveniente e escolha esse local como o ponto b. (Para cargas puntiformes, geralmente, esse ponto está no infinito, porém, para outros tipos de distribuição de cargas — geralmente aquelas que se estendem até o infinito —, pode ser conveniente definir V_b como zero a uma certa distância finita da distribuição de cargas. Isso é análogo a definir U como zero na superfície da Terra em problemas sobre gravidade.) Então, o potencial em qualquer outro ponto, digamos o ponto a, pode ser calculado a partir da Equação (23.17) ou (23.18) com $V_b = 0$.
3. Lembre-se de que o potencial é uma grandeza *escalar* e não uma grandeza *vetorial*. Ele não possui componentes! Contudo, pode ser necessário usar os componentes dos vetores $\vec{E}$ e $d\vec{l}$ quando você aplicar a Equação (23.17) ou (23.18).

AVALIAR *sua resposta*: confira se o resultado obtido está dentro das expectativas. Se o resultado fornecer V em função da posição, faça um gráfico dessa função para verificar se isso faz sentido. Se o campo elétrico for conhecido, você poderá fazer um teste qualitativo do resultado de V, verificando se *ele* diminui quando você se desloca no mesmo sentido de $\vec{E}$.

Exemplo 23.8

UMA ESFERA CONDUTORA CARREGADA Uma esfera condutora maciça, sem buracos, possui um raio R e uma carga total q. Determine o potencial em todos os pontos do exterior e do interior da esfera.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos a lei de Gauss no Exemplo 22.5 (Seção 22.4) para determinar o campo elétrico em todos os pontos dessa distribuição de carga. Podemos usar esse resultado para determinar o potencial em todos os pontos.

PREPARAR: escolhemos a origem no centro da esfera. Como conhecemos E em todos os valores da distância r a partir do centro da esfera, podemos determinar V em função de r.

EXECUTAR: pelo Exemplo 22.5, em todos os pontos do *exterior* da esfera o campo elétrico é o mesmo que aquele produzido removendo-se a esfera e colocando-se em seu centro uma carga puntiforme q. Consideramos $V = 0$ no infinito, como no caso de uma carga puntiforme. Portanto, o potencial produzido pela esfera a uma distância r de seu centro é igual ao potencial produzido por uma carga puntiforme q situada no centro da esfera:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

O potencial na superfície da esfera é dado por $V_{sup} = q/4\pi\epsilon_0 R$.

O campo elétrico $\vec{E}$ é igual a zero em todos os pontos no interior da esfera; em caso contrário, ocorreria um movimento de cargas dentro da esfera. Portanto, se uma carga de teste se deslocasse de um ponto para outro no interior da esfera, nenhum trabalho seria realizado sobre essa carga. Isso significa que o potencial é constante em todos os pontos no interior da esfera, e seu valor é igual ao potencial na superfície da esfera, ou seja, $q/\pi\epsilon_0 R$.

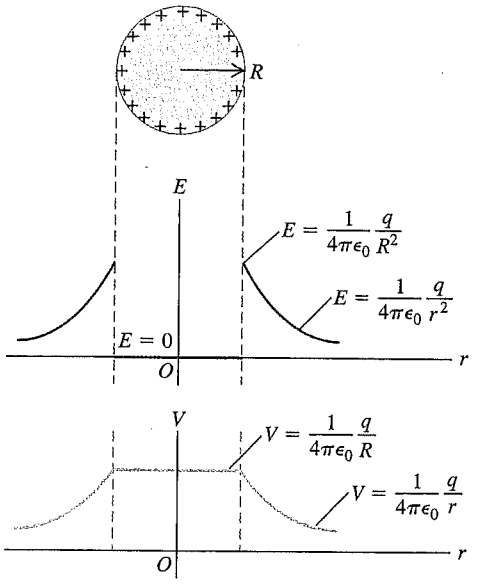


Figura 23.17 O módulo do campo elétrico E e o potencial V para pontos no interior e no exterior de um condutor esférico com uma carga positiva.

AVALIAR: o campo elétrico e o potencial de uma carga positiva q são indicados em função de r na Figura 23.17. Nesse caso, o campo elétrico aponta radialmente para fora da esfera. À medida que você se afasta da esfera, no mesmo sentido de $\vec{E}$, v diminui (como era de se esperar). O campo elétrico na superfície da esfera possui módulo dado por $E_{sup} = |q|/4\pi\epsilon_0 R^2$.

Ionização e descarga de corona

Os resultados do Exemplo 23.8 acarretam várias conseqüências práticas. Uma delas relaciona-se ao potencial máximo atingido por um condutor no ar. Esse potencial é limitado pelo módulo do campo elétrico, aproximadamente igual a 3×10^6 V/m, porque as moléculas do ar se *ionizam* e o ar se torna condutor. Considere uma carga positiva q. Comparando as expressões obtidas no Exemplo 23.8 para o potencial V_{sup} e o módulo do campo elétrico E_{sup} sobre a superfície de uma esfera condutora, notamos que $V_{sup} = E_{sup}R$. Logo, quando $E_{máx}$ representar o módulo do campo elétrico acima do qual o ar se torna condutor (conhecido como *rigidez dielétrica* do ar), o potencial máximo $V_{máx}$ que um condutor esférico pode atingir será dado por

$$V_{máx} = RE_{máx}$$

Para um condutor esférico com raio igual a 1 cm no ar, $V_{máx} = (10^{-2}\text{ m})\ (3 \times 10^6\text{ V/m}) = 30000$ V. Nenhuma esfera pode ser 'carregada' para atingir um potencial superior a 30000 V no ar; quando tentamos elevar esse potencial acrescentando mais cargas, o ar circundante torna-se ionizado e condutor, e a carga extra se escoa para o ar.

Para atingir potenciais elevados em máquinas de alta voltagem, é necessário que a esfera possua um raio grande, como no caso da esfera terminal de um gerador van de

Graaff (veja a Figura 22.27 e a fotografia que abre o Capítulo 22). Por exemplo, se a esfera do terminal do gerador possui raio $R = 2$ m, ela terá um potencial máximo $V_{máx} = (2\text{ m})(3 \times 10^6\text{ V/m}) = 6 \times 10^6\text{ V} = 6\text{ MV}$. Algumas máquinas de alta voltagem são colocadas em tanques pressurizados com um gás como o hexafluoreto de enxofre (SF_6), que pode suportar um campo elétrico mais elevado sem se tornar condutor.

O resultado do Exemplo 23.8 também explica o efeito produzido por um condutor carregado com um raio de curvatura *pequeno*, como um ponto agudo na extremidade de um cabo condutor fino. Como o potencial máximo é proporcional ao raio, até mesmo um potencial relativamente pequeno, se aplicado em uma extremidade aguda situada no ar, gera um campo elétrico suficientemente elevado, capaz de produzir ionização nas vizinhanças do ar, tornando-o condutor. A corrente resultante, e sua luminosidade inerente (visível em uma sala escura), denomina-se *corona*. As impressoras a laser e as máquinas copiadoras usam o efeito corona em fios finos para carregar o cilindro reprodutor da imagem (Figura 21.2).

Um condutor com raio maior é usado em situações em que é importante *evitar* a corona. Exemplo disso é a esfera metálica na extremidade de uma antena de rádio, que previne o efeito da eletricidade estática que pode ser produzida pela corona. Outro exemplo é a extremidade obtusa de um pára-raios (Figura 23.18). Caso ocorra excesso de carga na atmosfera, como acontece durante as tempestades, uma substancial carga de sinal contrário pode se formar nessa extremidade obtusa. Por conseguinte, as descargas produzidas por raios tendem a ser direcionadas para a extremidade do cabo, e não para outras estruturas vizinhas, que poderiam ser danificadas. (Um cabo condutor que liga o pára-raios ao solo permite que a carga adquirida seja dissipada sem causar danos.) Um pára-raios com uma ponta aguda acarretaria menor acúmulo de carga e, portanto, seria menos eficaz.

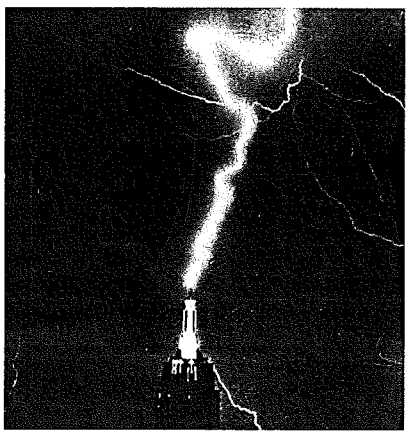


Figura 23.18 O mastro metálico no topo do Empire State Building atua como um pára-raios, sendo atingido por raios mais de 500 vezes por ano.

Exemplo 23.9

PLACAS PARALELAS CARREGADAS COM CARGAS OPOSTAS

Determine o potencial em qualquer altura y entre as placas paralelas carregadas com cargas opostas, discutidas na Seção 23.1 (Figura 23.19).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a Seção 23.1 fornece a *energia potencial* elétrica U para uma carga de teste q_0 em função de y. O objetivo deste problema é determinar o *potencial* elétrico V produzido pelas cargas nas placas em função de y.

PREPARAR: a energia potencial U para uma carga de teste positiva q_0, em um ponto situado a uma altura y acima da placa inferior, é dada pela Equação (23.5), $U = q_0E_y$.

EXECUTAR: o potencial $V(y)$ na coordenada y é a energia potencial por unidade de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0Ey}{q_0} = Ey$$

Você pode estabelecer que $U(y)$ e, portanto, $V(y)$ são iguais a zero no ponto b, em que $y = 0$. Mesmo que você escolhesse um potencial diferente de zero no ponto b, ainda seria válida a relação:

$$V(y) - V_b = Ey$$

O potencial diminui à medida que você se desloca da placa inferior para a placa superior no mesmo sentido de $\vec{E}$. No ponto a, em que $y = d$ e $V(_y) = V_a$, temos

$$V_a - V_b = Ed \quad \text{e} \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

em que V_{ab} é o potencial da placa positiva em relação à placa negativa. Ou seja, o campo elétrico é igual à diferença de potencial entre as placas, dividida pela distância entre elas. Para uma dada diferença de potencial V_{ab}, quanto menor a distância d entre as duas placas, maior o módulo E do campo elétrico. (Essa relação entre E e V_{ab} vale *somente* para a geometria plana aqui descrita. Ela *não* vale para situações nas quais o campo elétrico não é uniforme, tais como para esferas ou cilindros concêntricos.)

AVALIAR: o resultado obtido indica como medir a densidade das cargas das duas placas na Figura 23.19. No Exemplo 22.8 (Seção 22.4), deduzimos a expressão $E = \sigma/\epsilon_0$ para o campo elétrico E entre duas placas condutoras, com densidades de cargas superficiais $+\sigma$ e $-\sigma$. Igualando essa expressão a $E = V_{ab}/d$ temos

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{d}$$

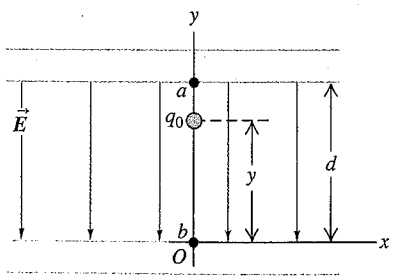


Figura 23.19 As placas paralelas carregadas indicadas na Figura 23.2.

A densidade de carga superficial da placa positiva é diretamente proporcional à diferença de potencial existente entre as placas, e o valor de σ pode ser determinado pela medição de V_{ab}. Essa técnica será útil enquanto não houver nenhum instrumento capaz de medir diretamente uma densidade de carga superficial. Sobre a placa negativa, a densidade de carga superficial é igual a $-\sigma$.

ATENÇÃO 'Potencial zero' é arbitrário Você poderia pensar que, se um corpo apresenta potencial igual a zero, ele necessariamente possui carga líquida igual a zero. Mas isso não é verdade! Como um exemplo, a placa na posição $y = 0$ na Figura 23.19 possui $V = 0$, porém tem uma densidade de carga superficial igual a $-\sigma$. Lembre-se de que não existe nenhum local especial em que o potencial seja igual a zero; podemos *definir* o potencial igual a zero no local que desejarmos.

Exemplo 23.10

UM FIO INFINITO CARREGADO OU UM CILINDRO CONDUTOR CARREGADO Calcule o potencial a uma distância r de um fio carregado muito longo, com uma densidade de carga linear (carga por unidade de comprimento) igual a λ.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: uma forma de solucionar este problema é dividir a linha de carga em elementos infinitesimais, como fizemos no Exemplo 21.11 (Seção 21.5), para determinar o campo elétrico produzido por essa linha. A seguir, podemos integrar conforme a Equação (23.16), para determinar o potencial líquido V. Neste caso, entretanto, a tarefa é bastante simplificada, porque já conhecemos o campo elétrico.

PREPARAR: verificamos nos exemplos 21.11 e 22.6 (Seção 22.4) que o campo elétrico a uma distância r de um fio carregado muito longo (Figura 23.20a) possui um único componente radial, dado por

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Podemos calcular o potencial integrando $\vec{E}$, como indica a Equação (23.17).

EXECUTAR: visto que o campo elétrico possui um único componente radial, o produto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ é igual a $E_r dr$. Logo, o potencial em qualquer ponto a em relação a qualquer outro ponto b, situados a distâncias r_a e r_b do fio, é dado por

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Se considerarmos $V_b = 0$ em um ponto b no infinito, verificaremos que V_a se torna *infinito*:

$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\infty}{r_a} = \infty$$

Isso mostra que, se tentarmos definir V como zero em um ponto no infinito, então V deverá ser igual a infinito para qualquer distância finita do fio. Logo, esse *não* é um modo útil para definir V para esse problema! Essa dificuldade ocorre porque a própria distribuição de cargas se estende até o infinito.

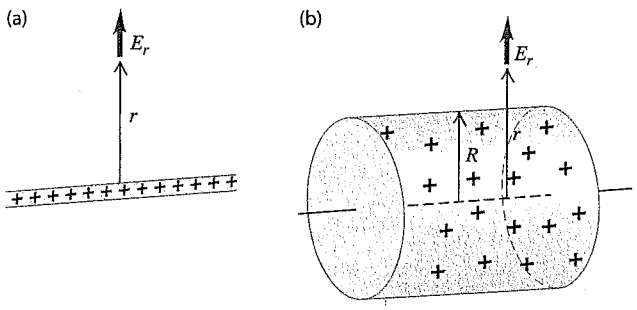


Figura 23.20 Campo elétrico fora de (a) um fio muito longo carregado positivamente e de (b) um cilindro muito longo carregado positivamente.

Para contornar essa dificuldade, lembre-se de que você pode definir V como zero em qualquer ponto que desejar. Vamos considerar $V_b = 0$ em um ponto b situado a uma distância radial arbitrária r_0. Então, o potencial $V = V_a$ em um ponto a a uma distância radial é dado por $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_0/r)$, ou

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

AVALIAR: de acordo com o resultado obtido, se λ for positivo, então V diminuirá à medida que r aumentar. Isso corresponde às expectativas: V diminui à medida que nos deslocamos no sentido de $\vec{E}$.

Pelo Exemplo 22.6, a expressão E_r, com a qual iniciamos, também se aplica fora de um longo cilindro condutor, carregado com carga por unidade de comprimento igual a λ (Figura 23.20b). Logo, o resultado aqui obtido também fornece o potencial elétrico desse cilindro, porém considerando apenas valores de r (a distância a partir do eixo do cilindro) iguais ou maiores do que o raio R do cilindro. Se escolhermos r_0 como o raio R do cilindro, então $V = 0$ quando $r = R$; logo, para qualquer ponto $r > R$, temos

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

No interior do cilindro, $\vec{E} = \mathbf{0}$ e V possui o mesmo valor (zero) existente na superfície do cilindro.

Exemplo 23.11

UM ANEL CARREGADO Uma carga elétrica está distribuída uniformemente em torno de um anel fino de raio a, com uma carga total Q (Figura 23.21). Calcule o potencial em um ponto P situado sobre o eixo do anel a uma distância x do centro do anel.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: calculamos o campo elétrico sobre todos os pontos ao longo do eixo desse anel no Exemplo 21.10 (Seção 21.5), portanto, podemos solucionar este problema integrando $\vec{E}$ na Equação (23.17) para determinar V ao longo desse eixo. Alternativamente, podemos dividir o anel em segmentos infinitesimais e usar a Equação (23.16) para determinar V.

PREPARAR: como indica a Figura 23.21, é mais fácil determinar V sobre o eixo usando o método do segmento infinitesimal. Isso porque todas as cargas sobre o anel (ou seja, todos os elementos da distribuição de cargas) estão a uma mesma distância r de um ponto P.

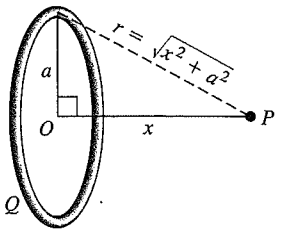


Figura 23.21 Todas as cargas em um anel carregado com carga Q estão a uma mesma distância r de um ponto P situado sobre o eixo do anel.

EXECUTAR: a Figura 23.21 mostra que a distância de cada elemento de carga dq sobre o anel para o ponto P é $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Logo, podemos tirar o fator $1/r$ da integral na Equação (23.16) e

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

O potencial é uma grandeza *escalar*; não precisamos calcular os componentes de vetores, como fizemos para determinar o campo elétrico no ponto P. Portanto, é muito mais simples determinar um potencial elétrico do que calcular um campo elétrico.

AVALIAR: quando x é muito maior do que a, a expressão anterior de V torna-se $V = Q/4\pi\epsilon_0$. Isso corresponde ao potencial de uma carga puntiforme Q em um ponto situado a uma distância x da carga. Por isso, quando estamos muito longe de um anel carregado, ele torna-se semelhante a uma carga puntiforme. (Obtivemos uma conclusão semelhante para o campo elétrico produzido por um anel no Exemplo 21.10.)

Os resultados obtidos para V também podem ser encontrados integrando-se a expressão de E_x, obtida no Exemplo 21.10 (veja o Problema 23.69).

Exemplo 23.12

UM FIO CARREGADO Uma carga elétrica Q está distribuída uniformemente ao longo de um fio retilíneo ou sobre uma barra fina, de comprimento $2a$. Calcule o potencial ao longo da reta perpendicular passando no centro da barra em um ponto P, situado a uma distância x de seu centro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: essa é a mesma situação descrita no Exemplo 21.11 (Seção 21.5), na qual determinamos uma expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto arbitrário no eixo x. Poderíamos integrar $\vec{E}$ usando a Equação (23.17) para achar V. Em vez disso, faremos a integração sobre a distribuição de cargas usando a Equação (23.16) para obter um pouco mais de experiência com esse método.

PREPARAR: a Figura 23.22 mostra a situação. Diferentemente da situação no Exemplo 23.11, cada elemento de carga dQ está localizado a uma distância diferente do ponto P.

EXECUTAR: como no Exemplo 21.11, um elemento de carga dQ correspondente a um elemento de comprimento dy é dado por $dQ = (Q/2a)dy$. A distância entre dQ e o ponto P é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$, e o potencial infinitesimal dV no ponto P é dado por

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

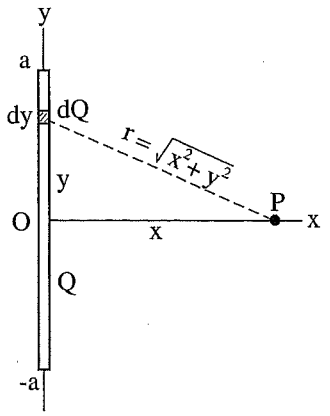


Figura 23.22 Nossa esquematização do problema.

Para obtermos o potencial no ponto P produzido pela barra inteira, integramos dV ao longo do comprimento da barra de $y = -a$ até $y = a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Você pode procurar essa integral em uma tabela. O resultado é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

AVALIAR: podemos conferir esse resultado considerando que x se aproxima do infinito. Nesse limite, o ponto P está infinitamente distante de toda a carga, portanto esperamos que V tenda a zero; convidamos você a provar esse resultado.

Como no Exemplo 23.11, esse problema é mais fácil do que calcular $\vec{E}$ no ponto P, porque o potencial é uma grandeza escalar e nenhum cálculo vetorial é envolvido.

Teste sua compreensão da Seção 23.3 Se o *campo* elétrico de um dado ponto for igual a zero, o *potencial* elétrico nesse ponto também será igual a zero? (*Sugestão:* Considere o centro do anel nos exemplos 23.11 e 21.10.) ▮

23.4 Superfícies equipotenciais

As linhas de campo (Seção 21.6) auxiliam a visualização de um campo elétrico. De modo análogo, os potenciais em diversos pontos de um campo elétrico podem ser representados graficamente por *superfícies equipotenciais*. Elas empregam a mesma idéia básica de mapas topográficos, como aqueles usados por excursionistas e alpinistas (Figura 23.23). Em um mapa topográfico, as linhas de contorno ligam pontos com a mesma altura. Poderia ser desenhada qualquer quantidade dessas linhas, porém, é suficiente mostrar algumas linhas de contorno para indicar alturas igualmente espaçadas. Quando um corpo de massa m se desloca ao longo de uma linha de contorno, a energia potencial gravitacional mgy não varia, porque a altura permanece constante ao longo dessa linha. Logo, uma linha de

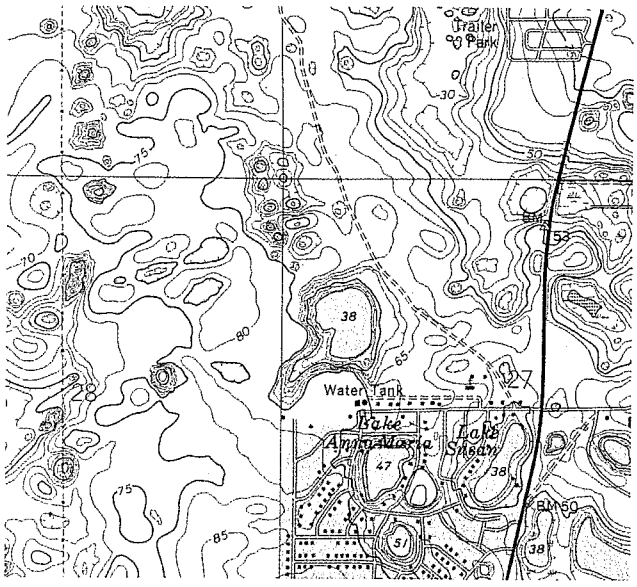


Figura 23.23 As linhas de contorno em um mapa topográfico são curvas que ligam pontos com a mesma altura e, portanto, com energia potencial gravitacional constante.

contorno em um mapa topográfico é uma linha de energia potencial gravitacional constante. As linhas de contorno são agrupadas com distâncias menores entre elas, em regiões nas quais ocorrem variações de altura muito grandes em uma mesma distância horizontal; a distância entre essas linhas é maior quando o terreno apresenta uma variação de altura pequena. Quando uma bola rola montanha abaixo, ela sofre maior força gravitacional para baixo nos locais onde as linhas de contorno estão agrupadas com distâncias menores entre elas.

Por analogia às linhas de contorno em um mapa topográfico, uma **superfície equipotencial** é uma superfície em três dimensões, sobre a qual o *potencial elétrico* V permanece constante em todos os seus pontos. Quando uma carga de teste q_0 se desloca de um ponto a outro sobre essa superfície, a energia potencial *elétrica* q_0V permanece constante. Em uma região onde existe um campo elétrico, podemos construir uma superfície equipotencial em qualquer local. Nos diagramas, costuma ser suficiente mostrar algumas superfícies equipotenciais mais representativas, em geral igualmente espaçadas, para indicar que a diferença de potencial entre duas superfícies adjacentes é constante. Nenhum ponto pode possuir dois potenciais diferentes, portanto, as superfícies equipotenciais não podem se cruzar nem se tangenciar.

Superfícies equipotenciais e linhas de campo

Como a energia potencial não varia quando uma carga de teste se desloca ao longo de uma superfície equipotencial, o campo elétrico não pode realizar trabalho sobre essa carga. Portanto, $\vec{E}$ deve ser perpendicular à superfície em todos os seus pontos, de modo que a força $\vec{E}$ será sempre perpendicular ao deslocamento de uma carga que se move sobre a superfície. **As linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais são sempre mutuamente perpendiculares.** Geralmente, uma linha de campo é uma curva e uma superfície equipotencial é uma superfície curva. No caso particular de um campo elétrico *uniforme*, para o qual as linhas de campo são retas paralelas e igualmente espaçadas, as superfícies equipotenciais são *planos* perpendiculares a essas retas.

A Figura 23.24 mostra diversos arranjos de cargas. As linhas de campo elétrico estão situadas no plano das cargas; essas linhas cortam aquelas obtidas pela interseção das superfícies equipotenciais com o plano da página. Na realidade, as superfícies equipotenciais são tridimensionais. Em cada ponto de interseção entre uma linha de campo elétrico e uma linha equipotencial, as duas curvas são perpendiculares.

Na Figura 23.24, as superfícies equipotenciais foram desenhadas de modo que mantenham constante a diferença de potencial entre duas superfícies adjacentes. Em regiões nas quais o módulo de $\vec{E}$ é grande, as superfícies equipotenciais ficam agrupadas mais compactamente, porque o campo realiza um trabalho relativamente grande sobre um deslocamento relativamente pequeno de uma carga de teste. Esse

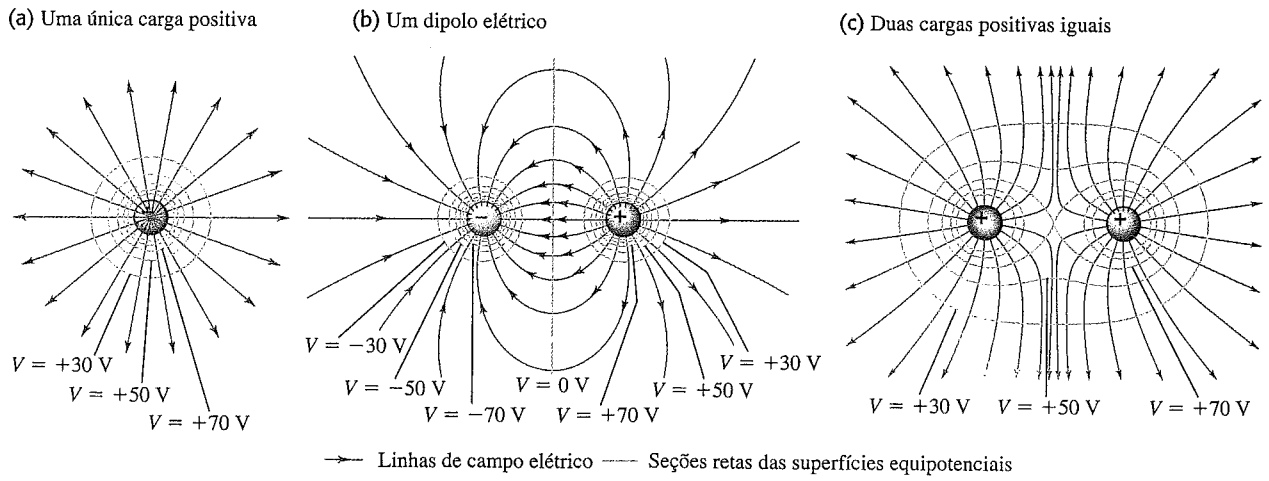


Figura 23.24 Seções retas das superfícies equipotenciais e das linhas de campo elétrico para conjuntos de cargas puntiformes. A diferença de potencial entre duas superfícies adjacentes é constante. Compare estes diagramas com os da Figura 21.29, que indicavam somente as linhas do campo elétrico.

comportamento ocorre nas vizinhanças da carga puntiforme da Figura 23.24a ou entre as duas cargas puntiformes da Figura 23.24b; observe que, nessas regiões, as linhas de campo também estão agrupadas mais compactamente. Isso é análogo ao fato de a força gravitacional ser maior nas regiões do mapa topográfico onde o espaçamento entre as linhas de contorno é muito pequeno. Reciprocamente, nas regiões em que o campo elétrico é fraco, o espaçamento entre as superfícies equipotenciais é maior; esse comportamento ocorre em pontos muito distantes da carga da Figura 23.24a, do lado esquerdo da carga negativa ou do lado direito da carga positiva da Figura 23.24b, ou em pontos muito afastados das duas cargas indicadas na Figura 23.24c. (Pode parecer que duas superfícies equipotenciais se cruzam no centro da Figura 23.24c, violando a regra de que isso nunca pode ocorrer. Na realidade, as duas superfícies não estão se cruzando: trata-se de uma única superfície equipotencial cuja interseção com o plano das cargas dá origem à curva em forma de um algarismo 8, desenhado horizontalmente no centro da Figura 23.24c.)

ATENÇÃO ***E*** **não precisa ser constante sobre uma superfície equipotencial** Sobre uma dada superfície equipotencial, o potencial V possui o mesmo valor em todos os seus pontos, porém, geralmente, o módulo E do campo elétrico apresenta valores diferentes sobre esses pontos. Por exemplo, ao longo da superfície equipotencial indicada pelo dístico '$V = -30$ V' na Figura 23.24b, o módulo E no lado esquerdo da carga negativa possui valor menor do que o módulo do campo entre as duas cargas. Na superfície equipotencial que forma uma curva semelhante ao algarismo 8 na parte central da Figura 23.24c, $E = 0$ exatamente no ponto central do segmento que une as duas cargas; em qualquer outro ponto dessa superfície, E é diferente de zero.

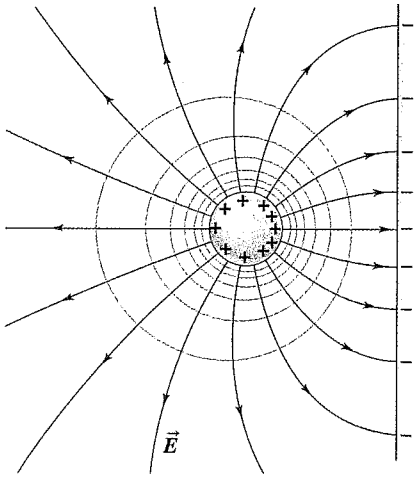


Figura 23.25 Quando todas as cargas estão em repouso, a superfície de um condutor é sempre uma superfície equipotencial. As linhas de campo elétrico penetram perpendicularmente na superfície desse condutor.

Um campo elétrico impossível
Se um campo elétrico fora de um condutor tivesse um componente tangencial $E_{\parallel}$, uma carga poderia se mover em 'loop' com o trabalho resultante realizado.

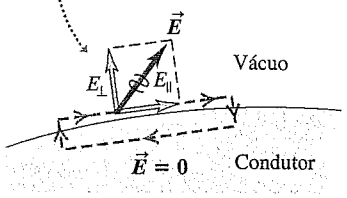


Figura 23.26 Em todos os pontos da superfície de um condutor, o campo elétrico deve ser perpendicular à superfície. Se $\vec{E}$ tivesse um componente tangencial, um trabalho resultante seria realizado sobre uma carga de teste ao deslocá-la ao longo da trajetória retangular indicada, fazendo-a retornar ao ponto de partida – o que é impossível, porque a força elétrica é conservativa.

Condutores e equipotenciais

Vejamos aqui um fato importante sobre superfícies equipotenciais: **quando todas as cargas estão em repouso, a superfície de um condutor é sempre uma superfície equipotencial.** Uma vez que o campo elétrico $\vec{E}$ deve ser sempre perpendicular à superfície equipotencial, para provar essa afirmação basta demonstrar que, **quando todas as cargas estão em repouso, o campo elétrico nos pontos próximos da superfície externa de um condutor deve ser sempre perpendicular em todos os pontos da superfície** (Figura 23.25). Sabemos que $\vec{E} = \mathbf{0}$ em todos os pontos no interior de um condutor; caso contrário, ocorreria um movimento de cargas. Em particular, em qualquer ponto interno muito próximo da superfície, o componente de $\vec{E}$ tangente a ela é igual a zero. Portanto, o componente de $\vec{E}$ tangente à superfície pelo lado *externo* também é zero. Se ele não fosse igual a zero, uma carga poderia se deslocar ao longo de uma trajetória retangular parcialmente dentro e parcialmente fora da superfície (Figura 23.26), retornando ao ponto de partida com um trabalho resultante realizado pelo campo sobre a carga. Isso contraria a natureza conservativa de um campo eletrostático, concluindo-se que o componente de $\vec{E}$ tangente à superfície em pontos externos sobre a superfície deve ser igual a zero. Logo, $\vec{E}$ é perpendicular à superfície em todos os seus pontos, o que prova nossa afirmação.

Finalmente, podemos agora demonstrar um teorema que citamos sem provar na Seção 22.5. O teorema diz: em equilíbrio eletrostático, se um condutor possui uma cavidade, e se não existe nenhuma carga no interior da cavidade, então não pode existir carga sobre *qualquer* ponto da superfície da cavidade. Isso significa que, se você está no interior de uma caixa condutora, pode tocar com segurança qualquer ponto da parte interna das paredes da caixa sem levar choque. Para demonstrar esse teorema, inicialmente vamos provar que *todos os pontos no interior de uma cavidade possuem o mesmo potencial.* Na Figura 23.27, a superfície condutora A da cavidade é uma superfície equipotencial,

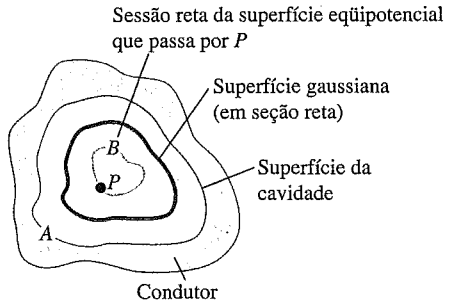


Figura 23.27 Uma cavidade em um condutor. Quando a cavidade não contém nenhuma carga, cada ponto dela possui o mesmo potencial, o campo elétrico é zero no interior da cavidade e não existe nenhuma carga na sua superfície.

como demonstramos anteriormente. Suponha que o ponto P no interior da cavidade possua um potencial diferente; então, podemos construir uma superfície equipotencial B diferente passando pelo ponto P.

Considere agora uma superfície gaussiana, indicada na Figura 23.27, entre as duas superfícies equipotenciais mencionadas. Em virtude da relação entre $\vec{E}$ e as equipotenciais, concluímos que o campo elétrico deve apontar de A para B ou de B para A, dependendo de qual superfície possua o maior valor do potencial. Em qualquer um desses casos, o fluxo através da superfície gaussiana certamente não é igual a zero. Então, pela lei de Gauss, concluímos que a carga no interior da superfície gaussiana não seria zero. Isso contradiz a hipótese inicial de que não existe nenhuma carga no interior da cavidade. Portanto, o potencial no ponto P *não pode* ser diferente do potencial na parede da cavidade.

Todos os pontos da região ocupada pela cavidade devem, portanto, possuir o mesmo potencial. Porém, para que isso seja verdade, *o campo elétrico deve ser igual a zero em todos os pontos no interior da cavidade.* Finalmente, a lei de Gauss mostra que o campo elétrico na superfície de um condutor é proporcional à densidade de carga σ no ponto considerado. Portanto, concluímos que *a densidade de carga sobre todos os pontos da parede da cavidade é igual a zero.* A prova feita a partir dessa cadeia de raciocínio parece ser complicada, porém merece um estudo cuidadoso.

ATENÇÃO Superfícies equipotenciais *versus* superfícies gaussianas Não confunda superfície equipotencial com a superfície gaussiana que introduzimos no Capítulo 22. Uma superfície gaussiana só é relevante quando estamos usando a lei de Gauss e podemos escolher *qualquer* superfície gaussiana que seja conveniente. Contudo, *não* temos liberdade para escolher a forma de uma superfície equipotencial, pois sua forma é determinada pela distribuição de cargas.

Teste sua compreensão da Seção 23.4 Os formatos das superfícies equipotenciais na Figura 23.24 sofreriam variação caso o sinal de cada carga fosse invertido? ∎

23.5 Gradiente de potencial

O campo elétrico e o potencial são intimamente relacionados. A Equação (23.17), reescrita a seguir, expressa um aspecto dessa relação:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Quando conhecemos $\vec{E}$ em diversos pontos, podemos usar essa equação para calcular uma diferença de potencial. Nesta seção, mostramos como inverter essa operação; quando se conhece a diferença de potencial em diversos pontos, é possível aplicar essa equação para calcular $\vec{E}$. Considerando V uma função das coordenadas (x, y, z) de um ponto do espaço, mostraremos que $\vec{E}$ está relacionado diretamente com as *derivadas parciais* de V em relação a x, y e z.

Na Equação (23.17), $V_a - V_b$ é o potencial de a em relação ao ponto b, ou seja, a variação do potencial quando um ponto se desloca de b até a. Podemos escrever

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = -\int_a^b dV$$

em que dV é uma variação infinitesimal do potencial que acompanha um elemento da trajetória $d\vec{l}$ de b até a. Comparando com a Equação (23.17), obtemos

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Essas duas integrais devem possuir o mesmo valor para *qualquer* par de limites a e b; para que isso seja verdade, os *integrandos* devem ser iguais. Logo, para qualquer deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para interpretar essa expressão, escrevemos $\vec{E}$ e $d\vec{l}$ em termos dos seus respectivos componentes: $\vec{E} = \hat{\imath}\, E_x + \hat{\jmath}\, E_y + \hat{k}\, E_z$ e $d\vec{l} = \hat{\imath}\, dx + \hat{\jmath}\, dy + \hat{k}\, dz$. Obtemos então

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponha que o deslocamento seja paralelo ao eixo Ox; logo, $dy = dz = 0$. Então, $-dV = E_x dx$ ou $E_x = -(dV/dx)_{y,\,z\ \text{constante}}$, em que os índices servem para salientar que somente x está variando na derivada; lembre-se de que V é função de x, y e z. E isso é exatamente a definição da *derivada parcial* $\partial V/\partial x$. Os componentes y e z de $\vec{E}$ são relacionados de modo análogo com as derivadas parciais correspondentes de V, portanto temos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (23.19)$$

(componentes de $\vec{E}$ em termos de V)

Essas equações são consistentes com as unidades de V/m do campo elétrico. Podemos escrever $\vec{E}$ em termos dos vetores unitários do seguinte modo:

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \qquad (23.20)$$

($\vec{E}$ em termos de V)

Em notação vetorial, denomina-se **gradiente** a seguinte função f:

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f \qquad (23.21)$$

O operador designado pelo símbolo $\vec{\nabla}$ denomina-se 'grad' ou 'del'. Portanto, em notação vetorial, escrevemos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (23.22)$$

A equação anterior pode ser lida como '$\vec{E}$ é o gradiente de V com sinal contrário' ou então '$\vec{E}$ é igual a menos grad de V'. A grandeza $\vec{\nabla} V$ denomina-se *gradiente de potencial.*

Em cada ponto, o gradiente de potencial aponta no sentido para o qual V *cresce* mais rapidamente com a variação da posição. Portanto, em cada ponto, a direção e o sentido de $\vec{E}$ correspondem à direção e ao sentido em que V *decresce* mais rapidamente, sendo sempre perpendicular à superfície equipotencial que passa no ponto considerado. Isso confirma a observação feita na Seção 23.2, segundo a qual quando nos deslocamos no sentido do campo elétrico, o potencial elétrico diminui.

A Equação (23.22) não depende da escolha particular do ponto para o qual V é igual a zero. Se mudássemos o valor desse ponto zero, o efeito seria fazer V variar pelo mesmo valor constante e, assim, as derivadas de V forneceriam sempre o mesmo valor.

Quando $\vec{E}$ possui uma direção radial em relação a um ponto ou a um eixo e r é a distância até o ponto ou até o eixo, a relação correspondente à Equação (23.19) é dada por

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad (23.23)$$

(campo elétrico radial)

De modo geral, podemos determinar o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas usando qualquer um dos dois métodos: diretamente, somando cada campo $\vec{E}$ gerado pelas cargas individuais puntiformes, ou então determinando primeiro o potencial e depois calculando seu gradiente para achar o campo elétrico. O segundo método costuma ser mais fácil, porque o potencial é uma grandeza *escalar*, exigindo, na pior das hipóteses, a integração de uma função escalar. O campo elétrico é uma grandeza *vetorial*, exigindo a determinação de cada componente para cada elemento de carga e a integração separada para cada componente. Portanto, deixando de lado sua interpretação fundamental, o potencial fornece uma técnica de cálculo útil para as grandezas de campo. A seguir, forneceremos diversos exemplos nos quais o conhecimento de V é usado para a determinação do campo elétrico.

Enfatizamos mais uma vez que, quando conhecemos $\vec{E}$ em função da posição, podemos usar a equação (23.17) ou a Equação (23.18) para calcular V e, quando conhecemos V em função da posição, podemos aplicar as equações (23.19), (23.20) ou (23.23) para calcular $\vec{E}$. A obtenção de V a partir de $\vec{E}$ exige integração, e a obtenção de $\vec{E}$ a partir de V exige o cálculo de derivadas.

Exemplo 23.13

POTENCIAL E CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PUNTIFORME Pela Equação (23.14), o potencial de uma carga puntiforme q a uma distância radial r é dado por $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. Calcule o vetor do campo elétrico a partir dessa expressão de V.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa a relação entre o potencial elétrico em função da posição e o vetor do campo elétrico.

PREPARAR: por simetria, o campo elétrico possui somente um componente radial E_r; logo, usamos a Equação (23.23) para determinar esse componente.

EXECUTAR: pela Equação (23.23),

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

de modo que o vetor do campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

AVALIAR: o resultado está de acordo com a Equação (21.7). Uma abordagem alternativa consiste em ignorar a simetria radial, escrever a distância radial como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e calcular as derivadas de V em relação a x, y e z, como na Equação (23.20). Obtemos,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Pela Equação (23.20), o campo elétrico é

$$\vec{E} = -\left[\hat{\imath}\left(-\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{\jmath}\left(-\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{k}\left(-\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Esse método fornece o mesmo resultado, mas requer um pouco mais de esforço. Fica claro que é melhor explorar a simetria da distribuição de cargas sempre que possível.

Exemplo 23.14

POTENCIAL E CAMPO DE UM ANEL CARREGADO No Exemplo 23.11 (Seção 23.3), vimos que, para um anel de raio a e carga Q, o potencial em um ponto P ao longo do eixo do anel e situado a uma distância x do centro do anel é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Determine o campo elétrico no ponto P.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos V em função de x ao longo do eixo x e desejamos obter o campo elétrico em um ponto nesse eixo.

PREPARAR: pela simetria da distribuição de carga indicada na Figura 23.21, o campo elétrico ao longo do eixo de simetria do anel pode ter somente um componente x, que pode ser determinado usando a primeira das equações (23.19).

EXECUTAR: o componente x do campo elétrico é

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

AVALIAR: confirma-se, portanto, o resultado obtido no Exemplo 21.10 (Seção 21.5).

ATENÇÃO Não use expressões em que elas não se aplicam Neste exemplo, aparentemente V não é uma função de y nem de z. Contudo, *não* seria certo concluir que $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$ e que $E_y = E_z = 0$ em todos os pontos. A razão é que a expressão obtida para V *vale somente para pontos sobre o eixo Ox*, nos quais $y = z = 0$. Logo, a expressão obtida para E_x somente é válida para o eixo x. Caso soubéssemos a expressão de V válida para *todos* os pontos do espaço, então poderíamos usá-la para determinar $\vec{E}$ em qualquer ponto mediante a Equação (23.19).

Teste sua compreensão da Seção 23.5 Em determinada região do espaço, o potencial é dado por $V = A + Bx + Cy^3 + Dxy$, em que A, B, C e D são constantes positivas. Qual das seguintes afirmações sobre o campo elétrico $\vec{E}$ nessa região do espaço está correta? (Pode haver mais de uma resposta correta.) (i) Aumentar o valor de A aumentará o valor de $\vec{E}$ em todos os pontos. (ii) Aumentar o valor de A diminuirá o valor de $\vec{E}$ em todos os pontos. (iii) $\vec{E}$ não possui componentes z; (iv) o campo elétrico é igual a zero na origem ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). ■

Resumo

Energia potencial elétrica: a força elétrica produzida por qualquer conjunto de cargas é uma força conservativa. O trabalho W realizado pela força elétrica sobre uma partícula carregada que se desloca em um campo elétrico pode ser representado por uma função de energia potencial U.

A energia potencial para duas cargas puntiformes, q e q_0, depende da distância r que as separa. A energia potencial para uma carga q_0 no campo elétrico de um conjunto de cargas puntiformes, q_1, q_2, q_3, depende da distância q_0 de cada uma das outras cargas (exemplos 23.1 e 23.2).

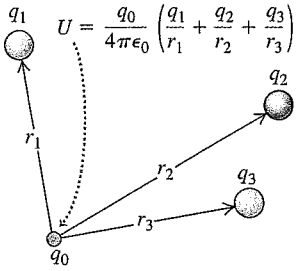
$$W_{a\to b} = U_a - U_b \tag{23.2}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \tag{23.9}$$

(duas cargas puntiformes)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{23.10}$$

(q_0 na presença de outras cargas puntiformes)



Potencial elétrico: o potencial, designado por V, é a energia potencial por unidade de carga. A diferença de potencial entre dois pontos equivale ao trabalho necessário para deslocar uma unidade positiva de carga de teste entre esses pontos. O potencial V produzido por uma quantidade de carga pode ser calculado pela soma (no caso de um conjunto de cargas puntiformes) ou pela integral (no caso de uma distribuição de cargas) (exemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 e 23.12).

A diferença de potencial entre dois pontos a e b, também chamada de potencial de a em relação a b, é obtida pela integral de linha de $\vec{E}$. O potencial em um dado ponto pode ser determinado primeiramente calculando $\vec{E}$ e depois fazendo essa integral (exemplos 23.6, 23.8, 23.9 e 23.10).

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{23.14}$$

(potencial produzido por uma carga puntiforme)

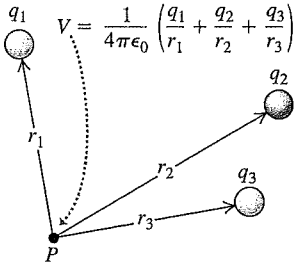
$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{23.15}$$

(potencial produzido por um conjunto de cargas puntiformes)

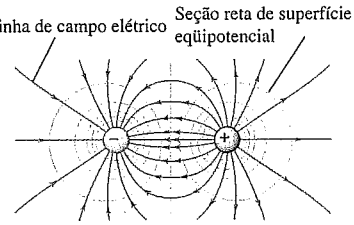
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \tag{23.16}$$

(potencial produzido por uma distribuição de cargas)

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \tag{23.17}$$



Superfícies equipotenciais: uma superfície equipotencial é uma superfície sobre a qual o potencial possui o mesmo valor em todos os seus pontos. Toda linha de campo é sempre perpendicular à superfície equipotencial nos pontos em que elas se cruzam. Quando todas as cargas estão em repouso, a superfície de um condutor é sempre uma superfície equipotencial e todos os pontos no interior do material de um condutor estão a um mesmo potencial. Quando, no interior de um condutor, existe uma cavidade que não contém nenhuma carga, a cavidade inteira constitui uma região equipotencial e não existe nenhuma carga sobre a superfície da cavidade.



Determinação do campo elétrico a partir do potencial elétrico: quando o potencial V é uma dada função das coordenadas x, y e z, os componentes do campo elétrico $\vec{E}$ em cada ponto são dados pelas derivadas parciais de V (exemplos 23.13 e 23.14).

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{23.19}$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{23.20}$$

(em notação vetorial)

Principais termos

energia potencial elétrica, 72
potencial elétrico, 78
volt, 78
voltagem, 78
elétron-volt, 80
superfície equipotencial, 88
gradiente, 91

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Uma grande e constante diferença de potencial V_{ab} é mantida entre a ferramenta de solda (a) e as peças metálicas a serem soldadas (b). De acordo com o Exemplo 23.9 (Seção 23.3), o campo elétrico entre dois condutores separados por uma distância d possui módulo $E = V_{ab}/d$. Logo, d deve ser pequeno para que o módulo do campo E seja grande o suficiente para ionizar o gás entre os condutores a e b (Seção 23.3) e produzir um arco por meio desse gás.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

23.1 **Respostas: (a) (i), (b) (ii)** As três cargas q_1, q_2 e q_3 são positivas, portanto os três termos na soma da Equação (23.11) – q_1q_2/r_{12}, q_1q_3/r_{13} e q_2q_3/r_{23} – são positivos. Logo, a energia potencial elétrica total U é positiva. Isso significa que é necessário um trabalho positivo para trazer as três cargas do infinito até as posições indicadas na Figura 21.14 e, conseqüentemente, trabalho *negativo* para deslocar as três cargas dessas posições de volta ao infinito.

23.2 **Resposta: não** Se $V = 0$ em um dado ponto, $\vec{E}$ *não* deve ser igual a zero nesse ponto. Exemplo disso é o ponto c nas Figuras 21.23 e 23.14, para o qual não há um campo elétrico no sentido $+Ox$ (veja Exemplo 21.9, na Seção 21.5), muito embora $V = 0$ (Exemplo 23.4). Não é um resultado surpreendente porque V e $\vec{E}$ são grandezas bem diferentes: V é o trabalho resultante necessário para trazer uma unidade de carga do infinito até o ponto em questão, enquanto $\vec{E}$ é a força elétrica que atua sobre uma unidade de carga quando ela chega nesse ponto.

23.3 **Resposta: não** Se $\vec{E} = \mathbf{0}$ em um dado ponto, V *não* deve ser igual a zero nesse ponto. Exemplo disso é o ponto O no centro do anel carregado das figuras 21.24 e 23.21. De acordo com o Exemplo 21.20 (Seção 21.5), o campo elétrico é igual a zero no ponto O, porque as contribuições do campo elétrico a partir de diferentes partes do anel se cancelam por completo. Pelo Exemplo 23.11, porém, o potencial no ponto O *não* é igual a zero. Esse valor de V corresponde ao trabalho necessário para deslocar uma unidade positiva de carga de teste ao longo de uma trajetória desde o infinito até o ponto O; é diferente de zero porque o anel carregado repele a carga de teste, tornando, portanto, necessário um trabalho positivo para deslocar a carga de teste em direção ao anel.

23.4 **Resposta: não** Se as cargas positivas da Figura 23.24 fossem substituídas por cargas negativas, e vice-versa, as superfícies equipotenciais seriam as mesmas, porém o sinal do potencial seria invertido. Por exemplo, as superfícies na Figura 23.24b com potencial $V = +30$ V e $V = -50$ V teriam potencial $V = -30$ V e $V = +50$ V, respectivamente.

23.5 **Resposta: (iii)** Pela Equação (23.19), os componentes do campo elétrico são $E_x = -\partial V/\partial x = B + Dy$, $E_y = -\partial V/\partial y = 3Cy^2 + Dx$ e $E_z = -\partial V/\partial z = 0$. O valor de A não exerce nenhum efeito, o que significa que podemos adicionar uma constante ao potencial elétrico em todos os pontos, sem causar variação em $\vec{E}$ ou na diferença de potencial entre dois pontos. O potencial não depende de z, portanto o componente z de $\vec{E}$ é nulo. Observe que, na origem, o campo elétrico é diferente de zero porque possui um componente x diferente de zero: $E_x = B$, $E_y = 0$, $E_z = 0$.

Questões para discussão

Q23.1 Um aluno perguntou: 'Uma vez que o potencial elétrico é sempre proporcional à energia potencial, por que então se preocupar com o conceito de potencial?' O que você responderia para esse aluno?

Q23.2 O potencial (em relação a um ponto no infinito) sobre um ponto eqüidistante de duas cargas iguais, mas de sinais contrários, é igual a zero. É possível trazer uma carga do infinito até esse ponto de modo que o trabalho seja igual a zero em qualquer trecho da trajetória? Caso seja possível, descreva como. Caso não seja, explique por quê.

Q23.3 É possível fazer um arranjo de duas cargas puntiformes, separadas por uma distância finita, de modo que a energia potencial elétrica seja igual à energia potencial quando a distância entre as cargas for infinita? Por quê? Qual seria sua resposta para o caso de três cargas? Explique seu raciocínio.

Q23.4 Considerando-se que o potencial pode ter qualquer valor que você deseje, dependendo da escolha do nível de referência do

potencial zero, como um voltímetro sabe qual leitura fazer, quando conectado entre dois pontos?

Q23.5 Se $\vec{E}$ é igual a zero em todos os pontos de uma trajetória que liga um ponto A com um ponto B, qual é a diferença de potencial entre esses dois pontos? Isso significa que $\vec{E}$ é sempre zero ao longo de *qualquer* trajetória que liga o ponto A com o ponto B? Explique seu raciocínio.

Q23.6 Se $\vec{E}$ for igual a zero em todos os pontos de uma região do espaço, o potencial será necessariamente zero nessa região? Por quê? Caso sua resposta seja negativa, o que você *pode* dizer sobre o potencial?

Q23.7 Caso você faça a integral do campo elétrico $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para uma trajetória *fechada,* como a indicada na Figura 23.28, a integral será *sempre* igual a zero, independentemente da forma da trajetória e da maneira como as cargas estão distribuídas ao longo da trajetória. Explique o motivo.

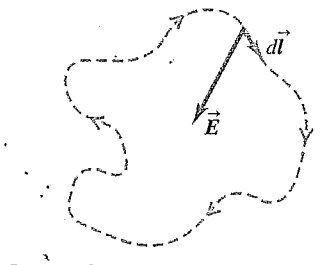


Figura 23.28 Questão Q23.7.

Q23.8 A diferença de potencial entre os dois terminais de uma pilha AA (usada em lanternas e em rádios portáteis) é igual a 1,5 V. Quando duas pilhas AA são ligadas em série, de modo que o terminal positivo de uma das pilhas esteja em contato com o terminal negativo da outra, qual é a diferença de potencial entre os dois terminais livres dessa combinação? Qual seria a resposta se o terminal positivo de uma das pilhas estivesse em contato com o mesmo terminal positivo da outra? Explique seu raciocínio.

Q23.9 É fácil produzir uma diferença de potencial de alguns milhares de volts atritando os sapatos sobre um carpete de náilon. Ao tocar a maçaneta de uma porta, você recebe um choque muito pequeno. Porém, se você tocasse uma linha de transmissão com uma voltagem comparável, o choque seria fatal. Por que existe essa diferença?

Q23.10 Caso o potencial elétrico seja conhecido somente em um único ponto, o campo elétrico $\vec{E}$ desse ponto pode ser determinado? Em caso positivo, como? Em caso negativo, por quê?

Q23.11 Visto que as linhas de campo e as superfícies equipotenciais são sempre perpendiculares, duas superfícies equipotenciais não podem se cruzar; se elas pudessem, o vetor $\vec{E}$ poderia ter duas direções nos pontos de interseção. Contudo, no centro da Figura 23.24c existe uma aparente interseção entre duas superfícies equipotenciais. Explique por que, nesse caso particular, não existe ambigüidade na direção de $\vec{E}$.

Q23.12 O campo elétrico produzido por uma placa muito grande de carga independe da distância em relação a essa placa, entretanto os campos produzidos pelas cargas puntiformes individuais sobre a placa obedecem à regra do inverso do quadrado. Por que o campo da placa não enfraquece quando as distâncias são maiores?

Q23.13 Freqüentemente, afirmamos que, se o ponto A possui uma potência mais elevada do que o ponto B, A possui potência positiva e B possui potência negativa. Disso, necessariamente, decorre que um ponto com potencial positivo está positivamente carregado e que um ponto com potencial negativo está negativamente carregado? Ilustre suas respostas com exemplos claros e simples.

Q23.14 Uma esfera condutora deve ser carregada colocando sobre ela em cada instante uma pequena quantidade de carga até que a carga total seja igual a Q. Afirma-se que o trabalho total realizado nesse processo é proporcional a Q^2. Isso é correto? Por quê?

Q23.15 Três pares de placas metálicas paralelas (A, B e C) estão conectados como ilustra a Figura 23.29, e uma pilha mantém um potencial de 1,5 V entre os pontos a e b. O que você pode afirmar sobre a diferença de potencial entre cada par de placas? Por quê?

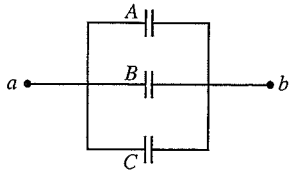


Figura 23.29 Questão Q23.15.

Q23.16 Uma esfera condutora é colocada entre duas placas planas paralelas, carregadas como as indicadas na Figura 23.2. O campo elétrico no interior da esfera depende da posição exata entre as placas onde a esfera foi colocada? O que você diz sobre o potencial elétrico no interior da esfera? Suas respostas para essas questões dependem da existência de uma carga líquida sobre a esfera? Explique seu raciocínio.

Q23.17 Um condutor carregado com uma carga líquida Q possui uma cavidade vazia em seu interior. O potencial varia de um ponto para outro ao longo da parte maciça do interior do condutor? E no interior da cavidade? Como se compara o potencial no interior da cavidade ao potencial nos pontos da parte maciça do interior do condutor?

Q23.18 Um cabo de transmissão de alta voltagem cai sobre um carro, de modo que a superfície inteira do carro passa a ser uma superfície equipotencial com 10000 V em relação ao solo. O que ocorre com um ocupante do carro quando (a) ele está sentado no interior do carro? (b) Quando ele desce do carro? Explique seu raciocínio.

Q23.19 Quando uma tempestade está chegando, os marinheiros observam um fenômeno chamado de 'fogo de San Telmo', uma luz azulada que cintila no topo do mastro. Por que isso ocorre no topo do mastro? Por que o efeito é mais pronunciado quando o mastro está úmido? (*Sugestão:* A água do mar é boa condutora de eletricidade.)

Q23.20 Uma carga puntiforme positiva é colocada nas vizinhanças de uma placa condutora grande. Um professor de física afirma que o campo elétrico produzido por essa configuração seria o mesmo se removêssemos o plano e colocássemos uma carga puntiforme negativa na posição da imagem especular da carga na sua posição inicial em relação ao plano. Isso é correto? Por quê? (*Sugestão:* Analise a Figura 23.24b.)

Q23.21 Na eletrônica, costumamos dizer que o potencial da Terra (imaginada como um condutor muito grande) é igual a zero. Isso é consistente com o fato de que a Terra possui uma carga líquida que não é igual a zero? (Veja o Exercício 21.32.)

Exercícios

Seção 23.1 Energia potencial elétrica

23.1 Uma carga puntiforme $q_1 = +2{,}40\ \mu C$ é mantida em repouso na origem. Uma segunda carga puntiforme $q_2 = -4{,}30\ \mu C$ se desloca do ponto $x = 0{,}150$ m, $y = 0$ até o ponto $x = 0{,}250$ m, $y = 0{,}250$ m. Qual é o trabalho realizado pela força elétrica sobre a carga q_2?

23.2 Uma carga puntiforme q_1 é mantida em repouso na origem. Uma segunda carga puntiforme q_2 é colocada em um ponto a e a energia potencial elétrica desse conjunto de duas cargas é igual a $+ 5{,}4 \times 10^{-8}$ J. Quando a segunda carga se desloca até um ponto b, o trabalho realizado pela força elétrica sobre a carga é igual a $- 1{,}9 \times 10^{-8}$ J. Qual é a energia potencial elétrica desse conjunto de cargas quando a segunda carga se encontra no ponto b?

23.3 **Energia do núcleo.** Qual é a energia necessária para montar um núcleo atômico contendo três prótons (tal como Be), se o modelarmos como um triângulo eqüilátero de lado $2{,}0 \times 10^{-15}$ m, com um próton em cada vértice? Suponha que os prótons partiram de uma distância muito grande.

23.4 (a) Qual é o trabalho necessário para empurrar dois prótons muito lentamente a partir de uma distância de $2{,}0 \times 10^{-10}$ m (uma distância atômica típica) até $3{,}0 \times 10^{-15}$ m (uma distância nuclear típica)? (b) Caso os prótons sejam ambos libertados do repouso na distância mais próxima obtida no item (a), qual é a velocidade com que eles se movem ao alcançar a distância original?

23.5 Uma pequena esfera metálica, com uma carga líquida $q_1 = -2{,}80\ \mu C$ é mantida em repouso por suportes isolantes. Uma segunda esfera metálica, com uma carga líquida $q_2 = -7{,}80\ \mu C$ e massa igual a 1,50 g é projetada contra q_1. Quando a distância entre as duas esferas é igual a 0,800 m, q_2 se aproxima de q_1 com velocidade de 22,0 m/s (Figura 23.30). Suponha que as duas esferas possam ser tratadas como cargas puntiformes. Despreze a gravidade. (a) Qual é a velocidade da carga q_2 quando a distância entre as duas esferas é de 0,400 m? (b) Qual será a menor distância entre q_2 e q_1?

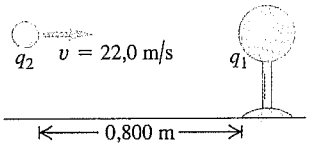


Figura 23.30 Exercício 23.5.

23.6 Qual deverá ser a distância entre uma carga puntiforme de $-7{,}20\ \mu C$ e uma carga puntiforme de $+2{,}30\ \mu C$ para que a energia potencial U das duas cargas seja igual a –0,400 J? (Considere U igual a zero quando a distância entre as cargas for infinita.)

23.7 Uma carga puntiforme $Q = +4{,}60\ \mu C$ é mantida em repouso na origem. Uma segunda carga puntiforme $q = +1{,}20\ \mu C$ com massa igual a $2{,}80 \times 10^{-4}$kg é colocada sobre o eixo Ox a uma distância de 0,250 m da origem. (a) Qual é a energia potencial U das duas cargas? (Considere U igual a zero quando a distância entre as cargas for infinita.) (b) A segunda carga puntiforme é liberada do repouso. Qual é a sua velocidade quando sua distância da origem é igual a (i) 0,500m? (ii) 5,0 m? (iii) 50,0 m?

23.8 Três cargas puntiformes, cada uma delas com carga igual a $+1{,}20\ \mu C$, são colocadas nos vértices de um triângulo eqüilátero, de lado 0,500 m. Qual é a energia potencial do sistema? (Considere U igual a zero quando a distância entre as cargas for infinita.)

23.9 Uma carga puntiforme $q_1 = 4{,}0$ nC é mantida em repouso na origem, e uma segunda carga puntiforme $q_2 = -3{,}0$ nC é colocada sobre o eixo Ox, no ponto $x = +20{,}0$ cm. Uma terceira carga puntiforme $q_3 = 2{,}0$ nC deve ser colocada sobre o eixo Ox entre q_1 e q_2. (Considere a energia potencial igual a zero quando a distância entre as cargas for infinita). (a) Qual será a energia potencial do sistema quando a carga q_3 for colocada no ponto $x = +10{,}0$ cm? (b) Em que ponto a carga q_3 deve ser colocada para que a energia potencial do sistema seja igual a zero?

23.10 Quatro elétrons estão localizados nos ângulos de um quadrado de lado 10,0 nm, com uma partícula alfa no seu ponto médio. Qual é o trabalho necessário para deslocar a partícula alfa para o ponto médio de um dos lados do quadrado?

23.11 Três cargas puntiformes, inicialmente muito afastadas entre si, estão sobre os vértices de um triângulo eqüilátero, de lado igual a d. Duas dessas cargas são idênticas e possuem carga q. Desejamos realizar um trabalho líquido igual a zero para colocar as três cargas nos vértices do triângulo; qual deve ser o valor da terceira carga?

23.12 Dois prótons são direcionados diretamente um contra o outro por um acelerador cíclotron, com velocidade escalar de 1000 km/s, medida em relação à Terra. Determine a força elétrica máxima que esses prótons exercerão mutuamente.

Seção 23.2 Potencial elétrico

23.13 Um campo elétrico uniforme está orientado do oeste para o leste. O ponto B está 2,0 m a oeste do ponto A, o ponto C está 2,00 m a leste do ponto A e o ponto D está 2,0 m ao sul de A. Para cada ponto, B, C e D, determine se o potencial do ponto é maior, menor ou igual ao do ponto A. Justifique suas respostas.

23.14 Cargas puntiformes idênticas, $q = +5{,}0\ \mu C$, são colocadas em ângulos opostos de um quadrado. O comprimento de cada lado do quadrado é igual a 0,200 m. Uma carga puntiforme $q_0 = -2{,}0\ \mu C$ é colocada em um dos ângulos vazios. Qual é o trabalho realizado sobre q_0 pela força elétrica, quando q_0 é deslocada para o outro ângulo vazio?

23.15 Uma pequena partícula possui carga $-5{,}0\ \mu C$ e massa $2{,}0 \times 10^{-4}$kg. Ela se move do ponto A, em que a potência elétrica é $VA = +200$ V, para o ponto B, em que a potência elétrica é $VB = +800$ V. A força elétrica é a única força que atua sobre a partícula. A partícula possui velocidade escalar de 5,0 m/s no ponto A. Qual é a velocidade no ponto B? Ela se move mais rapidamente no ponto B ou no ponto A? Explique.

23.16 Uma partícula com carga igual a +4,20 nC está em um campo elétrico uniforme $\vec{E}$, orientado da direita para a esquerda. Ela é liberada do repouso e se desloca para a esquerda; depois de se deslocar 6,0 cm, verifica-se que sua energia cinética é igual a $+ 1{,}50 \times 10^{-6}$ J. (a) Qual é o trabalho realizado pela força elétrica? (b) Qual é o potencial do ponto inicial em relação ao ponto final? (c) Qual é o módulo de $\vec{E}$?

23.17 Uma carga igual a +28,0 nC está em um campo elétrico uniforme, orientado verticalmente de baixo para cima e que possui módulo igual a $4{,}0 \times 10^{4}$ V/m. Qual é o trabalho realizado pela força elétrica quando a carga se desloca (a) 0,450 m para a direita? (b) 0,670 m de baixo para cima? (c) 2,60 m formando um ângulo de 45,0° abaixo da horizontal?

23.18 Duas cargas puntiformes em repouso, $q_1 = +3{,}0$ nC e $q_2 = +2{,}0$ nC, estão separadas por uma distância de 50,0 cm. Um elétron situado na metade da distância entre as duas cargas é liberado do repouso, e se desloca ao longo da linha reta

que une as duas cargas. Qual é a velocidade do elétron quando ele está a 10,0 cm da carga igual a +3,0 nC?

23.19 Uma partícula puntiforme possui carga $2,50 \times 10^{-11}$C. A que distância da carga o potencial elétrico é (a) 90,0 V e (b) 30,0 V? Considere zero o potencial a uma distância infinita da carga.

23.20 Duas cargas, com módulo igual Q, são mantidas separadas por uma distância d. Considere somente os pontos sobre a linha que passa por ambas as cargas. (a) Caso as duas cargas possuam o mesmo sinal, determine a localização de todos os pontos (se houver algum) em que (i) o potencial (em relação ao infinito) é igual a zero (o campo elétrico é igual a zero nesses pontos?) e (ii) o campo elétrico é igual a zero (o potencial é igual a zero nesses pontos?). (b) Repita o item (a) para as duas cargas com sinais contrários.

23.21 Duas cargas puntiformes, $q_1 = +2,40$ nC e $q_2 = -6,50$ nC, estão separadas por uma distância igual a 0,100 m. O ponto A está localizado na metade da distância entre as duas cargas; o ponto B está a uma distância 0,080 m da carga q_1 e a 0,060 m da carga q_2 (Figura 23.31). Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas. Calcule (a) o potencial no ponto A; (b) o potencial no ponto B; (c) o trabalho realizado para deslocar uma carga de 2,50 nC do ponto B até o ponto A.

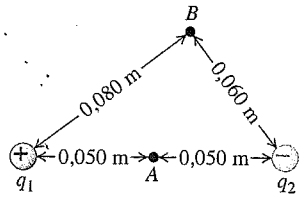


Figura 23.31 Exercício 23.21.

23.22 Duas cargas puntiformes positivas, cada uma com módulo q, são fixadas sobre o eixo Oy nos pontos $y = a$ e $y = -a$. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas. (a) Faça um diagrama para mostrar as posições das cargas. (b) Qual é o potencial V_0 na origem? (c) Mostre que o potencial em qualquer ponto sobre o eixo Ox é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(d) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Ox em função de x de $x = -4a$ até $x = +4a$. (e) Qual é o potencial quando $x >> a$? Explique como esse resultado é obtido.

23.23 Uma carga positiva $+q$ está localizada no ponto $x = 0$ e $y = -a$ e uma carga negativa $-q$ está localizada no ponto $x = 0$ e $y = +a$. (a) Faça um diagrama para mostrar as posições das cargas. (b) Deduza uma relação para o potencial V em qualquer ponto sobre o eixo Ox em função da coordenada x. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas. (c) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Ox em função de x de $x = -4a$ até $x = +4a$. (d) Qual seria a resposta do item (b) se as cargas trocassem de posição, ou seja, se $+q$ fosse localizada em $y = +a$ e $-q$ em $y = -a$?

23.24 Considere o arranjo de cargas descrito no Exercício 23.23. (a) Deduza uma relação para o potencial V em qualquer ponto sobre o eixo Oy em função da coordenada y. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas. (b) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Oy em função de y de $y = -4a$ até $y = +4a$. (c) Mostre que, quando $y >> a$, o potencial em qualquer ponto sobre a parte positiva do eixo Oy é dado por $V = -(1/4\pi\epsilon_0)\ 2qa/y^2$. (d) Qual seria a resposta dos itens (b) e (c) se as cargas trocassem de posição, ou seja, se $+q$ fosse localizada em $y = +a$ e $-q$ em $y = -a$?

23.25 Uma carga positiva q está fixa no ponto $x = 0$ e $y = 0$ e uma carga negativa $-2q$ está fixa no ponto $x = a$ e $y = 0$. (a) Faça um diagrama para mostrar as posições das cargas. (b) Deduza uma relação para o potencial V em qualquer ponto sobre o eixo Ox em função da coordenada x. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas. (c) Para qual ponto do eixo Ox o potencial $V = 0$? (d) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Ox em função de x de $x = -2a$ até $x = +2a$. (e) Qual seria a resposta do item (b) quando $x >> a$? Explique como esse resultado é obtido.

23.26 Considere o arranjo de cargas descrito no Exercício 23.25. (a) Deduza uma relação para o potencial V em qualquer ponto sobre o eixo Oy em função da coordenada y. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas. (b) Para qual ponto do eixo Oy o potencial $V = 0$? (c) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Oy em função de y de $y = -2a$ até $y = +2a$. (d) Qual seria a resposta do item (a) quando $y >> a$? Explique como esse resultado é obtido.

23.27 Antes do advento da eletrônica em estado sólido, válvulas eletrônicas mantidas sob vácuo eram amplamente usadas em rádios e outros aparelhos. Um *diodo* é um desses tipos de válvula, que consiste, basicamente, de dois eletrodos no interior de um tubo no qual se faz um vácuo elevado. Um eletrodo, o *catodo*, é mantido com uma temperatura elevada e emite elétrons de sua superfície. Uma diferença de potencial de algumas centenas de volts é mantida entre o catodo e o outro eletrodo, chamado de *anodo*, e o potencial mais elevado é o do anodo. Suponha que, em uma dada válvula, o potencial do anodo seja 295 V mais elevado do que o potencial do catodo. Um elétron sai do catodo com velocidade inicial igual a zero. Calcule sua velocidade quando ele colide com o catodo.

23.28 A certa distância de uma carga puntiforme, o potencial e o módulo do campo elétrico são dados, respectivamente, por 4,98 V e 12,0 V/m. (Considere zero o potencial a uma distância infinita da carga.) (a) Qual é o valor dessa distância? (b) Qual é o módulo da carga? (c) O campo elétrico está orientado para dentro ou para fora da carga?

23.29 Um campo elétrico uniforme, com módulo E, está orientado no sentido negativo do eixo Ox. A diferença de potencial entre um ponto a (em $x = 0,60$ m) e um ponto b (em $x = 0,90$ m) é igual a 240 V. (a) Qual dos dois pontos, a ou b, possui o potencial mais elevado? (b) Calcule o valor de E. (c) Uma carga puntiforme negativa $q = -0,200$ μC se desloca de b até a. Calcule o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre essa carga puntiforme.

23.30 Para cada um dos seguintes arranjos de duas cargas puntiformes, determine todos os pontos ao longo da linha que passa por ambas as cargas para os quais o potencial elétrico seja igual a zero (suponha $V = 0$ a uma distância infinita das cargas) e para os quais o campo elétrico E seja igual a zero: (a) cargas $+Q$ e $+2Q$, separadas por uma distância d, e (b) cargas $-Q$ e $+2Q$, separadas por uma distância d. (c) Ambos V e E são iguais a zero nos mesmos pontos? Explique.

23.31 (a) Um elétron deve ser acelerado de $3,0 \times 10^6$ m/s para $8,0 \times 10^6$ m/s. Por qual diferença de potencial o elétron deve passar para realizar isso? (b) Por qual diferença de potencial o elétron deve passar, caso ele seja desacelerado de $8,0 \times 10^6$ m/s até parar?

Seção 23.3 Determinação do potencial elétrico

23.32 Uma carga elétrica total igual a 3,50 nC está distribuída uniformemente sobre a superfície de uma esfera metálica, com raio igual a 23,0 cm. Considerando zero o potencial a uma distância infinita da

esfera, calcule o valor do potencial para as seguintes distâncias até o centro da esfera: (a) 48,0 cm; (b) 24,0 cm; (c) 12,0 cm.

23.33 Um anel fino uniformemente carregado possui raio de 15,0 cm e carga total igual a +24,0 nC. Um elétron é colocado no eixo do anel a uma distância de 30,0 cm de seu centro, sendo obrigado a permanecer vinculado a esse eixo. A seguir, o elétron é liberado a partir do repouso. (a) Descreva o movimento subseqüente do elétron. (b) Calcule a velocidade escalar do elétron quando ele atinge o centro do anel.

23.34 Um fio retilíneo infinito possui uma densidade linear de carga igual a $5,0 \times 10^{-12}$ C/m. Um próton (massa $1,67 \times 10^{-27}$ kg, carga + $1,60 \times 10^{-19}$ C) está a uma distância de 18,0 cm do fio e se desloca radialmente no sentido do fio, com velocidade igual a $1,50 \times 10^{3}$ m/s. (a) Calcule a energia cinética inicial do próton. Até que distância mínima do fio o próton pode se aproximar? (*Sugestão:* Veja o Exemplo 23.10.)

23.35 Um cabo muito longo carrega uma densidade de carga linear λ. Usando um voltímetro para medir a diferença de potencial, você observa que, quando uma sonda do aparelho é colocada a 2,50 cm do cabo e a outra sonda está a uma distância de 1,0 cm do cabo, a leitura do aparelho indica 575 V. (a) Qual é o valor de λ? (b) Se você colocar uma sonda a 3,50 cm do cabo e a outra sonda a 1,0 cm de distância, a leitura do voltímetro será 575 V? Caso isso não aconteça, a leitura será maior ou menor que 575 V? Por quê? (c) Se você colocar ambas as sondas a 3,50 cm do cabo, mas a 17,0 cm de distância uma da outra, qual será a leitura do voltímetro?

23.36 Um cilindro de carga isolante muito longo possui raio de 2,50 cm e carrega uma densidade linear uniforme de 15,0 nC/m. Se você colocar uma sonda do voltímetro na superfície, a que distância da superfície a outra sonda deve ser colocada para que a leitura do voltímetro seja 175 V?

23.37 Uma casca cilíndrica isolante muito longa possui raio de 6,0 cm e carrega densidade linear de carga de 8,50 μC/m uniformemente espalhada pela sua superfície externa. Qual seria a leitura de um voltímetro, se ele estivesse conectado (a) entre a superfície do cilindro e um ponto 4,0 cm acima da superfície e (b) entre a superfície e um ponto a 1,0 cm do eixo central do cilindro?

23.38 Um anel com diâmetro de 8,0 cm está fixo em um ponto e carrega uma carga de +5,0 μC, uniformemente espalhada sobre sua circunferência. (a) Qual é o trabalho necessário para deslocar uma minúscula bola com carga +3,0 μC e massa de 1,50 g a partir de um ponto muito distante do centro do anel? (b) É necessário fazer uma trajetória ao longo do eixo do anel? Por quê? (c) Se a bola for ligeiramente deslocada do centro do anel, o que ela fará e qual velocidade máxima ela atingirá?

23.39 Duas placas metálicas paralelas grandes possuem densidade de cargas com mesmo módulo, mas sinais contrários (Figura 23.32). Suponha que elas estejam próximas o suficiente para serem tratadas como placas infinitas ideais. Considerando zero o potencial na superfície esquerda da placa negativa, faça um gráfico do potencial em função de x. Inclua *todas* as regiões da esquerda das placas até a direita das placas.

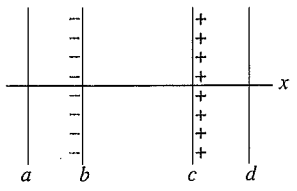


Figura 23.32 Exercício 23.39.

23.40 Duas placas condutoras paralelas grandes possuem cargas opostas e de mesmo módulo, e a distância entre elas é igual a 2,20 cm. (a) Sabendo que a densidade superficial de carga sobre cada placa possui módulo igual a 47,0 nC/m^2, qual é o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ na região entre as placas? (b) Qual é a diferença de potencial entre as placas? (c) O que ocorreria com o módulo do campo elétrico e com a diferença de potencial se a distância entre as placas dobrasse, mas a densidade superficial de carga permanecesse constante, com o mesmo valor indicado no item (a)?

23.41 Duas placas metálicas paralelas grandes possuem cargas opostas e de mesmo módulo. A distância entre as placas é igual a 45,0 mm e a diferença de potencial entre elas é de 360 V. (a) Qual é o módulo do campo elétrico (suposto constante) existente na região entre as placas? (b) Qual é o módulo da força que esse campo exerce sobre uma partícula com carga igual a +2,40 nC? (c) Use o resultado da parte (b) para calcular o trabalho realizado pelo campo sobre a partícula quando ela se desloca da placa com potencial mais elevado para a placa com potencial mais baixo. (d) Compare o resultado da parte (c) com a variação da energia potencial da mesma carga, calculando-a a partir do potencial.

23.42 (a) Qual é o excesso de carga a ser colocado em uma esfera de cobre com 25,0 cm de diâmetro, para que o potencial do seu centro, em relação ao infinito, seja 1,50 kV? (b) Qual é o potencial da superfície da esfera em relação ao infinito?

23.43 (a) Mostre que V para uma casca esférica de raio R, com carga q uniformemente distribuída pela sua superfície, é o mesmo que V para um condutor maciço com raio R e carga q. (b) Você atrita um balão inflado sobre o carpete, fazendo-o adquirir um potencial que é 1560 V inferior ao seu potencial antes de se tornar carregado. Caso a carga seja uniformemente distribuída pela superfície do balão e caso o raio do balão seja igual a 15 cm, qual é a carga líquida sobre o balão? (c) Sabendo dessa diferença de potencial de 1200 V do balão em relação a você, você acha que o balão representa perigo? Explique.

23.44 O campo elétrico na superfície de uma esfera carregada e maciça de cobre, com raio igual a 0,200 m, é 3800 N/C, orientado para o centro da esfera. Qual é o potencial no centro da esfera, caso se considere zero o potencial infinitamente distante da esfera?

Seção 23.4 Superfícies equipotenciais

Seção 23.5 Gradiente de potencial

23.45 Uma diferença de potencial igual a 480 V é estabelecida entre duas placas metálicas grandes paralelas. Seja 480 V o potencial de uma das placas e 0 V o potencial da outra. A distância entre as placas é d = 1,70 cm. (a) Faça um desenho indicando as superfícies equipotenciais que correspondem a 0, 120, 240, 360 e 480 V. (b) Sobre seu desenho, mostre as linhas de campo elétrico. Seu desenho confirma que as linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais são mutuamente perpendiculares?

23.46 Uma placa plástica muito grande carrega uma densidade de carga uniforme de –6,0 nC/m^2 em uma face. (a) À medida que você se distancia da placa ao longo de uma linha perpendicular a ela, o potencial aumenta ou diminui? Como você pode saber isso, sem fazer nenhum cálculo? A sua resposta depende da sua escolha do ponto de referência para o potencial? (b) Ache o espaço entre as superfícies equipotenciais que diferem entre si em 1,0 V. Que tipos de superfície são essas?

23.47 Em certa região do espaço, o potencial elétrico é dado pela relação $V(x,y,z) = Axy - Bx^2 + Cy$, em que A, B e C são constantes positivas. (a) Calcule os componentes x, y e z do campo elétrico. (b) Em que pontos o campo elétrico é igual a zero?

23.48 O potencial produzido por uma carga puntiforme Q localizada na origem é dado por

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(a) Calcule os componentes E_x, E_y e E_z usando a Equação (23.19). (b) Mostre que o resultado do item (a) está de acordo com a Equação (21.7) para o campo elétrico de uma carga puntiforme.

23.49 Uma esfera metálica com raio r_a está apoiada sobre uma base isolada no centro de uma casca esférica metálica com raio externo r_b. Existe uma carga $+q$ na esfera interna e uma carga $-q$ na esfera externa. (a) Determine o potencial $V(r)$ para as regiões (i) $r < r_a$; (ii) $r_a < r < r_b$; (iii) $r > r_b$. (*Sugestão:* O potencial total é dado pela soma dos potenciais de cada esfera.) Considere V igual a zero para r infinito. (b) Mostre que o potencial da esfera interna em relação à esfera externa é dado por

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

(c) Use a Equação (23.23) e o resultado do item (a) para mostrar que o campo elétrico em qualquer ponto entre as esferas possui módulo dado por

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{(1/r_a - 1/r_b)}\frac{1}{r^2}$$

(d) Aplique a Equação (23.23) e o resultado do item (a) para calcular o campo elétrico em um ponto fora da esfera maior a uma distância r do centro, sendo $r > r_b$. (e) Suponha que a carga na esfera externa não seja $-q$, mas uma carga negativa de módulo diferente, digamos $-Q$. Mostre que as respostas dos itens (b) e (c) não se alteram, porém a resposta do item (d) torna-se diferente.

23.50 Uma esfera metálica com raio $r_a = 1{,}20$ cm está apoiada sobre uma base isolada no centro de uma casca esférica metálica com raio externo $r_b = 9{,}60$ cm. Uma carga $+q$ é colocada na esfera interna e uma carga $-q$ na esfera externa. O módulo de q é escolhido para produzir uma diferença de potencial entre as esferas igual a 500 V, mantendo a esfera interna com um potencial mais elevado. (a) Use o resultado do Exercício 23.49b para calcular o valor de q. (b) Com base no resultado do Exercício 23.49a, faça um desenho indicando as superfícies equipotenciais que correspondem a 500, 400, 300, 200, 100 e 0 V. (c) Sobre seu desenho, mostre as linhas de campo elétrico. As linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais são mutuamente perpendiculares? As superfícies equipotenciais ficam mais próximas entre si quando o módulo de $\vec{E}$ é mais elevado?

23.51 Um cilindro muito longo, com raio de 2,0 cm, carrega uma densidade de carga uniforme de 1,50 nC/m. (a) Descreva o formato das superfícies equipotenciais para esse cilindro. (b) Tomando como nível de referência para o potencial zero a superfície do cilindro, determine o raio das superfícies equipotenciais com potenciais de 10,0 V, 20,0 V e 30,0 V. (c) As superfícies equipotenciais estão igualmente espaçadas? Em caso negativo, elas se aproximam ou se afastam à medida que r aumenta?

Problemas

23.52 A Figura 23.33 mostra o potencial de uma distribuição de cargas em função de x. Faça um gráfico do campo elétrico E, sobre a região indicada.

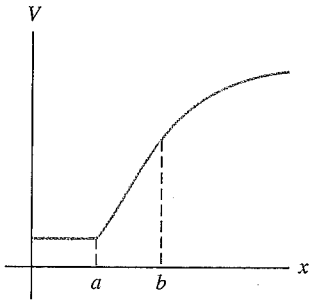


Figura 23.33 Problema 23.52.

23.53 Uma partícula com carga +7,60 nC está em um campo elétrico uniforme, orientado da direita para a esquerda. Outra força além da elétrica atua sobre a partícula, de modo que ela se desloca para a direita quando é liberada do repouso. Depois que ela se deslocou 8,0 cm, a força adicional realizou um trabalho igual a $6{,}50 \times 10^{-5}$ J e a partícula possui uma energia cinética igual a $4{,}35 \times 10^{-5}$ J. (a) Qual foi o trabalho realizado pela força elétrica? (b) Qual é o potencial do ponto inicial em relação ao ponto final? (c) Qual é o módulo do campo elétrico?

23.54 No *modelo de Bohr* do átomo de hidrogênio, um único elétron gira em torno de um único próton, descrevendo uma órbita circular de raio r. Suponha que o próton permaneça em repouso. (a) Igualando a força elétrica com a massa do elétron vezes sua aceleração, deduza uma relação para a velocidade do elétron. (b) Deduza uma relação para a energia cinética do elétron e mostre que seu valor é igual à metade da energia potencial elétrica. (c) Deduza uma relação para a energia total e calcule seu valor usando $r = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m. Forneça sua resposta numérica em elétron-volts e em joules.

23.55 O diodo foi descrito no Exercício 23.27. Em virtude do acúmulo de cargas existentes nas vizinhanças do catodo, o potencial elétrico entre os eletrodos não é uma função linear da posição, mesmo no caso de uma simetria plana, porém é dado por

$$V(x) = Cx^{4/3}$$

em que x é a distância entre o ponto e o catodo (o eletrodo negativo) e C é uma constante característica do diodo. Suponha que a distância entre o catodo e o anodo (o eletrodo positivo) seja igual a 13,0 mm e que a diferença de potencial entre os eletrodos seja de 240 V. (a) Determine o valor de C. (b) Obtenha uma fórmula para o campo elétrico entre os eletrodos em função de x. (c) Calcule a força sobre um elétron quando ele está na metade da distância entre os eletrodos.

23.56 Duas esferas isolantes, idênticas e com cargas contrárias, cada qual medindo 50,0 cm de diâmetro e carregando uma carga uniforme de módulo 175 μC, são colocadas a uma distância de 1,0 m de um centro a outro (Figura 23.34). (a) Se um voltímetro é conectado entre os pontos mais próximos (a e b) sobre suas superfícies, qual será a sua leitura? (b) Qual ponto, a ou b, possui o potencial mais elevado? Como saber isso sem fazer qualquer cálculo?

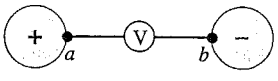


Figura 23.34 Problema 23.56.

23.57 **Um cristal iônico.** A Figura 23.35 mostra oito cargas puntiformes distribuídas nos vértices de um cubo cuja aresta é igual a d. Os valores das cargas são $+q$ e $-q$, como indicado. Trata-se do modelo da célula unitária de um cristal iônico cúbico. Por exemplo, no cloreto de sódio (NaCl) as cargas positivas são os íons Na^+; as negativas são os íons Cl^-. (a) Calcule a energia potencial U desse arranjo. (Considere zero o potencial quando a distância mútua entre as oito cargas for infinita.) (b) No resultado da parte (a), provavelmente você encontrou $U < 0$. Explique a relação entre esse resultado e a observação da existência desses cristais na natureza.

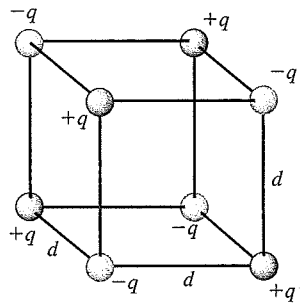


Figura 23.35 Problema 23.57.

23.58 (a) Calcule a energia potencial de um sistema composto por duas pequenas esferas, uma com carga de 2,00 μC e a outra com carga de −3,50 μC, com seus centros separados por uma distância de 0,250 m. Considere zero a energia potencial quando as cargas estão separadas por uma distância infinita. (b) Suponha que uma das esferas seja mantida fixa e a outra esfera, que possui massa igual a 1,50 g, seja lançada para longe da primeira. Qual é a velocidade escalar inicial que a esfera em movimento necessita para escapar por completo da atração da esfera fixa? (Para escapar, a esfera móvel teria de atingir uma velocidade igual a zero quando estivesse infinitamente distante da esfera fixa.)

23.59 **O íon H_2^+.** O íon H_2^+ é constituído por dois prótons, cada um deles com carga $1{,}60 \times 10^{-19}$ C e um elétron com massa $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg e carga $-e$. A distância entre os prótons é igual a $1{,}07 \times 10^{-10}$ m. Os prótons e os elétrons podem ser considerados cargas puntiformes. (a) Suponha que o elétron esteja situado exatamente no meio da distância entre os dois prótons. Qual é a energia potencial da interação entre o elétron e os dois prótons? (Não inclua a energia potencial da interação entre os dois prótons.) (b) Suponha que, no item (a), o elétron possua velocidade com módulo igual a $1{,}50 \times 10^6$ m/s em uma direção ao longo da perpendicular que passa pelo centro do segmento de reta que une os dois prótons. Até que distância máxima desse centro o elétron poderá se deslocar? Como a massa de um próton é muito maior do que a massa do elétron, o movimento dos prótons pode ser desprezado. (*Nota:* Somente a mecânica quântica, e não a mecânica newtoniana, pode ser usada para uma descrição realística do movimento do elétron.)

23.60 Uma pequena esfera, com massa igual a 1,50 g, está pendurada por um fio isolante entre duas placas paralelas verticais, separadas por uma distância igual a 5,0 cm (Figura 23.36). As placas são isolantes e possuem densidades de carga superficial uniformes $+\sigma$ e $-\sigma$. A carga da esfera é $q = 8{,}90 \times 10^{-6}$ C. Calcule a diferença de potencial entre as placas para que o fio fique inclinado a um ângulo de 30,0° em relação à vertical.

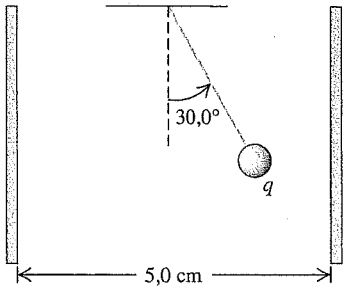


Figura 23.37 Problema 23.60.

23.61 **Cilindros co-axiais.** Um longo cilindro metálico, de raio a, está apoiado sobre um suporte isolante ao longo do eixo de um longo tubo cilíndrico metálico, de raio b. A carga positiva por unidade de comprimento no cilindro interno é λ e existe uma igual quantidade de carga negativa por unidade de comprimento no cilindro externo. (a) Determine o potencial $V(r)$ para as regiões (i) $r < a$; (ii) $a < r < b$; (iii) $r > b$. (*Sugestão:* O potencial total é dado pela soma dos potenciais de cada condutor.) Considere $V = 0$ para $r = b$. (b) Mostre que o potencial do cilindro interno em relação ao cilindro externo é dado por

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

(c) Use a Equação (23.23) e o resultado do item (a) para mostrar que o módulo do campo elétrico em qualquer ponto entre os dois cilindros é dado por

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}$$

(d) Qual seria a diferença de potencial entre os dois cilindros se o cilindro externo não tivesse nenhuma carga líquida?

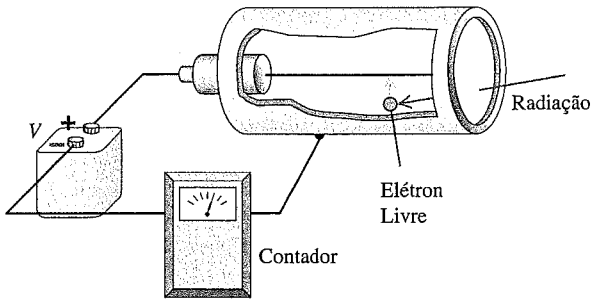


Figura 23.37 Problema 23.62.

23.62 Um *contador Geiger* detecta radiações tais como partículas alfa, usando o fato de que uma radiação ioniza o ar ao longo de sua trajetória. Ao longo do eixo de um cilindro metálico oco existe um fio fino, que está isolado do cilindro (Figura 23.37). Uma grande diferença de potencial é aplicada entre o fio e o cilindro externo, mantendo-se o fio em um potencial mais elevado; isso produz um forte campo elétrico orientado radialmente para fora do fio. Quando uma radiação ionizante entra no dispositivo, ocorre ionização de algumas moléculas de ar. Os elétrons livres produzidos são acelerados no sentido do fio pelo campo elétrico e, quando eles se aproximam do fio, ionizam muitas outras moléculas de ar. Logo, um pulso de corrente elétrica é gerado e pode ser detectado por um

circuito eletrônico apropriado e convertido em um 'clique' audível. Suponha que o raio do fio central seja igual a 145 μm e o raio do cilindro oco seja de 1,80 cm. Qual deve ser a diferença de potencial entre o fio e o cilindro para que se produza um campo elétrico igual a $2,0 \times 10^4$ V/m a uma distância de 1,20 cm do fio? (O fio e o cilindro são ambos muito compridos em comparação a seus respectivos raios, de modo que os resultados do Problema 23.61 podem ser usados.)

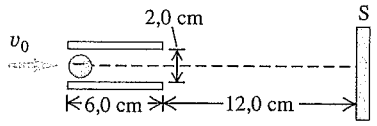


Figura 23.38 Problema 23.63.

23.63 **Deflexão em um CRT.** Os tubos de raios catódicos (CRT, do inglês *cathode-ray tubes*) são, geralmente encontrados em osciloscópios e monitores de computador. Na Figura 23.38, um elétron com velocidade escalar inicial de $6,50 \times 10^6$ m/s é projetado ao longo do eixo até o meio da trajetória entre as placas de deflexão de um tubo de raios catódicos. O campo elétrico uniforme entre as placas possui módulo de $1,10 \times 10^3$ V/m e está orientado de baixo para cima. (a) Qual é a força (módulo, direção e sentido) que atua sobre o elétron quando ele está entre as placas? (b) Qual é a aceleração do elétron (módulo, direção e sentido) quando ele sofre a ação da força obtida no item (a)? (c) Qual é a distância abaixo do eixo percorrida pelo elétron, quando ele atinge o final das placas? (d) Qual é o ângulo dele em relação ao eixo quando se move para deixar as placas? (e) A que distância abaixo do eixo ele atingirá a tela fluorescente?

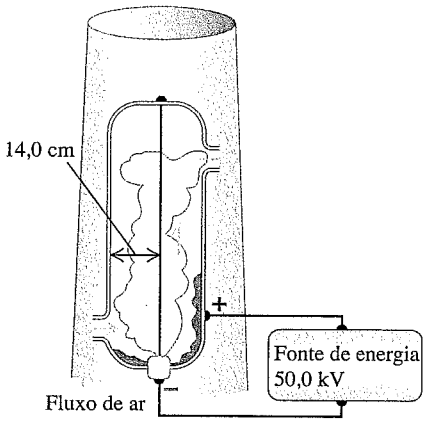


Figura 23.39 Problema 23.65.

23.64 **Placas defletoras de um osciloscópio.** As placas defletoras verticais de um osciloscópio comum, usado em salas de aula, consistem de um par de placas metálicas quadradas paralelas que carregam cargas iguais, porém contrárias. As dimensões típicas são de, aproximadamente, 3,0 cm de lado, com uma separação de cerca de 5,0 mm. As placas estão próximas o suficiente para que possamos desprezar interferências nas extremidades. Sob essas condições: (a) qual é a carga sobre cada placa e (b) qual é a força do campo elétrico entre as placas? (c) Se um elétron em repouso for lançado das placas negativas, qual será sua velocidade ao atingir a placa positiva?

23.65 Um *precipitador eletrostático* usa forças elétricas para remover partículas poluentes originárias de fumaças, em particular fumaças expelidas por usinas que queimam carvão. Um tipo de precipitador é constituído por um cilindro metálico oco vertical com um fio fino ao longo de seu eixo, que está isolado do cilindro (Figura 23.39). Uma grande diferença de potencial é aplicada entre o fio e o cilindro externo, mantendo-se o fio em um potencial mais baixo. Isso produz um forte campo elétrico orientado radialmente para o interior do cilindro. O campo elétrico produz uma região com ar ionizado nas vizinhanças do fio. A fumaça entra pela base do precipitador, as cinzas e a poeira absorvem elétrons e os poluentes carregados são acelerados para a parede externa do cilindro pelo campo elétrico. Suponha que o raio do fio central seja igual a 90,0 μm, o raio do cilindro oco seja igual a 14,0 cm e que uma diferença de potencial de 50,0 kV seja estabelecida entre o fio e o cilindro. Suponha também que o cilindro e o fio possuam comprimentos muito maiores do que o raio do cilindro, de modo que os resultados do Problema 23.61 possam ser usados. (a) Qual é o módulo do campo elétrico nos pontos situados na metade da distância entre o fio e a parede do cilindro? (b) Qual deve ser o módulo da carga sobre uma partícula de cinza com 30,0 μg para que o campo elétrico obtido no item (a) possa exercer sobre a partícula uma força dez vezes maior do que seu peso?

23.66 Um disco de raio R possui densidade superficial de carga uniforme igual a σ. (a) Imaginando o disco como um conjunto de anéis finos concêntricos, calcule o potencial elétrico sobre os pontos do eixo do anel a uma distância x do centro do disco. Considere o potencial igual a zero no infinito. (*Sugestão:* Use o resultado do Exemplo 23.11 na Seção 23.3.) (b) Calcule $-\partial V/\partial x$. Mostre que o resultado obtido concorda com o valor de E_x, encontrado no Exemplo 21.12 (Seção 21.5).

23.67 (a) Pela expressão de E obtida no Problema 22.40, encontre a expressão do potencial elétrico V em função de r, para todos os pontos no interior e no exterior do cilindro. Seja $V = 0$ na superfície do cilindro. Em cada caso, expresse os resultados em função da carga por unidade de comprimento λ da distribuição de cargas. (b) Faça um gráfico de V e de E em função da distância r de $r = 0$ até $r = 3R$.

23.68 Partículas alfa (massa = $6,7 \times 10^{-27}$kg, carga = $+2e$) são lançadas diretamente contra um alvo que consiste de uma folha de ouro. Podemos modelar o núcleo do ouro como uma esfera uniforme de carga e supor que o ouro não se move. (a) Se o raio do núcleo do ouro for $5,6 \times 10^{-15}$, qual é a velocidade escalar mínima necessária às partículas alfa quando elas estão distantes para atingir a superfície do núcleo do ouro? (Despreze os efeitos relativistas.) (b) Forneça boas razões físicas para ignorar os efeitos dos elétrons orbitais quando a partícula alfa estiver (i) fora das órbitas dos elétrons e (ii) dentro das órbitas dos elétrons.

23.69 Para o anel carregado do Exemplo 23.11 (Seção 23.3), integre a expressão de E_x, encontrada no Exemplo 21.10 (Seção 21.5), para determinar o potencial em um ponto P sobre o eixo do anel. Considere $V = 0$ a uma distância infinita. Compare seu resultado com o obtido no Exemplo 23.11 usando a Equação (23.16).

23.70 Uma haste isolante fina é encurvada, formando um arco semicircular de raio a, e uma carga elétrica total Q é distribuída uniformemente ao longo da haste. Considerando o potencial igual a zero a uma distância infinita, calcule o potencial no centro de curvatura do arco.

23.71 **Energia própria de uma esfera de carga.** Uma esfera maciça, de raio R, contém uma carga total Q distribuída uniformemente por todo o seu volume. Ache a energia necessária para juntar essa carga, trazendo cargas infinitesimais de pontos distantes. Essa energia é chamada de 'energia própria' da distribuição de carga.

(*Sugestão:* Após juntar uma carga q em uma esfera de raio r, quanta energia será necessária para acrescentar uma casca esférica de espessura dr possuindo carga dq? Depois, integre para obter a energia total.)

23.72 (a) Usando a expressão de E obtida no Exemplo 22.9 (Seção 22.4), encontre a expressão para o potencial V em função de r para a esfera interna e para a esfera externa uniformemente carregada. Considere $V = 0$ a uma distância infinita. (b) Faça um gráfico de V e de E em função da distância r de $r = 0$ até $r = 3R$.

23.73 Uma esfera isolante maciça, de raio R, possui carga Q uniformemente distribuída por todo o seu volume. (a) Use os resultados do Problema 23.72 para achar o módulo da diferença de potencial entre a superfície da esfera e o seu centro. (b) Qual é o potencial mais elevado, a superfície ou o centro, se (i) Q for positivo e (ii) Q for negativo?

23.74 Uma casca esférica isolante, com raio interno de 25,0 cm e raio externo de 60,0 cm, possui uma carga de +150,0 μC uniformemente destruída pela sua superfície externa (veja Exercício 23.43). O ponto a está no centro da casca, o ponto b está na superfície interna e o ponto c está na superfície externa. (a) Qual será a leitura de um voltímetro conectado entre os seguintes pontos: (i) a e b; (ii) b e c; (iii) c e infinito; (iv) a e c? (b) Qual está no potencial mais elevado? (i) a ou b; (ii) b ou c; (iii) a ou c? Qual das respostas, se existir alguma, teria o sinal invertido, caso as cargas fossem –150 μC?

23.75 O Exercício 23.43 mostra que, no lado externo de uma casca esférica com carga superficial uniforme, o potencial é o mesmo que se toda a carga estivesse concentrada em uma carga puntiforme no centro da esfera. (a) Use esse resultado para mostrar que, para duas cascas esféricas isolantes uniformemente carregadas, a força que elas exercem mutuamente e a sua energia elétrica mútua são as mesmas que se toda a carga estivesse concentrada nos seus centros. (*Sugestão:* Veja a Seção 12.6.) (b) Esse mesmo resultado se aplica a esferas isolantes maciças, com carga uniformemente distribuída pelo seu volume? (c) Esse mesmo resultado se aplica à força entre as duas cascas condutoras carregadas? Entre os dois condutores maciços carregados? Explique.

23.76 Duas esferas plásticas, cada qual com carga uniformemente distribuída em seu interior, são inicialmente colocadas em contato e depois libertadas. Uma esfera tem 60,0 cm de diâmetro, possui massa de 50,0 g e contém –10,0 μC de carga. A outra esfera tem 40,0 cm de diâmetro, possui massa de 150,0 g e contém –30,0 μC de carga. Ache a aceleração máxima e a velocidade escalar máxima atingidas por cada esfera (em relação ao ponto fixo da sua localização inicial no espaço), considerando que nenhuma outra força atue sobre elas. (*Sugestão:* As cargas uniformemente distribuídas se comportam como se estivessem concentradas nos centros das duas esferas.)

23.77 Usando a expressão do campo elétrico obtida no Problema 22.43, calcule a diferença de potencial entre a esfera condutora maciça e a fina casca isolante.

23.78 Considere uma esfera condutora maciça no interior de uma esfera condutora oca, com as cargas e os raios especificados no Problema 22.42. Considere $V = 0$ para $r \to \infty$. Use o campo elétrico obtido no Problema 22.42 para calcular o potencial para os seguintes valores de r: (a) $r = c$ (sobre a superfície externa da esfera oca); (b) $r = b$ (sobre a superfície interna da esfera oca); (c) $r = a$ (sobre a superfície da esfera maciça); (d) $r = 0$ (no centro da esfera maciça).

23.79 Uma carga elétrica total Q é uniformemente distribuída ao longo de uma barra fina, de comprimento a. Considere o potencial igual a zero no infinito. Calcule o potencial nos seguintes pontos (veja a Figura 23.40): (a) no ponto P, a uma distância x à direita da barra; (b) no ponto R, a uma distância y acima da extremidade direita da barra. (c) Como se reduzem os resultados da parte (a) e da parte (b) quando x ou y se tornam muito maiores do que a?

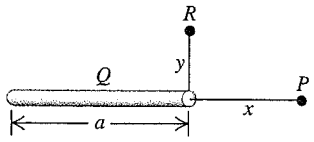


Figura 23.40 Problema 23.79.

23.80 (a) Supondo que uma gota de chuva, de raio igual a 0,650 mm, possua uma carga igual a –1,20 pC uniformemente distribuída em seu volume, qual é o potencial elétrico sobre sua superfície? (Considere o potencial igual a zero a uma distância infinita da gota.) (b) Duas gotas de chuva idênticas, cada uma delas com as cargas e os raios especificados no item (a), colidem e se unem, constituindo uma única gota maior. Qual é o raio dessa gota maior e qual é o potencial sobre sua superfície, supondo que a carga seja uniformemente distribuída em seu volume?

23.81 Duas esferas metálicas, com tamanhos diferentes, são carregadas de tal modo que o potencial elétrico apresenta o mesmo valor sobre as superfícies das duas esferas. A esfera A possui um raio três vezes maior do que o raio da esfera B. Sejam Q_A e Q_B as cargas sobre as esferas e E_A e E_B os módulos do campo elétrico sobre a superfície de cada esfera, determine (a) a razão Q_A/Q_B; (b) a razão E_A/E_B.

23.82 Uma partícula alfa, com energia cinética igual a 11,0 MeV, colide frontalmente com um núcleo de chumbo em repouso. Qual é a menor distância entre as duas partículas? (Suponha que o núcleo de chumbo seja uma partícula puntiforme e que ele permaneça em repouso. O número atômico do chumbo é 82. A partícula alfa é um núcleo de hélio e possui número atômico igual a 2.)

23.83 Uma esfera metálica de raio R_1 possui carga Q_1. Considere o potencial igual a zero a uma distância infinita da esfera. (a) Quais são os valores do potencial elétrico e do campo elétrico na superfície da esfera? A esfera é, a seguir, conectada por um fio metálico fino e longo, a outra esfera, de raio R_2, que está a muitos metros de distância da primeira esfera. Antes de ela ser conectada, a segunda esfera estava descarregada. Depois que o equilíbrio eletrostático for atingido, qual será (b) a carga total de cada esfera? (c) O potencial elétrico sobre a superfície de cada esfera? (d) O campo elétrico sobre a superfície de cada esfera? Suponha que a carga do fio seja muito menor do que a carga de cada esfera.

23.84 Use a distribuição de cargas e o campo elétrico do Problema 22.57. (a) Mostre que para $r \geq R$ o potencial é idêntico ao produzido por uma carga puntiforme Q. (Considere o potencial igual a zero no infinito.) (b) Obtenha uma expressão para o potencial elétrico válido na região $r \leq R$.

23.85 **Fusão nuclear no Sol.** A fonte da energia do Sol é uma seqüência de reações nucleares que ocorrem em seu núcleo. A primeira dessas reações envolve uma colisão entre dois prótons que se fundem, formando um núcleo mais pesado que libera energia. Para que esse processo, chamado de *fusão nuclear*, possa ocorrer, os prótons devem se aproximar até que suas superfícies fiquem, essencialmente, em contato. (a) Suponha que os dois prótons se desloquem com a mesma velocidade, e que a colisão seja frontal. Sabendo que o raio do próton é igual a $1{,}2 \times 10^{-15}$ m, qual deve ser a velocidade mínima para que a fusão nuclear ocorra? A distribui-

ção de cargas no interior de um próton é esfericamente simétrica, de modo que o potencial e o campo elétrico no exterior do próton são idênticos aos produzidos por uma carga puntiforme. A massa do próton é $1,67 \times 10^{-27}$kg. (b) Outra reação nuclear de fusão que ocorre no núcleo do Sol envolve a colisão entre dois núcleos de hélio, cada um deles com carga $+2e$, raio $1,7 \times 10^{-15}$m e massa 2,99 vezes maior do que a massa do próton. Supondo a mesma geometria da colisão indicada na parte (a), qual deve ser a velocidade mínima para que a fusão nuclear ocorra, sabendo que os núcleos devem se aproximar até que a distância entre seus centros seja aproximadamente igual a $3,5 \times 10^{-15}$m? Da mesma maneira que o próton, a carga do núcleo de hélio é uniformemente distribuída ao longo do seu volume. (c) Na Seção 18.3, mostramos que a energia cinética translacional média de uma partícula de massa m em um gás com temperatura absoluta T é $\frac{3}{2}kT$, em que k é a constante de Boltzmann (dada no Apêndice F). Para os dois prótons com energia cinética média capaz de produzir o processo descrito no item (a), qual é a temperatura absoluta necessária? Qual é a temperatura absoluta necessária para que dois núcleos de hélio produzam o processo descrito na parte (b)? (Para essas temperaturas, os átomos ficam completamente ionizados, de modo que os elétrons e os prótons se movem separadamente.) (d) A temperatura no núcleo do Sol é da ordem de $1,5 \times 10^7$ K. Como se compara esse resultado com o obtido no item (c)? Como as reações descritas em (a) e (b) poderiam deixar de ocorrer no núcleo do Sol? (*Sugestão:* Veja a discussão sobre a distribuição das velocidades moleculares na Seção 18.5.)

23.86 O potencial elétrico em uma região do espaço é dado por

$$V(x,y,z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$$

em que A é uma constante. (a) Deduza uma expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ na região. (b) O trabalho realizado pelo campo quando uma carga de teste igual a 1,50 μC é deslocada do ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0{,}250$ m) até a origem é igual a $6,0 \times 10^{-5}$ J. Calcule A. (c) Determine o campo elétrico no ponto (0, 0, 0,250 m). (d) Mostre que em qualquer plano paralelo ao plano xz os contornos equipotenciais são círculos. (e) Qual é o raio do contorno equipotencial correspondente a $V = 1280$ V e $y = 2{,}0$ m?

23.87 **Fissão nuclear.** O núcleo instável de urânio 236 pode ser considerado uma esfera uniformemente carregada com carga $Q = +92e$ e raio $= 7,4 \times 10^{-15}$ m. Em uma fissão nuclear, ele pode se subdividir em dois núcleos menores, cada um deles com a metade da carga e a metade do volume do núcleo de urânio 236 original. Essa foi uma das reações que ocorreram durante a explosão da bomba atômica em Hiroshima, no Japão, em agosto de 1945. (a) Determine os raios dos dois núcleos 'filhos', cada um deles com carga $+46e$. (b) Como modelo simples do processo de fissão, imaginamos que, imediatamente após a fissão, os dois núcleos 'filhos' estão em repouso e quase em contato, conforme mostra a Figura 23.41. Calcule a energia cinética de cada núcleo 'filho' quando a distância entre eles é muito grande. (c) Nesse modelo, a soma da energia cinética de cada núcleo 'filho' calculada no item (b) é a energia liberada pela fissão do núcleo de urânio 236. Calcule a energia liberada pela fissão de 10,0 kg de urânio 236. A massa atômica do urânio 236 é igual a 236 u, em que 1 u = 1 unidade de massa atômica $= 1,66 \times 10^{-24}$kg. Expresse sua resposta em joules e em quilotons de TNT (1 quiloton de TNT libera $4,18 \times 10^{12}$ J durante sua explosão). (d) Com base nesse modelo, discuta por que razão uma bomba atômica poderia também ser chamada de 'bomba elétrica'.

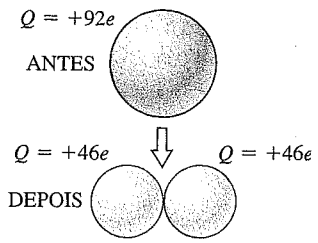


Figura 23.41 Problema 23.87.

Problemas desafiadores

23.88 Em uma dada região, existe uma distribuição de cargas esfericamente simétrica, porém não uniforme. Ou seja, a densidade volumétrica de cargas $\rho(r)$ depende da distância r, mas não depende dos ângulos das coordenadas esféricas θ e ϕ. O potencial elétrico $V(r)$ dessa distribuição é dado por

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a^2}{18\epsilon_0}\left[1 - 3\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\right] & \text{para } r \le a \\ 0 & \text{para } r \ge a \end{cases}$$

em que ρ_0 é uma constante com unidades de C/m^3 e a é uma constante com unidade de metro. (a) Deduza uma expressão para E para as regiões $r \le a$ e $r \ge a$ (*Sugestão:* Use a Equação (23.23).) Explique por que $\vec{E}$ possui apenas um componente radial. (b) Deduza uma expressão para $\rho(r)$ nas duas regiões $r \le a$ e $r \ge a$. (*Sugestão*: Use a lei de Gauss para duas superfícies esféricas, uma de raio r e a outra de raio $r + dr$. A carga contida na casca esférica de espessura dr é $dq = 4\pi r^2 \rho(r)\, dr$.) (c) Mostre que a carga total contida no interior de uma esfera de raio superior é igual a zero ou igual a a. (*Sugestão:* Integre a expressão deduzida na parte (b) para $\rho(r)$ sobre um volume esférico de raio superior ou igual a a.) O resultado obtido é consistente com o campo elétrico para $r \ge a$ que você calculou no item (a)?

23.89 Nas experiências de colisões com núcleos atômicos, podem ocorrer colisões centrais ou frontais como as mencionadas no Problema 23.82, contudo as colisões 'não centrais' são mais comuns. Suponha que a partícula alfa do Problema 23.82 não tenha sido 'apontada' exatamente para o centro do núcleo de chumbo, porém possua um momento angular inicial diferente de zero (em relação ao núcleo de chumbo em repouso), com módulo $L = p_0 b$, em que p_0 é o módulo do momento linear inicial da partícula alfa e $b = 1,0 \times 10^{-12}$ m. Qual é a menor distância da aproximação do núcleo? Repita os cálculos para $b = 1,0 \times 10^{-13}$ m e para $b = 1,0 \times 10^{-14}$ m.

23.90 Uma casca cilíndrica isolante, com raio R e comprimento L (como o tubo de papelão de um rolo de papel higiênico), possui uma carga Q uniformemente distribuída sobre sua superfície. (a) Calcule o potencial elétrico em todos os pontos ao longo do eixo do cilindro. Faça a origem do sistema de coordenadas coincidir com o centro do tubo cilíndrico e considere igual a zero o potencial no infinito. (b) Mostre que, quando $L << R$, o potencial da parte (a) se reduz ao potencial de um anel carregado com raio R (veja o Exemplo 23.11 na Seção 23.3). (c) Use o resultado da parte (a) para determinar o campo elétrico em todos os pontos ao longo do eixo do cilindro.

23.91 **Experiência da gota de óleo de Millikan.** A carga do elétron foi determinada pelo físico americano Robert Millikan, entre 1909

e 1913. Em sua experiência, o óleo era pulverizado e formavam-se minúsculas gotas de óleo (com diâmetros da ordem de 10^{-4} mm) no espaço entre duas placas paralelas horizontais, separadas por uma distância d. Uma diferença de potencial V_{AB} é mantida entre as placas, criando entre elas um campo elétrico orientado de cima para baixo. Devido ao atrito ou à ionização do ar por raios X ou radioatividade, algumas gotas adquirem cargas negativas. As gotas são observadas com um microscópio. (a) Mostre que uma gota de óleo de raio r em repouso entre as placas deverá permanecer em repouso quando o módulo de sua carga for dado por

$$q = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho r^3 g d}{V_{AB}}$$

em que ρ é a densidade do óleo. (Despreze a força de empuxo do ar.) Ajustando o valor de V_{AB} a fim de manter a gota em repouso, podemos calcular a carga da gota, desde que seu raio seja conhecido. (b) As gotas da experiência de Millikan eram muito pequenas e seus raios não podiam ser medidos diretamente. Em vez disso, Millikan determinou r desligando o campo elétrico e medindo a *velocidade terminal* v_t da gota à medida que elas caíam. (Discutimos o conceito de velocidade terminal na Seção 5.3.) A força viscosa F sobre uma esfera de raio r que se desloca com velocidade v em um fluido com viscosidade η é dada pela lei de Stokes, Equação (14.27), $F = 6\pi\eta r v$. Quando a gota atinge velocidade v_t, a força viscosa deve ser igual ao peso $p = mg$ da gota. Mostre que o módulo da carga da gota é dado por

$$q = 18\pi\frac{d}{V_{AB}}\sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}$$

Dentro dos limites dos erros experimentais, as cargas de todas as milhares de gotas que Millikan e seus colaboradores mediram eram iguais a um pequeno múltiplo inteiro de uma carga fundamental e. Ou seja, eles obtiveram valores iguais a $\pm 2e$, $\pm 5e$ e assim por diante, porém não encontraram valores tais como $0{,}76e$ ou $2{,}49e$. Uma gota com carga $-e$ adquiriu um elétron extra; com uma carga $-2e$ ela adquiriu dois elétrons, e assim por diante. (c) Verifica-se que uma gota de óleo carregada em um dispositivo de Millikan cai 1,0 mm com velocidade constante de 39,3 s, quando $V_{AB} = 0$. A mesma gota pode ser mantida em repouso entre duas placas separadas por 1,0 mm, quando $V_{AB} = 9{,}16$ V. Quantos elétrons em excesso a gota possui e qual é seu raio? A viscosidade do ar é $1{,}81 \times 10^{-5}$ N·s/m^2 e a densidade do óleo é igual a 824 kg/m^3.

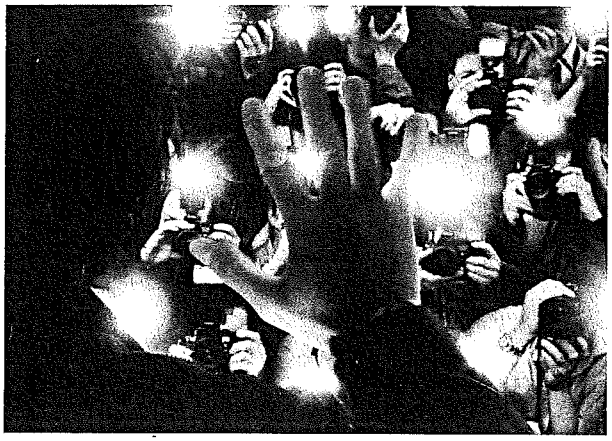
23.92 Duas cargas puntiformes estão se deslocando para a direita ao longo do eixo Ox. A carga puntiforme 1 possui carga $q_1 = 2{,}0\ \mu$C, massa $m_1 = 6{,}0 \times 10^{-5}$ kg e velocidade v_1. A carga puntiforme 2 está à direita de q_1 e possui carga $q_2 = -5{,}0\ \mu$C, massa $m_2 = 3{,}0 \times 10^{-5}$ kg e velocidade v_2. Em um dado instante, a distância entre as cargas é igual a 9,0 mm e suas velocidades são $v_1 = 400$ m/s e $v_2 = 1300$ m/s. As únicas forças que atuam no sistema são as forças elétricas que uma exerce sobre a outra. (a) Determine a velocidade v_{cm} do centro de massa do sistema. (b) A *energia relativa* E_{rel} é definida como a energia total menos a energia cinética da contribuição do movimento do centro de massa:

$$E_{rel} = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

em que $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$ é a energia total do sistema e r é a distância entre as cargas. Mostre que $E_{rel} = \frac{1}{2}\mu v^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$, em que $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ denomina-se *massa reduzida* do sistema e $v = v_2 - v_1$ é a velocidade relativa das partículas que se movem. (c) Para os valores numéricos fornecidos acima, calcule o valor numérico de E_{rel}. (d) Com base no resultado do item (c), para as condições fornecidas acima, as partículas escapam da atração mútua? Explique. (e) Caso as partículas escapem, qual deve ser a velocidade relativa quando $r \to \infty$? Caso as partículas não escapem, qual deve ser a máxima separação entre elas? Ou seja, qual deve ser o valor de r quando $v = 0$? (f) Repita os cálculos dos itens (c) até (e) para $v_1 = 400$ m/s e $v_2 = 1800$ m/s quando a distância entre as cargas for igual a 9,0 mm.

CAPACITÂNCIA E DIELÉTRICOS

24



A energia utilizada pela unidade de flash de uma máquina fotográfica é armazenada em um capacitor que consiste de dois condutores separados por uma pequena distância e que possuem cargas contrárias. Caso a quantidade de carga nos condutores seja duplicada, qual será o fator de aumento da energia armazenada?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- A natureza dos capacitores e como calcular a grandeza que mede a sua capacidade de armazenar energia.
- Como analisar capacitores conectados em rede.
- Como calcular a quantidade de energia armazenada em um capacitor.
- O que são dielétricos e como eles aumentam a eficácia dos capacitores.

Quando você comprime a mola de uma ratoeira antiga ou puxa a flecha para trás, encurvando um arco, está armazenando energia mecânica sob a forma de energia potencial. Um capacitor é um dispositivo que armazena energia potencial *elétrica* e carga elétrica. Para fazer um capacitor, basta colocar um isolante entre dois condutores. Para armazenar energia nesse dispositivo, transfira carga de um condutor para outro, de modo que um deles fique com uma carga negativa e o outro fique com carga igual, mas de sinal positivo. É necessário realizar um trabalho para deslocar essas cargas até que se estabeleça uma diferença de potencial resultante entre os condutores, e o trabalho realizado é armazenado sob forma de energia potencial elétrica.

Os capacitores possuem infindáveis aplicações, tal como em unidades de flash das máquinas fotográficas, em um laser pulsante, nos sensores de *air bags* automotivos ou em receptores de rádio e televisão. Encontraremos muitas dessas aplicações nos próximos capítulos (principalmente no Capítulo 31, no qual veremos o papel crucial desempenhado pelos capacitores nos circuitos de corrente alternada, que permeiam a nossa sociedade tecnológica). Neste capítulo, porém, a ênfase recairá sobre as propriedades fundamentais dos capacitores. Para um capacitor em particular, a razão entre a carga acumulada em cada condutor e a diferença de potencial entre os condutores é uma constante, chamada de *capacitância*. A capacitância depende das dimensões, das formas dos condutores e do material (caso exista) existente entre eles. Em comparação ao caso no qual existe somente vácuo entre os condutores, a capacitância torna-se maior quando há um material isolante (ou *dielétrico*) entre eles. Isso resulta de uma redistribuição das cargas, chamada de *polarização*, que ocorre no interior do material. O estudo da polarização nos fornecerá um método adicional para entender as propriedades elétricas da matéria.

O estudo dos capacitores também nos fornece uma nova maneira de pensar sobre a energia potencial elétrica. A energia armazenada em um capacitor carregado está relacionada ao campo elétrico existente no espaço entre os condutores. Veremos que a energia potencial elétrica pode ser considerada como sendo armazenada *no próprio campo*. A idéia de que o próprio campo elétrico é o local onde a energia é armazenada está na base da teoria das ondas eletromagnéticas e do estudo da natureza da luz, conforme discutiremos no Capítulo 32.

24.1 Capacitância e capacitores

Um **capacitor** (Figura 24.1) é um sistema constituído por dois condutores separados por um isolante (ou imersos no vácuo). Em quase todas as aplicações práticas, cada condutor possui, inicialmente, carga líquida igual a zero e há transferência de elétrons de um condutor para o outro; dizemos, nesse caso, que o capacitor está sendo *carregado*. No equilíbrio, os dois condutores possuem cargas de mesmo módulo, mas de sinais contrários, e a carga *líquida* no capacitor como um todo permanece igual a zero. Supomos, neste capítulo, que esse caso sempre seja válido. Quando afirmamos que um capacitor possui uma carga Q, ou que existe uma carga Q *armazenada* em um capacitor, queremos dizer que o condutor que está a um potencial mais elevado possui carga $+Q$ e o condutor com o potencial mais baixo possui carga $-Q$ (supondo que Q seja positiva). Tenha isso em mente nas discussões e nos exemplos deste capítulo.

Nos diagramas de circuitos, um capacitor pode ser representado por qualquer um dos seguintes símbolos:

Nesses símbolos, as linhas verticais (retas ou curvas) representam os condutores e as linhas horizontais, fios conectados aos condutores. Um método comum de carregar um capacitor consiste em conectar esses dois fios aos terminais opostos de uma bateria. Quando as cargas $+Q$ e $-Q$ são estabelecidas sobre os condutores, os fios são desconectados da bateria. Isso fornece uma *diferença de potencial* fixa V_{ab} entre os condutores (ou seja, o potencial do condutor com carga positiva a em relação ao condutor com carga negativa b), que é precisamente igual à voltagem da bateria.

O campo elétrico em qualquer ponto na região entre os condutores é proporcional ao módulo Q da carga em cada condutor. A partir disso, podemos concluir que a diferença de potencial V_{ab} entre os condutores também é proporcional a Q. Quando dobramos o módulo da carga de cada condutor, dobramos também a densidade de carga em cada ponto, o campo elétrico em cada ponto e a diferença de potencial entre os condutores; contudo, a *razão* entre a carga e a diferença de potencial não varia. Essa razão é chamada de **capacitância** C do capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad (24.1)$$

(definição de capacitância)

A unidade SI de capacitância é um **farad** (1 F), em homenagem a Michael Faraday, físico inglês do século 19. Pela Equação (24.1), um farad é igual a um *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

ATENÇÃO Capacitância *versus* coulombs Não confunda o símbolo C usado para capacitância (o qual será sempre indicado em itálico) com a abreviação C para coulombs (que nunca será indicada em itálico).

Quanto maior for a capacitância C de um capacitor, maior será o módulo Q da carga em cada condutor para uma dada diferença de potencial V_{ab} e, portanto, maior a energia armazenada. (Lembre-se de que o potencial é a energia potencial por unidade de carga.) Portanto, *a capacitância é a medida da capacidade de armazenar energia de um dado capacitor.* Veremos que o valor da capacitância depende somente da forma e do tamanho de cada condutor e da natureza do material isolante que existe entre os condutores. (A observação anterior que afirmava a independência da capacitância de Q e de V_{ab} não se aplica para certos tipos especiais de materiais isolantes. Entretanto, não discutiremos esses materiais neste livro.)

Cálculo da capacitância: capacitores no vácuo

Podemos calcular a capacitância C de um dado capacitor determinando a diferença de potencial V_{ab} entre os condutores para um dado módulo da carga Q e, a seguir, usando a Equação (24.1). No momento, vamos considerar apenas *capacitores no vácuo*, ou seja, vamos supor que

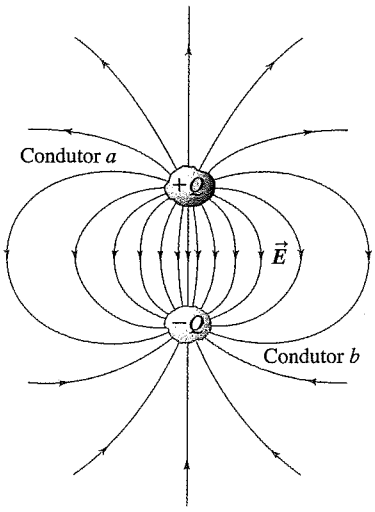


Figura 24.1 Um capacitor é constituído por qualquer par de condutores a e b isolados.

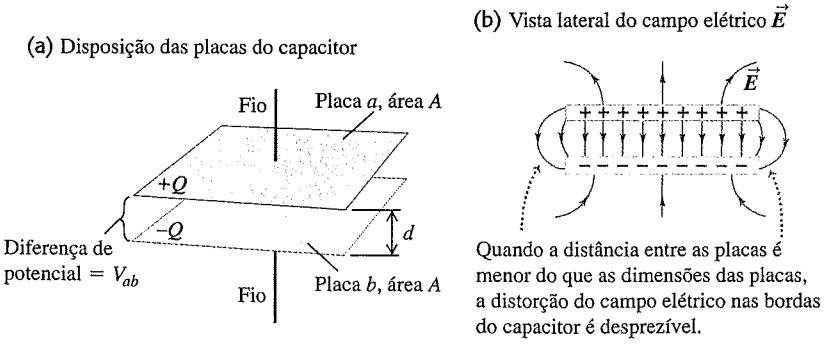


Figura 24.2 Um capacitor de placas paralelas carregado.

exista apenas o espaço vazio entre os dois condutores que constituem o capacitor.

O capacitor mais simples é constituído por duas placas condutoras paralelas, cada uma delas com área A, separadas por uma distância d pequena em comparação às suas dimensões (Figura 24.2a). Quando as placas são carregadas, o campo elétrico é quase completamente localizado na região existente entre as placas (Figura 24.2b). Conforme discutimos no Exemplo 22.8 (Seção 22.4), o campo entre essas duas placas é essencialmente *uniforme* e as cargas sobre as placas são distribuídas uniformemente sobre suas superfícies opostas. Esse arranjo é chamado de **capacitor com placas paralelas**.

Determinamos o módulo E do campo elétrico desse arranjo no Exemplo 21.13 (Seção 21.5) usando o princípio da superposição dos campos elétricos; e também no Exemplo 22.8 (Seção 22.4) usando a lei de Gauss. É útil fazer uma revisão desses exemplos. Verificamos que $E = \sigma/\epsilon_0$, em que σ é o módulo (valor absoluto) da densidade de carga superficial sobre cada placa. Essa densidade é igual ao módulo da carga Q dividido pela área A da placa, ou $\sigma = Q/A$; logo, o módulo E do campo elétrico pode ser escrito do seguinte modo:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

O campo é uniforme e a distância entre as placas é d; logo, a diferença de potencial (voltagem) entre as duas placas é dada por

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

Pelas relações anteriores, vemos que a capacitância C de um capacitor com placas paralelas no vácuo é dada por

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (24.2)$$

(capacitância de um capacitor com placas paralelas no vácuo)

Figura 24.3 No interior de um microfone condensador, há um capacitor com uma placa rígida e outra flexível. As duas placas são mantidas a uma diferença de potencial constante V_{ab}. Ondas sonoras fazem com que a placa flexível se movimente para a frente e para trás, provocando variação na capacitância C e escoamento da carga de e para o capacitor, conforme a relação $C = Q/V_{ab}$. Dessa forma, uma onda sonora é convertida em um fluxo de carga que pode ser amplificado e gravado digitalmente.

A capacitância depende somente da geometria do capacitor; ela é diretamente proporcional à área A de cada placa e inversamente proporcional à distância d entre as placas. As grandezas d e A são constantes para um dado capacitor e ϵ_0 é uma constante universal. Logo, no vácuo, a capacitância C é uma constante independente da carga do capacitor e da diferença de potencial entre as placas. Se uma das placas do capacitor for flexível, a capacitância C irá variar se a distância d entre as placas variar. Esse é o princípio operacional de um microfone condensador (Figura 24.3).

Quando existe um material entre as placas, suas propriedades influenciam a capacitância. Vamos voltar a esse tópico na Seção 24.4. No entanto, observamos que, se entre as placas do capacitor há ar sob pressão atmosférica em vez de vácuo, a capacitância difere menos de 0,06% do valor previsto pela Equação (24.2).

Na Equação (24.2), quando A é dado em metros quadrados e d em metros, C é dado em farads. As unidades de ϵ_0 são $C^2/N \cdot m^2$, portanto notamos que

$$1\ F = 1\ C^2/N \cdot m = 1\ C^2/J$$

Como 1 V = 1 J/C (energia por unidade de carga), isso é consistente com nossa definição 1 F = 1 C/V. Finalmente, as unidades de ϵ_0 podem ser expressas como $1\ C^2/N \cdot m^2 = 1$ F/m; logo,

$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m$$

Essa relação é útil em cálculos de capacitância e também nos auxilia a verificar que a Equação (24.2) é dimensionalmente consistente.

Um farad é uma capacitância muito grande, conforme indicado no Exemplo 24.1. Em muitas aplicações, unidades mais convenientes de capacitância são o *microfarad* ($1\ \mu F = 10^{-6}$ F) e o *picofarad* ($1\ pF = 10^{-12}$ F). Por exemplo, o flash de uma máquina fotográfica utiliza um capacitor de algumas centenas de microfarads (Figura 24.4), ao passo que as capacitâncias de um circuito de corrente alternada de um rádio são da ordem de 10 a 100 picofarads.

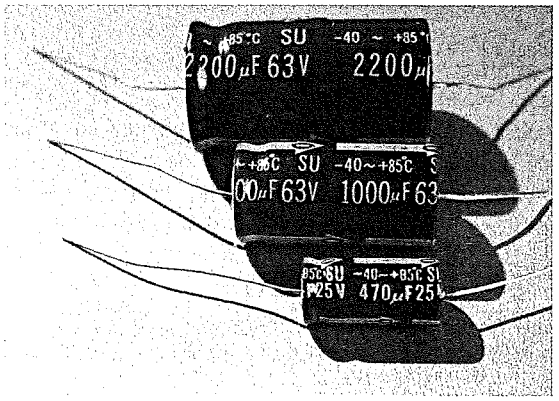


Figura 24.4 Um capacitor comercial é identificado com o valor da sua capacitância. Para esses capacitores, $C = 2200\ \mu F$, $1000\ \mu F$ e $400\ \mu F$.

Para *qualquer* capacitor no vácuo, a capacitância C depende somente das formas, das dimensões e da distância entre os condutores que constituem o capacitor. Quando as formas dos condutores são mais complexas do que as placas planas de um capacitor com placas paralelas, as expressões das capacitâncias são mais complexas do que a indicada na Equação (24.2). Nos exemplos seguintes, mostraremos como calcular C para duas outras geometrias dos condutores.

Exemplo 24.1

TAMANHO DE UM CAPACITOR DE 1 F Um capacitor com placas paralelas possui capacitância igual a 1 F. Se a distância entre as placas for igual a 1,0 mm, qual será a área de cada placa?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema aborda a relação entre a capacitância, a distância entre as placas e a área da placa (a incógnita) para um capacitor com placas paralelas.

PREPARAR: são fornecidos os valores de C e d para um capacitor com placas paralelas, portanto usamos a Equação (24.2) e solucionamos a incógnita A.

EXECUTAR: explicitando a área A da Equação (24.2), obtemos

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1{,}0\ \text{F})(1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{8}\ \text{m}^2$$

AVALIAR: essa área corresponde a um quadrado com lado aproximadamente igual a 10 km! Obviamente não se trata de um formato muito prático para um capacitor.

Na realidade, atualmente é possível desenvolver capacitores de 1 F com aresta de apenas alguns centímetros. O truque é ter a substância adequada entre as placas, em vez do vácuo. Exploraremos mais essa questão na Seção 24.4.

Exemplo 24.2

PROPRIEDADES DE UM CAPACITOR COM PLACAS PARALELAS A distância entre as placas de um capacitor com placas paralelas é igual a 5,0 mm e a área da placa é de 2,0 m^2. Uma diferença de potencial de 10000 V (10,0 kV) é mantida através do capacitor. Calcule (a) a capacitância; (b) a carga de cada placa e (c) o módulo do campo elétrico no espaço entre as placas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: são fornecidas a área da placa A, a distância entre as placas d e a diferença de potencial V_{ab} para esse capacitor com placas paralelas. As incógnitas do problema são a capacitância C, a carga Q e o módulo do campo elétrico E.

PREPARAR: usamos a Equação (24.2) para calcular C e, a seguir, obtemos a carga Q sobre cada placa, usando a diferença potencial V_{ab} fornecida e a Equação (24.1). Após obter Q, determinamos o campo elétrico entre as placas, usando a relação $E = Q/\epsilon_0 A$.

EXECUTAR: (a) Pela Equação (24.2),

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(2{,}0\ \text{m}^2)}{5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-9}\ \text{F} = 0{,}00354\ \mu\text{F}$$

(b) A carga no capacitor é

$$Q = CV_{ab} = (3{,}54 \times 10^{-9}\ \text{C/V})(1{,}0 \times 10^{4}\ \text{V})$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-5}\ \text{C} = 35{,}4\ \mu\text{C}$$

A placa com o potencial mais elevado possui carga +35,4 μC e a outra placa possui carga –35,4 μC.

(c) O módulo do campo elétrico é

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3{,}54 \times 10^{-5}\ \text{C}}{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2{,}0\ \text{m}^2)}$$
$$= 2{,}0 \times 10^{6}\ \text{N/C}$$

AVALIAR: podemos obter esse mesmo resultado lembrando que o campo elétrico é igual ao módulo do gradiente de potencial (Equação (23.22)). Visto que o campo entre as placas é uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1{,}0 \times 10^{4}\ \text{V}}{5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2{,}0 \times 10^{6}\ \text{V/m}$$

(Lembre-se de que o newton por coulomb e o volt por metro são unidades equivalentes.)

Exemplo 24.3

UM CAPACITOR ESFÉRICO Duas cascas esféricas condutoras concêntricas estão separadas pelo vácuo. A casca esférica interna possui carga total $+Q$ e raio externo r_a, e a casca esférica externa possui carga $-Q$ e raio interno r_b (Figura 24.5). (A casca interna está ligada à casca externa por finas varas isolantes, que exercem efeito desprezível sobre a capacitância.) Calcule a capacitância desse capacitor esférico.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: não se trata de um capacitor com placas paralelas, logo não podemos usar as relações desenvolvidas para essa geometria em particular. Em vez disso, consideramos a definição fundamental de capacitância: o módulo da carga sobre qualquer condutor dividido pela diferença de potencial entre os condutores.

PREPARAR: usaremos a lei de Gauss para encontrar o campo elétrico entre os condutores esféricos e, a partir disso, determinar a diferença de potencial V_{ab} entre os condutores; então, aplicaremos a Equação (24.1) para determinar a capacitância $C = Q/V_{ab}$.

EXECUTAR: usando o mesmo procedimento indicado no Exemplo 22.5 (Seção 22.4), tomamos como nossa superfície gaussiana uma esfera com raio r entre as duas esferas concêntricas. A lei de Gauss, Equação (22.8), afirma que o fluxo elétrico através dessa superfície é igual à carga total existente no interior dessa superfície dividida por ϵ_0:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0}$$

Por simetria, $\vec{E}$ é constante em módulo e paralelo a $d\vec{A}$ em cada ponto dessa superfície, de modo que a integral na lei de Gauss é igual a $(E)(4\pi r^2)$. A carga total no interior da superfície é $Q_{\text{inte}} = Q$; logo,

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

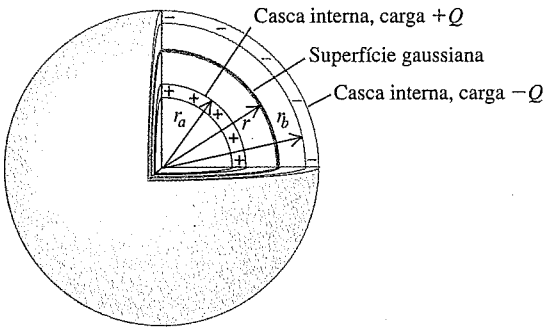


Figura 24.5 Um capacitor esférico.

O campo elétrico entre as esferas é precisamente dado pela carga sobre a superfície interna; a superfície externa não contribui para esse campo. Verificamos, no Exemplo 22.5, que a carga sobre uma superfície esférica condutora produz campo elétrico igual a zero no interior da superfície esférica; isso também nos informa que o condutor externo não dá nenhuma contribuição para o campo elétrico entre os condutores.

A expressão anterior de E é a mesma que a de uma carga puntiforme Q, de modo que a expressão do potencial coincide com a do potencial de uma carga puntiforme, $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Portanto, o potencial do condutor interno (positivo) para $r = r_a$ em relação ao condutor externo (negativo) para $r = r_b$ é

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Finalmente, a capacitância é

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como exemplo, se $r_a = 9{,}5$ cm e $r_b = 10{,}5$ cm,

$$C = 4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{(0{,}095\ \text{m})(0{,}105\ \text{m})}{0{,}010\ \text{m}}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-10}\ \text{F} = 110\ \text{pF}$$

AVALIAR: podemos relacionar esse resultado à capacitância de um capacitor com placas paralelas. A quantidade $4\pi r_a r_b$ é intermediária entre as áreas $4\pi r_a^2$ e $4\pi r_b^2$ das duas esferas; de fato, ela é a *média geométrica* dessas duas áreas, que podemos designar por A_{geo}. A distância entre as esferas é $d = r_b - r_a$; logo, podemos reescrever o resultado como $C = \epsilon_0 A_{geo}/d$. Essa é a mesma forma da capacitância do capacitor com placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. A partir disso, podemos concluir que, se a distância entre as esferas é muito menor do que seus raios, as esferas se comportam como um capacitor com placas paralelas com a mesma distância entre as placas e com a mesma área.

Exemplo 24.4

UM CAPACITOR CILÍNDRICO Um cilindro condutor longo possui um raio r_a e uma densidade de carga linear $+\lambda$. Ele está circundado por uma casca cilíndrica co-axial condutora com raio interno r_b e densidade de carga linear $-\lambda$ (Figura 24.6). Calcule a capacitância por unidade de comprimento desse capacitor, supondo que exista vácuo no espaço entre as superfícies cilíndricas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 24.3, usaremos a definição fundamental de capacitância.

PREPARAR: inicialmente, achamos as expressões para a diferença de potencial V_{ab} entre os cilindros e a carga Q em um comprimento L dos cilindros; a seguir, determinamos a capacitância de um comprimento L, usando a Equação (24.1). A nossa incógnita é essa capacitância dividida por L.

EXECUTAR: para encontrarmos a diferença de potencial entre os cilindros, aplicaremos o resultado obtido no Exemplo 23.10 (Seção 23.3). Naquele exemplo, verificamos que, em um ponto situado no exterior de um cilindro carregado a uma distância r do centro, o potencial do cilindro é dado por

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

em que r_0 é o raio (arbitrário) para o qual $V = 0$. Podemos usar esse mesmo resultado para o potencial *entre* os cilindros neste problema porque, de acordo com a lei de Gauss, a carga sobre a superfície cilíndrica externa não contribui para o campo entre os cilindros (veja o Exemplo 24.3). Em nosso caso, escolhemos para r_0 o raio r_b, o raio da superfície interna do cilindro externo, de modo que o cilindro condutor externo possui potencial $V = 0$. Então, o potencial na superfície externa do condutor interno (em que $r = r_a$) é precisamente igual à diferença de potencial V_{ab} entre o cilindro interno (positivo) com raio a e o cilindro externo (negativo) com raio b; logo,

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Essa diferença de potencial é positiva (supondo λ positiva, como indica a Figura 24.6), porque o cilindro interno possui um potencial elétrico superior ao do cilindro externo.

A carga total Q existente no comprimento L é dada por $Q = \lambda L$, de modo que pela Equação (24.1) a capacitância C de um comprimento L é dada por

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

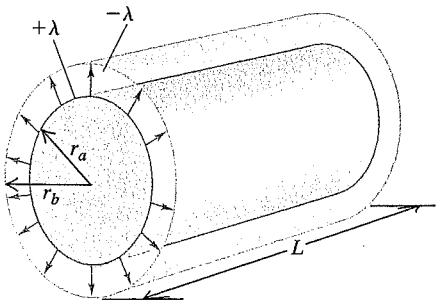


Figura 24.6 Um capacitor cilíndrico longo. A densidade de carga linear λ é considerada positiva nesta figura. O módulo da carga em um comprimento L de ambos os cilindros é igual a λL.

A capacitância por unidade de comprimento é

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$

Substituindo $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m = 8,85 pF/m, obtemos

$$\frac{C}{L} = \frac{55{,}6\ \text{pF/m}}{\ln(r_b/r_a)}$$

AVALIAR: vemos que a capacitância de cilindros co-axiais é determinada inteiramente pelas dimensões, tal como no caso do capacitor com placas paralelas. Um cabo co-axial é, geralmente, feito de modo semelhante, porém, em vez do vácuo, existe um material isolante entre os cilindros condutores. Um cabo co-axial típico para uma antena de TV ou para uma conexão com o videocassete (VCR) possui, em geral, uma capacitância por unidade de comprimento da ordem de 69 pF/m.

Teste sua compreensão da Seção 24.1 Um capacitor possui vácuo no espaço entre os condutores. Caso você dobre a quantidade de carga em cada condutor, o que acontece com a capacitância? (i) Aumenta; (ii) diminui; (iii) não varia; (iv) a resposta depende do tamanho ou do formato dos condutores. ∎

24.2 Capacitores em série e em paralelo

Os capacitores são fabricados com certos valores padronizados para as capacitâncias e para as voltagens de operação (Figura 24.7). Contudo, esses valores podem não ser aqueles de que você realmente precisa para uma determinada aplicação. Você pode obter os valores desejados combinando capacitores; muitas combinações são possíveis, e as ligações em série e em paralelo são as mais simples.

Capacitores em série

A Figura 24.8a é um diagrama esquemático de uma **ligação em série**. Dois capacitores são conectados em série (um depois do outro) por meio de fios condutores entre os pontos a e b. Inicialmente, os dois capacitores não estão carregados. Quando uma diferença de potencial constante V_{ab} é aplicada entre os pontos a e b, os capacitores ficam carregados; a figura mostra que as cargas acumuladas em *todas* as placas condutoras possuem o mesmo módulo. Para entender esse comportamento, observe, inicialmente, que a placa superior de C_1 acumula carga positiva Q. O campo elétrico dessa carga positiva atrai cargas negativas para cima da placa inferior de C_1, até que todas as linhas de força que começam na placa superior terminem na placa inferior. Isso só é possível quando a placa inferior possui carga $-Q$. Essas cargas negativas são provenientes da placa superior de C_2, que se torna carregada positivamente com carga $+Q$. Essa carga positiva, a seguir, puxa uma carga negativa $-Q$ da conexão no ponto b até que ela fique acumulada na placa inferior de C_2. A carga total na placa inferior de C_1 e na placa superior de C_2 devem, juntas, ser sempre igual a zero, pois essas placas estão ligadas somente entre si e não existe nenhuma fonte entre elas. Portanto, *em uma ligação em série, o módulo de cada carga em todas as placas é sempre o mesmo.*

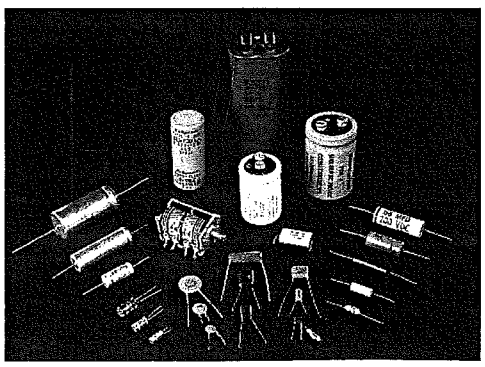


Figura 24.7 Diversos tipos de capacitores disponíveis comercialmente.

Observando novamente a Figura 24.8a, podemos escrever as seguintes diferenças de potencial entre os pontos a e c, c e b e a e b

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

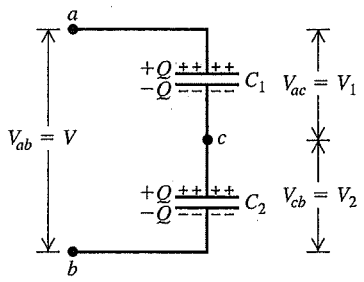
$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24.3}$$

(a) Dois capacitores ligados em série

Capacitores em série:
- Os capacitores possuem a mesma carga Q.
- A soma das diferenças de potencial é: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$.



(b) O capacitor equivalente

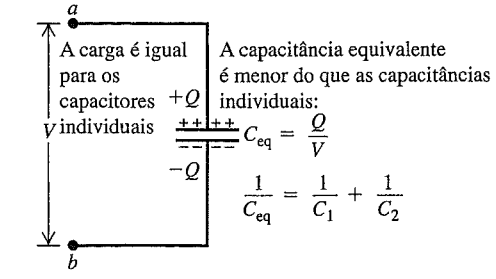


Figura 24.8 Ligação em série de dois capacitores.

Seguindo uma convenção comum, usamos os símbolos V_1, V_2 e V para designar, respectivamente, as seguintes *diferenças* de potencial: V_{ac} (através do primeiro capacitor), V_{cb} (através do segundo capacitor) e V_{ab} (através da combinação inteira dos capacitores).

A **capacitância equivalente** C_{eq} dessa combinação em série é definida como a capacitância de um *único* capacitor para o qual a carga Q será a mesma que a da combinação quando a diferença de potencial V for a mesma. Em outras palavras, a combinação dos capacitores pode ser substituída por um único *capacitor equivalente*, cuja capacitância é C_{eq}. Para tal capacitor, indicado na Figura 24.8b, temos

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \tag{24.4}$$

Combinando as equações (24.3) e (24.4), encontramos

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Podemos estender essa análise para um número qualquer de capacitores conectados em série. Encontramos o seguinte resultado para o *inverso* da capacitância equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \tag{24.5}$$

(capacitores em série)

O inverso da capacitância equivalente de uma associação de capacitores conectados em série é igual à soma dos inversos das capacitâncias de cada capacitor. Em uma ligação de capacitores em série, a capacitância equivalente é sempre *menor* do que qualquer uma das capacitâncias individuais.

ATENÇÃO Capacitores em série O módulo da carga é o mesmo em todas as placas de todos os capacitores ligados em série; contudo, as diferenças de potencial dos capacitores individuais *não* são as mesmas, a não ser quando as capacitâncias individuais são as mesmas. A soma das diferenças de potencial através dos capacitores individuais fornece a diferença de potencial total através do conjunto da associação em série: $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$

Capacitores em paralelo

O arranjo indicado na Figura 24.9a denomina-se **ligação em paralelo**. Dois capacitores são conectados em paralelo entre os pontos *a* e *b*. Nesse caso, as placas superiores dos dois capacitores são conectadas por um fio condutor, constituindo uma superfície equipotencial, e as placas inferiores formam outra superfície equipotencial. Portanto, *em uma ligação em paralelo, a diferença de potencial é a mesma através de todos os capacitores*, sendo dada por $V_{ab} = V$. No entanto, as cargas Q_1 e Q_2 não são necessariamente iguais, visto que as cargas podem atingir as placas dos capacitores de forma independente a partir da fonte (como, por exemplo, uma bateria), cuja voltagem é V_{ab}. As cargas são dadas por

$$Q_1 = C_1 V \quad \text{e} \quad Q_2 = C_2 V$$

A carga *total* Q da combinação e, portanto, a carga total no capacitor equivalente são dadas por

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

logo,

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \tag{24.6}$$

A combinação em paralelo é equivalente a um único capacitor com a mesma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ e com a mesma diferença de potencial V da associação (Figura 24.9b). A capacitância equivalente da combinação, C_{eq}, é dada pela razão Q/V desse capacitor único. Portanto, pela Equação (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De modo análogo, podemos mostrar que, para um número qualquer de capacitores em paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$

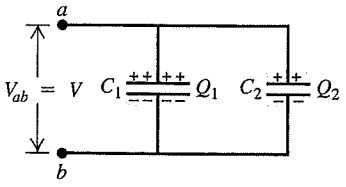
(capacitores em paralelo) (24.7)

A capacitância equivalente de uma combinação de capacitores ligados em paralelo é igual à *soma* das capacitâncias individuais. Em uma ligação em paralelo, a capacitância equivalente é sempre *maior* do que qualquer capacitância individual.

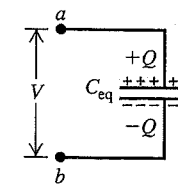
ATENÇÃO Capacitores em paralelo As diferenças de potencial são as mesmas para todos os capacitores conectados em paralelo; contudo, as cargas acumuladas em cada capacitor individual não são as mesmas, exceto quando as capacitâncias individuais são iguais. As cargas de cada capacitor se somam, fornecendo a carga total do conjunto de capacitores ligados em paralelo: $Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$ (Compare essas afirmações àquelas que fizemos no parágrafo 'Atenção', logo depois da Equação (24.5).)

(a) Dois capacitores ligados em paralelo

Capacitores em paralelo:
- Os capacitores possuem o mesmo potencial V.
- A carga em cada capacitor depende da sua capacitância: $Q_1 = C_1 V$, $Q_2 = C_2 V$.



(b) O capacitor equivalente



A carga é a soma das cargas individuais:

$Q = Q_1 + Q_2$

Capacitância equivalente:

$C_{eq} = C_1 + C_2$

Figura 24.9 Ligação paralela entre dois capacitores.

Estratégia para a solução de problemas 24.1

CAPACITÂNCIA EQUIVALENTE

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: o conceito de capacitância equivalente é útil sempre que há ligação de dois ou mais capacitores.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho da disposição do capacitor.
2. Identifique se os capacitores estão conectados em série ou em paralelo. No caso de combinações mais complicadas, algumas vezes é possível identificar partes que são simples ligações em série ou paralelas.
3. Lembre-se de que, quando dizemos que um capacitor possui uma carga Q, estamos necessariamente afirmando que a placa com potencial mais elevado possui carga $+Q$ e que a outra placa possui carga $-Q$.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Quando capacitores são alinhados em série, como na Figura 24.8a, eles sempre possuem a mesma carga, supondo que não apresentem nenhuma carga antes de serem carregados. As diferenças de potencial *não* são iguais, exceto quando as capacitâncias forem iguais. A diferença de potencial total ao longo da combinação inteira é igual à soma das diferenças de potencial individuais.
2. Quando capacitores são ligados em paralelo, como na Figura 24.9a, a diferença de potencial V é sempre a mesma para todos os capacitores individuais. As cargas dos capacitores individuais *não* são as mesmas, exceto quando as capacitâncias individuais forem iguais. A carga total do conjunto de capacitores é dada pela soma das cargas individuais dos capacitores.
3. Para encontrar a capacitância equivalente de combinações mais complexas, você pode identificar partes que estejam em série ou em paralelo e substituí-las pelas respectivas capacitâncias equivalentes, fazendo a redução da combinação por etapas. A seguir, se precisar determinar a carga ou a diferença de potencial para um capacitor individual, você poderá refazer as etapas usadas até os capacitores da combinação original.

AVALIAR *sua resposta*: verifique se sua resposta faz sentido. Se os capacitores estão ligados em série, a capacitância equivalente C_{eq} deve ser *menor* do que quaisquer capacitâncias individuais. Por outro lado, se os capacitores estão ligados em paralelo, C_{eq} deve ser *maior* do que quaisquer capacitâncias individuais.

Exemplo 24.5

CAPACITORES EM SÉRIE E EM PARALELO Considere, nas figuras 24.8 e 24.9, $C_1 = 6{,}0\ \mu\text{F}$, $C_2 = 3{,}0\ \mu\text{F}$ e $V_{ab} = 18$ V. Encontre a capacitância equivalente e calcule a carga e a diferença de potencial para cada capacitor quando os capacitores são conectados (a) em série e (b) em paralelo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema aborda os conceitos discutidos nesta seção sobre ligações de capacitores.

PREPARAR: em ambos os itens, uma das incógnitas é a capacitância equivalente C_{eq}. Para a combinação em série no item (a), ela é dada pela Equação (24.5); para a combinação paralela no item (b), ela é dada pela Equação (24.6). Em ambos os casos, determinamos a carga e a diferença de potencial usando a definição de capacitância, Equação (24.1), e as regras descritas na Estratégia para a Solução de Problemas 24.1.

EXECUTAR: (a) A capacitância equivalente da combinação em série (Figura 24.8a) é dada pela Equação (24.5):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6{,}0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{3{,}0\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 2{,}0\ \mu\text{F}$$

A carga Q em cada capacitor em série é a mesma que a carga acumulada no capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2{,}0\ \mu\text{F})(18\text{ V}) = 36\ \mu\text{C}$$

A diferença de potencial através de cada capacitor é inversamente proporcional à sua respectiva capacitância:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu\text{C}}{6{,}0\ \mu\text{F}} = 6{,}0\text{ V}$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu\text{C}}{3{,}0\ \mu\text{F}} = 12{,}0\text{ V}$$

(b) A capacitância equivalente da ligação em paralelo (Figura 24.9a) é dada pela Equação (24.6):

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6{,}0\ \mu\text{F} + 3{,}0\ \mu\text{F} = 9{,}0\ \mu\text{F}$$

A diferença de potencial através de cada um dos dois capacitores ligados em paralelo é a mesma através do capacitor equivalente, 18 V. As cargas Q_1 e Q_2 são diretamente proporcionais, respectivamente, C_1 e C_2:

$$Q_1 = C_1V = (6{,}0\ \mu\text{F})(18\text{ V}) = 108\ \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2V = (3{,}0\ \mu\text{F})(18\text{ V}) = 54\ \mu\text{C}$$

AVALIAR: note que a capacitância equivalente C_{eq} para a combinação em série do item (a) é realmente menor do que C_1 ou C_2, ao passo que, para a combinação paralela no item (b), a capacitância equivalente é de fato maior do que C_1 ou C_2.

É instrutivo comparar as diferenças de potencial e as cargas em cada item deste exemplo. Para dois capacitores ligados em série, como no item (a), a *maior* diferença de potencial surge através do capacitor que possui a *menor* capacitância. Para comprovar isso, note que $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V, como era esperado. Por outro lado, para dois capacitores em paralelo, a *maior* carga é armazenada no capacitor que possui a *maior* capacitância. Você consegue demonstrar que a carga total $Q_1 + Q_2$ na associação em paralelo é igual à carga $Q = C_{eq}V$ do capacitor equivalente?

Exemplo 24.6

UM CIRCUITO COM CAPACITORES Calcule a capacitância equivalente da combinação de capacitores da Figura 24.10a.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: os cinco capacitores da Figura 24.10a não estão todos em série nem todos em paralelo. Podemos, contudo, identificar partes do arranjo que *estão* ora em série, ora em paralelo, as quais são combinadas para se determinar a capacitância equivalente resultante.

PREPARAR: usamos a Equação (24.5) para analisar as partes do circuito que consistem de ligações em série e a Equação (24.7) para analisar as partes que constituem ligações em paralelo.

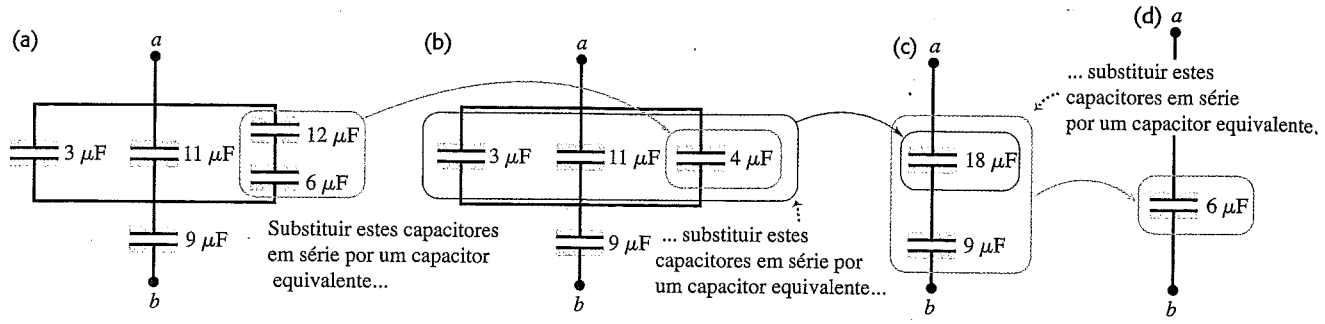


Figura 24.10 (a) Um conjunto de capacitores conectados entre os pontos *a* e *b*. (b) Os capacitores de 12 μF e 6 μF, que estavam ligados em série em (a), foram substituídos por um capacitor equivalente de 4 μF. (c) Os capacitores de 3 μF, 11 μF e 4 μF, que estavam ligados em paralelo em (b), foram substituídos por um capacitor equivalente de 18 μF. (d) Finalmente, os capacitores de 18 μF e 9 μF, que estavam ligados em série em (c), foram substituídos pelo capacitor equivalente de 6 μF.

EXECUTAR: inicialmente, substituímos a ligação em série dos capacitores de 12 μF e 6 μF pela capacitância equivalente; chamando essa capacitância de C', e usando a Equação (24.5), obtemos

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6\ \mu\text{F}} \qquad C' = 4\ \mu\text{F}$$

Esse resultado fornece a combinação equivalente mostrada na Figura 24.10b. A seguir, encontramos a capacitância equivalente dos três capacitores em paralelo usando a Equação (24.7). Chamando essa capacitância equivalente de C'', temos

$$C'' = 3\ \mu\text{F} + 11\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F} = 18\ \mu\text{F}$$

Isso fornece a combinação equivalente mais simples indicada na Figura 24.10c. Finalmente, determinamos a capacitância equivalente C_{eq} desses dois novos capacitores em série (Figura 24.10d):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu\text{F}} + \frac{1}{9\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 6\ \mu\text{F}$$

AVALIAR: a capacitância equivalente do circuito capacitivo é igual a 6 μF, ou seja, quando aplicamos uma diferença de potencial V_{ab} através dos terminais do circuito, a carga total acumulada no circuito é igual a 6 μF vezes V_{ab}. Como essa carga líquida é relacionada às cargas individuais de cada capacitor da Figura 24.10a?

Teste sua compreensão da Seção 24.2 Você deseja conectar um capacitor de 4 μF a outro de 8 μF. (a) Com qual tipo de ligação o capacitor de 4 μF terá uma *diferença de potencial* maior através dele do que o capacitor de 8 μF? (i) Em série; (ii) em paralelo; (iii) ora em série, ora em paralelo; (iv) nem em série nem em paralelo. (b) Com qual tipo de ligação o capacitor de 4 μF terá uma *carga* maior através dele do que o capacitor de 8 μF? (i) Em série; (ii) em paralelo; (iii) ora em série, ora em paralelo; (iv) nem em série nem em paralelo. ∎

24.3 Armazenamento de energia em capacitores e energia do campo elétrico

Muitas das aplicações mais importantes dos capacitores dependem de sua capacidade de armazenar energia. A energia potencial elétrica armazenada em um capacitor carregado é exatamente igual ao trabalho realizado para carregá-lo, ou seja, o trabalho necessário para separar cargas opostas e depositá-las em diferentes condutores. Quando o capacitor é descarregado, essa energia é recuperada como trabalho realizado pelas forças elétricas.

Podemos determinar a energia potencial U de um capacitor carregado calculando o trabalho W necessário para carregá-lo. Suponha que, depois do processo, a carga final seja Q e a diferença de potencial final seja V. De acordo com a Equação (24.1), essas grandezas são relacionadas por

$$V = \frac{Q}{C}$$

Seja q a carga e v a diferença de potencial em uma dada etapa intermediária durante o processo de armazenamento de carga; então, $v = q/C$. Nessa etapa, o trabalho dW necessário para transferir um elemento de carga adicional dq é dado por

$$dW = v\ dq = \frac{q\ dq}{C}$$

O trabalho total W necessário para aumentar a carga q de zero até um valor final Q é

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\ dq = \frac{Q^2}{2C} \qquad (24.8)$$

(trabalho para carregar um capacitor)

Esse trabalho é também igual ao trabalho total realizado pelo campo elétrico sobre a carga quando o capacitor é descarregado. Então, q *diminui* de um valor inicial Q até zero à medida que cada elemento de carga dq 'se escoa' por meio de diferenças de potencial v que variam desde V até zero.

Definindo como zero a energia potencial de um capacitor *descarregado*, então W na Equação (24.8) é igual à energia potencial U do capacitor carregado. A carga final acumulada é dada por $Q = CV$, de modo que podemos expressar U (que é igual a W) do seguinte modo:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

(energia potencial acumulada em um capacitor)

Quando Q é dado em coulombs, C em farads (coulombs por volt) e V em volts (joules por coulomb), U é dado em joules.

A última forma da Equação (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, mostra que o trabalho total W necessário para carregar o capacitor é igual à carga total Q multiplicada pela diferença de potencial *média* $\frac{1}{2}V$ durante o processo de carga.

A expressão $U = \frac{1}{2}(Q^2/C)$, na Equação (24.9), mostra que um capacitor carregado é o análogo elétrico de uma mola comprimida ou esticada, com energia potencial elástica $U = \frac{1}{2}kx^2$. A carga Q é semelhante à deformação da mola x, e o inverso da capacitância, $1/C$, desempenha papel semelhante ao da constante da mola k. A energia fornecida para carregar um capacitor é análoga ao trabalho que realizamos para produzir uma deformação na mola.

As equações (24.8) e (24.9) mostram que a capacitância mede a capacidade do capacitor de armazenar, simultaneamente, carga e energia. Quando um capacitor é carregado por meio de uma conexão a uma bateria ou por fonte que fornece uma diferença de potencial fixa V, então, se aumentamos o valor de C, obtemos uma carga maior $Q = CV$ e uma quantidade maior de energia acumulada $U = \frac{1}{2}CV^2$. Quando o objetivo é transferir uma dada quantidade de carga Q de um condutor para outro, a Equação (24.8) mostra que o trabalho W necessário é inversamente proporcional a C; quanto maior for a capacitância, mais fácil será fornecer ao capacitor uma quantidade fixa de carga.

Aplicações de capacitores: armazenamento de energia

A maioria das aplicações práticas de capacitores tira proveito da sua capacidade de armazenar e liberar energia. Nas unidades de flash eletrônico utilizadas por fotógrafos, a energia armazenada em um capacitor (veja a Figura 24.4) é liberada acionando-se o botão do obturador da câmera.

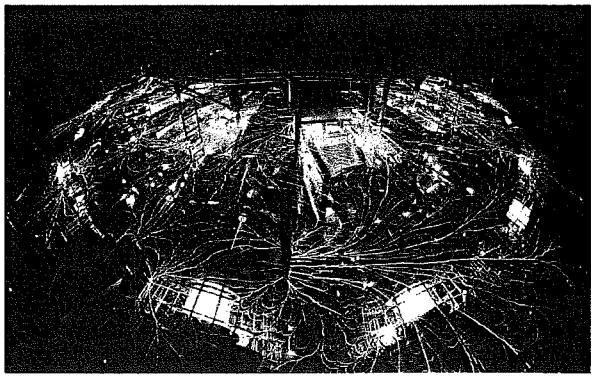


Figura 24.11 A máquina Z usa um grande número de capacitores em paralelo para produzir uma enorme capacitância equivalente C (veja Seção 24.2). Logo, uma grande quantidade de energia $U = \frac{1}{2}CV^2$ pode ser armazenada, mesmo com uma modesta diferença de potencial V. Os arcos aqui demonstrados são produzidos quando os capacitores descarregam energia em um alvo, que não é maior do que um carretel de linha. Com isso, o alvo é aquecido a uma temperatura superior a 2×10^9 K.

Isso cria uma corrente que flui de uma placa a outra do capacitor, através do tubo que emite o flash. Durante essa descarga, a energia armazenada é rapidamente convertida em um breve, porém intenso, clarão de luz. Um exemplo extremo do mesmo princípio é a máquina Z, do Sandia National Laboratories, no Novo México, que é usada em experiências com fusão nuclear controlada (Figura 24.11). Um banco de capacitores carregados libera mais de um milhão de joules de energia em alguns bilionésimos de segundo. Nesse breve instante, a geração de energia da máquina Z é de $2{,}9 \times 10^{14}$ W, ou cerca de 80 vezes a geração da energia elétrica de todas as usinas da Terra juntas!

Em outras aplicações, a energia é liberada de forma mais lenta. As molas de suspensão em um automóvel ajudam a amortecer a viagem ao absorver a energia dos súbitos solavancos, liberando essa energia gradualmente; de modo análogo, um capacitor em um circuito eletrônico pode amenizar variações indesejáveis de voltagem, decorrentes de picos de energia. E, assim como a presença de uma mola proporciona a um sistema mecânico uma freqüência natural à qual ele reage de forma mais intensa do que a uma força periódica aplicada, a presença de um capacitor dá ao circuito elétrico uma freqüência natural para oscilações de corrente. Esse conceito é usado em circuitos de sintonia, tais como aqueles existentes em receptores de rádio e televisão, que respondem aos sinais de transmissão a uma freqüência específica, ignorando qualquer outra freqüência. Discutiremos esses circuitos em detalhes no Capítulo 31.

Na prática, porém, as propriedades de armazenagem de energia dos capacitores também possuem efeitos indesejáveis. Os pinos adjacentes na parte inferior de um chip de computador atuam como capacitores, e a propriedade que torna os capacitores úteis para atenuar as variações de voltagem age de modo a retardar a taxa de variação dos potenciais dos pinos do chip. Essa tendência limita a velocidade com que o chip executa cálculos, um efeito que ganha relevância à medida que os chips se tornam menores e são impelidos a operar a velocidades cada vez maiores.

Energia do campo elétrico

Podemos carregar um capacitor transferindo diretamente elétrons de uma placa para outra. Para isso, é necessário realizar um trabalho contra o campo elétrico entre as placas. Portanto, podemos imaginar que a energia esteja armazenada *no campo* na região entre as placas. Para desenvolvermos essa relação, vamos calcular a energia *por unidade de volume* no espaço existente entre as placas de um capacitor com placas paralelas de área A e separadas por uma distância d. Essa grandeza denomina-se **densidade de energia**, designada pela letra u. Pela Equação (24.9), a energia potencial total armazenada é igual a $\frac{1}{2}CV^2$ e o volume entre as placas é Ad; portanto, a densidade de energia é

$$u = \text{densidade de energia} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \qquad (24.10)$$

Pela Equação (24.2), a capacitância C é dada por $C = \epsilon_0 A/d$. A diferença de potencial V é relacionada ao módulo do campo elétrico E por $V = Ed$. Usando essas relações na Equação (24.10), os fatores geométricos A e d se cancelam e encontramos

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (24.11)$$

(densidade de energia elétrica no vácuo)

Embora essa relação tenha sido deduzida somente para um capacitor com placas paralelas, verifica-se que ela é válida para qualquer capacitor no vácuo e, na verdade, para *qualquer configuração do campo elétrico no vácuo*. Esse resultado possui uma conseqüência importante. Imaginamos que o vácuo seja um espaço no qual não existe matéria, contudo no vácuo pode existir um campo elétrico e, portanto, ele pode possuir energia. Logo, o espaço 'vazio', afinal de contas, não precisa ser verdadeiramente vazio. Voltaremos a discutir essa idéia e usaremos a Equação (24.11), no Capítulo 32, relacionada à energia transportada por ondas eletromagnéticas.

ATENÇÃO Energia do campo elétrico é energia potencial elétrica É um erro conceitual comum supor que a energia do campo elétrico seja uma nova forma de energia, diferente da energia potencial elétrica descrita anteriormente. Isso *não* é verdade; trata-se simplesmente de outro modo de interpretar a energia potencial elétrica. Podemos considerar a energia de um dado sistema de cargas como uma propriedade dividida por todas as cargas, ou então podemos considerar a energia uma propriedade do campo elétrico criado pelas cargas. Qualquer uma das duas interpretações conduz ao mesmo valor da energia potencial.

Exemplo 24.7

TRANSFERÊNCIA DE CARGA E DE ENERGIA ENTRE CAPACITORES Na Figura 24.12, carregamos um capacitor de carga $C_1 = 8{,}0\ \mu$F conectando-o a uma fonte de energia potencial $V_0 = 120$ V (não mostrada na figura). A chave S está, inicialmente, aberta. Depois de carregar C_1, a fonte da diferença de potencial é desconectada. (a) Qual é a carga Q_0 sobre C_1 quando a chave S é mantida aberta? (b) Qual é a energia armazenada em C_1 quando a chave S é mantida aberta? (c) O capacitor de capacitância $C_2 = 4{,}0\ \mu$F está inicialmente descarregado. Depois de fechar a chave S, qual é a diferença de potencial através de cada capacitor e qual é a carga de cada capacitor? (d) Qual é a energia total do sistema depois que fechamos a chave S?

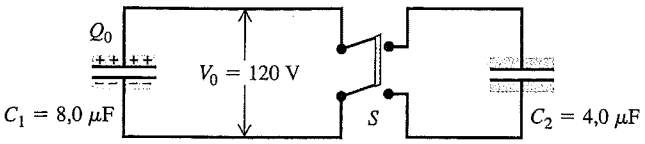


Figura 24.12 Quando a chave S está fechada, o capacitor carregado C_1 fica conectado ao capacitor descarregado C_2. A parte central da chave possui uma alça isolante; as cargas só podem ser transferidas entre os dois terminais superiores e entre os dois terminais inferiores dos capacitores.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: inicialmente, temos um capacitor único com uma dada diferença de potencial entre suas placas. Quando a chave é fechada, um fio conecta as placas superiores dos dois capacitores e outro fio conecta as placas inferiores; em outras palavras, os capacitores são ligados em paralelo.

PREPARAR: nos itens (a) e (b), obtemos a carga e a energia armazenada para o capacitor C_1 usando as equações (24.1) e (24.9), respectivamente. No item (c), usamos a propriedade da ligação em paralelo para determinar como a carga Q_0 é compartilhada entre os dois capacitores. No item (d), novamente usamos a Equação (24.9) para determinar a energia armazenada nos capacitores C_1 e C_2; a energia total é a soma desses valores.

EXECUTAR: (a) A carga Q_0 no capacitor de capacitância C_1 é

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8{,}0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

(b) A energia armazenada inicialmente no capacitor é dada por

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0{,}058\ \text{J}$$

(c) Quando a chave é fechada, a carga positiva Q_0 fica distribuída sobre as placas superiores dos dois capacitores; e a carga negativa $-Q$ fica distribuída sobre as placas inferiores. Sejam Q_1 e Q_2 os módulos das cargas finais dos dois capacitores. De acordo com a conservação da carga,

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

No estado final, quando as cargas não se movem mais, as duas placas superiores ficam com o mesmo potencial; elas estão conectadas por um fio condutor e, portanto, formam uma única superfície equipotencial. As duas placas inferiores também estão no mesmo potencial, diferente do potencial das placas superiores. A diferença de potencial final V entre as placas é, portanto, a mesma para ambos os capacitores; em outras palavras, trata-se de uma ligação em paralelo. As cargas dos capacitores são

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Quando combinamos essa relação à equação precedente, baseada na conservação da carga, encontramos

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8{,}0\ \mu\text{F} + 4{,}0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$

$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

(d) A energia final do sistema é a soma das energias armazenadas em cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}Q_1 V + \frac{1}{2}Q_2 V = \frac{1}{2}Q_0 V$$

$$= \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0{,}038\ \text{J}$$

AVALIAR: esse resultado é menor do que a energia original $U_{\text{inicial}} = 0{,}058$ J; a diferença foi convertida em outra forma de energia. Os condutores tornam-se ligeiramente mais quentes por causa da resistência, e outra parte da energia foi irradiada sob a forma de ondas eletromagnéticas. Estudaremos o comportamento de circuitos com capacitores com mais detalhes nos capítulos 26 e 31.

Exemplo 24.8

ENERGIA DO CAMPO ELÉTRICO Suponha que você queira armazenar 1,0 J de energia potencial elétrica em um volume de 1,0 m^3 no vácuo. (a) Qual é o módulo do campo elétrico necessário? (b) Caso o módulo do campo elétrico fosse dez vezes maior, qual seria a quantidade de energia armazenada por metro cúbico?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos a relação entre o módulo do campo elétrico E e a densidade de energia u, que é igual à energia do campo elétrico dividida pelo volume ocupado pelo campo.

PREPARAR: no item (a) usamos a informação fornecida para achar u, a seguir, aplicamos a Equação (24.11) para obter o valor requerido de E. Essa mesma equação nos fornece a relação entre as variações em E e as variações correspondentes em u.

EXECUTAR: (a) A densidade de energia desejada é $u = (1{,}0\ \text{J})/\text{m}^3$. Explicitando E da Equação (24.11), obtemos:

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1{,}0\ \text{J}/\text{m}^3)}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$
$$= 4{,}75 \times 10^5\ \text{N/C} = 4{,}75 \times 10^5\ \text{V/m}$$

(b) A Equação (24.11) mostra que u é proporcional a E^2. Quando E aumenta de um fator 10, u aumenta de um fator $10^2 = 100$ e a densidade de energia passa para 100 J/m^3.

AVALIAR: o valor de E obtido no item (a) é considerável, correspondendo a uma diferença de potencial de quase meio milhão de volts por uma distância de 1 metro. Veremos na Seção 24.4 que, na prática, os módulos do campo em isolantes podem ser tão grandes quanto isso ou ainda maiores.

Exemplo 24.9

DOIS MÉTODOS PARA CALCULAR A ENERGIA ARMAZENADA EM UM CAPACITOR O capacitor esférico descrito no Exemplo 24.3 (Seção 24.1) possui cargas $+Q$ e $-Q$ sobre os condutores do interior e do exterior da esfera. Calcule a energia potencial elétrica armazenada no capacitor (a) usando a capacitância C encontrada no Exemplo 24.3; (b) integrando a densidade de energia do campo elétrico.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema nos leva a pensar sobre a energia armazenada em um capacitor, U, de duas formas diferentes: em termos do trabalho realizado para colocar cargas nos dois condutores, $U = Q^2/2C$, e em termos da energia existente no campo elétrico entre os dois condutores. Ambas as descrições se equivalem, portanto ambas devem fornecer o mesmo resultado para U.

PREPARAR: no Exemplo 24.3, encontramos a capacitância C e o módulo do campo E entre os condutores. Obtivemos a energia armazenada U no item (a) usando a expressão para C na Equação (24.9). No item (b) usamos a expressão para E na Equação (24.11) para achar a densidade de energia no campo elétrico, u, entre os condutores. O módulo do campo depende da distância r do centro do capacitor, portanto u também depende de r. Logo, não podemos determinar U simplesmente multiplicando u pelo volume existente entre os condutores; em vez disso, devemos integrar u sobre esse volume.

EXECUTAR: (a) pelo Exemplo 24.3, verificamos que um capacitor esférico possui capacitância

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

em que r_a e r_b são, respectivamente, o raio do condutor interno e o raio do condutor externo. De acordo com a Equação (24.9), a energia armazenada nesse capacitor é

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

(b) O campo elétrico no volume entre os dois condutores esféricos possui módulo $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. O campo elétrico é igual a zero no interior da esfera interna e fora da superfície interna da esfera externa, visto que uma superfície gaussiana com raio $r < r_a$ ou $r > r_b$ engloba uma região com carga elétrica total igual a zero. Portanto, a densidade de energia só não é nula no espaço entre as esferas ($r_a < r < r_b$). Nessa região,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

A densidade de energia *não* é uniforme: ela diminui rapidamente à medida que a distância em relação ao centro do capacitor aumenta. Para calcularmos a energia elétrica total armazenada no campo elétrico, devemos integrar u (a energia por unidade de volume) sobre o volume entre a esfera condutora interna e a esfera externa. Dividindo esse volume em camadas esféricas de raio r, área superficial $4\pi r^2$, espessura dr e volume $dV = 4\pi r^2 dr$, obtemos

$$U = \int u\,dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\,dr$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right)$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

AVALIAR: obtivemos o mesmo resultado para U por ambos os métodos. Enfatizamos que a energia potencial elétrica pode ser associada à distribuição das *cargas*, como na parte (a), ou ao *campo*, como na parte (b); independentemente do ponto de vista que você escolha, a quantidade de energia armazenada é a mesma.

Teste sua compreensão da Seção 24.3 Queremos conectar um capacitor de 4 μF a outro de 8 μF. (a) Com qual tipo de ligação o capacitor de 4 μF terá uma quantidade maior de *energia armazenada* do que o capacitor de 8 μF? (i) Em série; (ii) em paralelo; (iii) ora em série, ora em paralelo; (iv) nem em série nem em paralelo. ∎

24.4 Dielétricos

Quase todos os capacitores possuem entre suas placas condutoras um material isolante, ou **dielétrico**. Um tipo comum de capacitor usa como placas longas tiras metálicas, enroladas e separadas por tiras de um plástico, tal

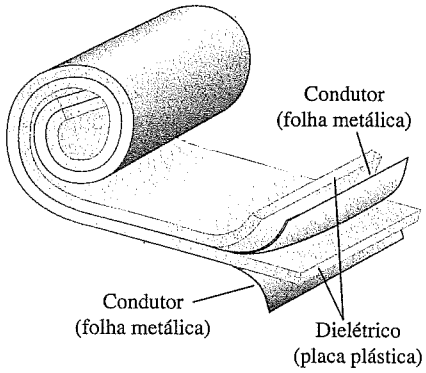


Figura 24.13 Um tipo comum de capacitor utiliza placas dielétricas para separar os condutores.

como o milar. Um 'sanduíche' feito com esses materiais é enrolado, formando uma unidade que pode fornecer uma capacitância de diversos microfarads em uma embalagem compacta (Figura 24.13).

Colocar um dielétrico sólido entre as placas de um capacitor possui três objetivos. Em primeiro lugar, resolve o problema mecânico de manter duas grandes placas metálicas separadas por uma distância muito pequena, sem que ocorra contato entre elas.

Em segundo lugar, usando um dielétrico torna-se possível aumentar a diferença de potencial máxima entre as placas. Conforme dissemos na Seção 23.3, qualquer material isolante, quando submetido a um campo elétrico suficientemente elevado, sofre uma **ruptura dielétrica**, uma ionização parcial que permite a condução através dele. Muitos materiais dielétricos conseguem suportar campos elétricos mais elevados do que o do ar, sem que ocorra ruptura do isolamento. Portanto, o uso de um dielétrico permite a sustentação de uma diferença de potencial mais elevada V e, assim, o capacitor pode acumular maior quantidade de carga e de energia.

Em terceiro lugar, a capacitância de um capacitor com dimensões fixas, quando existe um dielétrico entre as placas, é *maior* do que a capacitância do mesmo capacitor quando há vácuo entre as placas. Podemos verificar esse efeito usando um *eletrômetro* sensível, um dispositivo que permite a medida da diferença de potencial entre dois condutores, sem que haja apreciável fluxo de carga de um condutor para o outro. A Figura 24.14a mostra um eletrômetro conectado às placas de um capacitor carregado, sendo Q o módulo da carga de cada placa e V_0 a diferença de potencial. Quando inserimos entre as placas um dielétrico descarregado, tal como vidro, parafina ou poliestireno, a experiência mostra que a diferença de potencial *diminui* para um valor menor V (Figura 24.14b). Quando removemos o dielétrico, a diferença de potencial retorna a seu valor original V_0, o que mostra que as cargas originais do capacitor não se alteram.

A capacitância original C_0 é dada por $C_0 = Q/V_0$, e a capacitância quando o dielétrico está presente é dada por $C = Q/V$. A carga Q é a mesma nos dois casos e, como V é menor do que V_0, concluímos que a capacitância C com o dielétrico é *maior* do que C_0. Quando o espaço entre as placas se encontra completamente preenchido com o dielétrico, a razão C sobre C_0 (que é igual à razão entre V_0 e V) denomina-se **constante dielétrica** K do material:

$$K = \frac{C}{C_0} \tag{24.12}$$

(definição de constante dielétrica)

Quando a carga é constante, $Q = C_0V_0 = CV$ e $C/C_0 = V_0/V$. Nesse caso, a Equação (24.12) pode ser reescrita na forma

$$V = \frac{V_0}{K} \tag{24.13}$$

(quando Q é constante)

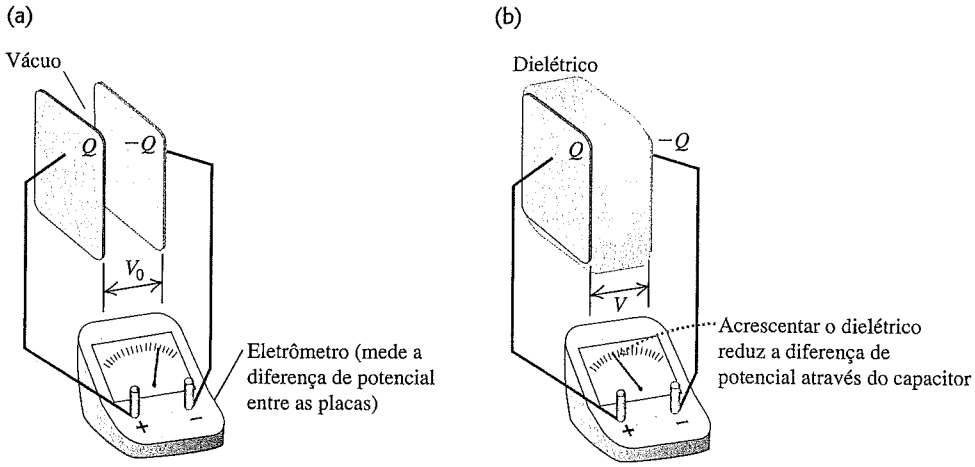


Figura 24.14 Efeito de um dielétrico colocado entre as placas de um capacitor com placas paralelas. (a) Para uma dada carga, a diferença de potencial é V_0. (b) Para a mesma carga, porém com um dielétrico colocado entre as placas, a diferença de potencial V é menor do que V_0.

Quando o dielétrico está presente, a diferença de potencial para uma carga fixa Q é *reduzida* de um fator igual a K.

A constante dielétrica K é um número puro. Como C é sempre maior do que C_0, K é sempre maior do que 1. Alguns valores de K são fornecidos na Tabela 24.1. Para o vácuo, $K = 1$, por definição. Para o ar em temperatura e pressão comuns, K é aproximadamente igual a 1,0006; esse valor é tão próximo de 1 que, para as aplicações práticas, um capacitor no ar é equivalente a um capacitor no vácuo. Note que, embora a água possua um valor de K elevado, ela não é um dielétrico prático para ser usado em capacitores. A razão é que, embora a água pura seja um condutor pobre, ela também é um excelente solvente iônico. Qualquer íon dissolvido na água produz um fluxo de cargas entre as placas, de modo que o capacitor se descarrega.

Tabela 24.1 Valores da constante dielétrica k para 20°C

Material	K	Material	K
Vácuo	1	Cloreto de polivinila	3,18
Ar (1 atm)	1,00059	Plexiglas	3,40
Ar (100 atm)	1,0548	Vidro	5–10
Teflon	2,1	Neopreno	6,70
Polietileno	2,25	Germânio	16
Benzeno	2,28	Glicerina	42,5
Mica	3–6	Água	80,4
Miliar	3,1	Titanato de estrôncio	310

Nenhum dielétrico real é um isolante perfeito. Portanto, há sempre uma *corrente de fuga* entre as placas carregadas de um capacitor com um dielétrico. Na Seção 24.2, ignoramos tacitamente esse efeito quando deduzimos as expressões para a capacitância equivalente de capacitores em série, Equação (24.5), e de capacitores em paralelo, Equação (24.7). Mas, caso exista uma corrente de fuga fluindo durante um tempo muito longo, capaz de alterar os valores das cargas que usamos para deduzir as equações (24.5) e (24.7), essas equações talvez já não sejam tão precisas.

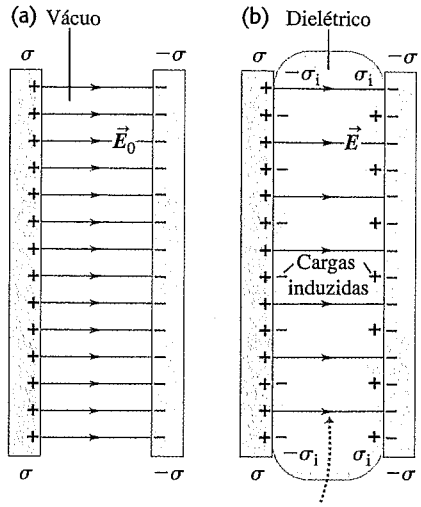
Carga induzida e polarização

Quando um material dielétrico é inserido entre as placas, enquanto a carga é mantida constante, a diferença de potencial entre as placas diminui de um fator K. Portanto, o campo elétrico entre as placas deve diminuir do mesmo fator. Sendo E_0 o valor no vácuo, quando o dielétrico está presente o valor é igual a E, então

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad (24.14)$$

(quando Q é constante)

Visto que o módulo do campo elétrico é menor quando o dielétrico está presente, a densidade de cargas superficial (que produz o campo) também deve ser menor. A carga superficial sobre as placas condutoras não varia, porém surge uma carga *induzida*



Para uma dada densidade de carga σ, as cargas induzidas sobre as superfícies dielétricas reduzem o campo elétrico entre as placas.

Figura 24.15 Linhas do campo elétrico com (a) vácuo entre as placas e (b) dielétrico entre as placas.

com um sinal oposto ao da carga da placa em cada superfície do material dielétrico (Figura 24.15). O dielétrico estava, inicialmente, neutro e deve permanecer eletricamente neutro; as cargas induzidas na superfície surgem em conseqüência de uma *redistribuição* das cargas positivas e negativas no interior do material dielétrico, um fenômeno denominado **polarização**. Na Seção 21.2, abordamos a polarização; sugerimos que você leia novamente a discussão feita na Figura 21.8. Vamos supor que a carga superficial induzida seja *diretamente proporcional* ao módulo E do campo elétrico no material; isso é o que efetivamente ocorre com muitos dielétricos comuns. (Essa proporcionalidade direta é análoga à lei de Hooke para uma mola.) Nessas circunstâncias, K é constante para qualquer material particular. Quando o campo elétrico é muito forte ou quando o dielétrico é feito com certos materiais cristalinos, a relação entre a carga induzida e o campo elétrico pode ser mais complexa; tais casos não serão considerados aqui.

Para uma dada densidade de carga σ, as cargas induzidas sobre as superfícies dielétricas reduzem o campo elétrico entre as placas.

Podemos deduzir uma relação entre essa carga superficial induzida e a carga sobre as placas. Vamos designar o módulo da carga induzida por unidade de área da superfície do dielétrico (a densidade de carga superficial induzida) pelo símbolo σ_i. O módulo da densidade das cargas superficial sobre as placas do capacitor é designado por σ, como de costume.

Então a densidade de carga superficial *total* em cada lado do capacitor é igual a $(\sigma - \sigma_i)$, conforme indica a Figura 24.15b. Como vimos nos exemplos 21.13 (Seção 21.5) e 22.8 (Seção 22.4), o campo entre as placas está relacionado à densidade de cargas líquidas superficial por $E = \sigma_{tot}/\epsilon_0$. Com e sem o dielétrico, respectivamente, temos

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Usando essas expressões na Equação (24.14) e reagrupando o resultado, encontramos

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \tag{24.16}$$

(densidade de carga superficial induzida)

Essa equação mostra que, quando K é muito grande, σ_i é aproximadamente igual a σ. Nesse caso, σ_i praticamente cancela σ, e o campo e a diferença de potencial são muito menores do que seus respectivos valores no vácuo.

O produto $K\epsilon_0$ denomina-se **permissividade** do dielétrico, designado por ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \tag{24.17}$$

(definição de permissividade)

Com base em ϵ, podemos expressar o campo elétrico dentro do dielétrico por meio da relação

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

A capacitância de um capacitor com um material dielétrico entre as placas é dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \tag{24.19}$$

(capacitor com placas paralelas, dielétrico entre as placas)

Podemos repetir a dedução da Equação (24.11) para a densidade de energia u em um campo elétrico para o caso no qual exista um dielétrico entre as placas. O resultado é

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{24.20}$$

(densidade de energia elétrica em um dielétrico)

No espaço vazio, temos $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$, e as equações (24.19) e (24.20) se reduzem às equações (24.2) e (24.11), respectivamente, para um capacitor com placas paralelas no vácuo. Por essa razão, ϵ_0 é algumas vezes chamado de 'permissividade do vácuo' ou 'permissividade do espaço vazio'. Como K é um número puro, ϵ e ϵ_0 possuem as mesmas unidades, dadas por F/m ou $C^2/N \cdot m^2$.

A Equação (24.19) indica que capacitâncias extremamente altas podem ser obtidas com placas que possuem uma grande área de superfície A, e estão separadas por uma pequena distância d por um dielétrico com um grande valor de K. Em um *capacitor eletrolítico de duas camadas*, minúsculos grânulos de carbono aderem a cada placa: o valor de A é a área de superfície combinada dos grânulos, que pode ser enorme. As placas com aderência de grânulos são separadas por uma placa dielétrica muito delgada. Um capacitor desse tipo pode ter uma capacitância de 5000 farads, e ainda caber na palma da mão (compare com o Exemplo 24.1 na Seção 24.1).

Vários dispositivos práticos fazem uso da forma com a qual um capacitor responde a uma variação em uma constante dielétrica. Um exemplo disso é um detector elétrico de metal, usado por prestadores de serviços domésticos para localizar objetos metálicos por trás de uma parede.

Trata-se de uma placa de metal com circuito associado. A placa atua como a metade de um capacitor, enquanto a parede atua como a outra metade. Se o detector de metal passa sobre um objeto de metal, a constante dielétrica efetiva para o capacitor varia, alterando a capacitância e acionando um sinal.

Estratégia para a solução de problemas 24.2

DIELÉTRICOS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: as relações apresentadas nesta seção serão úteis sempre que houver um campo elétrico em um dielétrico, tal como um dielétrico entre as placas carregadas de um capacitor. Geralmente, você será solicitado a relacionar a diferença de potencial entre as placas, o campo elétrico no capacitor, a densidade de carga nas placas do capacitor e a densidade de carga induzida nas superfícies do capacitor.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho da situação.
2. Identifique as incógnitas e escolha quais das principais equações desta seção serão úteis na determinação dessas variáveis.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Em problemas do tipo ilustrado no Exemplo 24.10, é fácil você se perder em um labirinto de fórmulas. A cada etapa, pergunte-se qual é o significado de cada símbolo da solução. Por exemplo, faça uma clara distinção entre carga e densidade de carga, entre campo elétrico e diferença de potencial.
2. Ao fazer os cálculos, sempre confira a consistência das unidades; essa tarefa é mais complexa para grandezas elétricas do que para grandezas mecânicas. As distâncias são sempre em metros. Lembre-se de que um microfarad é igual a 10^{-6} farad e assim por diante. Não confunda o valor numérico de ϵ_0 com o valor de $1/4\pi\epsilon_0$. Existem dois conjuntos alternativos de unidades SI para o módulo do campo elétrico, N/C e V/m. As unidades de ϵ_0 são F/m e $C^2/N \cdot m^2$.

AVALIAR *sua resposta*: ao conferir valores numéricos, lembre-se de que, na presença de um dielétrico, (a) a capacitância é sempre maior do que a capacitância sem o dielétrico; (b) para uma dada quantidade de carga no capacitor, o campo elétrico e a diferença de potencial são menores do que os respectivos valores sem o dielétrico; e (c) a densidade de carga superficial induzida σ_i sobre o dielétrico possui um módulo sempre menor do que o módulo da densidade de carga superficial σ sobre as placas do capacitor.

Exemplo 24.10

CAPACITOR COM E SEM DIELÉTRICO Suponha que cada uma das placas paralelas na Figura 24.15 possua uma área igual a 2000 cm^2 ($2{,}0 \times 10^{-1}$ m^2) e que a distância entre as placas seja

igual a 1,0 cm ($1,0 \times 10^{-2}$ m). O capacitor está conectado a uma fonte de alimentação e é carregado até que a diferença de potencial atinja um valor $V_0 = 3000$ V = 3,0 kV. A seguir, ele é desconectado da fonte de alimentação e uma camada de um material plástico isolante é inserida entre as placas do capacitor, preenchendo completamente o espaço entre elas. Verificamos que a diferença potencial diminui para 1000 V, enquanto a carga de cada capacitor permanece constante. Calcule (a) a capacitância original C_0; (b) o módulo da carga Q de cada placa; (c) a capacitância C depois de inserido o dielétrico; (d) a constante dielétrica K do dielétrico; (e) a permissividade ϵ do dielétrico; (f) o módulo da carga induzida Q_i em cada face do dielétrico; (g) o campo elétrico original E_0 entre as placas; e (h) o campo elétrico E depois que o dielétrico é inserido.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema utiliza a maioria das relações apresentadas para capacitores e dielétricos.

PREPARAR: muitas dessas grandezas podem ser obtidas de diversas maneiras. Aqui apresentamos uma solução mais usual; tente outros raciocínios para obter a solução e compare os métodos usados.

EXECUTAR: (a) Na existência de vácuo entre as placas, usamos a Equação (24.19) com $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8,85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}) \frac{2,0 \times 10^{-1}\ \text{m}^2}{1,0 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 1,77 \times 10^{-10}\ \text{F} = 177\ \text{pF}$$

(b) Usando a definição de capacitância, dada pela Equação (24.1),

$$Q = C_0 V_0 = (1,77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3,0 \times 10^3\ \text{V})$$
$$= 5,31 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0,531\ \mu\text{C}$$

(c) Quando os dielétricos são inseridos, a carga permanece a mesma, mas o potencial diminui para $V = 1000$ V. Logo, de acordo com a Equação (24.1), a nova capacitância é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5,31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{1,0 \times 10^3\ \text{V}} = 5,31 \times 10^{-10}\ \text{F} = 531\ \text{pF}$$

(d) Pela Equação (24.12), a constante do dielétrico é

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5,31 \times 10^{-10}\ \text{F}}{1,77 \times 10^{-10}\ \text{F}} = \frac{531\ \text{pF}}{177\ \text{pF}} = 3,0$$

Alternativamente, pela Equação (24.13)

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \text{V}}{1000\ \text{V}} = 3,0$$

(e) Usando o resultado obtido para K do item (d) na Equação (24.17), a permissividade é

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3,0)\,(8,85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)$$
$$= 2,66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

(f) Multiplicando a Equação (24.15) pela área de cada placa, obtemos a carga induzida $Q_i = \sigma_i A$ em termos da carga $Q = \sigma A$ sobre cada placa:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5,31 \times 10^{-7}\ \text{C})\left(1 - \frac{1}{3,0}\right)$$
$$= 3,54 \times 10^{-7}\ \text{C}$$

(g) Como o campo elétrico entre as placas é uniforme, seu módulo é a diferença de potencial dividida pela separação entre as placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1,0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3,0 \times 10^5\ \text{V/m}$$

(h) Inserindo-se a nova diferença de potencial após o dielétrico,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1,0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1,0 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ou, pela Equação (24.17),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5,31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2,66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2,0 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1,0 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ou, Equação (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$
$$= \frac{(5,31 - 3,54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8,85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2,0 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1,0 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ou, pela Equação (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3,0 \times 10^5\ \text{V/m}}{3,0} = 1,0 \times 10^5\ \text{V/m}$$

AVALIAR: é sempre recomendável conferir os resultados por meio de outras formas de cálculo, como fizemos nos itens (d) e (h). Nossos resultados indicam que a inserção do dielétrico aumentou a capacitância por um fator de $K = 3,0$ e reduziu o campo elétrico entre as placas por um fator de $1/K = 1/3,0$. Isso ocorreu em decorrência do desenvolvimento de cargas induzidas nas faces do dielétrico de módulo $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3,0) = 0,667Q$.

Exemplo 24.11

ARMAZENAMENTO DE ENERGIA COM E SEM DIELÉTRICO

Calcule a energia total acumulada no campo elétrico do capacitor do Exemplo 24.10 e a densidade de energia, antes e depois de o dielétrico ser inserido.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste problema, devemos estender a análise do Exemplo 24.10, de modo a incluir os conceitos de energia armazenada em um capacitor e a energia do campo elétrico.

PREPARAR: usamos a Equação (24.9) para determinar a energia armazenada antes e depois da inserção do dielétrico, e a Equação (24.20) para obter a densidade de energia.

EXECUTAR: seja U_0 a energia original e U a energia com o dielétrico. Pela Equação (24.9),

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2}(1,77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 7,97 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}(5,31 \times 10^{-10}\ \text{F})(1000\ \text{V})^2 = 2,66 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

A energia final é igual a um terço da energia inicial.

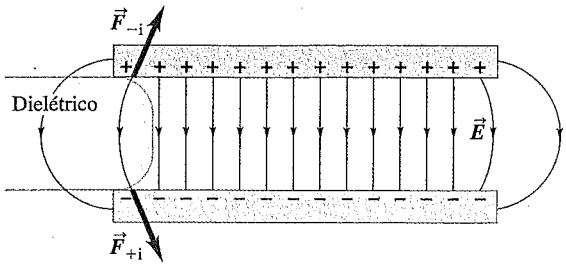


Figura 24.16 A deformação do campo elétrico nas bordas do capacitor produz forças $\vec{F}_{-i}$ e $\vec{F}_{+i}$ sobre as cargas induzidas negativa e positiva na superfície de um dielétrico, atraindo o dielétrico para o capacitor.

A densidade de energia inicial é dada pela Equação (24.20) com $K = 1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})(3{,}0 \times 10^5\,\mathrm{N/C})^2$$
$$= 0{,}398\,\mathrm{J/m^3}$$

Com o dielétrico,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(2{,}66 \times 10^{-11}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})(1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{N/C})^2$$
$$= 0{,}133\,\mathrm{J/m^3}$$

A densidade de energia com o dielétrico é igual a um terço da densidade de energia original.

AVALIAR: podemos conferir o resultado obtido para u_0 observando que o volume entre as placas é $V = (0{,}200\ \mathrm{m})^2\ (0{,}0100\ \mathrm{m}) = 0{,}00200\ \mathrm{m}^3$. Como o campo elétrico é uniforme entre as placas, u_0 é uniforme também e a densidade de energia é simplesmente a energia armazenada dividida pelo volume:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7{,}97 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}}{0{,}00200\ \mathrm{m}^3} = 0{,}398\,\mathrm{J/m^3}$$

o que está de acordo com a resposta obtida anteriormente. Você deve usar o mesmo método para verificar o valor obtido para U, a densidade de energia com o dielétrico.

Podemos generalizar os resultados desse exemplo. Quando um dielétrico é inserido entre as placas de um capacitor enquanto a carga de cada placa permanece constante, a permissividade cresce de um fator K (a constante dielétrica), o campo elétrico diminui de $1/K$ e a densidade de energia $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ diminui de um fator $1/K$. Para onde foi a energia? A resposta está no campo nas bordas de um capacitor real com placas paralelas. Como mostra a Figura 24.16, o campo exerce uma força que atrai o dielétrico, tendendo a puxar o dielétrico para o interior das placas do capacitor e realizando trabalho sobre o dielétrico à medida que ele se desloca. Poderíamos prender uma mola na parte inferior do dielétrico da Figura 24.16 e usar essa força para deformar a mola. Como o trabalho é realizado pelo campo, a densidade de energia do campo diminui.

Ruptura dielétrica

Afirmamos anteriormente que, quando um dielétrico é submetido a um campo elétrico suficientemente forte, ocorre uma *ruptura dielétrica* e o dielétrico se transforma em um condutor (Figura 24.17). Isso acontece quando o campo elétrico é tão forte que desloca elétrons fracamente ligados às moléculas, que colidem com outros elétrons, liberando ainda mais elétrons. Essa avalanche de cargas móveis forma uma centelha ou descarga, que geralmente se inicia repentinamente.

Tabela 24.2 Constante dielétrica e rigidez dielétrica de alguns materiais isolantes

Material	Constante dielétrica, K	Rigidez dielétrica, $E_{máx}$ (V/m)
Policarbonato	2,8	3×10^7
Poliéster	3,3	6×10^7
Polipropileno	2,2	7×10^7
Poliestireno	2,6	2×10^7
Vidro pirex	4,7	1×10^7

Em virtude da ruptura dielétrica, os capacitores sempre possuem um valor de voltagem máxima impresso sobre o capacitor. Quando um capacitor é submetido a uma tensão mais elevada do que esse valor máximo, pode ocorrer um arco voltaico através das camadas do capacitor, queimando ou fundindo localmente e formando um buraco no seio do material. Esse arco cria um caminho condutor (um curto-circuito) entre os condutores. Caso permaneça um caminho condutor depois de o arco se extinguir, o dispositivo não poderá ser mais usado como um capacitor.

O módulo do campo elétrico máximo que um material pode suportar sem que ocorra ruptura dielétrica denomina-se **rigidez dielétrica**. Essa grandeza é significativamente influenciada pela temperatura, por traços de impureza, por pequenas irregularidades nos eletrodos metálicos e por outros fatores difíceis de controlar. Por essa razão, podemos fornecer apenas valores aproximados para a rigidez dielétrica. A rigidez dielétrica do ar seco é aproximadamente igual a 3×10^6 V/m. Alguns valores para a rigidez dielétrica de certos materiais isolantes mais comuns são indicados na Tabela 24.2. Note que todos esses valores são substancialmente maiores do que o valor do ar. Por exemplo, uma cama-

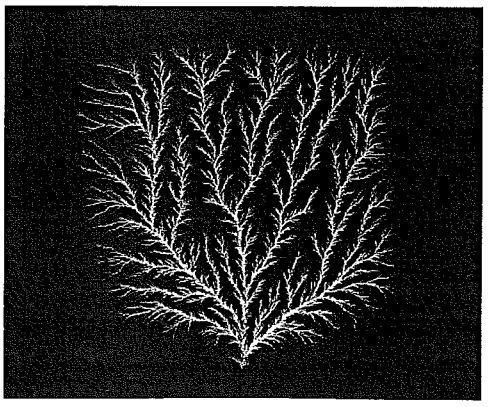


Figura 24.17 Um campo elétrico extremamente forte produziu ruptura dielétrica neste bloco de plexiglas. O escoamento resultante das cargas gravou esta configuração no bloco.

da de policarbonato com espessura igual a 0,01 mm (a menor espessura aproximada possível em aplicações práticas) é dez vezes maior do que a rigidez dielétrica do ar e pode suportar uma voltagem máxima aproximadamente igual a $(3 \times 10^7 \text{ V/m})(1 \times 10^{-5} \text{ m}) = 300 \text{ V}$.

Teste sua compreensão da Seção 24.4 O espaço existente entre as placas de um capacitor isolado com placas paralelas está preenchido por um dielétrico com constante dielétrica K. As duas placas do capacitor possuem cargas Q e $-Q$. Você retira o dielétrico. Supondo que as cargas não se alterem, qual será a variação na energia do capacitor ao se remover o dielétrico? (i) Aumentará; (ii) diminuirá; (iii) permanecerá constante. ▮

*24.5 Modelo molecular da carga induzida

Na Seção 24.4, discutimos as cargas superficiais induzidas em um dielétrico no interior de um campo elétrico. Vamos agora examinar como surgem essas cargas superficiais. Se o material fosse um *condutor*, a resposta seria simples. Os condutores possuem cargas que podem se mover livremente e, quando um campo elétrico está presente, algumas cargas se redistribuem ao longo da superfície do material, de modo que, no interior do material, o campo elétrico é igual a zero. Contudo, em um dielétrico ideal não existe *nenhuma* carga livre capaz de se mover; então como pode surgir uma carga distribuída na superfície?

Para entendermos isso, devemos estudar novamente a redistribuição das cargas em nível *molecular*. Algumas moléculas, tais como a molécula de H_2O e de N_2O, possuem quantidades iguais de cargas positivas e negativas, porém a distribuição não apresenta simetria esférica, com

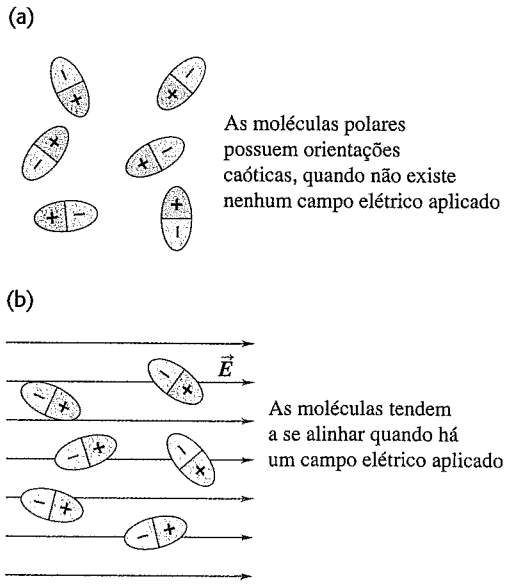


Figura 24.18 Moléculas polares (a) sem e (b) com um campo elétrico aplicado $\vec{E}$.

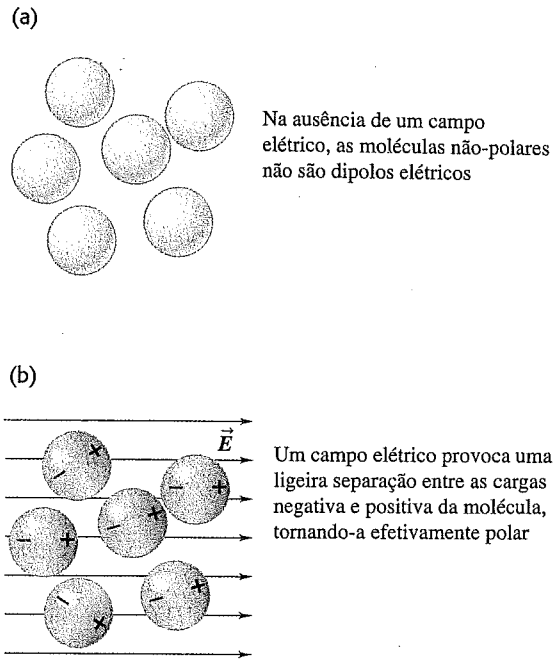


Figura 24.19 Moléculas não-polares (a) sem e (b) com um campo elétrico aplicado $\vec{E}$.

um excesso de cargas positivas concentrado em um lado da molécula e um excesso de cargas negativas concentrado no outro lado. Conforme descrevemos na Seção 21.7, esse arranjo denomina-se *dipolo elétrico* e a molécula chama-se *molécula polar*. Quando não existe nenhum campo elétrico em um líquido ou gás com moléculas polares, as moléculas são orientadas ao acaso (Figura 24.18a). Contudo, quando colocadas em um campo elétrico, elas tendem a se orientar como na Figura 24.18b, em virtude dos torques produzidos pelas forças elétricas descritas na Seção 21.7. Em razão da agitação térmica, o alinhamento das moléculas na direção do campo elétrico $\vec{E}$ não é perfeito.

Mesmo no caso de uma molécula que *não* é polar, ela pode se *tornar* um dipolo quando submetida a um campo elétrico, pois o campo atrai as cargas positivas no sentido do campo e empurra as cargas negativas no sentido oposto. Isso produz uma redistribuição das cargas no interior da molécula (Figura 24.19). Esses dipolos denominam-se dipolos *induzidos*.

Tanto no caso de moléculas polares quanto no de não-polares, a redistribuição das cargas produzida pelo campo dá origem a uma camada de carga sobre a superfície de cada lado do material dielétrico (Figura 24.20). Essas camadas são as cargas superficiais descritas na Seção 24.4; a densidade de cargas superficiais é designada por σ_i. Essas cargas não se movem livre e indefinidamente, como no caso de um condutor, porque cada carga está ligada a uma molécula. Elas, de fato, são chamadas de **cargas ligadas** em oposição às **cargas livres**, que são fornecidas para as placas ou removidas das placas do capacitor. Na parte maciça do material, a carga líquida por unidade de volume permanece igual a zero. Conforme vimos, essa redistribui-

ção de cargas denomina-se *polarização* e dizemos que o material ficou *polarizado*.

As quatro partes da Figura 24.21 mostram o comportamento de um dielétrico quando ele é inserido no campo existente entre as placas de um capacitor com cargas opostas. A Figura 24.21a mostra o campo original. A Figura 24.21b indica o momento em que o dielétrico é inserido, porém antes do reagrupamento das cargas. A Figura 24.21c ilustra, por meio de setas finas, o campo adicional criado no dielétrico por suas cargas superficiais induzidas. Esse campo é *oposto* ao campo original, mas ele não é suficientemente forte para cancelar completamente o campo original, pois as cargas do dielétrico não se movem livre e indefinidamente. O campo elétrico resultante no dielétrico, indicado na Figura 24.21d, possui módulo menor. Na representação com linhas de força, algumas linhas de campo que deixam as cargas da placa positiva atravessam o dielétrico, enquanto outras terminam nas cargas induzidas sobre as faces do dielétrico.

Conforme discutimos na Seção 21.2, a polarização explica também como um corpo carregado, tal como um bastão de plástico, pode exercer uma força sobre um corpo *descarregado*, como fragmentos de papel ou uma bolinha de cortiça. A Figura 24.22 mostra uma esfera dielétrica descarregada B na presença de um campo radial de um corpo A com carga positiva. As cargas induzidas sobre B sofrem uma força orientada para a direita, enquanto as forças sobre as cargas induzidas negativas estão mais próximas de A do que as positivas e, portanto, estão em um campo mais forte. A força resultante para a esquerda é mais intensa do que a força resultante para a direita, portanto o corpo A atrai B, embora a carga líquida seja igual a zero. Ocorrerá sempre atração tanto no caso de a carga de A ser positiva quanto no caso de a carga de A ser negativa (veja a Figura 21.8). Além disso, esse efeito não é limitado aos dielétricos: um corpo condutor descarregado seria atraído do mesmo modo.

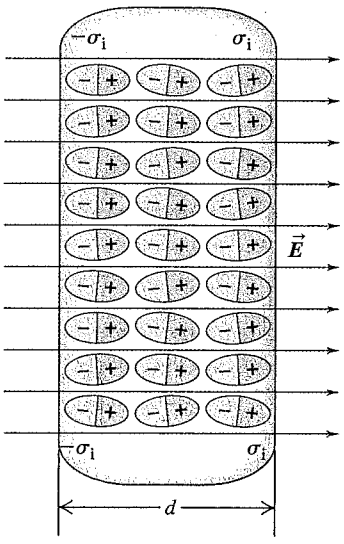


Figura 24.20 A polarização de um dielétrico em um campo elétrico $\vec{E}$ dá origem a camadas finas com cargas ligadas sobre suas superfícies, criando densidades de cargas superficiais induzidas σ_i e $-\sigma_i$. As dimensões das moléculas estão exageradas para maior clareza.

Teste sua compreensão da Seção 24.5 Um capacitor com placas paralelas possui cargas Q e $-Q$ sobre suas duas placas. Um dielétrico com $K = 3$ é inserido no espaço entre as placas, como indica a Figura 24.21. Classifique os seguintes módulos do campo elétrico, por ordem decrescente. (i) O campo antes da inserção do dielétrico; (ii) o campo resultante após a inserção do dielétrico; (iii) o campo em função das cargas ligadas. ∎

*24.6 Lei de Gauss em dielétricos

Podemos estender a análise da Seção 24.4 para reformular a lei de Gauss, de modo que ela seja particularmente útil para dielétricos. No alto da Figura 24.23, vemos uma ampliação da placa esquerda do capacitor e da superfície esquerda do dielétrico indicado na Figura 24.15b. Vamos aplicar a lei de Gauss usando a caixa retangular indicada na Figura 24.15b; A indica a área da superfície do lado direito e do lado esquerdo da caixa. O lado esquerdo está imerso no condutor que constitui a placa esquerda do capacitor e, portanto, o campo elétrico em todas as partes dessa superfície é igual a zero. O lado direito está imerso no dielétrico no qual o campo elétrico possui módulo E, e notamos que $E_\perp = 0$ em todas as partes das quatro faces restantes da caixa. A carga total no interior da caixa, incluindo as cargas da placa e as cargas induzidas sobre a superfície do dielétrico, é dada por $Q_{\text{inte}} = (\sigma - \sigma_i)$, de modo que a lei de Gauss fornece

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \tag{24.21}$$

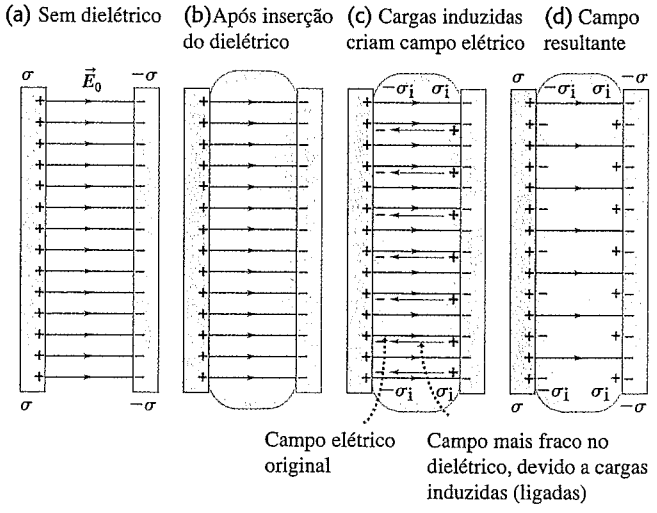


Figura 24.21 (a) Campo elétrico de módulo E_0 entre duas placas carregadas. (b) Inserção de um dielétrico com constante dielétrica K. (c) As cargas superficiais induzidas e seu campo. (d) Campo resultante de módulo E_0/K.

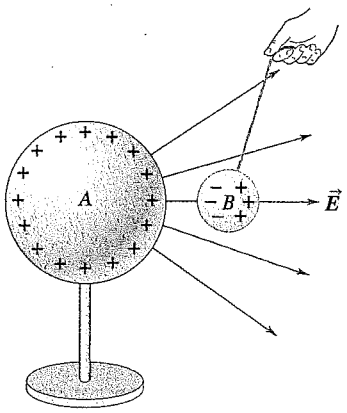


Figura 24.22 Uma esfera neutra *B* no campo elétrico radial de uma esfera com carga positiva *A* é atraída para a carga devido à polarização.

Essa equação escrita assim não esclarece muito, porque contém duas grandezas incógnitas: E no interior do dielétrico e a densidade de carga superficial induzida σ_i. Mas agora podemos usar a Equação (24.16), desenvolvida para essa mesma situação, a fim de simplificar a equação, eliminando σ_i. A Equação (24.16) fornece

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{ou} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

Combinando essa relação à Equação (24.21), encontramos

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

A Equação (24.22) mostra que o fluxo de $K\vec{E}$ e não o fluxo de $\vec{E}$, através da superfície gaussiana, na Figura 24.23, é igual à carga *livre* no interior da superfície σA dividida por ϵ_0. Verifica-se que, para *qualquer* superfície gaussiana, desde que a carga induzida seja proporcional ao campo elétrico no material, é possível reescrever a lei de Gauss na forma

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte-livre}}}{\epsilon_0} \tag{24.23}$$

(lei de Gauss em um dielétrico)

em que $Q_{\text{inte-livre}}$ é a carga *livre* (ou seja, a carga não-ligada) existente no interior da superfície gaussiana. A vantagem desse resultado é que o lado direito contém somente a carga *livre* sobre o condutor e não a carga ligada (induzida). De fato, embora não tenhamos demonstrado, a Equação (24.23) permanece válida mesmo quando diferentes partes da superfície gaussiana estão imersas em dielétricos com diferentes valores de K, desde que o valor de K em cada dielétrico seja independente do campo elétrico (que é usualmente o caso quando os campos elétricos não são muito fortes) e que adotemos o valor apropriado de K para cada ponto da superfície gaussiana.

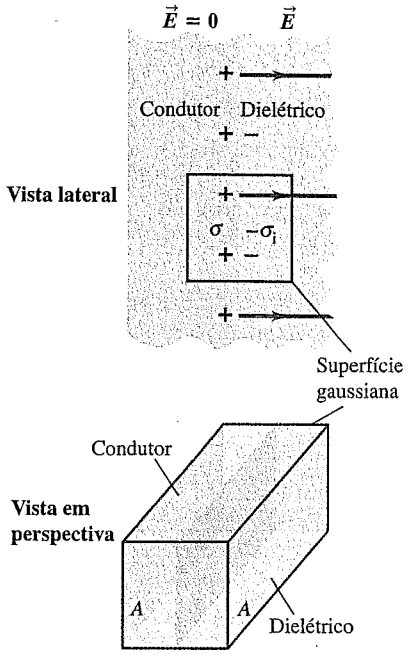


Figura 24.23 A lei de Gauss na presença de um dielétrico. Esta figura mostra uma ampliação da placa esquerda do capacitor indicado na Figura 24.15b. A superfície gaussiana é uma caixa retangular que fica metade no condutor e metade no dielétrico.

Exemplo 24.12

CAPACITOR ESFÉRICO COM DIELÉTRICO No capacitor esférico do Exemplo 24.3 (Seção 24.1), o volume entre as cascas esféricas concêntricas está cheio de um óleo isolante com uma constante dielétrica K. Use a lei de Gauss para calcular a capacitância.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se, essencialmente, do mesmo problema apresentado no Exemplo 24.3. A única diferença é a presença do dielétrico.

PREPARAR: como fizemos no Exemplo 24.3, usaremos uma superfície gaussiana esférica de raio r entre as duas esferas. Como um dielétrico está presente, aplicaremos a lei de Gauss na forma da Equação (24.23).

EXECUTAR: a simetria esférica do problema não se altera pela presença do dielétrico, de modo que temos

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint KE\, dA = KE \oint dA = (KE)\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

em que $\epsilon = K\epsilon_0$ é a permissividade do dielétrico (introduzida na Seção 24.4). Em comparação ao caso no qual existe vácuo entre as placas condutoras esféricas, o campo elétrico se reduz de um fator $1/K$. A diferença de potencial V_{ab} entre as cascas esféricas se reduz também de um fator $1/K$ e, portanto, a capacitância $C = Q/V_{ab}$ *aumenta* de um fator igual a K, tal como no caso de um capacitor com placas paralelas quando inserimos um dielétrico. Usando o resultado para o caso no qual existe vácuo do Exemplo 24.3, verificamos que a capacitância com o dielétrico é dada por

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

AVALIAR: neste caso, o dielétrico preenche por completo o volume entre os dois condutores, portanto a capacitância é apenas K vezes o valor sem a presença do dielétrico. O resultado se complica quando o dielétrico preenche apenas parcialmente esse volume (veja problema desafiador 24.76).

Teste sua compreensão da Seção 24.6 Uma carga puntiforme q é embutida em um dielétrico de constante dielétrica K. Em um ponto no interior do dielétrico, a uma distância r da carga puntiforme, qual é o módulo do campo elétrico? (i) $q/4\pi\epsilon_0 r^2$; (ii) $Kq/4\pi\epsilon_0 r^2$; (iii) $q/4\pi K\epsilon_0 r^2$; (iv) nenhuma dessas alternativas. ∎

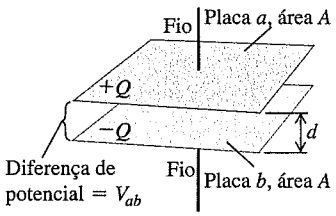
Resumo

Capacitores e capacitância: um capacitor é qualquer par de condutores separados por um material isolante. Quando o capacitor está carregado, existem cargas de mesmo módulo Q e sinais opostos sobre os dois condutores, e a diferença de potencial V_{ab} entre o condutor carregado positivamente e o condutor carregado negativamente é proporcional a Q. A capacitância C é definida como a razão de Q para V_{ab}. A unidade SI de capacitância é o farad (F): 1 F = 1 C/V.

Um capacitor com placas paralelas é feito com duas placas condutoras paralelas, cada uma delas com uma área A separada por uma distância d. Quando há vácuo entre as placas, a capacitância depende somente de A e d. Para outras formas geométricas, a capacitância pode ser obtida através da definição $C = Q/V_{ab}$ (exemplos 24.1 a 24.4).

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \tag{24.1}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{24.2}$$



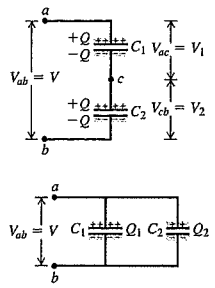
Capacitores em série e em paralelo: quando capacitores com capacitâncias C_1, C_2, C_3, ... são ligados em série, a capacitância equivalente C_{eq} é igual à soma das recíprocas das capacitâncias individuais. Quando os capacitores são ligados em paralelo, a capacitância equivalente C_{eq} é igual à soma das capacitâncias individuais (exemplos 24.5 e 24.6).

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \tag{24.5}$$

(capacitores em série)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \tag{24.7}$$

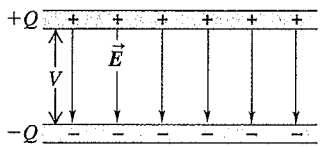
(capacitores em paralelo)



Energia em um capacitor: a energia U necessária para carregar um capacitor C até uma diferença de potencial V com carga Q é igual à energia armazenada no capacitor. Podemos dizer que essa energia está concentrada no campo elétrico entre os condutores; a densidade de energia u (energia por unidade de volume) é proporcional ao quadrado do módulo do campo elétrico (exemplos 24.7 a 24.9).

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{24.9}$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{24.11}$$



Dielétricos: quando o espaço entre os condutores está preenchido com um material dielétrico, a capacitância aumenta de um fator K, chamado de constante dielétrica do material. A grandeza ϵ_0 é designada como sendo a permissividade do dielétrico. Para uma quantidade de carga fixa sobre as placas do capacitor, as cargas induzidas sobre a superfície do dielétrico fazem diminuir o campo elétrico e a diferença de potencial entre as placas pelo mesmo fator K. A carga superficial é oriunda da polarização, um reagrupamento microscópico das cargas no dielétrico (Exemplo 24.10).

Quando o campo elétrico é suficientemente forte, o dielétrico se transforma em um condutor; isso ocorre em virtude da ruptura do dielétrico. A rigidez dielétrica é o módulo do campo elétrico máximo que o material pode suportar sem que ocorra ruptura dielétrica.

Em um dielétrico, a expressão para a densidade de energia é a mesma que na presença de vácuo, mas com ϵ_0 substituído por $\epsilon = K\epsilon$ (Exemplo 24.11).

A lei de Gauss em um dielétrico possui quase a mesma forma que na presença de vácuo, com duas principais diferenças: $\vec{E}$ é substituído por $K\vec{E}$ e Q_{inte} é substituído por $Q_{inte\text{-}livre}$, que inclui somente as cargas livres (não as cargas ligadas) no interior da superfície gaussiana (Exemplo 24.12).

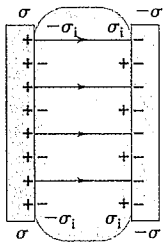
$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \tag{24.19}$$

(capacitor com placas paralelas, preenchido com dielétrico)

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{24.20}$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte-livre}}}{\epsilon_0} \qquad (24.23)$$

Dielétrico entre placas



Principais termos

capacitância, 106
capacitância equivalente, 111
capacitor, 106
capacitor com placas paralelas, 107
cargas ligadas, 122
cargas livres, 122
constante dielétrica, 117
densidade de energia, 114
dielétrico, 116
farad, 106
ligação em paralelo, 111
ligação em série, 110
permissividade, 118
polarização, 118
rigidez dielétrica, 121
ruptura dielétrica, 117

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

A Equação (24.9) indica que a energia armazenada em um capacitor com capacitância C e carga Q é $U = Q^2/2C$. Se a carga Q for duplicada, a energia armazenada aumenta por um fator de $2^2 = 4$. Note que, se o valor de Q for grande demais, o módulo do campo elétrico no interior do capacitor excederá a rigidez dielétrica do material entre as placas, provocando uma ruptura dielétrica (Seção 24.4). Isso impõe um limite prático à quantidade de energia que pode ser armazenada.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

24.1 Resposta: (iii) A capacitância não depende do valor da carga Q. Dobrar o valor de Q provoca a duplicação da diferença de potencial V_{ab}, portanto a capacitância $C = Q/V_{ab}$ permanece constante. Essas afirmações são verdadeiras, independentemente da forma geométrica do capacitor.

24.2 Respostas: (a) (i), (b) (iv) Em uma ligação em série, os dois capacitores possuem a mesma carga Q, mas não a mesma diferença de potencial $V_{ab} = Q/C$; o capacitor com a menor capacitância C possui a maior diferença de potencial. Em uma ligação em paralelo, os dois capacitores possuem a mesma diferença de potencial V_{ab}, mas cargas diferentes $Q = CV_{ab}$; o capacitor com maior capacitância C possui carga maior. Logo, um capacitor de 4 μF terá uma diferença de potencial maior do que um capacitor de 8 μF, se os dois estiverem conectados em série. O capacitor de 4 μF não pode ter mais carga que o de 8 μF, não importa qual seja o tipo de ligação entre eles: em uma ligação em série, eles terão a mesma carga, e em uma ligação em paralelo o capacitor de 8 μF terá mais carga.

24.3 Resposta: (i) Os capacitores ligados em série possuem a mesma carga Q. Para comparar a quantidade de energia armazenada, usamos a expressão $U = Q^2/2C$, da Equação (24.9); ela demonstra que o capacitor com *menor* capacitância ($C = 4$ μF) possui mais energia armazenada em uma combinação em série. Por outro lado, os capacitores em paralelo possuem a mesma diferença de potencial V, de modo que, para compará-los, usamos $U = \frac{1}{2}CV^2$, da Equação (24.9). Ela demonstra que, em uma combinação paralela, o capacitor com a *maior* capacitância ($C = 8$ μF) possui mais energia armazenada. (Se tivéssemos usado $U = \frac{1}{2}CV^2$ para analisar a combinação em série, teríamos que considerar as diferenças de potencial entre os dois capacitores. Da mesma forma, usar $U = Q^2/2C$ para estudar a combinação em paralelo demandaria que considerássemos as diferentes cargas dos capacitores.)

24.4 Resposta: (i) Neste caso, Q permanece constante, portanto usamos $U = Q^2/2C$, da Equação (24.9), para a energia armazenada. Remover o dielétrico reduz a capacitância por um fator de $1/K$; como U é inversamente proporcional a C, a energia armazenada *aumenta* por um fator de K. Retirar o dielétrico do capacitor demanda trabalho porque a deformação do campo tenta puxar o dielétrico de volta (Figura 24.16). O trabalho realizado vai para a energia armazenada no capacitor.

24.5 Respostas: (i), (iii), (ii) De acordo com a Equação (24.14), se E_0 for o módulo do campo elétrico inicial (antes da inserção do dielétrico), o módulo do campo resultante após a inserção do dielétrico será $E_0/K = E_0/3$. O módulo do campo resultante é igual à diferença entre o módulo do campo inicial e o módulo E_i do campo em função das cargas ligadas (Figura 24.21). Logo, $E_0 - E_i = E_0/3$ e $E_i = 2E_0/3$.

24.6 Resposta: (iii) A Equação (24.23) mostra que essa situação é a mesma que a de uma carga puntiforme isolada na presença de vácuo, mas com $\vec{E}$ substituído por $K\vec{E}$. Logo, KE no ponto de interesse é igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, portanto $E = q/4\pi K\epsilon_0 r^2$. Como no Exemplo 24.12, o preenchimento do espaço com um dielétrico reduz o campo elétrico por um fator de $1/K$.

Questões para discussão

Q24.1 A Equação (24.2) mostra que a capacitância de um capacitor com placas paralelas torna-se maior à medida que a distância d entre as placas diminui. Contudo, existe um limite prático que limita o valor mínimo de d e que determina o limite máximo da capacitância C. Explique qual é o fator que limita o valor mínimo de d. (*Dica:* O que ocorre com o módulo do campo elétrico quando $d \to 0$?)

Q24.2 Suponha que vários e diferentes capacitores com placas paralelas sejam carregados por uma fonte de voltagem constante. Considerando o efetivo movimento e a posição das cargas em um nível atômico, por que é razoável pensar que as capacitâncias são proporcionais às áreas superficiais das placas? Por que é razoável pensar que as capacitâncias são *inversamente* proporcionais às distâncias entre as placas?

Q24.3 Suponha que as duas placas de um capacitor possuam áreas diferentes. Quando o capacitor é carregado por meio da conexão

a uma bateria, as cargas acumuladas nas placas possuem o mesmo módulo ou elas podem possuir módulos diferentes? Explique seu raciocínio.

Q24.4 No laboratório Fermilab (*Fermi National Accelerator Laboratory*), em Illinois, os prótons são acelerados ao redor de um anel de 2 km de raio até atingirem velocidades próximas da velocidade da luz. A energia necessária é acumulada em capacitores com dimensões de uma casa. Quando esses capacitores estão sendo carregados, eles produzem um estampido muito alto. Qual é a origem desse som?

Q24.5 No capacitor com placas paralelas da Figura 24.2, suponha que as placas sejam puxadas, fazendo a distância d entre elas ficar muito maior do que a largura das placas. (a) Ainda é aceitável afirmar que o campo elétrico entre as placas é uniforme? Por quê? (b) Na situação indicada na Figura 24.2, a diferença de potencial entre as placas é dada por $V_{ab} = Qd/\epsilon_0 A$. Quando as placas forem afastadas, como descrito anteriormente, o valor de V_{ab} será maior ou menor do que o indicado por essa fórmula? Explique seu raciocínio. (c) Quando as placas estão afastadas como descrito no item anterior, o valor da capacitância é superior, inferior ou igual ao indicado pela Equação (24.2)? Explique seu raciocínio.

Q24.6 Um capacitor com placas paralelas é carregado ligando-o a uma bateria e mantendo-o ligado nela. A distância entre as placas é dobrada. Como varia o campo elétrico? Como varia a carga sobre as placas? E a energia total? Explique seu raciocínio.

Q24.7 Um capacitor com placas paralelas é carregado conectando-o a uma bateria e, a seguir, as conexões são removidas. A distância entre as placas é dobrada. Como varia o campo elétrico? Como varia a diferença de energia potencial? E a energia total? Explique sua resposta.

Q24.8 Dois capacitores com placas paralelas são idênticos, exceto pelo fato de que em um deles a distância entre as placas é o dobro da do outro. Eles são carregados pela mesma fonte de voltagem. Qual dos dois capacitores possui um campo elétrico mais forte entre as placas? Qual deles possui maior carga? Qual deles possui maior densidade de energia? Explique o seu raciocínio.

Q24.9 As placas carregadas de um capacitor se atraem mutuamente, de modo que é necessário realizar trabalho para empurrar as placas para que elas se afastem sob a ação de alguma força externa. O que ocorre com a energia adicionada por esse trabalho? Explique seu raciocínio.

Q24.10 Fornecemos cargas $\pm Q$ para as duas placas de um capacitor. A seguir ele é desconectado da fonte de carga, de modo que as cargas sobre as placas não possam variar; o capacitor é então imerso em um tanque cheio de óleo. O campo elétrico entre as placas diminui, aumenta ou mantém o mesmo valor? Explique seu raciocínio. Como medir esse campo elétrico?

Q24.11 Como indicado na Tabela 24.1, a água possui uma constante dielétrica muito elevada: $K = 80{,}4$. Como você explica que a água não seja geralmente usada como dielétrico em um capacitor?

Q24.12 A rigidez dielétrica é a mesma coisa que a constante dielétrica? Explique as possíveis diferenças entre essas duas grandezas. Existe alguma relação simples entre a constante dielétrica e a rigidez dielétrica? (Veja a Tabela 24.2.)

Q24.13 Um capacitor feito com tiras de alumínio, separadas por uma camada de miliar, foi submetido a uma voltagem excessiva e a ruptura dielétrica resultante produziu orifícios na camada de miliar. Depois disso, verificou-se que a capacitância continuou aproximadamente igual a seu valor anterior, porém a voltagem de ruptura tornou-se muito menor. Por quê?

Q24.14 Suponha que você aproxime um dielétrico do espaço entre as placas de um capacitor carregado, preparando-se para inseri-lo entre as placas. Qual força você sentirá? O que essa força lhe diz sobre a energia armazenada entre as placas quando o dielétrico for inserido, em comparação ao momento antes da inserção do dielétrico?

Q24.15 Para verificarmos se um peixe é fresco, podemos colocá-lo entre as placas de um capacitor e medir a capacitância. Como esse método funciona? (*Dica:* À medida que o tempo passa, o peixe se desidrata. Veja a Tabela 24.1.)

Q24.16 Um capacitor *eletrolítico* usa como dielétrico uma camada de óxido isolante extremamente fina entre a placa metálica e a solução condutora. Discuta a vantagem desse capacitor sobre outro, construído com apenas um dielétrico sólido entre as placas metálicas.

Q24.17 Em termos da constante dielétrica K, o que acontece com o fluxo elétrico através da superfície gaussiana mostrada na Figura 24.23, quando o dielétrico é inserido no espaço anteriormente vazio entre as placas? Explique.

Q24.18 Um capacitor com placas paralelas está conectado a uma fonte de tensão que mantém uma diferença de potencial fixa entre as placas. Quando uma folha de dielétrico é introduzida entre as placas, o que ocorre com (i) o campo elétrico entre as placas, (ii) o módulo da carga acumulada em cada placa e (iii) a energia armazenada no capacitor? Suponha agora que, antes de o dielétrico ser inserido, o capacitor seja desconectado da fonte de tensão. Nesse caso, o que ocorre com (i) o campo elétrico entre as placas, (ii) o módulo da carga de cada placa e (iii) a energia armazenada no capacitor? Explique todas as diferenças que você encontrou entre as duas situações.

Q24.19 Os dielétricos líquidos que possuem moléculas polares (tal como a água) sempre apresentam constantes dielétricas que diminuem com o aumento da temperatura. Por quê?

Q24.20 Um condutor é um caso extremo de dielétrico, visto que, quando aplicamos um campo elétrico em um condutor, as cargas se movem livremente no interior do condutor para produzir 'cargas induzidas'. Qual é a constante dielétrica de um condutor perfeito? É $K = 0$, $K \to \infty$ ou o valor de K está entre esses dois limites? Explique seu raciocínio.

Exercícios

Seção 24.1 Capacitância e capacitores

24.1 Um capacitor possui capacitância igual a 7,28 μF. Que quantidade de carga deve ser colocada em cada uma de suas placas para produzir uma diferença de potencial entre as placas igual a 25,0 V?

24.2 Cada placa de um capacitor com placas paralelas possui área igual a 12,2 cm^2 e a distância entre as placas é de 3,28 mm. A carga acumulada em cada placa possui módulo igual a $4{,}35 \times 10^{-8}$ C. As cargas estão no vácuo. (a) Qual é o valor da capacitância? b) Qual é a diferença de potencial entre as placas? (c) Qual é o módulo do campo elétrico entre as placas?

24.3 Um capacitor com placas paralelas no ar possui capacitância igual a 245 pF e um módulo de carga de 0,148 μC em cada placa. A distância entre as placas é igual a 0,328 mm. (a) Qual é a diferença de potencial entre as placas? (b) Qual é a área de cada placa? (c) Qual é o módulo do campo elétrico entre as placas? (d) Qual é a densidade de carga em cada placa?

24.4 Capacitância de um osciloscópio. Os osciloscópios possuem placas metálicas paralelas no seu interior, para desviar o feixe de elétrons. Essas placas são designadas *placas defletoras*. Geralmente, têm o formato quadrado, com 3,0 cm de lado, e estão separadas por uma distância de 5,0 mm, com vácuo entre elas. Qual é a capacitância dessas placas defletoras e, portanto, do osciloscópio? (*Nota:* Ocasionalmente, essa capacitância pode exercer um efeito sobre o circuito que está sendo estudado e deve ser levado em consideração nos cálculos.)

24.5 Um capacitor de 10,0 μF com placas paralelas e circulares está ligado a uma bateria de 12,0 V. (a) Qual é a carga sobre cada placa? (b) Quanta carga haveria sobre as placas, caso a distância entre elas fosse duplicada enquanto o capacitor permanecesse conectado à bateria? (c) Quanta carga haveria sobre as placas, caso o capacitor fosse conectado a uma bateria de 12,0 V, após o raio de cada placa ser duplicado, sem que a distância entre elas seja alterada?

24.6 Um capacitor de 10,0 μF com placas paralelas é ligado a uma bateria de 12,0 V. Quando o capacitor está plenamente carregado, a bateria é desconectada sem que haja qualquer perda de carga nas placas. (a) Um voltímetro é conectado entre as duas placas sem descarregá-las. Qual é a leitura? (b) Qual seria a leitura do voltímetro, caso (i) a distância entre as placas fosse duplicada; (ii) o raio de cada placa fosse duplicado, mas não houvesse variação da distância?

24.7 Qual teria de ser a distância entre moedas paralelas para formar um capacitor de 1,0 pF? A sua resposta sugere que há justificativa para tratar essas moedas como placas infinitas? Explique.

24.8 Um capacitor de 5,0 pF, com placas paralelas e circulares, está preenchido com ar e será usado em um circuito que será submetido a potências de até $1,0 \times 10^2$ V. O campo elétrico entre as placas não deve ser maior do que $1,0 \times 10^4$ N/C. Como engenheiro elétrico do projeto, a sua tarefa é (a) projetar o capacitor para determinar quais devem ser as suas dimensões físicas e a distância; (b) determinar a carga máxima a ser suportada por essas placas.

24.9 Um capacitor é constituído de dois cilindros ocos, co-axiais, de ferro, um dentro do outro. O cilindro interno possui carga negativa e o externo, carga positiva; o módulo da carga sobre cada um é 10,0 pC. O cilindro interno possui raio de 0,50 mm, o externo de 5,0 mm, e o comprimento de cada cilindro é de 18,0 cm. (a) Qual é a diferença de potencial aplicada necessário para produzir essas cargas nos cilindros?

24.10 Um capacitor cilíndrico consiste de um núcleo condutor maciço, com raio de 0,250 cm, cercado por um tubo condutor oco externo. Os dois condutores estão separados por ar, e o comprimento do cilindro é igual a 12,0 cm. A capacitância é 36,7 pF. (a) Calcule o raio interno do tubo oco. (b) Quando o capacitor é carregado com 125 V, qual é a carga por unidade de comprimento λ do capacitor?

24.11 Um capacitor cilíndrico possui um condutor interno com raio de 1,5 mm e um condutor externo com raio de 3,5 mm. Os dois condutores estão separados pelo vácuo e o comprimento total do capacitor é de 2,8 m. (a) Qual é a capacitância por unidade de comprimento? (b) O potencial do condutor interno está 350 mV mais elevado do que o potencial do condutor externo. Calcule a carga (módulo e sinal) de cada condutor.

24.12 Um capacitor esférico é formado por dois condutores esféricos concêntricos separados pelo vácuo. A superfície esférica interna possui raio de 15,0 cm e a capacitância é igual a 116 pF. (a) Qual é o raio da superfície esférica externa? (b) Se a diferença de potencial entre as esferas for igual a 220 V, qual será o módulo da carga de cada esfera?

24.13 Um capacitor esférico contém carga de 3,30 nC, quando conectado a uma diferença de potencial de 220 V. Supondo que as placas estejam separadas por vácuo e o raio interno da casca externa seja igual a 4,0 cm, calcule (a) a capacitância; (b) o raio da esfera interna; (c) o campo elétrico próximo à superfície da esfera interna.

Seção 24.2 Capacitores em série e em paralelo

24.14 Para o sistema de capacitores mostrado na Figura 24.24, ache a capacitância equivalente (a) entre b e c, e (b) entre a e c.

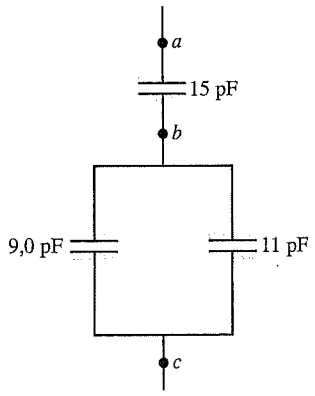


Figura 24.24 Exercício 24.14.

24.15 Na Figura 24.25, cada capacitor possui $C = 4,0$ μF e $V_{ab} = +28,0$ V. Calcule (a) a carga de cada capacitor; (b) a diferença de potencial através de cada capacitor; (c) a diferença de potencial entre os pontos a e d.

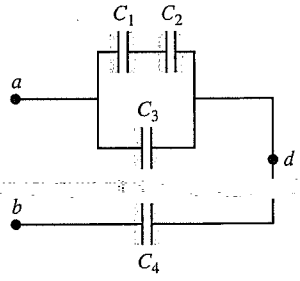


Figura 24.25 Exercício 24.15.

24.16 Na Figura 24.8a, seja $C_1 = 3,0$ μF, $C_2 = 5,0$ μF e $V_{ab} = +52,0$ V. Calcule (a) a carga em cada capacitor e (b) a diferença de potencial através de cada capacitor.

24.17 Na Figura 24.9a, seja $C_1 = 3,0$ μF, $C_2 = 5,0$ μF e $V_{ab} = +52,0$ V. Calcule (a) a carga em cada capacitor; (b) a diferença de potencial através de cada capacitor.

24.18 Na Figura 24.26, seja $C_1 = 6,0$ μF, $C_2 = 3,0$ μF e $C_3 = 5,0$ μF. O circuito de capacitores está conectado a um potencial aplicado V_{ab}. Quando as cargas dos capacitores atingem os seus valores finais, a carga em C_2 é igual a 4,0 μC. (a) Quais são as cargas nos capacitores C_1 e C_3? (b) Qual é a voltagem aplicada V_{ab}?

24.19 Na Figura 24.26, seja $C_1 = 3,0$ μF e $V_{ab} = 120$ V. A carga no capacitor C_1 é igual a 150 μC. Calcule a voltagem através dos outros dois capacitores.

24.20 Dois capacitores com placas paralelas no vácuo possuem áreas iguais, e as distâncias entre as placas são d_1 e d_2. Mostre que, quando esses capacitores são ligados em série, a capacitância equivalente é igual à capacitância de um único capacitor com área A e distância entre as placas $d_1 + d_2$.

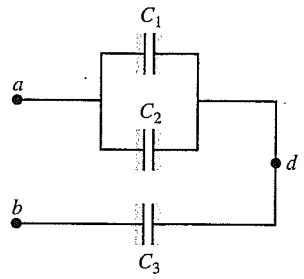


Figura 24.26 Exercícios 24.18 e 24.19.

24.21 Dois capacitores com placas paralelas estão no vácuo, possuem áreas A_1 e A_2 e a distância entre as placas d é a mesma para os dois capacitores. Mostre que, quando esses capacitores são ligados em paralelo, a capacitância equivalente é igual à capacitância de um único capacitor com área $A_1 + A_2$ e distância entre as placas igual a d.

24.22 A Figura 24.27 mostra um sistema de quatro capacitores, em que a diferença de potencial através de ab é de 50,0 V. (a) Determine a capacitância equivalente desse sistema entre a e b. (b) Quanta carga é armazenada por essa combinação de capacitores? (c) Quanta carga é armazenada em cada um dos capacitores, de 10,0 μF e de 9,0 μF?

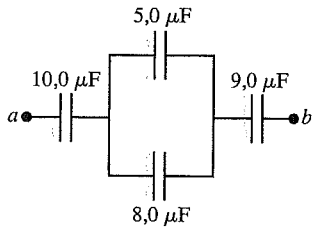


Figura 24.27 Exercício 24.22.

24.23 Suponha que o capacitor de 3 μF, na Figura 24.10a, seja removido e substituído por outro, alterando a capacitância equivalente entre os pontos a e b para 8 μF. Qual é o valor da capacitância do capacitor que substituiu o primeiro?

Seção 24.3 Armazenamento de energia em capacitores e energia do campo elétrico

24.24 Um capacitor com placas paralelas possui capacitância igual a 920 pF. A carga em cada placa é de 2,55 μC. (a) Qual é a diferença de potencial entre as placas? (b) Caso a carga fosse mantida constante, qual seria a diferença de potencial entre as placas se a distância entre elas dobrasse? (c) Qual é o trabalho necessário para duplicar essa distância?

24.25 Um capacitor com placas paralelas de 5,80 μC, imerso no ar e com uma distância entre as placas igual a 5,0 mm, é submetido a uma diferença de potencial de 400 V. Calcule a densidade de energia na região entre as placas, em unidades de J/m^3.

24.26 Um capacitor no ar é constituído por duas placas paralelas largas, separadas por uma distância igual a 1,50 mm. O módulo da carga de cada placa é igual a 0,0180 μC quando a diferença de potencial é de 200 V. (a) Qual é o valor da capacitância? (b) Qual é a área de cada placa? (c) Qual é a voltagem máxima que pode ser aplicada sem que ocorra ruptura dielétrica? (A ruptura dielétrica do ar ocorre quando a intensidade do campo elétrico é igual a $3,0 \times 10^6$ V/m.) (d) Quando a carga é igual a 0,0180 μC, qual é a energia total acumulada?

24.27 Um capacitor de 450 μC é carregado até 295 V. A seguir, um fio é conectado entre as placas. Quantos joules de energia térmica são produzidos quando o capacitor se descarrega, supondo que toda energia acumulada no capacitor seja convertida em energia térmica para aquecer o fio?

24.28 Um capacitor de capacitância C é carregado até uma diferença de potencial V_0. Os terminais do capacitor carregado são, a seguir, conectados aos terminais de outro capacitor descarregado, com capacitância igual a $C/2$. Calcule (a) a carga original do sistema; (b) a diferença de potencial final através de cada capacitor; (c) a energia final do sistema; (d) a diminuição da energia quando os capacitores são conectados. (e) Para onde foi a energia 'perdida' pelo sistema?

24.29 Um capacitor com placas paralelas no vácuo, com área A e distância x entre as placas, possui cargas $+Q$ e $-Q$ em suas placas. O capacitor é desconectado da fonte de carga, de modo que a carga de cada placa permanece fixa. (a) Qual é a energia total armazenada no capacitor? (b) As placas são afastadas até atingirem uma distância adicional dx. Qual é a variação da energia acumulada? (c) Se F for o módulo da força de atração entre as placas, então a variação de energia acumulada deve ser igual ao trabalho $dW = Fdx$ realizado para afastar as placas. Encontre uma expressão para F. (d) Explique por que F *não* é igual a QE, em que E é o módulo do campo elétrico entre as placas.

24.30 Um capacitor com placas paralelas no vácuo tem uma energia acumulada igual a 8,38 J. A distância entre as placas é de 2,30 mm. Se essa distância for diminuída para 1,15 mm, qual será a energia acumulada se (a) o capacitor for desconectado da fonte de potencial de modo que a carga de cada placa seja mantida constante? (b) o capacitor permanecer conectado na fonte de potencial de modo que a diferença de potencial entre as placas seja mantida constante?

24.31 (a) Quanta carga uma bateria deve suprir a um capacitor de 5,0 μF para criar uma diferença de potencial de 1,5 V através das suas placas? Quanta energia é armazenada nesse caso? (b) Quanta carga a bateria teria que suprir para armazenar 1,0 J de energia no capacitor? Qual seria o potencial através do capacitor nesse caso?

24.32 Para o circuito de capacitores indicado na Figura 24.28, a diferença de potencial através de ab é igual a 36 V. Ache (a) a carga total armazenada nesse circuito; (b) a carga em cada capacitor; (c) a energia total armazenada no circuito; (d) a energia armazenada em cada capacitor; (e) as diferenças de potencial através de cada capacitor.

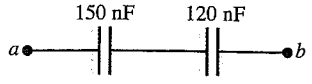


Figura 24.28 Exercício 24.32.

24.33 Para o circuito de capacitores indicado na Figura 24.29, a diferença de potencial através de ab é igual a 220 V. Ache (a)

a carga total armazenada nesse circuito; (b) a carga em cada capacitor; (c) a energia total armazenada no circuito; (d) a energia armazenada em cada capacitor; (e) a diferença de potencial através de cada capacitor.

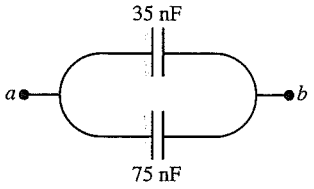


Figura 24.29 Exercício 24.33.

24.34 Um capacitor cilíndrico, de 0,350 m de comprimento, consiste de um núcleo condutor maciço, com raio de 1,20 mm, e um tubo condutor oco externo, com raio interno de 2,0 mm. Os dois condutores são separados por ar e carregados a uma diferença de potencial de 6,0 V. Calcule (a) a carga por comprimento para o capacitor; (b) a carga total do capacitor; (c) a capacitância; (d) a energia armazenada no capacitor quando plenamente carregado.

24.35 Um capacitor cilíndrico imerso no ar possui comprimento de 15,0 m e armazena uma energia de $3{,}20 \times 19^{-9}$J quando a diferença de potencial entre os condutores é igual a 4,0 V. (a) Calcule o módulo da carga acumulada em cada condutor. (b) Calcule a razão entre o raio do condutor interno e o raio do condutor externo.

24.36 Um capacitor é constituído por duas cascas esféricas condutoras concêntricas separadas pelo vácuo. A superfície esférica interna possui raio de 12,5 cm e a distância entre as superfícies esféricas é igual a 14,8 cm. Uma diferença de potencial de 120 V é aplicada ao capacitor. (a) Qual é a densidade de energia em $r = 12{,}6$ cm, em um ponto próximo à esfera interna? (b) Qual é a densidade de energia em $r = 14{,}7$ cm, em um ponto próximo à esfera externa? (c) Para o capacitor com placas paralelas, a densidade de energia é uniforme na região entre as placas, exceto nas vizinhanças das bordas das placas. Isso também se aplica a um capacitor esférico?

24.37 Considere dois capacitores idênticos e uma fonte externa de potencial. (a) Compare a energia total armazenada nos capacitores, quando estão ligados ao potencial aplicado em série e em paralelo. (b) Compare a quantidade máxima de carga armazenada em cada um desses casos. (c) O armazenamento de energia em um capacitor pode ser limitado pelo campo elétrico máximo entre as placas. Qual é a razão do campo elétrico para as combinações em série e em paralelo?

Seção 24.4 Dielétricos

24.38 Um capacitor com placas paralelas possui capacitância $C_0 = 5{,}0$ pF, quando existe ar entre as placas. A distância entre as placas é igual a 1,50 mm. (a) Qual é o módulo máximo de carga Q que pode ser colocado em cada placa, se o campo elétrico na região entre as placas não exceder a $3{,}0 \times 10^4$ V/m? (b) Um dielétrico com $K = 2{,}70$ é inserido entre as placas do capacitor, preenchendo completamente o volume entre elas. Qual passa a ser o módulo máximo de carga em cada placa, se o campo elétrico entre elas não exceder a $3{,}0 \times 10^4$ V/m?

24.39 Duas placas paralelas possuem cargas iguais e opostas. Quando existe vácuo entre as placas, o módulo do campo elétrico é $E = 3{,}20 \times 10^5$ V/m. Quando o espaço entre as placas é preenchido por um dielétrico, o campo elétrico possui módulo $E = 2{,}50 \times 10^5$ V/m. (a) Qual é a densidade de carga em cada superfície do dielétrico? (b) Qual é o valor da constante dielétrica?

24.40 Uma aficionada por eletrônica deseja projetar um capacitor simples de 1,0 nF para sintonizar o seu rádio de cristal, usando duas chapas de alumínio como placas, com algumas folhas de papel entre elas, desempenhando a função de um dielétrico. O papel possui uma constante dielétrica de 3,0, e a espessura de uma folha é de 0,20 mm. (a) Supondo que as folhas de papel meçam 22×28 cm e ela corte o alumínio com as mesmas dimensões, quantas folhas de papel devem ser usadas entre as placas para se obter a capacitância adequada? (b) Suponha que, por conveniência, ela opte por usar uma única folha de papel-cartão, com a mesma constante dielétrica, porém uma espessura de 12,0 mm, em substituição ao papel. Qual área de chapa de alumínio ela necessitará para que as placas apresentem 1,0 nF de capacitância? (c) Suponha que ela recorra à alta tecnologia e encontre uma folha de teflon com a mesma espessura do papel-cartão para usar como um dielétrico. Ela necessitará de uma área maior ou menor de teflon em comparação ao papel-cartão? Explique.

24.41 O dielétrico que deve ser usado em um capacitor com placas paralelas possui constante dielétrica igual a 3,60 e uma rigidez dielétrica de $1{,}60 \times 10^7$ V/m. O capacitor deve possuir uma capacitância igual a $1{,}25 \times 10^{-9}$ F e ser capaz de suportar uma diferença de potencial de 5500 V. Qual é a área mínima que cada placa do capacitor deve ter?

24.42 Mostre que a Equação (24.20) é válida para um capacitor com placas paralelas com um material dielétrico entre elas. Faça uma dedução análoga à usada para a dedução da Equação (24.11).

24.43 Um capacitor possui placas paralelas, cada uma delas com área de 12 cm^2, separadas por uma distância igual a 2,0 mm. O espaço entre as placas está cheio de poliestireno (veja a Tabela 24.2). (a) Determine a permissividade do poliestireno. (b) Calcule a voltagem máxima possível que o capacitor pode suportar sem que ocorra ruptura dielétrica. (c) Quando a voltagem atinge o valor encontrado na parte (b), qual é a densidade de carga superficial em cada placa e a densidade de carga superficial induzida na superfície do dielétrico?

24.44 Uma diferença de potencial constante igual a 12 V é mantida entre os terminais de um capacitor com placas paralelas no ar, cuja capacitância é de 0,25 μF. (a) Uma camada de miliar é inserida entre as placas do capacitor, preenchendo completamente o espaço entre as placas. Quando isso é feito, qual é a quantidade adicional de carga que flui para a placa positiva do capacitor? Veja a Tabela 24.1. (b) Qual é a carga total induzida em cada face da camada de miliar? (c) Qual é o efeito produzido pela camada de miliar sobre o campo elétrico entre as placas? Explique como conciliar esse resultado ao acúmulo adicional de cargas nas placas do capacitor, que contribui para *aumentar* o campo elétrico.

24.45 Quando um capacitor de 360 nF (1 nF = 10^{-9} F), imerso no ar, está conectado a uma fonte de tensão, a energia acumulada no capacitor é igual a $1{,}85 \times 10^{-5}$ J. Mantendo o capacitor conectado à fonte de tensão, inserimos uma camada de dielétrico que preenche completamente o espaço entre as placas. Isso produz um acréscimo de $2{,}32 \times 10^{-5}$ J na energia armazenada. (a) Qual é a diferença de potencial entre as placas? (b) Qual é a constante dielétrica do material?

24.46 Um capacitor com placas paralelas possui capacitância $C = 12{,}5$ pF, quando o volume entre as placas é preenchido com

ar. As placas são circulares e possuem raio de 3,0 cm. O capacitor é conectado a uma bateria, e uma carga de módulo 25,0 pC vai para cada placa. Com o capacitor ainda ligado à bateria, o dielétrico é inserido entre as placas, preenchendo completamente o espaço entre elas. Após a inserção do dielétrico, a carga em cada placa possui módulo de 45,0 pC. (a) Qual é a constante dielétrica K do dielétrico? (b) Qual é a diferença potencial entre as placas antes e depois da inserção do dielétrico? (c) Qual é o campo elétrico em um ponto no meio da distância entre as placas antes e depois da inserção do dielétrico?

24.47 Um capacitor de 12,5 μF é conectado a uma fonte de energia que mantém constante uma diferença de potencial de 24,0 V através das placas. Um pedaço de material com constante dielétrica de 3,75 é colocado entre as placas, preenchendo completamente o espaço entre elas. (a) Quanta energia é armazenada antes e depois da inserção do dielétrico? (b) Qual foi a variação da energia durante a inserção? Ela aumentou ou diminuiu?

*Seção 24.6 Lei de Gauss em dielétricos

***24.48** Um capacitor com placas paralelas possui placas com área de 0,0225 m^2, separadas por 1,0 mm de teflon. (a) Calcule a carga nas placas, quando são carregadas a uma diferença de potencial de 12,0 V. (b) Use a lei de Gauss (Equação 24.23) para calcular o campo elétrico no interior do teflon. (c) Use a lei de Gauss para calcular o campo elétrico, supondo que a fonte de voltagem seja desconectada e o teflon seja removido.

***24.49** Um capacitor com placas paralelas possui o volume entre as placas preenchido com um plástico cuja constante dielétrica é K. O módulo da carga de cada placa é igual a Q. Cada carga possui área A e a distância entre as placas é igual a d. (a) Use a lei de Gauss dada pela Equação (24.23) para calcular o módulo do campo elétrico no dielétrico. (b) Use o campo elétrico determinado na parte (a) para calcular a diferença de potencial entre as placas. (c) Aplique o resultado da parte (b) para determinar a capacitância do capacitor. Compare o resultado ao resultado da Equação (24.12).

Problemas

24.50 Um capacitor com placas paralelas no ar é constituído por duas placas quadradas, com um mesmo lado de 16 cm e separadas por uma distância igual a 4,7 mm. Ele é conectado a uma bateria de 12 V. (a) Qual é a capacitância? (b) Qual é a carga de cada placa? (c) Qual é o campo elétrico entre as placas? (d) Qual é a energia armazenada no capacitor? (e) Supondo que a bateria seja desligada e, a seguir, as placas sejam puxadas até que a distância entre as placas passe para 9,4 mm, quais seriam as respostas dos itens (a), (b), (c) e (d)?

24.51 Suponha que a bateria do Problema 24.50 permaneça ligada enquanto você afasta as placas. Quais seriam as respostas dos itens (a), (b), (c) e (d) depois do afastamento das placas?

24.52 Membranas celulares. As membranas celulares (paredes que circundam as células) têm, normalmente, cerca de 7,5 nm de espessura. Elas são parcialmente permeáveis, para permitir a passagem de material carregado, conforme a necessidade. Densidades de carga iguais, porém contrárias, se formam nas faces internas e externas dessas membranas, e essas cargas impedem que cargas adicionais passem através da parede celular. É possível modelar uma membrana celular como um capacitor com placas paralelas, sendo que a própria membrana contém proteínas embutidas em um material orgânico e podem dar a ela uma constante dielétrica de aproximadamente 10 (veja a Figura 24.30). (a) Qual é a capacitância por centímetro quadrado dessa parede celular? (b) No seu estado normal de repouso, uma célula possui uma diferença de potencial de 85 mV através da sua membrana. Qual é o campo elétrico no interior dessa membrana?

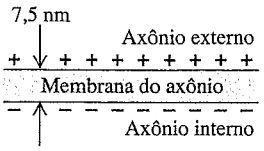


Figura 24.30 Problema 24.52.

24.53 O flash de uma máquina fotográfica contém um capacitor que armazena a energia usada no flash. Em uma dessas unidades, um flash dura um tempo de $\frac{1}{675}$ s, com uma potência luminosa média igual a $2{,}70 \times 10^5$ W. (a) Se a conversão da energia elétrica em luz possui eficiência de 95% (a energia restante se transforma em energia térmica), qual é a energia que pode ser armazenada no capacitor para obter esse flash? (b) A diferença de potencial entre as placas de um capacitor é igual a 125 V quando a energia armazenada é igual ao valor calculado na parte (a). Qual é o valor da capacitância?

24.54 Em um teclado de computador, cada tecla contém uma pequena placa metálica que funciona como uma das placas metálicas de um capacitor com ar. Quando pressionamos a tecla, a distância entre as placas diminui e a capacitância aumenta. Um circuito eletrônico detecta a variação da capacitância e, portanto, detecta também o movimento da tecla pressionada. Em um teclado particular, a área de cada placa metálica é igual a 42,0 mm^2 e a distância entre as placas é igual a 0,700 mm antes de a tecla ser pressionada. Se o circuito eletrônico pode detectar uma variação de capacitância de 0,250 pF, qual é a distância mínima em que a tecla deve ser pressionada para que o circuito eletrônico possa detectar a compressão da tecla?

24.55 Considere um capacitor cilíndrico como o indicado na Figura 24.6. Seja $d = r_b - r_a$ a distância entre o condutor interno e o condutor externo. (a) Suponha que os raios dos condutores sejam ligeiramente diferentes, de modo que $d << r_a$. Mostre que o exemplo obtido no Exemplo 24.4 (Seção 24.1) para a capacitância do capacitor cilíndrico se reduz ao indicado na Equação (24.2) — a equação para o capacitor com placas paralelas —, em que A é a área da superfície de cada cilindro. Use a aproximação $(1 + z) \cong z$ para $|z| << 1$. (b) Embora a Terra seja esférica, sua superfície parece plana porque seu raio é muito grande. Use essa idéia para explicar como o resultado da parte (a) faz sentido do ponto de vista puramente geométrico.

24.56 Na Figura 24.9a, considere $C_1 = 9{,}0$ μF, $C_2 = 4{,}0$ μF e $V_{ab} = 28$ V. Suponha que os capacitores carregados sejam desconectados da fonte e desconectados um do outro; a seguir, eles são novamente ligados entre si, porém através das placas com cargas *opostas*. O quanto a energia do sistema diminui?

24.57 Para o circuito de capacitores indicado na Figura 24.31, a diferença de potencial através de a e b é de 12,0 V. Ache (a) a energia total armazenada nesse circuito e (b) a energia armazenada no capacitor de 4,80 μF.

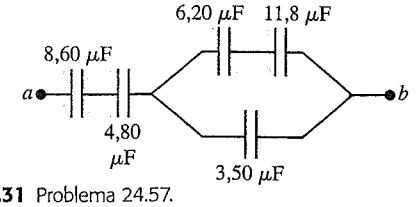


Figura 24.31 Problema 24.57.

24.58 Dispomos de diversos capacitores de 0,25 μF. A voltagem nos terminais de cada capacitor não pode superar 600 V. Você precisa montar um capacitor com capacitância de 0,25 μF, submetido a uma diferença de potencial de 960 V. (a) Faça um diagrama para mostrar como é possível obter um capacitor equivalente com as propriedades desejadas. (b) Nenhum dielétrico é um isolante perfeito a ponto de impedir qualquer fluxo de carga através de seu volume. Suponha que um dos dielétricos usados em seu diagrama seja um condutor moderadamente bom. O que ocorreria nesse caso se sua combinação de capacitores fosse submetida à diferença de potencial de 960 V?

24.59 Na Figura 24.32, $C_1 = C_5 = 8{,}4$ μF e $C_2 = C_3 = C_4 = 4{,}2$ μF. A diferença de potencial aplicada é $V_{ab} = 220$ V. (a) Qual é a capacitância equivalente do circuito entre os pontos a e b? (b) Calcule a carga de cada capacitor e a diferença de potencial através de cada capacitor.

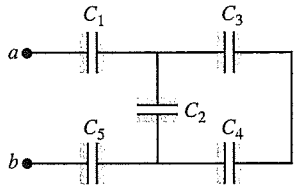


Figura 24.32 Problema 24.59.

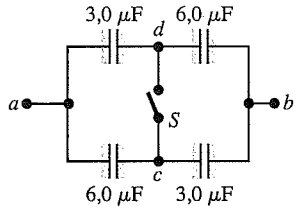


Figura 24.33 Problema 24.60.

24.60 Os capacitores na Figura 24.33 estão, inicialmente, descarregados e são conectados como indicado no diagrama com a chave S aberta. A diferença de potencial aplicada é dada por $V_{ab} = +210$ V. (a) Qual é a diferença de potencial V_{cd}? (b) Qual é a diferença de potencial através de cada capacitor depois de a chave S ser fechada? (c) Qual é a quantidade de carga que flui através da chave quando ela está fechada?

24.61 Três capacitores, com capacitâncias de 8,4, 8,4 e 4,2 μF, são conectados em série através de uma diferença de potencial de 36 V. (a) Qual é a carga do capacitor de 4,2 μF? (b) Qual é a energia total armazenada nos três capacitores? (c) Os capacitores são desconectados da diferença de potencial sem que eles se descarreguem. A seguir, eles são ligados em paralelo, com as placas de carga positiva ligadas entre si. Qual é a voltagem através de cada capacitor na ligação em paralelo? (d) Qual é a energia total final acumulada nos capacitores?

24.62 Capacitância de uma nuvem de tempestade. O centro de carga de uma nuvem carregada, que paira a 3,0 km acima da superfície terrestre, contém 20 C de carga negativa. Supondo que o centro de carga possui raio de 1,0 km, e modelando o centro de carga e a superfície terrestre como placas paralelas, calcule (a) a capacitância do sistema; (b) a diferença de potencial entre o centro de carga e o solo; (c) a força média do campo elétrico entre a nuvem e o solo; (d) a energia elétrica armazenada no sistema.

24.63 Na Figura 24.34, cada capacitância C_1 é igual a 6,9 μF e cada capacitância C_2 é igual a 4,6 μF. (a) Calcule a capacitância equivalente do circuito entre os pontos a e b. (b) Calcule a carga dos três capacitores mais próximos de a e de b quando $V_{ab} = 420$ V. (c) Determine V_{cd} quando entre a e b a diferença de potencial é igual a 420 V.

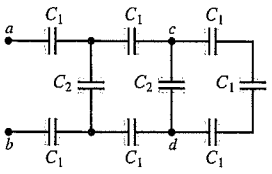


Figura 24.34 Problema 24.63.

24.64 Cada combinação de capacitores entre os pontos a e b na Figura 24.35 é, inicialmente, conectada a uma bateria de 120 V, carregando a combinação em 120 V. Essas combinações são então ligadas entre si para formar o circuito indicado. Quando a chave S é acionada, uma corrente de carga para os capacitores em descarga flui, de modo a acionar o dispositivo de sinal. Qual é o fluxo de carga através do dispositivo de sinal?

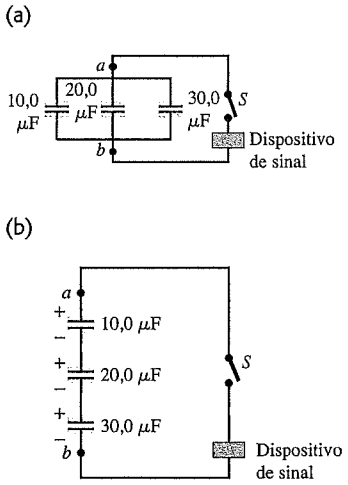


Figura 24.35 Problema 24.64.

24.65 Um capacitor com placas paralelas possui somente ar entre as placas e é carregado através de uma ligação a uma bateria. O capacitor é desconectado da bateria, sem que haja qualquer perda de carga das placas. (a) Um voltímetro registra 45,0 V, quando colocado no capacitor. Quando um dielétrico é inserido entre as placas, preenchendo completamente o espaço entre elas, a leitura do voltímetro é de 11,5 V. Qual é a constante dielétrica desse material? (b) Qual será a leitura do voltímetro, se o dielétrico for parcialmente removido, de modo a preencher somente um terço do espaço entre as placas?

24.66 Um capacitor no ar possui placas largas, com área A, separadas por uma distância d. A seguir, uma placa metálica com espessura a (menor do que d), com as mesmas dimensões da área das placas, é inserida paralelamente entre as placas, sem tocar nenhuma delas. (Veja a Figura 24.36.) (a) Qual é a capacitância desse arranjo? (b) Expresse essa capacitância em função da capacitância C_0 existente antes da introdução da placa metálica. (c) Discuta o que ocorre com a capacitância nos limites $a \to 0$ e $a \to d$.

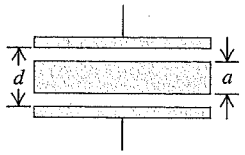


Figura 24.36 Problema 24.66.

24.67 Capacitância da Terra. (a) Discuta como o conceito de capacitância também pode ser aplicado a um *único* condutor. (*Dica*: Na relação $C = Q/V_{ab}$, considere um segundo condutor situado no infinito.) (b) Use a Equação (24.1) para mostrar que $C = 4\pi\epsilon_0 R$ para uma esfera condutora sólida de raio R. (c) Aplique seu resultado da parte (b) para calcular a capacitância da Terra, que é um bom condutor, com raio igual a 6380 km. Compare o resultado com os valores típicos dos capacitores usados em circuitos eletrônicos, que possuem capacitâncias no intervalo entre 10 pF e 100 μF.

24.68 Uma esfera condutora maciça, de raio R, possui uma carga Q. Calcule a densidade de energia do campo elétrico em um ponto situado a uma distância r do centro da esfera para (a) $r < R$; (b) $r > R$. (c) Calcule a energia total armazenada no campo elétrico associado à esfera carregada. (*Dica:* Considere uma casca esférica de raio r e espessura dr, com volume $dV = 4\pi r^2 dr$ e calcule a energia armazenada nesse volume. A seguir, integre de $r = 0$ até $r \to \infty$.) (d) Verifique se o resultado da parte (c) pode ser interpretado como o trabalho realizado para carregar a esfera com uma carga Q. (e) Usando a Equação (24.9) e o resultado da parte (c), mostre que a capacitância da esfera é aquela que você encontrou no Problema 24.67.

24.69 Capacitância Terra – Ionosfera. A Terra pode ser considerada um capacitor de condutor único (veja Problema 24.67). Ela também pode ser considerada em combinação a uma camada carregada da atmosfera, a ionosfera, formando um capacitor esférico com duas placas, sendo que a superfície terrestre constitui a placa negativa. A ionosfera está a um nível de aproximadamente 70 km, e a diferença de potencial entre a Terra e a ionosfera é de cerca de 350.000 V. Calcule (a) a capacitância desse sistema; (b) a carga total do capacitor; (c) a energia armazenada no sistema.

24.70 O cilindro interno de um capacitor cilíndrico longo possui raio r_a e uma densidade de carga linear $+\lambda$. Ele é circundado por um condutor cilíndrico co-axial com raio interno r_b e densidade de carga linear $-\lambda$ (Figura 24.6). (a) Qual é a densidade de energia na região entre os condutores a uma distância r do eixo? (b) Integre a densidade de energia calculada na parte (a) sobre o volume entre os condutores em um comprimento L do capacitor, para obter a energia total do campo elétrico por unidade de comprimento. (c) Use a Equação (24.9) e a capacitância por unidade de comprimento encontrada no Exemplo 24.4 (Seção 24.1) para calcular U/L. O resultado obtido concorda com o resultado que você encontrou no item (b)?

24.71 Um capacitor com placas paralelas possui o espaço entre as placas preenchido com duas camadas de dielétricos, uma com uma constante dielétrica K_1 e a outra com a constante K_2 (veja a Figura 24.37). Cada camada possui espessura $d/2$, em que d é a distância entre as placas. Mostre que a capacitância é dada por

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right)$$

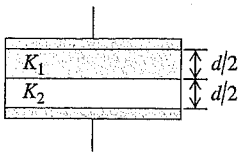


Figura 24.37 Problema 24.71.

24.72 Um capacitor com placas paralelas possui o espaço entre as placas preenchido com duas camadas de dielétricos, uma com uma constante dielétrica K_1 e a outra com a constante K_2 (veja a Figura 24.38). Cada camada possui espessura igual à distância d entre as placas e cada camada preenche o espaço entre as placas. Mostre que a capacitância é dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A(K_1 + K_2)}{2d}$$

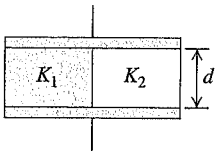


Figura 24.38 Problema 24.72.

Problemas desafiadores

24.73 Circuitos que envolvem capacitores nem sempre podem ser agrupados em série e em paralelo. Como exemplo, a Figura 24.39a mostra três capacitores, C_x, C_y e C_z, formando uma *ligação delta*, assim chamada em virtude de sua forma triangular. Essa ligação possui três terminais (a, b e c) e, portanto, não pode ser convertida em uma capacitância equivalente simples. Podemos mostrar que, desprezando qualquer efeito sobre circuitos externos, uma ligação delta é equivalente a um circuito chamado de *ligação Y*. Por exemplo, a ligação delta indicada na Figura 24.39a pode ser substituída pela ligação Y indicada na Figura 24.39b. (O nome 'ligação Y' também se refere à forma geométrica da ligação.) (a) Mostre que as equações de transformação que fornecem C_1, C_2 e C_3 em função de C_x, C_y e C_z são dadas por

$$C_1 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_x$$
$$C_2 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_y$$
$$C_3 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_z$$

(*Dica:* As diferenças de potencial V_{ac} e V_{bc} devem ser as mesmas nos dois tipos de ligação. As cargas q_1 e q_2 que fluem nos sentidos indicados na Figura 24.39a devem ser as mesmas que as cargas q_1 e q_2 indicadas na Figura 24.39b. Obtenha uma relação para V_{ac} em função de q_1 e de q_2 e as capacitâncias envolvidas em cada circuito; e obtenha uma relação para V_{bc} em função das cargas para cada circuito. Os coeficientes das cargas correspondentes nas equações correspondentes devem ser iguais para os dois circuitos.) (b) Para o circuito indicado na Figura 24.39c, determine a capacitância equivalente entre os terminais do lado esquerdo do circuito. (*Dica:* Use a transformação delta-Y, deduzida na parte (a). Use os pontos a, b e c para formar a ligação delta e depois transforme a ligação delta na ligação Y. A seguir, os capacitores poderão ser combinados, usando-se as regras das ligações em

série e em paralelo.) (c) Determine as cargas e as tensões de cada um dos capacitores indicados na Figura 24.39c.

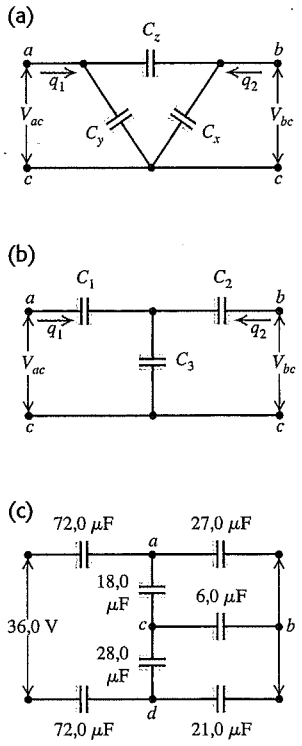


Figura 24.39 Problema desafiador 24.73.

24.74 O capacitor com placas paralelas imerso no ar indicado na Figura 24.40 possui duas placas condutoras de área A. A placa inferior repousa sobre um suporte fixo e a placa superior está suspensa por quatro molas, com constante k, colocadas nos quatro vértices da placa, como mostra a figura. Quando descarregadas, as placas são separadas por uma distância z_0. Uma bateria é ligada, produzindo uma diferença de potencial V entre as placas. Isso faz a distância entre as placas diminuir para z. Despreze os efeitos nas bordas das placas. (a) Mostre que a força eletrostática entre as placas carregadas possui módulo $\epsilon_0 AV^2/2z^2$. (*Dica:* Veja o Exercício 24.29.) (b) Obtenha uma expressão que relacione a distância z à diferença de potencial V. A equação resultante será uma equação cúbica em z. (c) Dados os valores $A = 0{,}300\ \text{m}^2$, $z_0 = 1{,}20$ mm, $K = 25{,}0$ N/m e $V = 120$ V, calcule os dois valores de z para os quais a placa do topo permanece em equilíbrio. (*Dica:* Você poderá resolver a equação cúbica substituindo um valor de z na equação e, a seguir, ajustar por tentativa o valor de z que satisfaça a equação com três algarismos significativos. Se você fizer um gráfico, poderá localizar os valores iniciais de z para obter o resultado mais preciso usando o método das tentativas. Uma das raízes da equação cúbica possui um valor negativo que não faz sentido físico.) (d) Para cada um dos valores de z encontrados na parte (c), verifique se o equilíbrio é estável ou instável. Para o equilíbrio estável, um pequeno deslocamento do objeto dá origem a uma força restauradora, que força o objeto a voltar para a posição de equilíbrio. Para o equilíbrio instável, um pequeno deslocamento dá origem a uma força resultante, que faz o objeto se afastar da posição de equilíbrio.

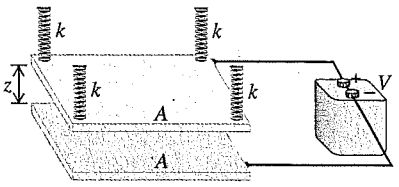


Figura 24.40 Problema desafiador 24.74.

24.75 Duas placas condutoras quadradas, cada qual com lado igual a L, são separadas por uma distância D. Uma placa dielétrica, com constante dielétrica K e com dimensões $L \times L \times D$, é inserida até uma distância x no espaço entre as placas, como indicado na Figura 24.41. (a) Calcule a capacitância C do sistema. (Veja o problema 24.72.) (b) Suponha que o capacitor seja conectado a uma bateria que mantém uma diferença de potencial constante V entre as placas. Se a placa dielétrica for inserida até uma distância adicional dx no espaço entre as placas, mostre que a variação de energia acumulada é dada por

$$dU = +\frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D}dx$$

(c) Suponha que, antes de a placa se mover uma distância dx, as placas sejam desconectadas da bateria, de modo que as cargas das placas permanecem constantes. Determine o módulo da carga em cada placa e, a seguir, mostre que, quando a placa penetra mais uma distância dx no interior do espaço entre as placas, a energia acumulada varia de uma quantidade igual em módulo, mas de sinal contrário ao valor de dU, encontrado no item (b). (d) Se F for o módulo da força exercida sobre o dielétrico pelas cargas das placas, então dU deve ser igual ao trabalho realizado *contra* essa força para deslocar o dielétrico até uma distância dx. Portanto, $dU = -F\,dx$. Mostre que a aplicação desse resultado na parte (b) sugere que a força elétrica empurra o dielétrico *para fora* do capacitor, enquanto o resultado da parte (c) sugere que a força empurra o dielétrico *para dentro* do capacitor. (e) A Figura 24.16 mostra que a força empurra efetivamente o dielétrico para dentro do capacitor. Explique a razão pela qual o resultado da parte (b) fornece uma resposta incorreta para o sentido dessa força. (Esse método não exige o conhecimento do campo nas bordas do capacitor.)

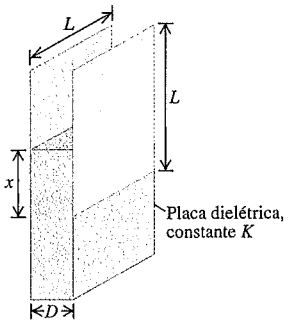


Figura 24.41 Problema desafiador 24.75.

24.76 Um capacitor esférico isolado possui carga $+Q$ sobre o condutor interno (raio r_a) e carga $-Q$ sobre o condutor externo (raio r_b). A seguir, metade do volume entre os dois condutores é preenchida por um dielétrico líquido com uma constante K,

conforme indicado na seção reta da Figura 24.42. (a) Determine a capacitância do capacitor preenchido até a metade. (b) Calcule o módulo de $\vec{E}$ no volume entre os dois condutores em função da distância r ao centro do capacitor. Forneça respostas para a metade superior e para a metade inferior desse volume. (c) Determine a densidade de cargas livres superficial sobre o condutor interno e sobre o condutor externo. (d) Calcule a densidade de cargas ligadas superficial sobre a superfície interna do dielétrico ($r = r_a$) e sobre a superfície externa do dielétrico ($r = r_b$). (e) Qual é a densidade de carga ligada sobre a superfície plana do dielétrico? Explique.

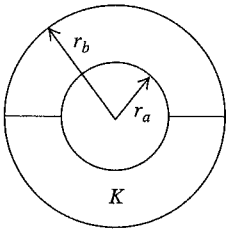


Figura 24.42 Problema desafiador 24.76.

24.77 Três placas metálicas quadradas A, B e C, cada uma delas com um lado igual a 12,0 cm e espessura de 1,50 mm, são agrupadas como indica a Figura 24.43. As placas são separadas por folhas de papel com espessura de 0,45 mm e constante dielétrica igual a 4,2. As placas externas são conectadas por um fio e ligadas a um ponto b. A placa interna é ligada a um ponto a. (a) Faça um diagrama e mostre, usando sinais positivos e negativos, a distribuição de cargas sobre as placas quando o ponto a é mantido com um potencial positivo em relação ao ponto b.
(b) Qual é o valor da capacitância entre os pontos a e b?

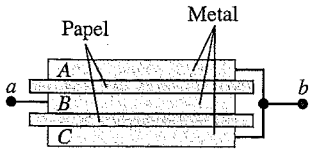


Figura 24.43 Problema desafiador 24.77.

24.78 Um indicador de nível de combustível usa um capacitor para determinar a altura atingida pelo combustível em um tanque. A constante dielétrica efetiva K_{ef} varia de um valor igual a 1 quando o tanque está vazio até um valor K, a constante dielétrica do combustível, quando o tanque está cheio. Um circuito eletrônico apropriado pode determinar a constante dielétrica efetiva da camada de ar combinada à camada do combustível entre as placas do capacitor. Cada uma das duas placas retangulares possui largura w e um comprimento L (Figura 24.44). A altura do combustível entre as placas é h. Despreze qualquer efeito de borda. (a) Deduza a expressão para K_{ef} em função de h. (b) Qual é a constante dielétrica efetiva quando o tanque está cheio até $\frac{1}{4}$ de seu volume, $\frac{1}{2}$ de volume e até $\frac{3}{4}$ de volume, se o combustível for gasolina (K = 1,95)? (c) Repita a parte (b) para o metanol (K = 33,0). (d) Para qual dos dois fluidos esse indicador do nível de combustível é mais prático?

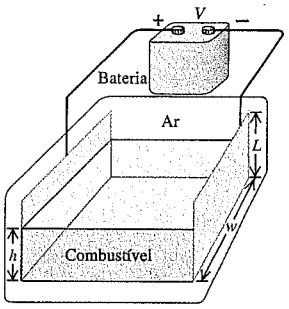
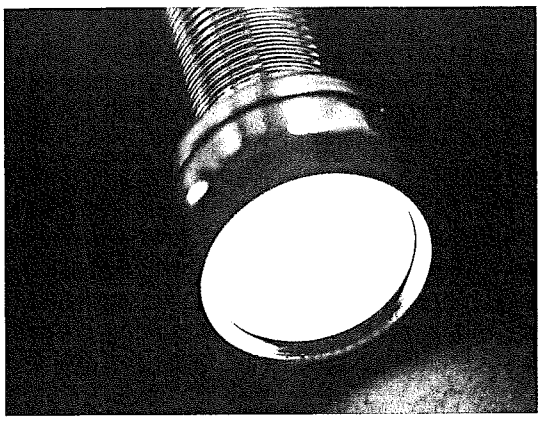


Figura 24.44 Problema desafiador 24.78.

CORRENTE, RESISTÊNCIA E FORÇA ELETROMOTRIZ 25



Em uma lanterna, o fluxo de corrente para fora da lâmpada é menor, maior ou igual ao fluxo da corrente para dentro da lâmpada?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O significado de corrente elétrica e como as cargas se movem em um condutor.
- O que significam a resistividade e a condutividade de uma substância.
- Como calcular a resistência de um condutor a partir das suas dimensões e da sua resistividade.
- Como uma força eletromotriz (fem) possibilita o fluxo de uma corrente em um circuito.
- Como fazer cálculos que envolvam energia e potência em circuitos.

Nos quatro capítulos anteriores, estudamos as interações de cargas elétricas *em repouso*; agora estamos preparados para estudar as cargas *em movimento*. Uma *corrente elétrica* é o movimento de cargas de uma região para outra. Quando esse movimento ocorre ao longo de uma trajetória que forma um circuito fechado, a trajetória denomina-se *circuito elétrico*.

Um circuito elétrico fornece, basicamente, um caminho para transferir *energia* de um local para outro. À medida que as partículas carregadas fluem através do circuito, a energia potencial elétrica é transferida de uma fonte (tal como uma bateria ou um gerador) até um dispositivo no qual essa energia é armazenada ou então convertida em outras formas de energia: em som de um sistema estéreo, em calor de uma torradeira ou em luz de uma lâmpada. Do ponto de vista tecnológico, os circuitos elétricos são úteis porque permitem que a energia seja transportada sem partes móveis (além do movimento das próprias partículas carregadas). Os circuitos elétricos desempenham um papel crucial em lanternas, aparelhos de CD, computadores, sistemas de transmissão e recepção de rádio e de TV, aparelhos eletrodomésticos e sistemas de distribuição de energia elétrica. Os sistemas nervosos dos animais e do homem são circuitos elétricos especiais que transmitem sinais vitais de uma parte do corpo à outra.

No Capítulo 26, veremos como analisar os circuitos elétricos e examinaremos algumas aplicações práticas dos circuitos. Antes disso, porém, devemos compreender as propriedades básicas dos circuitos elétricos. Essas propriedades são o tema deste capítulo. Para começar, descreveremos as propriedades dos condutores e como elas dependem da temperatura. Aprenderemos por que um fio de cobre curto, grosso e frio é melhor condutor do que um fio de aço longo, fino e quente. Estudaremos as propriedades das baterias e como elas produzem corrente e transferência de energia em um circuito. Para essa análise, usaremos os conceitos de corrente, diferença de potencial (ou voltagem), resistência e força eletromotriz. Finalmente, faremos um estudo da corrente elétrica através de um material usando um ponto de vista microscópico.

25.1 Corrente

Uma **corrente** é qualquer movimento de cargas de uma região para outra. Nesta seção, discutiremos correntes em materiais condutores. A maioria das aplicações tecnológicas das cargas em movimento envolve correntes desse tipo.

Em situações nas quais ocorre equilíbrio eletrostático (estudadas nos capítulos de 21 a 24), o campo elétrico é

igual a zero em todos os pontos no interior de um condutor, portanto não existe *nenhuma* corrente. Contudo, isso não significa que todas as cargas no interior do condutor estejam em repouso. Em um metal comum, tal como no caso do cobre ou do alumínio, alguns elétrons podem se mover livremente no interior do material condutor. Esses elétrons livres se movem caoticamente em todas as direções, de modo análogo ao movimento das moléculas de um gás, porém com velocidades muito mais elevadas, da ordem de 10^6 m/s. Entretanto, os elétrons não escapam do material condutor, porque eles são atraídos pelos íons positivos do material. O movimento dos elétrons é caótico; logo, não existe nenhum fluxo *efetivo* de cargas em nenhuma direção fixa e, portanto, não há corrente.

Considere agora o que ocorre quando um campo elétrico $\vec{F}$, estacionário e constante, é estabelecido no interior de um condutor. (Mais adiante mostraremos como isso pode ser feito.) Uma partícula carregada (tal como um elétron livre) no interior do material condutor é submetida a uma força estacionária $\vec{F} = q\vec{E}$. Se a referida carga estivesse no *vácuo*, essa força estacionária produziria uma aceleração estacionária na mesma direção da força $\vec{F}$ e, depois de um certo tempo, a carga estaria se deslocando nessa mesma direção com uma velocidade mais elevada. Contudo, quando as partículas carregadas se movem no interior de um *condutor*, elas colidem freqüentemente com os íons grandes do material que permanecem praticamente estáticos. O efeito resultante do campo elétrico $\vec{E}$ é tal que, além do movimento caótico das partículas carregadas, existe também um movimento muito lento, ou movimento de *arraste*, de um grupo de partículas carregadas na direção da força elétrica $\vec{F} = q\vec{E}$ (Figura 25.1). Esse movimento é descrito pela **velocidade de arraste** $\vec{v}_a$ das partículas. Como resultado, existe uma corrente resultante no condutor.

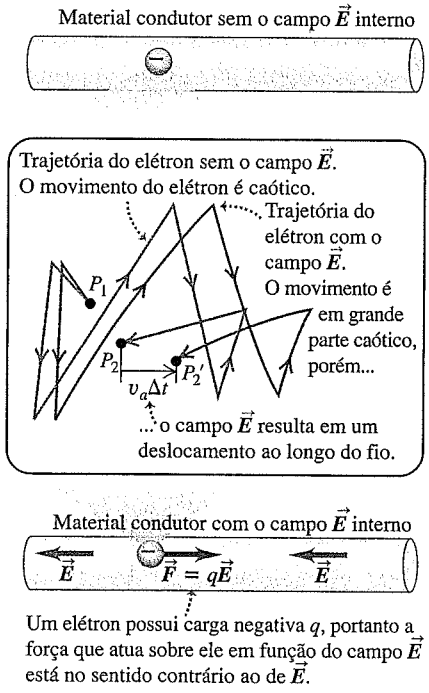


Figura 25.1 Quando não existe nenhum campo elétrico no interior de um material condutor, um elétron pode se mover caoticamente do ponto P_1 até P_2 depois de um intervalo de tempo Δt. Quando um campo elétrico $\vec{E}$ está presente, a força elétrica $\vec{F} = q\vec{E}$ produz uma pequena velocidade de arraste (muito exagerada na figura), que conduz o elétron ao ponto P'_2 por uma distância $v_a\Delta t$ de P_2 no sentido da força.

Se, por um lado, o movimento caótico dos elétrons tem uma velocidade média muito elevada, da ordem de 10^6 m/s, por outro lado, a velocidade de arraste é muito lenta, geralmente da ordem de 10^{-4} m/s. Mas, se os elétrons se movem tão lentamente, por que a luz surge imediatamente quando acendemos uma lanterna? A razão disso é que o campo elétrico se forma no interior do fio com uma velocidade que se aproxima à da velocidade da luz, e os elétrons começam a se mover ao longo do fio praticamente ao mesmo tempo. O tempo que qualquer elétron leva individualmente para se mover do interruptor até a lâmpada não é realmente relevante. Uma boa analogia é um grupo de soldados em posição de atenção, quando o sargento ordena que comecem a marchar; o comando chega aos ouvidos dos soldados à velocidade do som, que é muito maior do que a velocidade da marcha, portanto todos os soldados começam a se mover, essencialmente, ao mesmo tempo.

A direção e o sentido do fluxo da corrente

O arraste das cargas que se movem através de um condutor pode ser interpretado com base no trabalho e na energia. O campo elétrico $\vec{E}$ realiza um trabalho sobre as cargas que se deslocam. A energia cinética resultante é transferida para o material do condutor por meio das colisões com os íons que vibram em torno de suas posições de equilíbrio na rede cristalina do condutor. Essa energia transferida produz um aumento da energia de vibração média dos íons e, portanto, faz aumentar a temperatura do material. Logo, grande parte do trabalho realizado pelo campo elétrico é usada para aquecer o condutor, e *não* para acelerar os elétrons. Esse calor algumas vezes possui aplicação útil, como no caso de uma torradeira elétrica, porém muitas vezes ele é um efeito indesejável, inevitavelmente associado à corrente elétrica.

Em diferentes materiais que conduzem uma corrente, as cargas das partículas que se movem podem ser positivas ou negativas. Nos metais, as cargas que se movem são sempre elétrons (negativos), enquanto em um gás ionizado (plasma) ou em uma solução iônica as partículas incluem elétrons e íons positivos. Em um material semicondutor, tal como o germânio ou o silício, a condução pode ocorrer pelo movimento de elétrons ou pelo movimento de *vacâncias*, mais conhecidas como *buracos*, que são locais da rede onde não existem elétrons e que funcionam como se fossem cargas positivas.

Na Figura 25.2, indicamos segmentos de dois materiais que transportam uma corrente. Na Figura 25.2a, as

cargas que se deslocam são positivas, a força elétrica possui o mesmo sentido do campo $\vec{E}$ e a velocidade de arraste $\vec{v}_a$ apresenta sentido da esquerda para a direita. Na Figura 25.2b, as cargas são negativas, a força elétrica possui sentido contrário ao de $\vec{E}$ e a velocidade de arraste $\vec{v}_a$ revela sentido da direita para a esquerda. Em ambos os casos, há um fluxo resultante de carga positiva da esquerda para a direita, e as cargas positivas ficam à direita das cargas negativas. *Definimos* a corrente, designada pela letra *I*, como o movimento de cargas *positivas*. Portanto, descrevemos as correntes como se elas fossem um fluxo de cargas positivas, mesmo em casos nos quais sabemos que a corrente real é produzida pelos elétrons. Portanto, a corrente, tanto no caso da Figura 25.2a quanto no caso da Figura 25.2b, é considerada no sentido da esquerda para a direita. Essa escolha, ou convenção, para o fluxo das cargas denomina-se **corrente convencional**. Embora o sentido da corrente convencional *não* seja necessariamente o mesmo do sentido real do movimento das cargas, verificaremos que o sinal das cargas que se movem é irrelevante para a análise dos circuitos elétricos.

Na Figura 25.3, indicamos o segmento de um condutor no qual uma corrente está fluindo. Consideramos as cargas *positivas*, de modo que elas se movem no mesmo sentido da corrente. Definimos a corrente através da área com seção reta *A* como igual ao *fluxo total das cargas através da área por unidade de tempo*. Logo, se uma carga total dQ flui através de uma área em um intervalo de tempo dt, a corrente I através da área é dada por

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (25.1)$$

(definição de corrente)

A unidade SI de corrente denomina-se **ampère**; um ampère é definido como *um coulomb por segundo* (1 A = 1 C/s). O nome dessa unidade foi dado em homenagem ao cientista francês André Marie Ampère (1775-1836). Quando uma lanterna comum é ligada, a corrente que passa na lanterna é da ordem de 0,5 até 1 A; a corrente nos fios do motor de arranque usado para dar partida no motor de um automóvel é da ordem de 200 A. As correntes em circuitos de rádio e de televisão são geralmente expressas em *miliampères* (1 mA = 10^{-3} A) ou *microampères* (1 μA = 10^{-6} A), e as correntes em circuitos de computadores são expressas em *nanoampères* (1 nA = 10^{-9} A) ou *picoampères* (1 pA = 10^{-12} A).

ATENÇÃO Corrente não é um vetor Embora usemos a palavra *sentido* de uma corrente, como definida pela Equação (25.1), observamos que ela *não* é uma grandeza vetorial. Em um fio que transporta uma corrente, a corrente flui sempre ao longo do comprimento do fio tanto em fios retilíneos quanto em fios curvos. Um único vetor não pode descrever a mesma grandeza ao longo de uma trajetória curva; por essa razão a corrente não é um vetor. A direção da corrente será definida em palavras (como na frase 'a corrente flui no sentido horário em torno do circuito') ou será escolhida como positiva a corrente que flui em determinado sentido e negativa aquela que flui no sentido contrário.

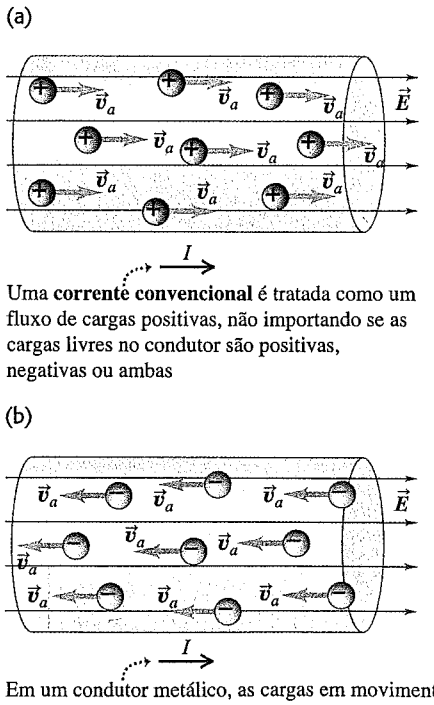


Figura 25.2 A mesma corrente pode ser produzida por (a) cargas positivas que se deslocam no mesmo sentido do campo $\vec{E}$ ou (b) por igual número de cargas negativas se deslocando com a mesma velocidade no sentido contrário ao do campo $\vec{E}$.

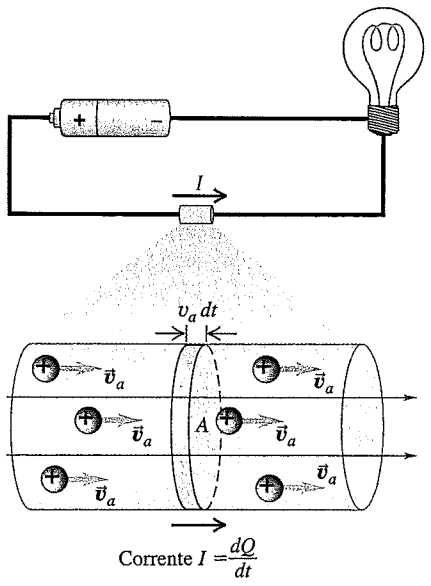


Figura 25.3 A corrente *I* através da área com seção reta *A* é a taxa de variação com o tempo da carga transferida através de *A*. O movimento caótico de cada partícula possui velocidade média igual a zero, e a corrente resultante apresenta o mesmo sentido de $\vec{E}$, sejam positivas as cargas em movimento (como exemplificado neste caso) ou negativas (como na Figura 25.2b).

Corrente, velocidade de arraste e densidade de corrente

Podemos expressar uma corrente com base na velocidade de arraste das cargas que se movem. Vamos considerar novamente a situação indicada na Figura 25.3: um condutor com seção reta de área A e um campo elétrico $\vec{E}$ orientado da esquerda para a direita. Em princípio, suponhamos que as cargas livres do condutor sejam positivas; então a velocidade de arraste possui o mesmo sentido do campo elétrico.

Imagine que existam n partículas carregadas por unidade de volume. A grandeza n denomina-se **concentração** das partículas; sua unidade SI é m^{-3}. Suponha que todas as partículas se movam com a mesma velocidade de arraste com módulo v_a. Em um intervalo de tempo dt, cada partícula se desloca uma distância $v_a\,dt$. As partículas que fluem para fora da extremidade direita do cilindro sombreado de comprimento $v_a\,dt$ durante o tempo dt são as partículas que estavam no interior desse cilindro no início do intervalo dt. O volume do cilindro é dado por $Av_a\,dt$, e o número de partículas em seu interior é $nAv_a\,dt$. Se cada partícula possui uma carga q, a carga dQ que flui para fora da extremidade direita do cilindro durante o tempo dt é dada por

$$dQ = q(nAv_a\,dt) = nqv_aA\,dt$$

e a corrente é

$$I = \frac{dQ}{dt} = nqv_aA$$

A **densidade de corrente** J é definida como a corrente que flui *por unidade de área da seção reta*:

$$J = \frac{I}{A} = nqv_a$$

As unidades de densidade de corrente são ampères por metro quadrado (A/m^2).

Quando as cargas que se movem forem negativas em vez de positivas, como na Figura 25.2b, a velocidade de arraste terá sentido contrário ao de $\vec{E}$. Porém, a *corrente* apresentará ainda o mesmo sentido de $\vec{E}$ em cada ponto do condutor. Portanto, a densidade de corrente J e a corrente I não dependem do sinal da carga e, portanto, nas expressões anteriores para J e para I, podemos substituir a carga q por seu valor absoluto $|q|$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_aA \qquad (25.2)$$

(expressão geral da corrente)

$$J = \frac{I}{A} = n|q|v_a \qquad (25.3)$$

(expressão geral da densidade de corrente)

A corrente em um condutor é igual ao produto da concentração das cargas que se movem, vezes o módulo da carga de cada partícula, vezes o módulo da velocidade de arraste, vezes a área da seção reta do condutor.

Podemos também definir um *vetor* densidade de corrente $\vec{J}$ que inclui o sentido da velocidade de arraste:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_a \quad \text{(vetor densidade de corrente)} \qquad (25.4)$$

Não existe *nenhum* sinal de valor absoluto na Equação (25.4). Quando q é positivo, $\vec{v}_a$ tem o mesmo sentido de $\vec{E}$, e, quando q é negativo, $\vec{v}_a$ tem sentido contrário ao de $\vec{E}$; porém, em qualquer dos dois casos, $\vec{J}$ apresenta sempre o mesmo sentido de $\vec{E}$. A Equação (25.3) fornece o *módulo* J do vetor densidade de corrente $\vec{J}$.

ATENÇÃO Densidade de corrente *versus* corrente Note que a densidade de corrente $\vec{J}$ é um vetor, mas a corrente I não. A diferença é que a densidade de corrente $\vec{J}$ descreve como as cargas fluem em determinado ponto, e o sentido do vetor descreve o sentido do fluxo nesse ponto. Por outro lado, a corrente I descreve como as cargas fluem através de um objeto estendido, como um fio. Por exemplo, I possui o mesmo valor em todos os pontos do circuito na Figura 25.3, mas $\vec{J}$ não: a densidade de corrente aponta de cima para baixo, no lado esquerdo do circuito, e de baixo para cima, no lado direito. O módulo de $\vec{J}$ também pode variar em torno de um circuito. Na Figura 25.3, o módulo da densidade de carga $J = I/A$ é menor na bateria (que possui uma área de seção reta A) que nos fios (que possuem uma área de seção reta pequena).

No caso geral, um condutor pode conter diferentes tipos de cargas que se movem q_1, q_2, ..., concentrações n_1, n_2, ... e velocidades de arraste v_{a1}, v_{a2}, ... Exemplo disso é a condução em uma solução iônica (Figura 25.4). Em uma solução de cloreto de sódio, a corrente é transportada tanto pelos íons de sódio positivos quanto pelos íons de cloro negativos; a corrente total I é calculada somando-se as correntes produzidas pelos dois tipos de cargas, aplicando-se a Equação (25.2). Analogamente, o vetor densidade de corrente total $\vec{J}$ pode ser calculado usando-se a Equação (25.4) para cada partícula carregada e somando-se os resultados.

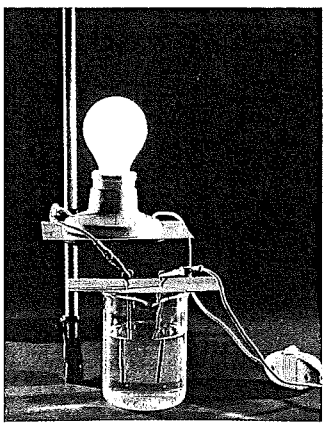


Figura 25.4 Uma parte do circuito elétrico que inclui esta lâmpada passa por um recipiente que contém uma solução de cloreto de sódio. A corrente na solução é a soma da corrente de cargas positivas (íons Na^+) com a corrente de cargas negativas (íons Cl^-).

Veremos na Seção 25.4 que é possível obter uma corrente *estacionária* (ou seja, aquela que não varia com o tempo) somente quando o condutor forma um circuito fechado, chamado de *circuito completo*. Nessa situação estacionária, a carga total em cada segmento do condutor permanece constante. Portanto, a taxa do fluxo da carga *para fora* de uma das extremidades do segmento, em qualquer instante, é igual à taxa do fluxo da carga *para dentro* da outra extremidade do segmento; e a *corrente é a mesma através de qualquer seção reta do circuito*. Usaremos essa observação quando analisarmos circuitos elétricos, mais adiante neste capítulo.

Em muitos circuitos simples, tal como no caso de uma lanterna ou de uma furadeira elétrica, o sentido da corrente é sempre o mesmo; essa corrente denomina-se *corrente contínua*. No entanto, certos aparelhos eletrodomésticos, tais como uma torradeira, um refrigerador ou uma televisão, utilizam *corrente alternada*, que muda de sentido permanentemente. Neste capítulo, vamos considerar apenas a corrente contínua. Uma corrente alternada possui características especiais que merecem um estudo detalhado, o qual será feito no Capítulo 31.

Exemplo 25.1

DENSIDADE DE CORRENTE E VELOCIDADE DE ARRASTE EM UM FIO Um fio de cobre com calibre 18 (geralmente usado nos fios que ligam lâmpadas) possui um diâmetro nominal igual a 1,02 mm. Esse fio está conectado a uma lâmpada de 200 W e conduz uma corrente de 1,67 A. A densidade dos elétrons livres é de $8{,}5 \times 10^{28}$ elétrons por metro cúbico. Calcule os módulos (a) da densidade de corrente e (b) da velocidade de arraste.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa as relações entre corrente, densidade de corrente e velocidade de arraste.

PREPARAR: conhecemos a corrente e as dimensões do fio, portanto usamos a Equação (25.3) para calcular o módulo J da densidade de corrente. Então usamos a Equação (25.3) novamente para determinar a velocidade de arraste v_a de J e a concentração de elétrons.

EXECUTAR: (a) A área da seção reta é dada por

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1{,}02 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}{4} = 8{,}17 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$$

O módulo de densidade de corrente é

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1{,}67\ \text{A}}{8{,}17 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 2{,}04 \times 10^{6}\ \text{A/m}^2$$

(b) Explicitando o módulo da velocidade de arraste v_a da Equação (25.3), obtemos

$$v_a = \frac{J}{n|q|} = \frac{2{,}04 \times 10^{6}\ \text{A/m}^2}{(8{,}5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})|-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}|}$$
$$= 1{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m/s} = 0{,}15\ \text{mm/s}$$

AVALIAR: com essa velocidade, um elétron levaria 6700s, ou cerca de 1 hora e 50 min. para percorrer uma distância igual a 1 m do fio. As velocidades dos movimentos caóticos dos elétrons são da ordem de 10^6 m/s. Logo, nesse exemplo, a velocidade de arraste do elétron é cerca de 10^{10} vezes menor do que a velocidade do movimento caótico. Imagine os elétrons vagando freneticamente com velocidades fantásticas, porém com um arraste extremamente lento!

Teste sua compreensão da Seção 25.1 Suponha que substituímos o fio do Exemplo 25.1 por outro, de cobre com calibre 12 e que possui o dobro do diâmetro do anterior, de calibre 18. Se mantivermos a mesma corrente, que efeito isso teria sobre o módulo da velocidade de arraste v_a? (i) nenhum – v_a não varia; (ii) v_a duplica; (iii) v_a é quatro vezes maior; (iv) v_a se reduz pela metade; (v) v_a se reduz a um quarto do valor. ■

25.2 Resistividade

A densidade de corrente $\vec{J}$ em um condutor depende do campo elétrico $\vec{E}$ e das propriedades do material. Essa dependência, em geral, é muito complexa. Porém, para certos materiais, especialmente para os metais, em uma dada temperatura, $\vec{J}$ é quase *diretamente proporcional* a $\vec{E}$, e a razão entre os módulos E e J permanece constante. Essa relação, chamada de lei de Ohm, foi descoberta em 1826 pelo físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854). A palavra 'lei' deveria, na verdade, estar entre aspas, porque a **lei de Ohm**, assim como a lei dos gases ideais e a lei de Hooke, fornece um *modelo idealizado* que descreve muito bem o comportamento de alguns materiais, porém não fornece uma descrição geral para *todos* os materiais. Na discussão seguinte, vamos supor que a lei de Ohm seja válida, embora existam muitas situações para as quais ela não é aplicável. Esse caso é semelhante ao que ocorre com as forças de atrito estático e cinético; tomamos essas forças de atrito como diretamente proporcionais às respectivas forças normais, embora tenhamos visto que essa descrição é apenas uma aproximação.

Definimos a **resistividade** ρ de um material como a razão entre o módulo do campo elétrico e o módulo da densidade de corrente:

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad (25.5)$$

(definição de resistividade)

Quanto maior for o valor da resistividade, maior será o campo elétrico necessário para produzir uma dada densidade de corrente, ou menor será a densidade de corrente gerada por um dado campo elétrico. É possível observar na Equação (25.5) que as unidades de ρ são $(\text{V/m})/(\text{A/m}^2) = \text{V} \cdot \text{m/A}$. Como veremos na próxima seção, 1 V/A denomina-se 1 *ohm* (1 Ω; usamos a letra grega maiúscula Ω, ou 'ômega', para designar 'ohm'). Logo, as unidades SI de ρ são Ω · m (ohm vezes metro). Alguns valores da resistividade são indicados na Tabela 25.1. Um condutor perfeito deveria ter resistência igual a zero e um isolante perfeito deveria ter resistência infinita. Os metais e as ligas metálicas são os materiais com menor resistividade e também os melhores condutores. A resistividade de um isolante é cerca de 10^{22} vezes mais elevada do que a resistividade de um condutor.

Tabela 25.1 Valores da resistividade na temperatura ambiente (20 °C)

	Substância	ρ ($\Omega \cdot$ m)		Substância	ρ ($\Omega \cdot$ m)
Condutores			**Semicondutores**		
Metais	Prata	$1{,}47 \times 10^{-8}$		Carbono puro (grafita)	$3{,}5 \times 10^{-5}$
	Cobre	$1{,}72 \times 10^{-8}$		Germânio puro	0,60
	Ouro	$2{,}44 \times 10^{-8}$		Silício puro	2300
	Alumínio	$2{,}75 \times 10^{-8}$	**Isolantes**		
	Tungstênio	$5{,}25 \times 10^{-8}$		Âmbar	5×10^{14}
	Aço	20×10^{-8}		Vidro	$10^{10} - 10^{14}$
	Chumbo	22×10^{-8}		Lucita	$> 10^{13}$
	Mercúrio	95×10^{-8}		Mica	$10^{11} - 10^{15}$
Ligas	Manganina (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	44×10^{-8}		Quartzo (fundido)	75×10^{16}
	Constantan (Cu 60%, Ni 40%)	49×10^{-8}		Enxofre	10^{15}
	Nicromo	100×10^{-8}		Tetrafluoretileno	$> 10^{13}$
				Madeira	$10^{8} - 10^{11}$

O inverso da resistividade é a **condutividade**. Suas unidades SI são $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Um bom condutor de eletricidade possui condutividade muito maior que um isolante. A condutividade elétrica é análoga à condutividade térmica. Comparando a Tabela 25.1 com a Tabela 17.5 (Condutividade térmica), notamos que um bom condutor elétrico, tal como um metal, geralmente é um bom condutor de calor. Um mau condutor elétrico, tal como plástico ou cerâmica, costuma ser um mau condutor de calor. Em um metal, os elétrons livres, que são os portadores de carga na condução elétrica, também são os principais responsáveis pela condução de calor, portanto espera-se que haja uma relação entre a condutividade elétrica e a condutividade térmica. Como existe uma enorme diferença entre a condutividade de um condutor e a condutividade de um isolante, é fácil confinar a corrente elétrica em determinados caminhos ou circuitos (Figura 25.5). Entretanto, como a diferença entre a condutividade *térmica* de um condutor de calor e a condutividade de um isolante é apenas um fator aproximadamente igual a 10^3, em geral é impossível confinar um fluxo de calor com a mesma facilidade da corrente elétrica.

Um *semicondutor* possui resistividade intermediária entre a metal e a isolante. Esse tipo de material é importante por causa do modo como sua resistividade varia com a temperatura e com as impurezas.

Um material que obedece razoavelmente à lei de Ohm denomina-se condutor *ôhmico* ou condutor *linear*. Para esse tipo de material, a uma dada temperatura, ρ é uma *constante* que não depende do valor de E. Muitos materiais exibem um comportamento substancialmente diferente do indicado pela lei de Ohm; eles são chamados de materiais *não-ôhmicos* ou *não-lineares*. Para esses materiais, J depende de E de modo mais complexo.

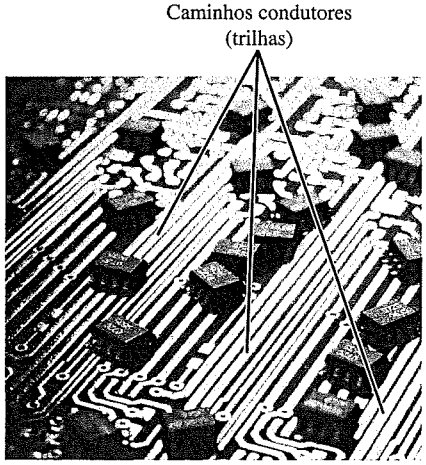


Figura 25.5 Os 'fios' de cobre, ou trilhas, nesta placa de circuito são diretamente impressos na superfície da placa isolante de cor escura. Embora os traços estejam muito próximos uns dos outros (somente cerca de um milímetro de distância), a placa possui uma resistividade tão alta (e uma baixa condutividade) em comparação à do cobre que não há nenhum fluxo de corrente entre os traços.

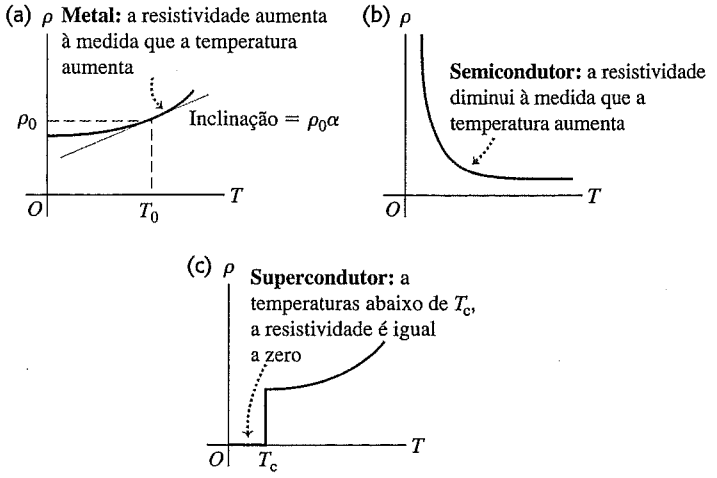


Figura 25.6 Variação da resistividade ρ em função da temperatura absoluta T para (a) um metal normal, (b) um semicondutor e (c) um supercondutor. Em (a), a aproximação linear de ρ em função de T é indicada por um segmento de linha reta; a aproximação concorda com o valor da função para $T = T_0$ quando $\rho = \rho_0$.

Tabela 25.2 Coeficientes de temperatura da resistividade (valores aproximados nas vizinhanças da temperatura ambiente)

Material	$\alpha[(°C)^{-1}]$	Material	$\alpha[(°C)^{-1}]$
Alumínio	0,0039	Chumbo	0,0043
Latão	0,0020	Manganina	0,00000
Carbono (grafita)	−0,0005	Mercúrio	0,00088
Constantan	0,00001	Nicromo	0,0004
Cobre	0,00393	Prata	0,0038
Ferro	0,0050	Tungstênio	0,0045

As analogias com o escoamento de um fluido podem ser úteis para visualizar o que ocorre com correntes e circuitos. Por exemplo, para fazer vinho, o produto é filtrado para remover sedimentos. Uma bomba força o fluido que passa através do filtro sob pressão; se a vazão (análoga a J) for proporcional à diferença de pressão entre os dois lados do filtro (análogo ao E aplicado), o comportamento será semelhante ao da lei de Ohm.

Resistividade e temperatura

A resistividade de um condutor *metálico* quase sempre cresce com o aumento da temperatura, como indica a Figura 25.6a. À medida que a temperatura aumenta, os íons do condutor vibram com uma amplitude mais elevada, aumentando a probabilidade das colisões dos elétrons com os íons, como se vê na Figura 25.1. Isso dificulta o arraste dos elétrons através do condutor e, portanto, faz diminuir a corrente. Havendo um intervalo de temperatura pequeno (até cerca de 100 °C), a resistividade de um metal pode ser aproximadamente representada pela equação

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (25.6)$$

(resistividade em função da temperatura)

em que ρ_0 é a resistividade para uma temperatura de referência T_0 (geralmente considerada como 0 °C ou 20 °C) e $\rho(T)$ é a resistividade para uma temperatura T, que pode ser maior ou menor que T_0. O fator α denomina-se **coeficiente de temperatura da resistividade**. Alguns valores típicos desse coeficiente são indicados na Tabela 25.2. A resistividade da liga de manganina é praticamente independente da temperatura.

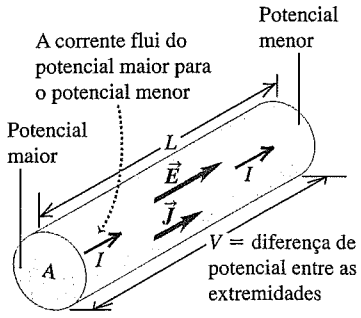


Figura 25.7 Um condutor com seção reta uniforme. A densidade de corrente é uniforme em qualquer seção reta, e o campo elétrico é constante ao longo do comprimento.

A resistividade da grafita (um material não-metálico) *diminui* quando a temperatura aumenta, visto que em temperaturas elevadas muito mais elétrons ficam 'mais fracamente ligados' aos átomos e adquirem maior mobilidade; portanto, o coeficiente de temperatura da resistividade da grafita é negativo. O mesmo tipo de comportamento ocorre para os materiais semicondutores (Figura 25.6b). A medida da resistência de um pequeno cristal semicondutor pode servir, portanto, para uma sensível medida de temperatura; esse é o princípio de funcionamento de um termômetro denominado *termistor*.

Alguns materiais, incluindo metais, ligas metálicas e óxidos, apresentam um fenômeno chamado de *supercondutividade*. À medida que a temperatura diminui, a resistividade cai, no início, lentamente, como em qualquer metal. Porém, para uma certa temperatura crítica T_c, ocorre uma transição de fase, e a resistividade diminui bruscamente, como indica a Figura 25.6c. Se uma corrente for estabelecida em um anel supercondutor, ela permanecerá circulando no anel indefinidamente, sem a necessidade de nenhuma fonte de alimentação.

A supercondutividade foi descoberta em 1911 pelo físico holandês Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926). Ele observou que, para temperaturas muito baixas, menores do que 4,2 K, a resistividade do mercúrio caía repentinamente para zero. Durante 75 anos após essa descoberta, o valor máximo de T_c conseguido era da ordem de 20 K. Isso significa que a supercondutividade só podia ser obtida usando-se o hélio líquido, que é muito caro, cuja temperatura de ebulição é de 4,2 K, ou o hidrogênio líquido, que é explosivo e cuja temperatura de ebulição é de 20,3 K. Porém, em 1986, Karl Müller e Johannes Bednorz descobriram um óxido de bário, lantânio e cobre com T_c da ordem de 40 K, dando início a uma corrida para desenvolver materiais supercondutores com 'temperaturas críticas elevadas'.

Em 1987, foi sintetizado um óxido complexo com ítrio, bário e cobre com um valor de T_c maior que 77 K, que corresponde ao ponto de ebulição do nitrogênio líquido, um gás barato e que não apresenta nenhum risco. Até 2006, o valor de T_c máximo atingido sob pressão atmosférica era da ordem de 138 K, e materiais com supercondutividade na temperatura ambiente poderão brevemente se tornar uma realidade. São enormes as implicações dessas descobertas para sistemas de distribuição de energia elétrica, projetos de

computadores e transportes. Enquanto isso, eletroímãs supercondutores resfriados com hélio líquido já são usados em aceleradores de partículas; e trens experimentais com levitação magnética estão em operação. Os supercondutores possuem outras propriedades exóticas que necessitam de conceitos do magnetismo para descrevê-las; no Capítulo 29, discutiremos essas questões de modo mais aprofundado.

Teste sua compreensão da Seção 25.2 Você mantém um campo elétrico constante no interior de um pedaço de semicondutor enquanto baixa a temperatura dele. O que ocorre à densidade de corrente no semicondutor? (i) aumenta; (ii) diminui; (iii) não varia. ■

25.3 Resistência

Para um condutor com resistividade ρ, a densidade de corrente $\vec{J}$ em um ponto que possui um campo elétrico $\vec{E}$ é dada pela Equação (25.5), que pode ser escrita na forma

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \tag{25.7}$$

Quando a lei de Ohm é válida, ρ permanece constante e não depende do módulo do campo elétrico; logo, $\vec{E}$ é diretamente proporcional a $\vec{J}$. Contudo, geralmente estamos mais interessados em saber o valor da corrente total em um condutor que o valor de $\vec{J}$; e mais interessados em saber o valor da diferença de potencial nas extremidades do condutor que o valor de $\vec{E}$. A razão disso é que as medidas de corrente e de diferença de potencial são mais fáceis de serem estabelecidas do que as medidas de $\vec{J}$ e de $\vec{E}$.

Suponha que nosso condutor seja um fio de comprimento L e seção reta uniforme com área A, como indicado na Figura 25.7. Seja V a diferença de potencial entre a extremidade com potencial maior e a extremidade com potencial menor, de modo que V seja positivo. A corrente flui sempre no *sentido* da extremidade com potencial maior para a de potencial menor. Isso ocorre porque a corrente em um condutor flui no sentido do vetor $\vec{E}$, qualquer que seja o sinal das cargas que se movem (Figura 25.2), e porque o vetor $\vec{E}$ aponta no sentido da *diminuição* do potencial elétrico (veja a Seção 23.2). À medida que a corrente flui através da diferença de potencial, ocorre perda de energia potencial elétrica; essa energia é transferida aos íons do material do condutor durante as colisões.

Podemos também relacionar o *valor* da corrente I à diferença de potencial nas extremidades do condutor. Supondo que os módulos da densidade de corrente $\vec{J}$ e do campo elétrico $\vec{E}$ sejam uniformes através do condutor, a corrente total I é dada por $I = JA$, e a diferença de potencial V entre as extremidades é dada por $V = EL$. Explicitando nessas equações E e J e substituindo esses valores na Equação (25.7), obtemos

$$\frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \quad \text{ou} \quad V = \frac{\rho L}{A} I \tag{25.8}$$

O resultado anterior mostra que, quando ρ é constante, a corrente total I é proporcional à diferença de potencial V.

A razão entre V e I para um dado condutor denomina-se **resistência** R:

$$R = \frac{V}{I} \tag{25.9}$$

Comparando a definição de R à Equação (25.8), vemos que a resistência R de um dado condutor está relacionada à resistividade ρ do material do condutor, obedecendo à equação

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{25.10}$$

(relação entre resistência e resistividade)

Quando ρ for constante, como no caso dos materiais ôhmicos, então R também será constante. A equação

$$V = IR \tag{25.11}$$

(relação entre voltagem, corrente e resistência)

é geralmente chamada de lei de Ohm, contudo é importante entender que o verdadeiro significado da lei de Ohm consiste na indicação de uma proporcionalidade direta (para alguns materiais) de V com I ou de J com E. A Equação (25.9) ou (25.11) *define* a resistência R para *qualquer* condutor que obedeça ou não à lei de Ohm, porém somente no caso de R ser constante é que essa relação é chamada corretamente de lei de Ohm.

Interpretação de resistência

A Equação (25.10) mostra que a resistência de um fio ou de outro condutor com seção reta uniforme é diretamente proporcional ao comprimento do fio e inversamente proporcional à área de sua seção reta. Ela também é proporcional à resistividade do material com o qual o condutor é feito.

A analogia com o escoamento de um fluido é novamente útil. Por associação à Equação (25.10), uma mangueira fina transportando água oferece uma resistência maior que outra grossa, e uma mangueira longa possui resistência maior que outra curta (Figura 25.8). Podemos fazer a resistência aumentar preenchendo o tubo com algodão ou areia — isso corresponde a um aumento de resistividade. A vazão é diretamente proporcional à diferença de pressão entre as extremidades da mangueira. A vazão do fluido é análoga à corrente elétrica, e a diferença de pressão é análoga à diferença de potencial ('voltagem'). Contudo, não devemos levar essa analogia longe demais; a vazão em um tubo geralmente *não* é proporcional à área da sua seção reta (veja a Seção 14.6).

A unidade SI de resistência é o **ohm**, que é igual a um volt por ampère (1 Ω = 1 V/A). O *quiloohm* (1 kΩ = 10^3 Ω) e o *megaohm* (1 MΩ = 10^6 Ω) também são unidades comumente usadas. Um fio de cobre de calibre 12 com 100 m de comprimento, um tamanho usual na fiação de

uma casa, possui uma resistência igual a 0,5 Ω na temperatura ambiente. Uma lâmpada de 100 W para 120 V possui uma resistência igual a 140 Ω (na temperatura em que ela se encontra quando está acesa). Quando a mesma corrente I flui na lâmpada e no fio de cobre, a diferença de potencial $V = IR$ é muito maior através da lâmpada e bem mais energia potencial é perdida na lâmpada. Essa energia perdida é convertida pelo filamento da lâmpada em luz e calor. Como ninguém deseja que a fiação de sua casa fique incandescente, a resistência da fiação deve ser mantida pequena, usando-se um fio com resistividade pequena e com área grande na sua seção reta.

Como a resistividade de um material varia com a temperatura, a resistência de um condutor específico também varia com a temperatura. Para intervalos de temperatura não muito elevados, essa variação é dada aproximadamente por uma relação linear, análoga à Equação (25.6):

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (25.12)$$

Na equação anterior, $R(T)$ é a resistência a uma temperatura T, e R_0 é a resistência a uma temperatura T_0, geralmente tomada como 0 °C ou 20 °C. O *coeficiente de temperatura da resistência* α que aparece na Equação (25.6) é constante, desde que as dimensões de L e de A na Equação (25.10) não variem apreciavelmente com a temperatura; isso ocorre efetivamente para a maior parte dos materiais condutores (veja o Problema 25.67). Dentro dos limites de validade da Equação (25.12), a *variação* da resistência resultante de uma variação de temperatura $T - T_0$ é dada por $R_0\alpha(T - T_0)$.

Um **resistor** é um elemento que possui um dado valor de resistência em suas extremidades. Resistores com resistências no intervalo de 0,01 até 10^7 Ω podem ser adquiridos em casas comerciais. Os resistores individuais usados em circuitos eletrônicos geralmente são cilindros com dimensões de alguns milímetros de diâmetro e de comprimento; e possuem fios que saem de suas extremidades. A resistência pode ser marcada sobre o resistor, usando-se um código de cores mediante a convenção indicada na Tabela 25.3. As duas primeiras faixas (começando com a faixa mais próxima de uma das extremidades) indicam dígitos, e a terceira faixa mostra o fator de multiplicação em potência de 10, como indica a Figura 25.9. Por exemplo, a combinação de cores verde–violeta–vermelho teria uma resistência igual a 57×10^2 Ω ou 5,7 kΩ. A quarta faixa, quando existe, indica a precisão do valor; quando não há nenhuma faixa, a precisão é de ±20%; para uma faixa prateada a precisão é de ±10% e para uma faixa dourada a precisão é de ±5%. Outra característica importante de um resistor é a *potência* máxima que ele pode dissipar sem se danificar. Retornaremos a esse assunto na Seção 25.5.

Para um resistor que obedece à lei de Ohm, um gráfico da corrente em função da diferença de potencial (voltagem) é uma linha reta (Figura 25.10a). A inclinação da reta é igual a $1/R$. Quando o sinal da diferença de potencial varia, o sinal da corrente também varia. Na Figura 25.7, isso equivale a inverter a polaridade das extremidades do condutor, de modo que o campo elétrico, a corrente e a densidade de corrente invertem os sentidos. Nos dispositivos que não obedecem à lei de Ohm, a corrente pode não ser proporcional à voltagem e ela pode não ser invertida com a inversão da voltagem. A Figura 25.10b indica o comportamento de um *diodo* semicondutor, que é um dispositivo usado para converter uma corrente alternada em uma corrente contínua e para executar uma ampla gama de funções lógicas em um circuito de computador. Quando o potencial V do anodo (um dos dois terminais do diodo) é positivo em relação ao do catodo (o outro terminal), I aumenta exponencialmente em relação ao aumento de V; para potenciais negativos, a corrente é extremamente pequena. Logo, uma diferença de potencial positiva V produz uma corrente que flui no sentido positivo; porém, uma diferença de potencial negativa não produz praticamente nenhuma corrente. Portanto, um diodo funciona como se fosse uma válvula que só deixa a corrente passar em um dado sentido pelo circuito.

Figura 25.8 Uma mangueira usada para combater incêndios oferece substancial resistência ao fluxo de água. Para fazer a água escoar rapidamente pelo tubo, a extremidade no lado oposto ao do fluxo deve estar sob pressão muito mais elevada do que a extremidade de onde a água emerge. Analogamente, deve haver uma grande diferença de potencial entre as extremidades de um fio longo, a fim de provocar uma corrente elétrica substancial através do fio.

Tabela 25.3 Código de cores para obter o valor da resistência de um resistor

Cor	Valor do dígito	Valor do multiplicador
Preta	0	1
Marrom	1	10
Vermelha	2	10^2
Laranja	3	10^3
Amarela	4	10^4
Verde	5	10^5
Azul	6	10^6
Violeta	7	10^7
Cinza	8	10^8
Branca	9	10^9

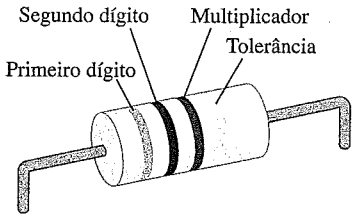


Figura 25.9 Este resistor possui uma resistência de 5,7 kΩ, com uma precisão (tolerância) de ± 10%.

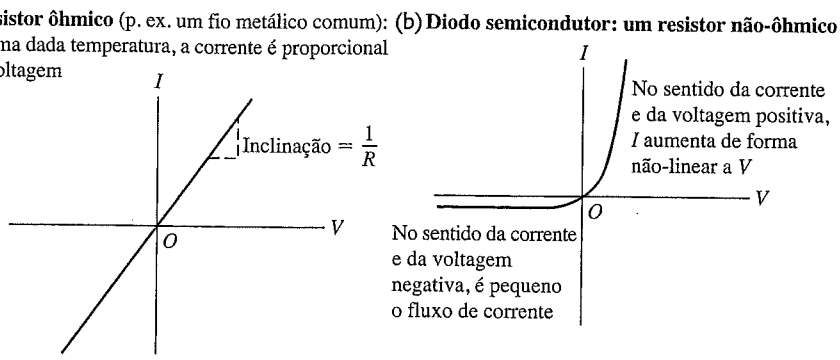


Figura 25.10 Relações corrente–voltagem para dois dispositivos. Somente para um resistor que obedece à lei de Ohm, como em (a), é que I é proporcional a V.

Exemplo 25.2

RESISTÊNCIA, DIFERENÇA DE POTENCIAL E CAMPO ELÉTRICO EM UM FIO O fio de cobre calibre 18 do Exemplo 25.1 (Seção 25.1) possui seção reta com área $8{,}20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$ e diâmetro igual a 1,02 mm. Ele conduz uma corrente $I = 1{,}67$ A. Calcule (a) o módulo do campo elétrico no fio; (b) a diferença de potencial entre dois pontos do fio separados por uma distância igual a 50,0 m; (c) a resistência de um segmento do fio de comprimento igual a 50,0 m.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conhecemos os valores da área de seção reta A e a corrente I. As incógnitas do problema são o módulo do campo elétrico E, a diferença de potencial V e a resistência R.

PREPARAR: o módulo da densidade de corrente $J = I/A$ e a resistividade ρ são dados na Tabela 25.1. Achamos o módulo do campo elétrico pela Equação (25.5), $E = \rho J$. Uma vez determinado E, a diferença de potencial é simplesmente o produto de E e o comprimento do fio. Determinamos a resistência pela Equação (25.11).

EXECUTAR: (a) como indicado na Tabela 25.1, a resistividade do cobre é igual a $1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Logo, usando a Equação (25.5),

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{A} = \frac{(1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1{,}67\ \text{A})}{8{,}20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 0{,}0350\ \text{V/m}$$

(b) A diferença de potencial é dada por

$$V = EL = (0{,}0350\ \text{V/m})(50{,}0\ \text{m}) = 1{,}75\ \text{V}$$

(c) De acordo com a Equação (25.11), a resistência de 50,0 m do fio é

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1{,}75\ \text{V}}{1{,}67\ \text{A}} = 1{,}05\ \Omega$$

AVALIAR: podemos também obter o resultado anterior diretamente da Equação (25.10):

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(50{,}0\ \text{m})}{8{,}20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 1{,}05\ \Omega$$

Ressaltamos que a resistência do fio é *definida* como a razão da voltagem pela corrente. Se o fio for fabricado com material não-ôhmico, R será diferente para diferentes valores de V, mas será sempre dado por $R = V/I$. A resistência também é sempre dada por $R = \rho L/A$; se o material for não-ôhmico, ρ não será constante e dependerá de E (ou seja, de $V = EL$).

Exemplo 25.3

DEPENDÊNCIA DA RESISTÊNCIA EM RELAÇÃO À TEMPERATURA Suponha que a resistência do fio do Exemplo 25.2 seja igual a 1,05 Ω para uma temperatura igual a 20 °C. Calcule a resistência a 0 °C e a 100 °C.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo trata de como a resistência (a incógnita) depende da temperatura. Como indica a Tabela 25.2, essa dependência da temperatura difere de acordo com as substâncias.

PREPARAR: as incógnitas deste problema são os valores da resistência do fio R sob duas temperaturas, $T = 0$ °C e $T = 100$ °C. Para determinar esses valores, usamos a Equação (25.12). Note que nos é dada a resistência $R_0 = 1{,}05\ \Omega$ a uma temperatura de referência $T_0 = 20$ °C, e sabemos pelo Exemplo 25.2 que o fio é de cobre.

EXECUTAR: de acordo com a Tabela 25.2, o coeficiente de temperatura da resistividade do cobre é $\alpha = 0{,}00393\ (\text{C°})^{-1}$. Pela Equação (25.12), a resistência para $T = 0$ °C é

$$\begin{aligned} R &= R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \\ &= (1{,}05\ \Omega)\{1 + [0{,}00393\ (\text{C°})^{-1}][0\,°\text{C} - 20\,°\text{C}]\} \\ &= 0{,}97\ \Omega \end{aligned}$$

Para $T = 100$ °C

$$\begin{aligned} R &= (1{,}05\ \Omega)\{1 + [0{,}00393\ (\text{C°})^{-1}][100\,°\text{C} - 20\,°\text{C}]\} \\ &= 1{,}38\ \Omega \end{aligned}$$

AVALIAR: a resistência a 100 °C é maior que a 0 °C por um fator de (1,38 Ω)/(0,97 Ω) = 1,42. Em outras palavras, aumentar a temperatura do fio de cobre comum de 0 °C para 100 °C aumenta a sua resistência em 42%. Pela Equação (25.11), $V = IR$, o que significa que 42% a mais de voltagem V é necessária para produzir a mesma corrente I a 100 °C e a 0 °C. Essa enorme variação da resistência deve ser levada em consideração nos projetos de circuitos elétricos destinados a operar entre intervalos grandes de temperatura.

Exemplo 25.4

CÁLCULO DA RESISTÊNCIA O cilindro oco indicado na Figura 25.11 possui comprimento L, raio interno a e raio externo b. Ele é feito com um material cuja resistividade é igual a ρ. Existe uma diferença de potencial entre a superfície interna e a superfície externa do cilindro (cada uma das quais é uma superfície equipotencial), de modo que a corrente escoa radialmente entre as paredes do cilindro. Qual é a resistência para esse escoamento radial?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a Figura 25.11 mostra que a corrente flui radialmente do interior para o exterior do condutor, *não* ao longo do comprimento do condutor, como na Figura 25.7. Portanto, devemos usar os conceitos desta seção para deduzir uma nova fórmula para a resistência (a incógnita), adequada para o fluxo de corrente radial.

PREPARAR: não podemos usar diretamente a Equação (25.10) porque a seção reta através da qual a carga se escoa *não* é constante; ela varia de $2\pi aL$ na superfície interna até $2\pi bL$ na superfície externa. Em vez disso, vamos considerar uma casca cilíndrica de raio r e espessura dr. A seguir, combinamos as resistências das cascas entre os raios interno e externo do cilindro.

EXECUTAR: a área A para a casca é $2\pi rL$, a área de superfície que a corrente encontra ao fluir para fora. O comprimento da trajetória da corrente através da casca é igual a dr. A resistência dR dessa casca cilíndrica, entre a superfície interna e a superfície externa, corresponde à resistência de um condutor de comprimento dr e área $2\pi rL$, ou seja

$$dR = \frac{\rho\, dr}{2\pi rL}$$

A corrente passa sucessivamente através de todas essas cascas cilíndricas entre a superfície de raio interno a e a superfície de raio externo b. De acordo com a Equação (25.11), a diferença de potencial através de uma casca cilíndrica é dada por $dV = I\, dR$, e a diferença de potencial total entre a superfície interna e a externa é a soma das diferenças de potenciais de todas as cascas. A corrente total é a mesma através de todas as cascas, de modo que a resistência total é a soma das resistências de todas as cascas. Se a área $2\pi rL$ fosse constante, poderíamos simplesmente integrar dr de $r = a$ para $r = b$, a fim de obter o comprimento total da trajetória da corrente. Mas a área aumenta à medida que a corrente passa pelas cascas do raio maior, por isso é necessário integrar a expressão de dR escrita anteriormente. A resistência total é, portanto, dada por

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{b}{a}$$

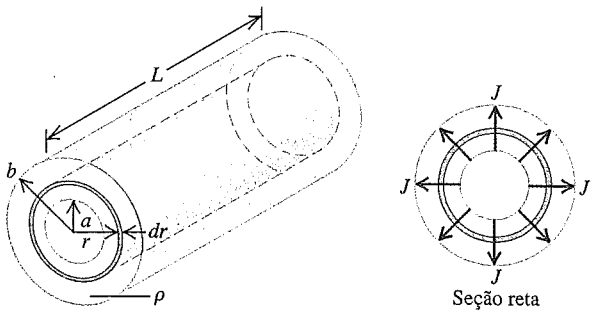
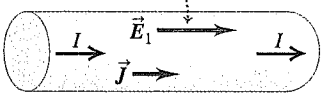


Figura 25.11 Cálculo da resistência para um escoamento radial.

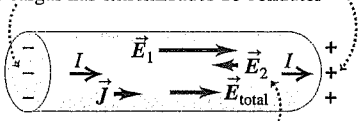
AVALIAR: a geometria do condutor mostrado na Figura 25.11 desempenha um papel importante no sistema nervoso do seu corpo. Cada neurônio, ou célula nervosa, possui uma longa extensão denominada fibra nervosa ou *axônio*. Um axônio possui uma membrana cilíndrica cujo formato se assemelha muito ao do resistor na Figura 25.11, com um fluido condutor no interior da membrana e outro fora dela. Normalmente, todo o fluido interno possui o mesmo potencial, portanto nenhuma corrente tende a fluir ao longo do comprimento do axônio. Entretanto, se o axônio for estimulado em um dado ponto ao longo do seu comprimento, íons carregados escoarão radialmente através da membrana cilíndrica nesse ponto, como indica a Figura 25.11. Esse escoamento provoca uma diferença de potencial entre esse ponto e outros pontos ao longo do comprimento do axônio, que faz com que um sinal nervoso flua ao longo desse comprimento.

Teste sua compreensão da Seção 25.3 Suponha que você aumente a voltagem do fio de cobre dos exemplos 25.2 e 25.3. A voltagem maior provoca um aumento no escoamento de corrente, o que eleva a temperatura do fio. (O mesmo ocorre às bobinas de um forno elétrico ou de uma torradeira, quando uma voltagem é aplicada a eles. Exploraremos essa questão em profundidade na Seção 25.5.) Se você dobrar a voltagem que atravessa o fio, a corrente no fio aumentará. Por qual fator? (i) 2; (ii) maior que 2; (iii) menor que 2. ∎

(a) Um campo elétrico $\vec{E}_1$ produzido no interior de um condutor isolado produz uma corrente



(b) Essa corrente produz um acúmulo de cargas nas extremidades do condutor



O acúmulo de cargas cria um campo elétrico $\vec{E}_2$, em sentido oposto ao de $\vec{E}_1$, reduzindo a corrente

(c) Depois de um tempo muito curto, o módulo de $\vec{E}_2$ torna-se igual ao módulo de $\vec{E}_1$, de modo que o campo resultante $\vec{E}_{total}$ é igual a zero e a corrente pára de fluir por completo

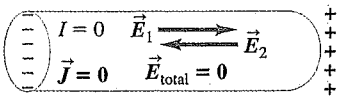


Figura 25.12 Quando um campo elétrico é aplicado no interior de um condutor que *não* faz parte de um circuito completo, uma corrente começa a fluir somente por um período muito curto de tempo.

25.4 Força eletromotriz e circuitos

Para que um condutor possua uma corrente estacionária, ele deve ser parte de uma trajetória fechada ou **circuito completo**. Explicaremos a seguir a razão disso. Quando um campo elétrico $\vec{E}_1$ é aplicado no interior de um condutor isolado com resistividade ρ, que *não* seja parte de um circuito completo, uma corrente começa a fluir com uma densidade de corrente $\vec{J} = \vec{E}_1/\rho$ (Figura 25.12a). Em decorrência disso, uma carga positiva se acumula rapidamente em uma das extremidades e uma carga negativa se acumula na outra extremidade (Figura 25.12b). Por sua vez, essas cargas produzem um campo elétrico $\vec{E}_2$ em sentido oposto ao de $\vec{E}_1$, fazendo diminuir o campo elétrico e, portanto, a corrente. Em uma fração de segundo acumulam-se cargas nas extremidades do condutor de tal modo que o campo elétrico resultante $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \mathbf{0}$ no interior do condutor. Então, também $\vec{J} = \mathbf{0}$ e a corrente pára de fluir (Figura 25.12c). Logo, é impossível haver uma corrente estacionária em tal circuito *incompleto*.

Para sabermos como manter uma corrente estacionária em um circuito *completo*, lembremos um fato básico sobre a diferença de potencial: quando uma carga q percorre um circuito completo e retorna ao seu ponto de partida, a energia potencial no final da trajetória é igual à energia potencial no início da trajetória. Conforme descrito na Seção 25.3, existe sempre *diminuição* da energia potencial quando as cargas se movem através de um material condutor normal com resistência. Portanto, deve existir alguma parte do circuito na qual a energia potencial *aumenta*.

O problema é semelhante ao de uma fonte de água ornamental que recicla sua água. No topo da fonte, a água jorra através de aberturas, descendo os declives em sua trajetória (movendo-se no sentido da diminuição da energia potencial gravitacional), sendo coletada em um recipiente na base da fonte. A seguir, uma bomba eleva a água novamente para o topo da fonte (aumentando a energia potencial) para iniciar um novo ciclo. Se não houvesse a bomba, a água simplesmente fluiria para o recipiente na base, onde permaneceria em repouso.

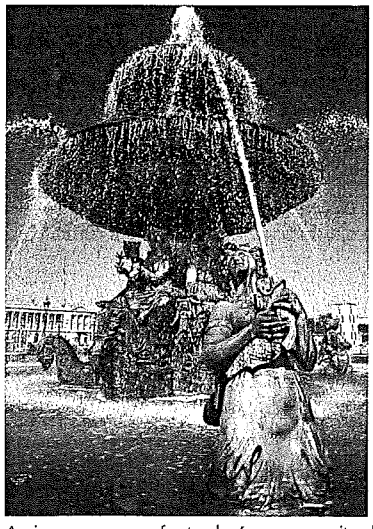


Figura 25.13 Assim como uma fonte de água necessita de uma bomba, um circuito elétrico necessita de uma fonte de força eletromotriz para sustentar uma corrente estacionária.

Força eletromotriz

Em algum ponto de um circuito elétrico, deve existir um dispositivo que desempenhe um papel semelhante ao da bomba na fonte de água (Figura 25.13). Nesse dispositivo, a carga se desloca 'para cima', de uma energia potencial mais baixa para uma mais elevada, embora a força eletrostática tente empurrá-la de uma energia potencial mais elevada para uma mais baixa. O sentido da corrente elétrica nesse dispositivo é do potencial mais baixo para o mais elevado, sentido exatamente oposto ao que ocorre em um condutor comum. O agente que faz a corrente fluir do potencial mais baixo para o mais elevado denomina-se **força eletromotriz (fem)**. Esse termo não é muito adequado, pois a fem *não* é uma força, mas sim uma grandeza com dimensão de energia por unidade de carga, tal como o potencial. A unidade SI de fem é a mesma de potencial, o volt (1 V = 1 J/C). Uma pilha típica de uma lanterna possui fem igual a 1,5 V; isso quer dizer que a pilha realiza um trabalho de 1,5 J sobre cada coulomb de carga que passa através dela. Para designar uma fem, usaremos o símbolo $\mathcal{E}$.

Todo circuito completo por onde passa uma corrente estacionária deve possuir algum dispositivo que forneça uma fem. Tal dispositivo denomina-se **fonte de fem**. Pilhas, baterias, geradores elétricos, células solares, termopares e células de combustível são exemplos de fontes de fem. Todos esses dispositivos convertem algum tipo de energia (mecânica, química, térmica e assim por diante) em energia potencial elétrica e transferem essa energia para o circuito no qual o dispositivo esteja conectado. Uma fonte de fem *ideal* mantém uma diferença de potencial constante através de seus terminais, independentemente de a corrente passar ou não através do dispositivo. Definimos quantitativamente a fem como o módulo dessa diferença de potencial. Como veremos, tal fonte ideal é um mito, como o plano sem atrito e a corda sem massa. Mais adiante, mostraremos a diferença entre uma fonte de fem ideal e uma fonte real.

A Figura 25.14 mostra um diagrama esquemático de uma fonte de fem ideal que mantém uma diferença de potencial constante entre os condutores a e b, chamados de *terminais* da fonte. O terminal a, marcado pelo sinal +, é mantido a um potencial mais *elevado* do que o potencial do terminal b, marcado pelo sinal –. Associado à diferença de potencial, existe um campo elétrico $\vec{E}$ na região em torno dos terminais, tanto no interior quanto no exterior da fonte. O campo elétrico no interior do dispositivo é orientado de a para b, como indicado. Uma carga q no interior da fonte sofre a ação de uma força elétrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Porém, a fonte também fornece uma influência adicional, que vamos representar como uma força não-eletrostática $\vec{F}_n$. Essa força, agindo no interior do dispositivo, arrasta cargas 'para cima' em sentido contrário ao da força elétrica $\vec{F}_e$. Logo, $\vec{F}_n$ é responsável pela manutenção da diferença de potencial entre os terminais.

Caso não existisse a força $\vec{F}_n$, as cargas se escoariam entre os terminais até que a diferença de potencial se tornasse igual a zero. A origem da influência adicional de $\vec{F}_n$ depende do tipo da fonte. Em um gerador elétrico, ela decorre das forças magnéticas que atuam sobre cargas que se movem. Em uma bateria ou em uma célula de combustível, ela é associada a processos de difusão e às variações de concentrações eletrolíticas produzidas por reações químicas. Em uma máquina eletrostática, como em um gerador Van de Graaff (Figura 22.27), uma força mecânica efetiva é aplicada a uma roda ou correia que se move.

Quando uma carga positiva q se move de b para a no interior de uma fonte, a força não-eletrostática $\vec{F}_n$ realiza um trabalho positivo $W_n = q\mathcal{E}$ sobre a carga. Esse deslocamento é *oposto* ao da força eletrostática $\vec{F}_e$, de modo que a energia potencial associada à carga *cresce* de qV_{ab}, em que $V_{ab} = V_a - V_b$ é o potencial de a (positivo) em relação ao ponto b. Para uma fonte de fem ideal que descrevemos, $\vec{F}_e$ e $\vec{F}_n$ possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém sentidos contrários, de modo que o trabalho realizado sobre a carga q é igual a zero; ocorre um aumento de energia potencial, porém *nenhuma* variação da energia cinética da carga. Isso é semelhante a levantar um livro com velocidade constante até o alto de uma estante. O aumento da energia potencial é exatamente igual ao trabalho não-eletrostático W_n, de modo que $q\mathcal{E} = qV_{ab}$, ou seja,

$$V_{ab} = \mathcal{E} \qquad (25.13)$$
(fonte de fem ideal)

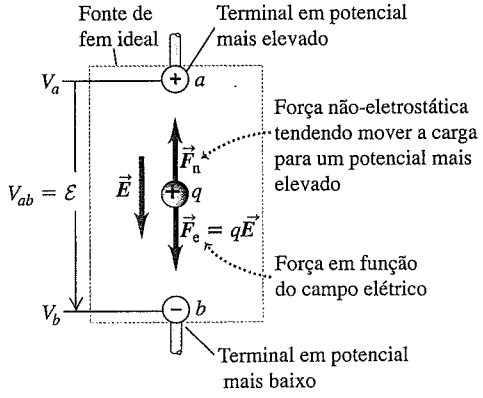
Vamos agora fazer um circuito completo, conectando um fio com resistência R aos terminais de uma fonte de tensão (Figura 25.15). A diferença de potencial entre os terminais a e b cria um campo elétrico no interior do fio; isso produz uma corrente que flui de a para b no circuito externo, do potencial mais elevado para o mais baixo. Note que, nos locais onde o fio se encurva, surgem cargas de sinais contrários nas partes 'internas' e 'externas' das curvas. Essas cargas são responsáveis pelas forças que obrigam a corrente a seguir um caminho ao longo das curvas dos fios.

De acordo com a Equação (25.11), a diferença de potencial entre as extremidades do fio indicado na Figura 25.15 é dada por $V_{ab} = IR$. Combinando com a Equação (25.13), obtemos

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR \qquad (25.14)$$
(fonte de fem ideal)

Ou seja, quando uma carga positiva q flui em torno do circuito, o *aumento* de potencial $\mathcal{E}$ através da fonte ideal é igual à *queda* de potencial $V_{ab} = IR$ quando a corrente passa pelo restante do circuito. Conhecendo-se os valores de $\mathcal{E}$ e de R, pela relação anterior podemos determinar a corrente no circuito.

ATENÇÃO A corrente não é 'consumida' em um circuito
É um erro conceitual comum pensar que a corrente que flui em um circuito fechado é ejetada do terminal positivo e passa a ser consumida ou 'usada' à medida que ela atravessa o circuito até atingir o terminal negativo. Na realidade, a corrente é sempre a *mesma* em todos os pontos de um circuito simples, como o indicado na Figura 25.15, mesmo que a espessura do fio seja diferente em determinadas partes do circuito. Isso ocorre porque existe conservação de cargas (ou seja, ela não pode ser criada nem destruída) e porque as cargas não podem se acumular nos dispositivos dos circuitos que descrevemos. Se a carga pudesse se acumular, a diferença de potencial seria variável com o tempo. Note a semelhança com o escoamento da água em uma fonte ornamental; a vazão total da água no alto da fonte é igual à vazão da água na base da fonte, qualquer que seja a dimensão do circuito da água. Nenhuma água é 'consumida' ao longo da trajetória!



Quando a fonte fem não faz parte de um circuito fechado, $F_n = F_e$ e não há nenhum movimento resultante de carga entre os terminais

Figura 25.14 Diagrama esquemático de uma fonte de fem para a situação de um 'circuito aberto'. A força elétrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$ e a força não-eletrostática $\vec{F}_n$ são indicadas para uma carga positiva q.

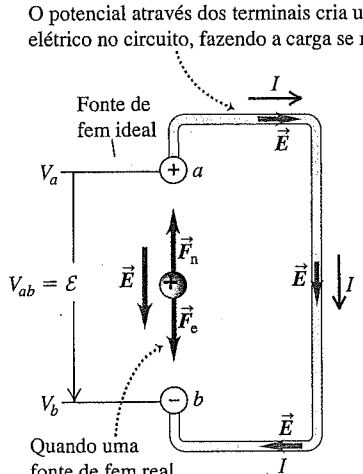


Figura 25.15 Diagrama esquemático de uma fonte de fem ideal em um circuito completo. A força do campo elétrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ e a força não-eletrostática $\vec{F}_n$ são indicadas para uma carga positiva q. A corrente flui de a para b no circuito externo e de b para a no interior da fonte.

Resistência interna

Uma fonte de fem real em um circuito não se comporta exatamente da maneira que descrevemos; a diferença de potencial entre os terminais de uma fonte real *não* é igual à fem, como indica a Equação (25.14). A razão disso é que a carga que se move no interior do material de qualquer fonte real encontra uma *resistência* chamada de **resistência interna** da fonte, designada pela letra r. Quando essa resistência segue a lei de Ohm, r deve ser constante e independente da corrente I. À medida que a corrente se desloca através de r, ela sofre uma queda de potencial igual a Ir. Logo, quando uma corrente flui através de uma fonte do terminal negativo b até o terminal positivo a, a diferença de potencial V_{ab} entre os terminais é dada por

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \qquad (25.15)$$

(voltagem no terminal, fonte com resistência interna)

A diferença de potencial V_{ab}, chamada de **voltagem nos terminais**, é menor que a fem $\mathcal{E}$ em virtude do termo Ir, que representa a queda de potencial através da resistência interna r. Expresso de outra maneira, o aumento da energia potencial qV_{ab}, que ocorre quando a carga q se desloca de b até a no interior da fonte, é menor do que o trabalho $q\mathcal{E}$ realizado pela força não-eletrostática $\vec{F}_n$, visto que certa energia potencial se perde quando a carga atravessa a resistência interna.

Uma pilha de 1,5 V possui fem igual a 1,5 V, porém a voltagem V_{ab} nos terminais da pilha é igual a 1,5 V somente quando nenhuma corrente flui através dela, de modo que $I = 0$ na Equação (25.15). Quando a pilha faz parte de um circuito completo, pelo qual passa uma corrente, a voltagem nos terminais da pilha é menor do que 1,5 V. *A voltagem nos terminais de uma fonte de fem real possui valor igual ao da fem somente quando nenhuma corrente flui através da fonte* (Figura 25.16). Portanto, podemos descrever o comportamento de uma fonte com base em duas propriedades: uma fem $\mathcal{E}$, que fornece uma diferença de potencial constante independente da corrente, e uma resistência interna r ligada em série com a fonte.

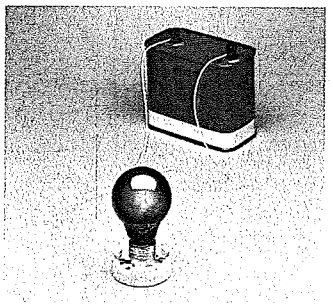


Figura 25.16 A fem desta bateria — ou seja, a voltagem em seus terminais quando ela não está ligada a nada — é igual a 12 V. Porém, como a bateria possui resistência interna, a voltagem nos terminais da bateria é menor que 12 V quando ela está sendo usada para acender uma lâmpada.

A corrente que passa no circuito externo conectado aos terminais a e b da fonte é ainda determinada pela relação $V_{ab} = IR$ que, combinada com a Equação (25.15), fornece

$$\mathcal{E} - Ir = IR \quad \text{ou} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad (25.16)$$

(corrente, fonte com resistência interna)

Ou seja, a corrente é obtida dividindo-se o valor da fem da fonte pela resistência *total* do circuito ($R + r$).

ATENÇÃO Uma bateria não é uma 'fonte de corrente' Seria possível pensar que uma bateria ou qualquer fonte de fem fornece sempre a mesma corrente, qualquer que seja o circuito no qual ela esteja ligada. Porém, a Equação (25.16) mostra que a corrente produzida pela fonte de fem em um dado circuito depende da resistência externa R (bem como da resistência interna r da fonte). Quanto maior a resistência, menor a corrente produzida pela fonte. Isso é semelhante a empurrar um objeto através de um fluido muito viscoso, tal como um óleo ou um melaço; para a mesma força estacionária aplicada (fem), a velocidade do objeto será grande para um objeto com massa pequena (R pequeno, I grande) e pequena para um objeto com massa grande (R grande, I pequeno).

Símbolos usados nos diagramas de circuitos

Uma etapa importante na análise de qualquer circuito consiste em desenhar um *diagrama do circuito* esquemático. A Tabela 25.4 mostra os símbolos geralmente empregados nesses diagramas. Usaremos muito esses símbolos neste capítulo e no próximo. Geralmente, supomos que os fios que conectam os elementos de um circuito possuam resistência desprezível; pela Equação (25.11), $V = IR$, concluímos que a diferença de potencial nas extremidades desses fios é igual a zero.

A Tabela 25.4 inclui dois *instrumentos de medida* usados nas medidas das propriedades dos circuitos. Um medidor ideal não perturba o circuito no qual ele está conectado. Um **voltímetro**, introduzido na Seção 23.2, mede a diferença de potencial entre os pontos nos quais seus terminais são conectados; um voltímetro ideal possui resistência interna infinita e, quando mede uma diferença de potencial, nenhuma corrente é desviada para ele. Um amperímetro mede a corrente que passa através dele; um **amperímetro** ideal possui resistência igual a zero e não apresenta nenhuma diferença de potencial entre seus terminais. Como esses instrumentos de medida fazem parte do circuito no qual estão conectados, é importante lembrar essas propriedades.

Exemplo conceitual 25.5

UMA FONTE EM UM CIRCUITO ABERTO A Figura 25.17 mostra uma fonte de tensão (uma bateria) com fem $\mathcal{E}$ igual a 12 V e resistência interna r de 2 Ω. (Para comparação, uma bateria comercial de 12 V com acumuladores de chumbo possui uma

Tabela 25.4 Símbolos usados nos diagramas de circuitos

	Condutor com resistência desprezível
R	Resistor
+ ℰ	Fonte de fem (a linha vertical mais longa indica o terminal positivo, geralmente o potencial mais elevado)
ℰ + ou + ℰ	Fonte de fem com resistência interna r (a resistência interna r pode ser colocada em qualquer lado)
V	Voltímetro (mede uma diferença de potencialentre seus terminais)
A	Amperímetro (mede uma corrente que passa através dele)

resistência interna da ordem de alguns milésimos de ohm.) Os fios do lado esquerdo do ponto a e do lado direito do amperímetro A não estão conectados a nada. Qual é a leitura indicada pelo voltímetro ideal V e pelo amperímetro ideal A?

SOLUÇÃO

Não existe nenhuma corrente porque o circuito está aberto e não forma um circuito fechado. (Não existe nenhuma corrente passando no voltímetro ideal porque ele possui uma resistência infinita.) Logo, o amperímetro A indica a leitura $I = 0$. Como não existe nenhuma corrente passando na bateria, não existe nenhuma diferença de potencial através de sua resistência interna. De acordo com a Equação (25.15), como $I = 0$, a diferença de potencial V_{ab} através dos terminais da bateria é igual à sua fem. Logo, o voltímetro indica uma leitura $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V. A voltagem de uma fonte de tensão real é igual ao valor de sua fem *somente* quando não existe nenhuma corrente passando na fonte, como neste exemplo.

Exemplo 25.6

UMA FONTE EM UM CIRCUITO COMPLETO Usando a bateria do Exemplo Conceitual 25.5, adicionamos um resistor de 4 Ω para formarmos o circuito completo indicado na Figura 25.18. Qual é então a leitura indicada pelo voltímetro e pelo amperímetro?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a primeira incógnita deste problema é a corrente I que passa pelo circuito $aa'b'b$ (igual à leitura do amperímetro). A segunda é a diferença de potencial V_{ab} (igual à leitura do voltímetro).

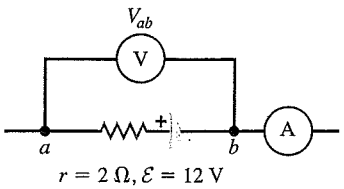


Figura 25.17 Uma fonte de fem em um circuito aberto.

PREPARAR: determinamos I usando a Equação (25.16). Para determinar V_{ab}, note que podemos considerá-lo como a diferença de potencial através da fonte ou como a diferença de potencial em torno do circuito através do resistor externo.

EXECUTAR: o amperímetro ideal possui resistência igual a zero, portanto a resistência externa à fonte é $R = 4\ \Omega$. A corrente que passa através do circuito $aa'b'b$ é determinada pela Equação (25.16):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\text{ V}}{4\ \Omega + 2\ \Omega} = 2\text{ A}$$

O amperímetro A indica $I = 2$ A.

Os fios condutores ideais possuem resistência nula, assim como o amperímetro ideal A. Portanto, não existe nenhuma diferença de potencial entre os pontos a e a' nem entre os pontos b e b', ou seja, $V_{ab} = V_{a'b'}$. Podemos determinar V_{ab} tomando os pontos a e b como os terminais do resistor ou como os terminais da fonte de tensão. Considerando-os terminais do resistor, usamos a lei de Ohm ($V = IR$):

$$V_{a'b'} = IR = (2\text{ A})(4\ \Omega) = 8\text{ V}$$

Considerando-os terminais na fonte de tensão, obtemos

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 12\text{ V} - (2\text{ A})(2\ \Omega) = 8\text{ V}$$

Em qualquer dos dois casos, concluímos que o voltímetro indica uma leitura $V_{ab} = 8$ V.

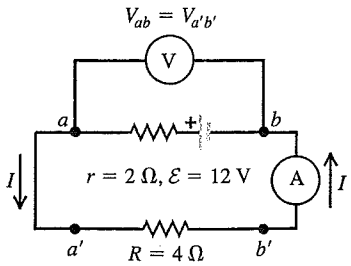


Figura 25.18 Uma fonte de fem em um circuito completo.

AVALIAR: quando a corrente flui através da fonte, a voltagem nos terminais da fonte V_{ab} é menor do que a voltagem em fem. Quanto menor a resistência interna r, menor é a diferença entre V_{ab} e $\mathcal{E}$.

Exemplo conceitual 25.7

USO DE VOLTÍMETROS E DE AMPERÍMETROS O voltímetro e o amperímetro do Exemplo 25.6 são colocados em diversas posições no circuito. Quais são as leituras indicadas pelo voltímetro e pelo amperímetro na situação mostrada (a) na Figura 25.19a; (b) na Figura 25.19b?

SOLUÇÃO

(a) O voltímetro agora mede a diferença de potencial entre os pontos a' e b'. Porém, conforme dito no Exemplo 25.6, $V_{ab} = V_{a'b'}$, de modo que o voltímetro indica uma leitura igual ao do Exemplo 25.6, $V_{a'b'} = 8$ V.

ATENÇÃO Corrente em um circuito simples Você pode ser tentado a concluir que o amperímetro do lado esquerdo na Figura 25.19a, colocado 'antes' do resistor, indica uma corrente maior do que a do amperímetro indicado na Figura 25.18, colocado 'depois' do resistor. Porém, essa conclusão é baseada no conceito errado de que a corrente 'é usada' à medida que se move através de um resistor. Quando uma corrente percorre um resistor, a energia potencial diminui, porém a corrente *não* varia. *A corrente que passa em um circuito completo constituído por uma única malha é a mesma em todos os pontos do circuito.* Um amperímetro colocado do modo indicado na Figura 25.19a apresenta a mesma corrente que um amperímetro colocado na Figura 25.18: $I = 2$ A.

(b) Não passa nenhuma corrente através do voltímetro porque ele possui uma resistência infinita. Como o voltímetro agora faz parte do circuito, não existe nenhuma corrente através do circuito e o amperímetro lê $I = 0$.

O voltímetro mede a diferença de potencial $V_{bb'}$ entre os pontos b e b'. Como $I = 0$, a diferença de potencial através do resistor é $V_{a'b'} = IR = 0$, e a diferença de potencial entre as extremidades a e a' do amperímetro ideal também é igual a zero. Portanto, $V_{bb'}$ é igual a V_{ab}, a diferença de potencial nos terminais da fonte. Como no Exemplo Conceitual 25.5, não existe nenhuma corrente fluindo, de modo que a diferença de potencial nos terminais da fonte é igual à fem da fonte, e o voltímetro indica uma leitura $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V.

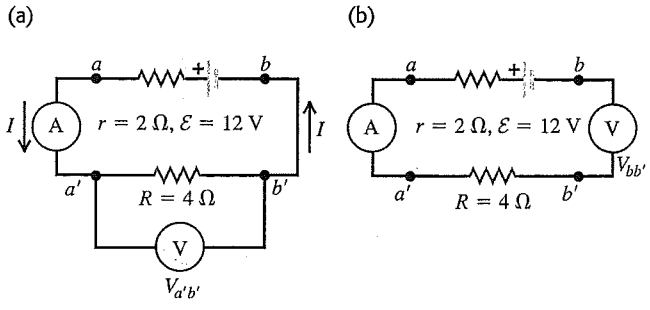


Figura 25.19 Diversas posições de um voltímetro e de um amperímetro em um circuito completo.

Este exemplo mostra que um voltímetro e um amperímetro também são elementos do circuito. Trocando-se a posição do voltímetro na Figura 25.19a para a posição indicada na Figura 25.19b, ocorre uma modificação da corrente e das diferenças de potencial através do circuito, que nesse caso é bastante grande. Se você desejar medir uma diferença de potencial entre dois pontos de um circuito sem perturbar o circuito, use o voltímetro conforme indicado nas figuras 25.18 ou 25.19a, e *não* como indica a Figura 25.19b.

Exemplo 25.8

UMA FONTE EM CURTO-CIRCUITO Usando a mesma bateria nos três exemplos precedentes, substituímos o resistor de 4 Ω por um condutor de resistência igual a zero. Quais são agora as leituras?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas são I e V_{ab}, as mesmas do Exemplo 25.6. A única diferença em relação àquele exemplo é que neste caso a resistência externa é $R = 0$.

PREPARAR: a Figura 25.20 indica o novo circuito. Agora a resistência entre os pontos a e b é igual a zero (através do circuito inferior na Figura 25.20). Logo, a diferença de potencial entre esses pontos deve ser igual a zero, o que podemos usar para solucionar este problema.

EXECUTAR: devemos ter $V_{ab} = IR = I(0) = 0$, qualquer que seja o valor da corrente. Portanto, podemos calcular a corrente usando a Equação (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{12\text{ V}}{2\ \Omega} = 6\text{ A}$$

O voltímetro indica uma leitura $V_{ab} = 0$ e o amperímetro indica uma leitura $I = 6$ A.

AVALIAR: o valor de I é diferente daquele $R = 0$ encontrado no Exemplo 25.6, embora a bateria seja a mesma. Uma fonte *não* fornece sempre a mesma corrente em todas as situações; a corrente depende da resistência interna r e da resistência do circuito externo. A ligação indicada neste exemplo denomina-se *curto-circuito*. Os terminais da bateria são ligados diretamente por um fio sem nenhuma resistência externa. A corrente em curto-circuito é igual à fem $\mathcal{E}$ dividida pela resistência interna r. *Cuidado:* Um curto-circuito pode apresentar uma situação extremamente perigosa. A resistência interna de uma bateria de automóvel ou da tomada em sua casa é muito pequena (muito menor do que o valor indicado nesses exemplos), e um curto-circuito pode produzir uma corrente suficiente para causar a explosão de uma bateria ou de um fio pequeno. Não tente fazer isso!

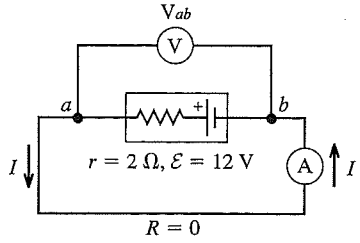


Figura 25.20 Nosso esquema para esse problema.

Variações de potencial em torno de um circuito

É igual a zero a variação total da energia potencial de uma carga q que percorre a malha de um circuito completo. Logo, a variação total do *potencial* na malha também é igual a zero; em outras palavras, a soma algébrica de todas as forças eletromotrizes e das diferenças de potencial ao longo de qualquer malha deve ser igual a zero. Podemos afirmar isso reescrevendo a Equação (25.16) na forma

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0$$

Um ganho de energia potencial é associado a uma fem $\mathcal{E}$ e quedas de energia potencial Ir e IR são associadas, respectivamente, à resistência interna da fonte e à resistência do circuito externo. A Figura 25.21 mostra um gráfico da variação do potencial quando percorremos o circuito indicado na Figura 25.18. O eixo horizontal não indica necessariamente distâncias reais, mas representa pontos ao longo da malha. Considerando igual a zero o potencial do terminal negativo da bateria, então ocorre um aumento $\mathcal{E}$ e uma queda Ir na bateria e uma queda adicional IR no resistor externo, e, quando terminamos de percorrer a malha, o potencial volta para seu valor inicial.

Nesta seção consideramos somente as situações em que as resistências são ôhmicas. Quando o circuito inclui um dispositivo não-linear, tal como um diodo (veja Figura 25.10b), a Equação (25.16) continua válida, mas não pode ser resolvida de forma algébrica, porque R não é uma constante. Nesse tipo de situação, a corrente I pode ser determinada aplicando-se técnicas numéricas (veja o Problema desafiador 25.84).

Finalmente, observamos que a Equação (25.15) nem sempre fornece uma representação adequada do comportamento de uma fonte de tensão. A fem pode não ser constante, e aquilo que descrevemos como uma resistência interna pode, na realidade, ser uma relação corrente–voltagem mais complexa que não obedece à lei de Ohm. Contudo, o conceito de resistência interna geralmente fornece uma descrição adequada para baterias, geradores e outros dispositivos que convertem uma dada forma de energia em energia elétrica. A diferença principal entre uma bateria nova e uma antiga não é a fem, a qual diminui pouco com o uso, e sim sua resistência interna, que aumenta de uma fração de ohm quando a bateria é nova, até 1000 Ω depois do uso prolongado. Analogamente, uma bateria de automóvel pode fornecer menos corrente em uma manhã fria do que quando a bateria está quente, não por causa da fem, que varia muito pouco, mas sim em virtude de sua resistência interna, que aumenta quando a temperatura diminui. Esse efeito não é relevante no Brasil e demais países de clima quente; contudo, os habitantes de países de clima frio tomam providências para evitar esse inconveniente, usando desde aquecedores especiais para baterias até a embebição da bateria com água quente nas manhãs muito frias.

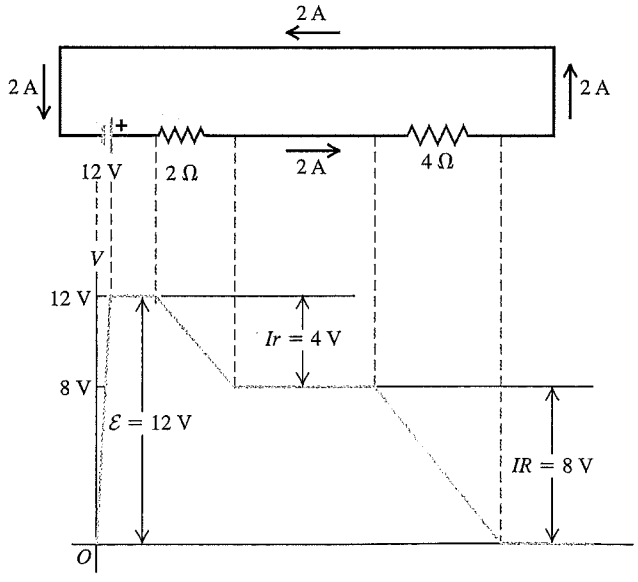


Figura 25.21 Aumentos e quedas de potencial ao longo de um circuito.

Teste sua compreensão da Seção 25.4 Classifique os seguintes circuitos por ordem da corrente mais elevada para a mais baixa. (i) um resistor de 1,4 Ω conectado a uma bateria de 1,5 V que possui uma resistência interna de 0,10 Ω; (ii) um resistor de 1,8 Ω conectado a uma bateria de 4,0 V que possui uma voltagem no terminal de 3,6 V, mas uma resistência interna desconhecida; (iii) um resistor desconhecido conectado a uma bateria de 12,0 V que possui uma resistência interna de 0,20 Ω e uma voltagem no terminal de 11,0 V. ∎

25.5 Energia e potência em circuitos elétricos

Vamos agora examinar algumas relações de potência e de energia em circuitos elétricos. A caixa na Figura 25.22 representa um elemento de um circuito que possui uma diferença de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ entre seus terminais, e através dele passa uma corrente I no sentido de a para b. Esse elemento poderia ser um resistor, uma bateria ou qualquer outro dispositivo; os detalhes não importam. À medida que a carga flui através do elemento do circuito, o campo elétrico realiza um trabalho sobre a carga. Em uma fonte de fem existe um trabalho adicional realizado pela força $\vec{F}_n$, mencionada na Seção 25.4.

Quando uma quantidade de carga q passa através do elemento do circuito, há uma variação na energia potencial que equivale a qV_{ab}. Por exemplo, se $q > 0$ e $V_{ab} = V_a - V_b$

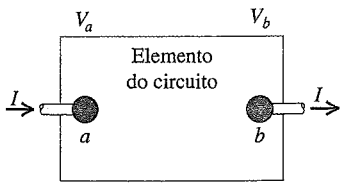


Figura 25.22 A potência P fornecida ao segmento do circuito compreendido entre os pontos a e b é dada por $P = (V_a - V_b)I = V_{ab}I$.

for positivo, a energia potencial diminui à medida que a carga 'cai' do potencial V_a para o potencial inferior V_b. As cargas em movimento não ganham energia *cinética*, porque a taxa de escoamento da carga (ou seja, a corrente) para fora do elemento do circuito deve ser igual à taxa de escoamento da carga para dentro do elemento. Em vez disso, a grandeza qV_{ab} representa a energia elétrica transferida para o elemento do circuito. Essa situação ocorre nas bobinas de uma torradeira ou forno elétrico, em que a energia elétrica é convertida em energia térmica.

Pode acontecer que o potencial do ponto b seja mais elevado que o potencial de a; então V_{ab} é negativo e existe uma transferência de energia líquida *para fora* do elemento do circuito. O elemento está, assim, atuando como uma fonte que fornece energia para o circuito ao qual ela está conectada. Isso ocorre usualmente com uma bateria que converte energia química em energia elétrica e transfere a energia elétrica para o circuito. Portanto, qV_{ab} pode representar tanto a energia que é fornecida ao elemento do circuito quanto a energia que é extraída desse elemento.

Nos circuitos elétricos estamos principalmente interessados na *taxa* em que a energia é fornecida ou extraída de um elemento do circuito. Quando a corrente através do elemento é I, então em um intervalo de tempo dt uma quantidade de carga $dQ = I\,dt$ passa pelo elemento. A variação na energia potencial para essa quantidade de carga é $V_{ab}\,dQ = V_{ab}\,I\,dt$. Dividindo essa expressão por dt, obtemos a *taxa* em que a energia é transferida, seja para dentro, seja para fora do elemento do circuito. A taxa de tempo da transferência de energia é a *potência*, designada pela letra P, portanto escrevemos

$$P = V_{ab}I \qquad (25.17)$$

(taxa em que a energia é fornecida para um elemento de circuito ou extraída dele)

A unidade de V_{ab} é o volt, ou um joule por coulomb, e a unidade de I é o ampère, ou um coulomb por segundo. Portanto, a unidade de $P = V_{ab}I$ é o watt, como era de se esperar:

$$(1\ \text{J/C})(1\ \text{C/s}) = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{W}$$

Vamos considerar a seguir alguns casos especiais.

Potência dissipada por uma resistência pura

Quando o elemento do circuito indicado na Figura 25.22 for um resistor, a diferença de potencial será dada por $V_{ab} = IR$. De acordo com a Equação (25.17), a potência elétrica que o circuito fornece ao resistor é

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \qquad (25.18)$$

(potência fornecida a um resistor)

Para esse caso, o potencial no ponto a (onde a corrente entra no resistor) é sempre maior que o potencial no ponto b (onde a corrente sai). A corrente entra através do potencial mais elevado do dispositivo, e a Equação (25.18) representa a taxa de transferência de energia potencial elétrica *para dentro* do elemento do circuito.

Qual é o destino dessa energia? As cargas que se movem colidem com os átomos do resistor e transferem parte da energia para esses átomos, fazendo aumentar a energia interna do material. Ou a temperatura do resistor aumentará ou haverá um fluxo de calor para fora dele, ou ambas as hipóteses ocorrerão. Em qualquer uma dessas hipóteses, dizemos que a energia foi *dissipada* no resistor com uma taxa igual a I^2R. Todo resistor possui uma *potência máxima*, especificando qual é a maior potência que ele pode consumir sem se danificar. Nas aplicações práticas, a especificação da potência máxima é uma característica tão importante quanto o valor de sua resistência. Naturalmente, alguns dispositivos, tais como aquecedores elétricos, são projetados para ficarem aquecidos e transferirem calor para suas vizinhanças. Contudo, quando a potência máxima especificada for ultrapassada, até mesmo esses dispositivos poderão se fundir ou explodir.

Potência fornecida por uma fonte

O retângulo superior indicado na Figura 25.23a representa uma fonte com força eletromotriz $\mathcal{E}$ e resistência interna r ligada por condutores ideais (sem resistência) a um circuito externo representado pelo retângulo inferior. Esse esquema poderia representar uma bateria de automóvel ligada a um farol (Figura 25.23b). O ponto a possui um potencial maior que o potencial do ponto b; logo, $V_a > V_b$ e V_{ab} é positivo. Note que a corrente I está *saindo* da fonte pelo potencial mais elevado (em vez de entrar). A energia está sendo fornecida para o circuito externo, e a taxa com a qual ela é fornecida ao circuito é dada pela Equação (25.17):

$$P = V_{ab}I$$

Para uma fonte com força eletromotriz $\mathcal{E}$ e resistência interna r, podemos usar a Equação (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Multiplicando ambos os membros por I, encontramos

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2r \qquad (25.19)$$

Qual é o significado dos termos $\mathcal{E}I$ e I^2r? Na Seção 25.4, definimos a força eletromotriz $\mathcal{E}$ como sendo o trabalho por unidade de carga realizado sobre as cargas pelas forças não-eletrostáticas que empurram as cargas 'para cima', do ponto b até o ponto a na fonte. No intervalo de tempo dt, uma carga $dQ = I\,dt$ flui através da fonte; o trabalho realizado sobre ela pela força não-eletrostática é dado por $\mathcal{E}\,dQ = \mathcal{E}I\,dt$. Portanto, $\mathcal{E}I$ é a *taxa* com a qual o trabalho é realizado sobre as cargas que circulam por qualquer

Figu

agente que produza as forças não-eletrostáticas na fonte. Esse termo representa a taxa de conversão de energia não-elétrica em energia elétrica no interior da fonte. O termo I^2r é a taxa com a qual a energia elétrica está sendo *dissipada* na resistência interna da fonte. A diferença $\mathcal{E}I - I^2r$ é a potência elétrica *líquida* da fonte, ou seja, a taxa com a qual a energia elétrica é fornecida pela fonte para o circuito externo.

Potência absorvida por uma fonte

Suponha que o retângulo inferior indicado na Figura 25.23a represente outra fonte com fem *maior*, porém com sentido contrário ao da fem da fonte superior. A Figura 25.24 mostra um exemplo prático dessa situação — uma bateria de automóvel (o elemento do circuito superior) sendo carregada pelo alternador do automóvel (o elemento do circuito inferior). A corrente I possui sentido *oposto* ao indicado na Figura 25.23; a fonte inferior está injetando cargas na fonte superior. Devido à inversão da corrente, em vez da Equação (25.15), temos a seguinte relação para a fonte superior:

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$$

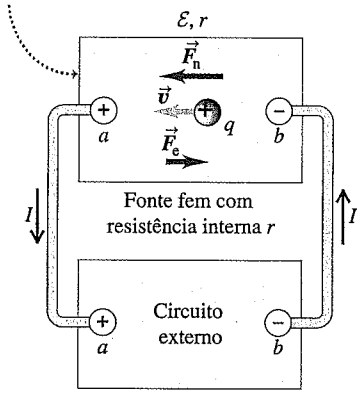
e em vez da Equação (25.19), temos

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I + I^2R \qquad (25.20)$$

Agora, em vez de o trabalho ser realizado *pela* força não-elétrica da fonte superior, ele está sendo realizado *sobre* o agente que produz a força não-eletrostática da fonte. Ocorre na fonte superior uma conversão de energia elétrica em energia não-elétrica com uma taxa igual a $\mathcal{E}I$. O termo I^2r na Equação (25.20) é novamente a taxa com a qual a energia elétrica está sendo dissipada na resistência interna da fonte superior, e a soma $\mathcal{E}I + I^2r$ é a potência elétrica *absorvida* pela fonte superior. Isso é o que ocorre quando uma bateria recarregável (bateria com acumuladores) é ligada a um carregador de bateria. O carregador fornece energia elétrica para a bateria; parte dessa energia é convertida em energia química nos acumuladores, a ser reconvertida posteriormente, e a energia restante é dissipada (perdida) na resistência interna, aquecendo a bateria e produzindo um fluxo de calor através dela. Você já deve ter notado que, ao carregar a bateria de um telefone celular, ela fica quente.

(a) Circuito diagramático

- A fonte fem converte energia não-elétrica em energia elétrica a uma taxa igual a $\mathcal{E}I$.
- A taxa de dissipação de energia na fonte é igual a I^2r.
- A diferença $\mathcal{E}I - I^2r$ é a potência fornecida pela fonte para o circuito externo.



(b) Uma bateria de automóvel ligada a um farol é um exemplo prático do circuito genérico da parte (a)

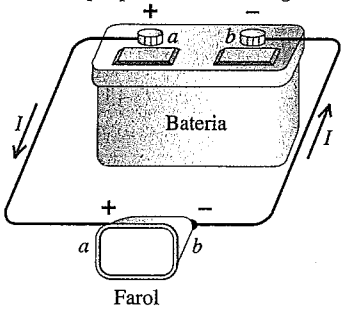


Figura 25.23 A taxa de conversão da energia em um circuito simples.

Estratégia para a solução de problemas 25.1

ENERGIA E POTÊNCIA EM CIRCUITOS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: os conceitos de potência elétrica consumida e potência elétrica fornecida podem ser aplicados a qualquer circuito elétrico. Na maioria dos casos, você saberá quando esses conceitos serão necessários porque o problema pedirá que você considere explicitamente a potência ou a energia.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho do circuito.
2. Identifique os elementos do circuito, incluindo fontes de fem e resistores. Em capítulos posteriores acrescentaremos outros tipos de elementos do circuito, incluindo capacitores e indutores (descritos no Capítulo 30).
3. Determine as incógnitas. Normalmente, elas serão a potência consumida ou a potência fornecida para cada elemento do circuito ou a quantidade total de energia inserida em um elemento do circuito ou retirada dele, em um dado intervalo de tempo.

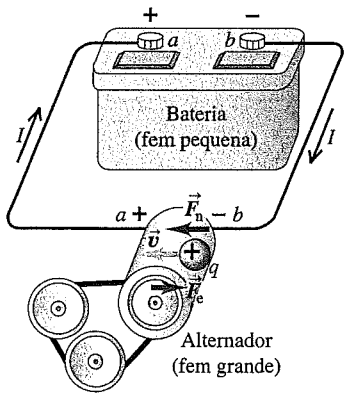


Figura 25.24 Quando duas fontes são conectadas entre si em um único circuito, a fonte que possui fem mais elevada fornece energia para a outra.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Uma fonte de fem $\mathcal{E}$ fornece uma potência $\mathcal{E}I$ para um circuito, quando a corrente I atravessa a fonte do terminal – para o terminal +. Em uma bateria ocorre conversão de energia química em energia elétrica; no caso de um gerador ocorre conversão de energia mecânica em energia elétrica e assim por diante. Nesse caso, a fonte possui uma potência de saída *positiva* para o circuito, ou seja, há uma potência consumida *negativa* para a fonte.
2. Porém, quando a corrente atravessa a fonte do terminal + para o terminal –, a fonte de fem $\mathcal{E}I$ retira energia do circuito – ou seja, a potência fornecida é negativa ou, similarmente, a potência consumida é positiva. Isso ocorre quando uma bateria está sendo carregada e a energia elétrica é reconvertida em energia química. Nesse caso $\mathcal{E}I$ possui sinal *negativo*, ou seja, a potência consumida é *positiva*.
3. Seja qual for o sentido da corrente que passa por um resistor, a potência consumida pelo resistor é sempre *positiva*. Ela remove energia do circuito com uma taxa dada por $VI = I^2R = V^2/R$, em que V é a diferença de potencial através do resistor.
4. Também há uma potência consumida *positiva* para a resistência interna r de uma fonte, independentemente do sentido da corrente. A resistência interna de uma fonte sempre remove energia do circuito, convertendo-a em calor a uma taxa igual a I^2r.
5. Pode ser necessário calcular a energia total fornecida para um elemento do circuito ou extraída dele, em um dado intervalo de tempo. Se a potência para dentro ou para fora de um elemento de circuito for constante, essa integral é simplesmente o produto da potência pelo tempo decorrido. (No Capítulo 26, encontraremos situações em que a potência não é constante. Nesses casos, o cálculo da energia total requer uma integral.)

AVALIAR *sua resposta*: confira os resultados, incluindo uma verificação de que a energia é conservada. Essa conservação pode ser expressa em qualquer uma das duas formas seguintes: 'potência total fornecida = potência total consumida' ou 'a soma algébrica de todas as potências envolvidas em um circuito completo é igual a zero'.

Exemplo 25.9

POTÊNCIA FORNECIDA E CONSUMIDA EM UM CIRCUITO COMPLETO Considerando a mesma situação analisada no Exemplo 25.6, calcule a taxa de conversão da energia (química para elétrica) e a taxa de dissipação de energia na bateria e a potência líquida fornecida da bateria.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas do problema são a potência fornecida pela fonte de fem, a potência consumida pela resistência interna e a potência líquida fornecida da fonte.

PREPARAR: a Figura 25.25 mostra o circuito. Usamos a Equação (25.17) para determinar a potência consumida ou a potência fornecida de um elemento do circuito; e a Equação (25.19) para determinar a potência líquida fornecida da fonte.

EXECUTAR: de acordo com o Exemplo 25.6, a corrente no circuito é $I = 2$ A. A taxa de conversão da energia na bateria é

$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$$

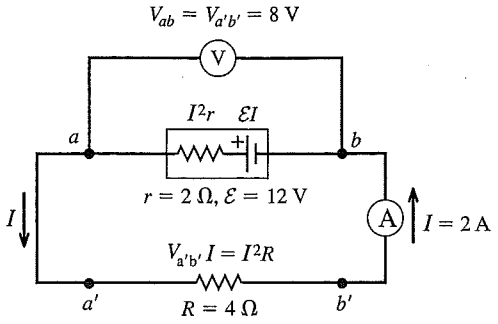


Figura 25.25 Nosso esquema para esse problema.

A taxa de dissipação da energia na bateria é

$$I^2r = (2\text{ A})^2(2\ \Omega) = 8\text{ W}$$

A potência elétrica *fornecida* pela fonte é dada pela diferença entre os valores anteriores: $\mathcal{E}I - I^2r = 16$ W.

AVALIAR: a potência fornecida é dada pelo produto da voltagem nos terminais da bateria $V_{ab} = 8$ V (calculada no Exemplo 25.6) vezes a corrente:

$$V_{ab}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W}$$

A potência fornecida ao resistor é

$$V_{a'b'}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W}$$

Esse resultado é igual à taxa de dissipação da energia elétrica no resistor:

$$I^2R = (2\text{ A})^2(4\ \Omega) = 16\text{ W}$$

Note que nossos resultados também estão de acordo com a Equação (25.19), a qual afirma que $V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2R$; o membro esquerdo dessa equação é igual a 16 W, e o membro direito é igual a 24 W – 8 W = 16 W. Isso comprova a consistência das diversas potências envolvidas.

Exemplo 25.10

AUMENTO DA RESISTÊNCIA Suponha que o resistor de 4 Ω na Figura 25.25 seja substituído por um resistor de 8 Ω. Como isso afeta a potência elétrica dissipada no resistor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita é a potência dissipada no resistor ao qual a fonte de fem está conectada.

PREPARAR: a situação é a mesma do Exemplo 25.9, porém com um valor diferente para a resistência externa R.

EXECUTAR: de acordo com a Equação (25.18), a potência dissipada no resistor é dada por $P = I^2R$. Se você estivesse afobado, poderia concluir que a potência dobra porque a resistência é duas vezes maior, ou 2(16 W) = 32 W. Em vez disso, também poderia aplicar a fórmula $P = V_{ab}^2/R$; usando essa fórmula, seria possível concluir que a potência seria duas vezes menor do que a resistência do exemplo precedente, ou (16 W)/2 = 8 W. Qual é a resposta correta?

Na realidade, *ambas* as conclusões anteriores estão *incorretas*. A primeira está errada porque quando a resistência R varia a

corrente no circuito também varia (lembre-se de que uma fonte de fem *não* fornece a mesma corrente em todas as situações). A segunda conclusão também não é correta porque a diferença de potencial V_{ab} através do resistor varia quando a corrente varia. Para obtermos a resposta correta, inicialmente usamos a técnica do Exemplo 25.6 para determinar a corrente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\ \text{V}}{8\ \Omega + 2\ \Omega} = 1{,}2\ \text{A}$$

A resistência maior faz a corrente diminuir. A diferença de potencial através do resistor é

$$V_{ab} = IR = (1{,}2\ \text{A})(8\ \Omega) = 9{,}6\ \text{V}$$

que é maior do que a existente através do resistor de 4 Ω. A seguir, podemos calcular a potência dissipada no resistor usando qualquer uma das fórmulas seguintes:

$$P = I^2R = (1{,}2\ \text{A})^2(8\ \Omega) = 12\ \text{W} \text{ ou}$$

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{(9{,}6\ \text{V})^2}{8\ \Omega} = 12\ \text{W}$$

AVALIAR: o aumento da resistência R produz uma *redução* na potência fornecida ao resistor. Na expressão $P = I^2R$, a diminuição da corrente é mais importante do que o aumento da resistência; na expressão $P = V_{ab}^2/R$, o aumento da resistência é mais importante do que o aumento de V_{ab}. O mesmo raciocínio pode ser usado para uma lâmpada comum: uma lâmpada de 50 W possui uma resistência maior do que uma lâmpada de 100 W.

Você é capaz de mostrar que, ao se trocar o resistor de 4 Ω pelo resistor de 8 Ω, ocorre uma diminuição da taxa de conversão de energia (química em energia elétrica) na bateria bem como da taxa de dissipação de energia na bateria?

Exemplo 25.11

POTÊNCIA EM UM CURTO-CIRCUITO Para o mesmo curto-circuito da bateria analisada no Exemplo 25.8, calcule a taxa de conversão da energia ocorrida na bateria, a taxa de dissipação da energia na bateria e a potência líquida fornecida pela bateria.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas são novamente as potências consumidas e as potências fornecidas, associadas à bateria.

PREPARAR: a Figura 25.26 mostra o circuito. Trata-se novamente da mesma situação do Exemplo 25.9, mas agora a resistência externa R é igual a zero.

EXECUTAR: no Exemplo 25.8, encontramos que a corrente nesta situação é $I = 6$ A. A taxa de conversão da energia (química em elétrica) na bateria é dada por

$$\mathcal{E}I = (12\ \text{V})(6\ \text{A}) = 72\ \text{W}$$

A taxa de dissipação da energia na bateria é dada por

$$I^2r = (6\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 72\ \text{W}$$

A potência líquida fornecida pela fonte, dada por $V_{ab}I$, é igual a zero porque a voltagem nos terminais da bateria V_{ab} é igual a zero.

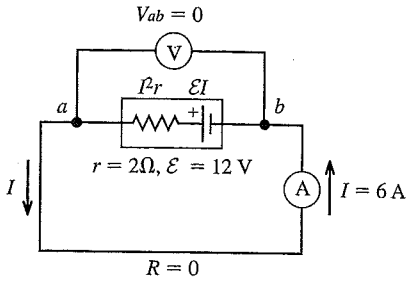


Figura 25.26 Nosso esquema para esse problema.

AVALIAR: com fios ideais e um amperímetro ideal, de modo que $R = 0$, a energia convertida é *completamente* dissipada no interior da fonte. Por isso, quando ocorre um curto-circuito, a bateria se deteriora rapidamente e pode até explodir.

Teste sua compreensão da Seção 25.5 Classifique os seguintes circuitos por ordem dos valores mais altos para os mais baixos da potência líquida fornecida da bateria. (i) um resistor de 1,4 Ω conectado a uma bateria de 1,5 V e resistência interna de 0,10 Ω; (ii) um resistor de 1,8 Ω conectado a uma bateria de 4,0 V e voltagem no terminal de 3,6 V, mas com resistência interna desconhecida; (iii) um resistor desconhecido conectado a uma bateria de 12,0 V que possui resistência interna de 0,20 Ω e voltagem no terminal de 11,0 V. ▮

*25.6 Teoria da condução em metais

Podemos entender melhor a condução elétrica estudando os aspectos microscópicos da origem da condutividade. Vamos considerar um modelo muito simples que trata os elétrons como partículas clássicas, ignorando sua natureza quântica e seu comportamento ondulatório no interior do sólido. Usando esse modelo, vamos deduzir uma expressão para a resistividade de um metal. Embora esse modelo não seja inteiramente correto em termos conceituais, ele ajudará você a ter uma idéia mais clara da base microscópica da condução.

No modelo mais simples da condução elétrica em um metal, cada átomo da rede cristalina fornece um ou mais elétrons de sua camada eletrônica externa. Esses elétrons podem então se mover livremente através do cristal, colidindo com os íons positivos estacionários em intervalos de tempo. O movimento dos elétrons livres é análogo ao movimento das moléculas que se movem através de um leito poroso ou da areia; por isso esses elétrons são geralmente chamados de 'gás de elétrons'.

Quando não existe nenhum campo elétrico aplicado, os elétrons descrevem trajetórias retilíneas entre as colisões; as direções de suas velocidades são caóticas e, na média, eles praticamente permanecem na mesma posição (Figura 25.27a). Contudo, quando um campo elétrico está presente, as trajetórias se encurvam ligeiramente, em virtude da atuação das forças elétricas. A Figura 25.27b mostra algumas trajetórias seguidas por um elétron sobre o qual

atua um campo elétrico orientado da direita para a esquerda. Como afirmamos na Seção 25.1, a velocidade média do movimento caótico é da ordem de 10^6 m/s, enquanto a velocidade de arraste é *muito* menor, da ordem de 10^{-4} m/s. O tempo médio entre duas colisões sucessivas denomina-se **tempo livre médio**, designado por τ. Na Figura 25.28, indicamos uma analogia mecânica para o movimento do elétron.

A partir desse modelo, torna-se possível deduzir uma expressão para a resistividade ρ, definida pela Equação (25.5):

$$\rho = \frac{E}{J} \tag{25.21}$$

em que E é o módulo do campo elétrico e J é o módulo da densidade de corrente. O vetor densidade de corrente $\vec{J}$, por sua vez, é dado pela Equação (25.4):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_a \tag{25.22}$$

em que n é o número de elétrons livres por unidade de volume, q é a carga de cada elétron e $\vec{v}_a$ é a velocidade média de arraste. (Também sabemos que $q = -e$ em um metal comum; vamos comentar isso mais adiante.)

Precisamos relacionar a velocidade de arraste $\vec{v}_a$ com o campo elétrico $\vec{E}$. O valor de $\vec{v}_a$ é determinado por uma condição estacionária, na qual, na média, a velocidade que as cargas *ganham* quando são aceleradas pela ação do campo $\vec{E}$ é exatamente igual à velocidade que elas *perdem* durante as colisões.

Para esclarecermos esse processo, vamos examinar os dois efeitos separadamente. Suponha que antes de $t = 0$ não exista nenhum campo elétrico. O movimento dos elétrons é completamente caótico. Um elétron típico possui uma velocidade $\vec{v}_0$ no instante $t = 0$, e a média dos valores de $\vec{v}_0$ tomada considerando-se muitos elétrons (ou seja, a velocidade inicial de um elétron médio) é igual a zero, $(\vec{v}_0)_{méd} = \mathbf{0}$. A seguir, no instante $t = 0$, aplicamos um campo elétrico $\vec{E}$. O campo exerce uma força $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cada carga, produzindo uma aceleração $\vec{a}$ na direção da força dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

em que m é a massa do elétron. *Cada* elétron possui tal aceleração.

Esperamos um tempo τ, o tempo médio entre duas colisões, e 'iniciamos' as colisões. Um elétron que possuía a velocidade $\vec{v}_0$ para $t = 0$, no instante $t = \tau$ possui uma velocidade

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\tau$$

A velocidade *média* $\vec{v}_{méd}$ do elétron nesse instante é dada pela soma das médias dos termos do membro direito da relação anterior. Como observamos, a média da velocidade $\vec{v}_0$ do elétron é igual a zero; logo,

$$\vec{v}_{méd} = \vec{a}\tau = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \tag{25.23}$$

Depois do instante $t = \tau$, a tendência à diminuição da velocidade média dos elétrons (provocada por colisões caóticas) torna-se exatamente igual à tendência de aumento dessa velocidade pelo campo $\vec{E}$. A velocidade média de um elétron, dada pela Equação (25.23), se mantém constante no tempo e deve ser igual à velocidade de arraste $\vec{v}_a$:

$$\vec{v}_a = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

Então, substituindo a expressão da velocidade de arraste $\vec{v}_a$ na Equação (25.22), temos:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_a = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

Comparando o resultado anterior com a Equação (25.21), que pode ser escrita na forma $\vec{J} = \vec{E}/\rho$, e substituindo $q = -e$, vemos que a resistividade ρ é dada por

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{25.24}$$

(a) Trajetória típica de um elétron em um cristal metálico sem um campo $\vec{E}$ interno

(b) Trajetória típica de um elétron em um cristal metálico com um campo $\vec{E}$ interno

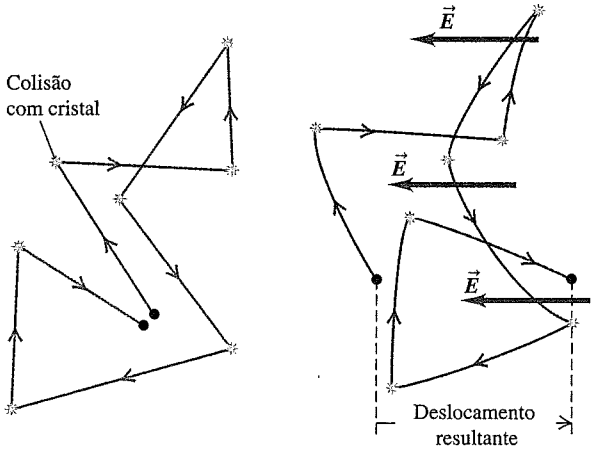


Figura 25.27 Movimento caótico de um elétron em um cristal metálico (a) com um campo elétrico nulo e (b) com um arraste produzido pelas forças elétricas. As curvaturas das trajetórias estão muito exageradas.

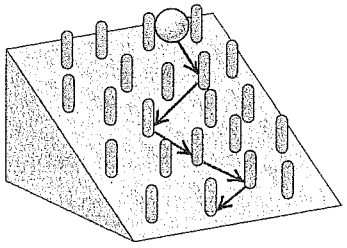


Figura 25.28 O movimento de uma bola rolando para baixo de um plano inclinado e mudando de direção em virtude das colisões com os obstáculos fornece uma analogia mecânica com o movimento dos elétrons em um condutor metálico quando existe um campo elétrico aplicado.

Quando n e τ não dependem de $\vec{E}$, então a resistividade não depende de $\vec{E}$ e o material condutor obedece à lei de Ohm.

Iniciar uma interação de cada vez parece artificial. Porém, a dedução seria a mesma se cada elétron tivesse seu próprio relógio e o instante $t = 0$ fosse diferente para cada elétron. Sendo τ o tempo médio entre as colisões, então $\vec{v}_a$ continua sendo a velocidade média de arraste dos elétrons, embora os movimentos dos diversos elétrons não sejam realmente correlacionados da maneira como postulamos.

O que dizer sobre a variação da resistividade com a temperatura? Supondo um cristal perfeito sem nenhum átomo fora de sua posição de equilíbrio, uma análise correta feita pela mecânica quântica chegaria à conclusão de que os elétrons livres se deslocam na rede sem nenhuma colisão. Porém, cada átomo vibra em torno de sua posição de equilíbrio. Ocorre um aumento das amplitudes dessas vibrações à medida que a temperatura aumenta, as colisões tornam-se mais freqüentes e o tempo livre médio τ diminui. Portanto, nosso modelo teórico prevê um aumento da resistividade com o aumento da temperatura. No caso de um supercondutor, podemos generalizar que não existem colisões elásticas, τ torna-se infinito e a resistividade ρ é igual a zero.

Para um semicondutor puro, tal como o silício e o germânio, o número n de portadores de carga por unidade de volume não é constante e cresce rapidamente quando a temperatura se eleva. Esse aumento de n fornece uma contribuição muito maior do que a diminuição do tempo livre médio, e a resistividade de um semicondutor sempre diminui rapidamente quando a temperatura aumenta. Para temperaturas baixas, n torna-se tão pequeno e a resistividade é tão grande que o semicondutor pode ser considerado um isolante.

Os elétrons ganham energia entre as colisões por causa do trabalho realizado pelo campo elétrico sobre eles. Durante as colisões eles transferem parte dessa energia para os átomos do material condutor. Isso provoca um aumento da energia interna do material e um conseqüente aumento de temperatura; por essa razão, os fios que conduzem uma corrente tornam-se quentes. Quando o campo elétrico no interior de um material é suficientemente grande, o elétron adquire energia suficiente para liberar outro elétron que estava ligado ao átomo do material. Os elétrons liberados podem liberar novos elétrons, produzindo uma avalanche de corrente. Essa é a base microscópica para explicar a ruptura dielétrica de um isolante.

Exemplo 25.12

TEMPO LIVRE MÉDIO NO COBRE Calcule o tempo livre médio entre as colisões no cobre para a temperatura ambiente.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema aplica os conceitos desenvolvidos nesta seção.

PREPARAR: podemos determinar uma expressão para o tempo livre médio τ em termos de n, ρ, e e m, rearranjando a Equação (25.24). De acordo com o Exemplo 25.1 e a Tabela 25.1, para o cobre $n = 8{,}5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$ e $\rho = 1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Além disso, $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C e $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg para os elétrons.

EXECUTAR: Reagrupando a Equação (25.24), obtemos

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8{,}5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2{,}4 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

AVALIAR: tomando o inverso desse tempo, verificamos que cada elétron realiza a média de aproximadamente 4×10^{13} colisões a cada segundo!

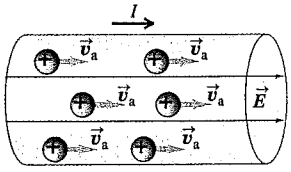
Teste sua compreensão da Seção 25.6 Qual dos seguintes fatores, se aumentado, dificultará a produção de certa quantidade de corrente em um condutor? (Pode haver mais de uma resposta correta.) (i) A massa das partículas carregadas em movimento no condutor; (ii) o número de partículas carregadas em movimento por metro cúbico; (iii) a quantidade de carga em cada partícula em movimento; (iv) o tempo médio entre as colisões para uma típica partícula carregada em movimento. ■

Resumo

Corrente e densidade de corrente: a corrente elétrica é a quantidade de carga que flui através de uma área especificada por unidade de tempo. A unidade SI de corrente é o ampère, igual a um coulomb por segundo (1 A = C/s). A corrente I que passa na área A depende da concentração n e da carga q dos portadores de carga, bem como do módulo da sua velocidade de arraste $\vec{v}_a$. A densidade de corrente é a corrente por unidade de área da seção reta do condutor. Convenciona-se descrever a corrente por meio de um fluxo de cargas positivas, mesmo quando a corrente real é negativa ou possui cargas com ambos os sinais. (Exemplo 25.1.)

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_a A \qquad (25.2)$$

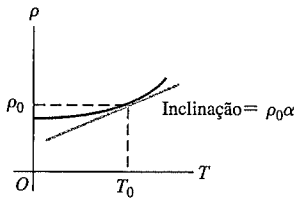
$$\vec{J} = nq\vec{v}_a \qquad (25.4)$$



Resistividade: a resistividade ρ de um material é definida como a razão entre os módulos do campo elétrico e da densidade de corrente. Um bom condutor possui resistividade pequena; um bom isolante apresenta resistividade grande. A lei de Ohm, válida para muitos materiais, afirma que ρ é uma constante que não depende do valor de E. A resistividade geralmente aumenta com a temperatura; para pequenas diferenças de temperatura, essa variação pode ser representada aproximadamente pela Equação (25.6), em que α é o coeficiente de temperatura da resistividade.

$$\rho = \frac{E}{J} \tag{25.5}$$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{25.6}$$

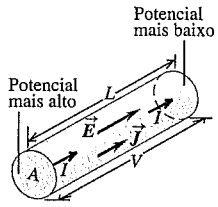


Metal: ρ aumenta à medida que T aumenta.

Resistores: para os materiais que obedecem à lei de Ohm, a diferença de potencial V através de uma amostra particular do material é proporcional à corrente I que passa pelo material. A razão $V/I = R$ é a resistência da amostra. A unidade SI de resistência é 1 ohm (1 Ω = 1 V/A). A resistência de um condutor cilíndrico está relacionada à sua resistividade ρ, comprimento L e área de seção reta A. (Veja os exemplos 25.2 a 25.4).

$$V = IR \tag{25.11}$$

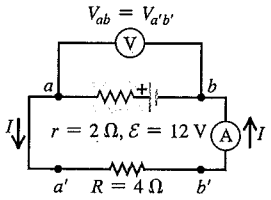
$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{25.10}$$



Circuitos e fem: um circuito completo contém uma ou mais malhas que fornecem um caminho contínuo para a condução da corrente elétrica. Um circuito completo deve conter pelo menos uma fonte de força eletromotriz (fem) $\mathcal{E}$. A unidade SI de força eletromotriz é 1 volt (1 V). Uma fonte de fem ideal mantém uma diferença de potencial constante, independentemente da corrente que passa no dispositivo, porém toda fonte de fem real possui alguma resistência interna r. A voltagem efetiva V_{ab} nos terminais da fonte depende da corrente. (Veja os exemplos 25.5 a 25.8.)

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \tag{25.15}$$

(fonte com resistência interna)



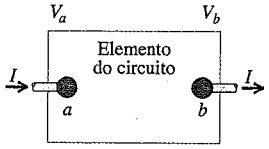
Energia e potência nos circuitos: um elemento do circuito submetido a uma diferença de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ e no qual passa uma corrente I consome energia quando a corrente flui do potencial mais baixo para o potencial mais elevado e fornece energia para o circuito quando a corrente flui em sentido oposto. A potência P (taxa de transferência de energia) é igual ao produto da diferença de potencial pela corrente. Um resistor R sempre consome energia do circuito. (Veja os exemplos 25.9 a 25.11.)

$$P = V_{ab}I \tag{25.17}$$

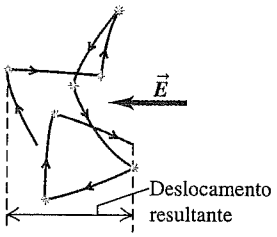
(elemento do circuito geral)

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \tag{25.18}$$

(potência fornecida a um resistor)



Condução em metais: o mecanismo microscópico da condução em metais é baseado no movimento dos elétrons através da rede cristalina do metal colidindo com os núcleos dos íons do metal. Em um modelo clássico aproximado, a resistividade do material pode ser relacionada à massa e a carga do elétron, à densidade e ao tempo livre médio entre as colisões. (Exemplo 25.12.)



Principais termos

ampère, 137
amperímetro, 148
circuito completo, 146
coeficiente de temperatura da resistividade, 141
concentração, 138
condutividade, 140
corrente, 135
corrente convencional, 137
densidade de corrente, 138
fonte de fem, 146
força eletromotriz (fem), 146
lei de Ohm, 139
ohm, 142
resistência, 142
resistência interna, 148
resistividade, 139
resistor, 143
tempo livre médio, 156
velocidade de arraste, 136
voltagem nos terminais, 148
voltímetro, 148

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

A corrente que sai é igual à corrente que entra. Em outras palavras, a carga deve penetrar a lâmpada à mesma taxa com que sai dela. Ela não é 'usada' ou consumida enquanto flui pela lâmpada.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

25.1 Resposta: (v) Duplicar o diâmetro aumenta a área da seção reta A por um fator de 4. Logo, o módulo da densidade de corrente $J = I/A$ é reduzido a ¼ do valor obtido no Exemplo 25.1, e o módulo da velocidade de arraste $v_a = J/n|q|$ é reduzido pelo mesmo fator. O novo módulo é v_a = (0,15 mm/s)/4 = 0,038 mm/s. Esse comportamento é o mesmo que o de um fluido não comprimível, que reduz a aceleração quando se move de um tubo estreito para outro mais largo (Seção 14.4).

25.2 Resposta: (ii) A Figura 25.6b indica que a resistividade ρ de um semicondutor aumenta enquanto a temperatura diminui. Pela Equação (25.5), o módulo da densidade de corrente é $J = E/\rho$, portanto a densidade de corrente diminui à medida que a temperatura cai e a resistividade aumenta.

25.3 Resposta: (iii) Explicitando a Equação (25.11) para a corrente, temos que $I = V/R$. Se a resistência R do fio não variasse, duplicar a voltagem V duplicaria também a corrente I. Entretanto, vimos no Exemplo 25.3 que a resistência *não* é constante. À medida que a corrente e a temperatura aumentam, R aumenta também. Portanto, duplicar a voltagem produz uma corrente que é *menor* que o dobro da corrente original. Um condutor ôhmico é um para o qual $R = V/I$ possui o mesmo valor, independentemente da voltagem, portanto o fio é *não-ôhmico*. (Em muitos problemas práticos, a variação de temperatura no fio é tão pequena que pode ser desprezada, portanto podemos considerar com segurança que o fio é ôhmico. É o que fazemos na maioria dos exemplos deste livro.)

25.4 Resposta: (iii), (ii), (i) Para o circuito (i), a Equação (25.16) fornece: $I = \mathcal{E}/(R + r)$ = (1,5 V) / (1,4 Ω + 0,10 Ω) = 1,0 A. Para o circuito (ii), observamos que a voltagem nos terminais V_{ab} = 3,6 V é igual à voltagem IR através do resistor de 1,8 Ω: $V_{ab} = IR$, portanto $I = V_{ab}/R$ = (3,6 V) / (1,8 Ω) = 2,0 A). Para o circuito (iii), usamos a Equação (25.15) para a voltagem nos terminais: $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$, logo $I = (\mathcal{E} - V_{ab})/r$ = (12,0 V − 11,0 V)/(0,20 Ω) = 5,0 A.

25.5 Resposta: (iii), (ii), (i) Estes circuitos são os mesmos que analisamos no Teste sua compreensão da Seção 25.4. Em cada caso, a potência fornecida líquida da bateria é $P = V_{ab}I$, em que V_{ab} é a voltagem nos terminais da bateria. Para o circuito (i), encontramos que I = 1,0 A, portanto $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$ =1,5 V − (10,0 A) (0,10 Ω) − 1,4 V, portanto P = (1,4 V) (1,0 A) = 1,4 W. Para o circuito (ii), temos V_{ab} = 3,6 V e encontramos que I = 2,0 A, portanto P = (3,6 V) (2,0 A) = 7,2 W. Para o circuito (iii), temos V_{ab} = 11,0 V e encontramos que I = 5,0 A, portanto P = (11,0 V) (5,0 A) = 55 A.

25.6 Resposta: (i) A dificuldade de produzir uma dada quantidade de corrente aumenta à medida que a resistividade aumenta. Pela Equação (25.24), $\rho = m/ne^2\tau$, portanto aumentar a massa m aumentará a resistividade. Isso ocorre porque uma partícula carregada mais maciça terá uma reação mais morosa a um campo elétrico aplicado e, portanto, um arraste mais lento. Para gerar a mesma corrente, seria necessário um campo elétrico maior. (Aumentar n, e ou τ diminuiria a resistividade e facilitaria a geração de uma dada corrente.)

Questões para discussão

Q25.1 A definição de resistividade ($\rho = E/J$) implica que existe um campo elétrico no interior de um condutor. Entretanto, vimos no Capítulo 21 que não pode haver nenhum campo elétrico no interior de um condutor. Há uma contradição aqui? Explique.

Q25.2 Um bastão cilíndrico possui resistência R. Se triplicarmos o comprimento e o diâmetro, qual será a resistência, em termos de R?

Q25.3 Um bastão cilíndrico possui resistividade ρ. Se triplicarmos o comprimento e o diâmetro, qual será a resistividade, em termos de ρ?

Q25.4 Dois fios de cobre com diâmetros diferentes são ligados pelas suas extremidades. Quando uma corrente elétrica flui através dessa combinação, o que ocorre com os elétrons quando eles se deslocam do fio com diâmetro maior para o fio com diâmetro menor? A velocidade de arraste dos elétrons aumenta, diminui ou permanece constante? Se a velocidade de arraste varia, qual é a força que produz essa variação? Explique seu raciocínio.

Q25.5 Quando uma pilha AAA de 1,5 V *não* é realmente uma pilha de 1,5V? Ou seja, quando os seus terminais fornecem uma diferença de potencial menor que 1,5 V?

Q25.6 A ddp nos terminais de uma bateria pode em algum caso possuir um sentido oposto ao da fem da bateria? Em caso afirmativo, forneça um exemplo. Em caso negativo, explique por quê.

Q25.7 Uma regra prática para determinar a resistência interna de uma fonte consiste em medir a ddp com o circuito aberto e dividir a voltagem pela corrente elétrica que flui em curto-circuito. Isso está correto? Por quê?

Q25.8 Uma pilha é sempre identificada pela fem especificada no rótulo; por exemplo, uma pilha AA usada em lanternas é especificada para '1,5 volt'. Seria também apropriado colocar um rótulo em uma bateria para especificar a corrente que ela fornece? Por quê?

Q25.9 Vimos que um coulomb representa uma enorme quantidade de carga; é praticamente impossível colocar uma carga de 1 C em um objeto. Entretanto, uma corrente de 10 A, 10 C/s, é bastante razoável. Explique essa aparente discrepância.

Q25.10 Um elétron em um circuito elétrico passa através de um resistor. O fio de cada lado do resistor possui o mesmo diâmetro. (a) Como comparar a velocidade de arraste dos elétrons quando eles entram no resistor à velocidade de arraste dos elétrons quando eles saem do resistor? Explique seu raciocínio. (b) Como comparar a energia potencial dos elétrons quando eles entram no resistor à energia potencial dos elétrons quando eles saem do resistor? Explique.

Q25.11 A corrente elétrica faz aumentar a temperatura de um resistor real. Por quê? Qual efeito esse aquecimento produz sobre a resistência? Explique.

Q25.12 Qual dos gráficos na Figura 25.29 ilustra melhor a corrente I em um resistor real em função da diferença de potencial V através dele? Explique. (*Sugestão*: veja a Questão Q25.11.)

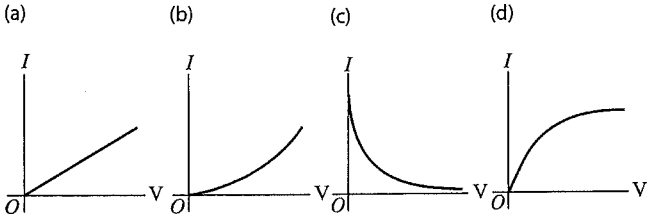


Figura 25.29 Questão Q25.12.

Q25.13 Por que uma lâmpada quase sempre queima assim que você acende a luz e quase nunca enquanto está acesa?

Q25.14 Uma lâmpada de filamento brilha porque ela possui uma resistência. O brilho da lâmpada aumenta com a potência elétrica dissipada no filamento do bulbo da lâmpada. (a) No circuito elétrico indicado na Figura 25.30a, as duas lâmpadas A e B são idênticas. O brilho da lâmpada A é o mesmo, maior ou menor do que o brilho da lâmpada B? (b) A lâmpada B é removida do circuito e, a seguir, o circuito elétrico é completado como indicado na Figura 25.30b.

Em comparação ao brilho da lâmpada *A* na Figura 25.30a, o brilho da lâmpada *A* na Figura 25.30b é igual, maior ou menor? Explique seu raciocínio.

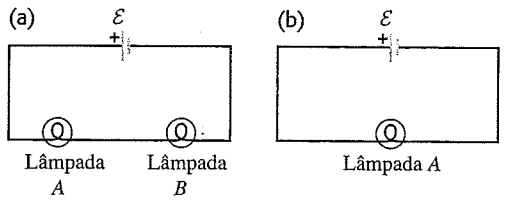


Figura 25.30 Questão Q25.14.

Q25.15 (Veja a Questão Q25.14.) Um amperímetro ideal A é inserido em um circuito elétrico com uma bateria e uma lâmpada, como indicado na Figura 25.31a, e a leitura do amperímetro é anotada. A seguir, o circuito é reconectado, como mostra a Figura 25.31b, invertendo-se as posições iniciais do amperímetro e da lâmpada. (a) Como a leitura do amperímetro indicada na situação descrita na Figura 25.31a se compara à leitura do amperímetro indicada na situação descrita na Figura 25.31b? Explique seu raciocínio. (b) Em qual das duas situações a lâmpada brilha com mais intensidade? Explique.

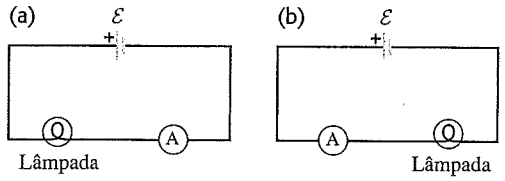


Figura 25.31 Questão Q25.15.

Q25.16 (Veja a Questão Q25.14.) Uma lâmpada brilha com mais intensidade quando ela é ligada como na Figura 25.32a, na qual um amperímetro ideal A é inserido no circuito elétrico, ou quando ela é ligada como na Figura 25.32b, na qual um voltímetro ideal V é inserido no circuito? Explique seu raciocínio.

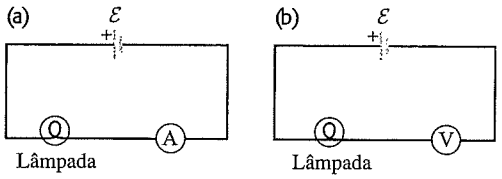


Figura 25.32 Questão Q25.16.

Q25.17 A energia que pode ser extraída de uma bateria com acumuladores é sempre menor do que a energia fornecida para carregá-la. Por quê?

Q25.18 Oito pilhas de lanterna em série fornecem uma fem aproximada de 12 V, igual à fem da bateria de um carro. Você pode usar essas pilhas para dar a partida do motor quando a bateria do carro está descarregada?

Q25.19 Pequenas aeronaves freqüentemente possuem sistemas elétricos que funcionam com 24 V, em vez de 12 V, como no caso de automóveis, embora o consumo de potência seja aproximadamente igual nas duas situações. A explicação dada pelos projetistas de aviões é que um sistema de 24 V pesa menos do que um sistema de 12 V porque se podem usar fios mais finos. Explique a razão disso.

Q25.20 As linhas de transmissão de energia elétrica para distâncias muito longas geralmente operam com altas tensões, algumas vezes atingindo 750 kV. Quais são as vantagens dessas tensões elevadas? Quais são as desvantagens?

Q25.21 Geralmente, as tensões elétricas para uso doméstico no Brasil são da ordem de 110 V. Por que é mais conveniente o uso dessa voltagem em vez do uso de tensões consideravelmente mais elevadas ou mais baixas? Por outro lado, os automóveis costumam empregar sistemas elétricos com 12 V. Por que essa voltagem é mais conveniente?

Q25.22 Um fusível é um dispositivo destinado a interromper a corrente elétrica quando ela ultrapassa certo limite, geralmente por causa da fusão do fio. Que características deve ter o material usado nesse tipo de fusível?

Q25.23 Por motivos de segurança, uma fonte de tensão com voltagem elevada possui uma resistência interna muito grande. Por que essa fonte deve ter uma resistência interna elevada em comparação a uma fonte que forneça a mesma voltagem, porém com uma resistência interna muito pequena?

Q25.24 Você leu no texto que um bom condutor de eletricidade também é um bom condutor de calor. Então, por que os fios que conectam um ferro elétrico, uma torradeira elétrica e outros eletrodomésticos semelhantes não ficam quentes em virtude da condução de calor proveniente dos elementos aquecedores?

Exercícios

Seção 25.1 Corrente

25.1 Uma corrente elétrica de 3,6 A flui através da lâmpada do farol de um automóvel. Quantos coulombs fluem através dessa lâmpada em 3,0 h?

25.2 Um fio de prata com diâmetro igual a 2,6 mm transfere uma carga de 420 C em 80 minutos. A prata contém $5,8 \times 10^{28}$ elétrons livres por metro cúbico. (a) Qual é a corrente elétrica no fio? (b) Qual é o módulo da velocidade de arraste dos elétrons no fio?

25.3 Uma corrente de 5,0 A passa por um fio de cobre com calibre 12 (diâmetro 2,05 mm) e por uma lâmpada. O cobre possui $8,5 \times 10^{28}$ elétrons livres por metro cúbico. (a) Quantos elétrons passam pela lâmpada por segundo? (b) Qual é a densidade de corrente no fio? (c) Qual é a velocidade escalar com que um elétron típico passa por qualquer dado ponto no fio? (d) Supondo que o fio tivesse o dobro de diâmetro, qual das respostas anteriores mudaria? Elas aumentariam ou diminuiriam?

25.4 Um fio com calibre 18 (diâmetro 1,02 mm) carrega uma corrente com densidade de corrente igual a $1,50 \times 10^6$ A/m^2. Calcule (a) a corrente no fio e (b) a velocidade de arraste dos elétrons no fio.

25.5 O cobre contém $8,5 \times 10^{28}$ elétrons livres por metro cúbico. Um fio de cobre com calibre 12, que possui diâmetro de 2,05 mm e comprimento de 71,0 cm, conduz uma corrente elétrica igual a 4,85 A. (a) Qual é o tempo necessário para um elétron percorrer o comprimento do fio? (b) Repita a parte (a) para um fio de cobre com calibre 6 (diâmetro igual a 4,12 mm) com o mesmo comprimento e conduzindo a mesma corrente. (c) De um modo geral, como a variação do diâmetro de um fio altera a velocidade de arraste dos elétrons no fio?

25.6 Considere o fio com calibre 18 do Exemplo 25.1. Quantos átomos há em 1,0 m^3 de cobre? Considerando a densidade dos elétrons livres dada no exemplo, quantos elétrons livres há por átomo de cobre?

25.7 A corrente elétrica que passa em um fio varia com o tempo de acordo com a seguinte equação: $I = 55\ \text{A} - (0,65\ \text{A/s}^2)t^2$. (a) Quantos coulombs passam através da seção reta do fio no inter-

valo de tempo entre $t = 0$ e $t = 8$ s? (b) Qual é o valor da corrente constante que poderia transportar a mesma quantidade de carga no mesmo intervalo de tempo?

25.8 Uma corrente elétrica passa em uma solução de cloreto de sódio. Em 1,0 s, $2,68 \times 10^{16}$ íons Na^+ chegam ao eletrodo negativo e $3,92 \times 10^{16}$ íons Cl^- chegam ao eletrodo positivo. (a) Qual é a corrente elétrica que passa entre os eletrodos? (b) Qual é o sentido da corrente?

25.9 Suponha que em um metal de prata há um elétron livre por átomo de prata. Calcule a densidade dos elétrons livres para a prata e compare o resultado ao valor obtido no Exercício 25.2.

Seção 25.2 Resistividade

Seção 25.3 Resistência

25.10 (a) Em temperatura ambiente, qual é a força do campo elétrico em um fio de cobre com calibre 12 (diâmetro de 2,05 mm) necessária para provocar um fluxo de corrente de 2,75 A? (b) Qual seria o campo necessário, caso o fio fosse feito de prata?

25.11 Um bastão cilíndrico, de 1,50 m e diâmetro de 0,500 cm, está conectado a uma fonte de energia que mantém uma diferença de potencial constante de 15,0 V através das suas extremidades, enquanto um amperímetro mede a corrente que passa por ele. Você observa que, na temperatura ambiente (20,0 °C), a leitura do amperímetro é de 18,5 A, enquanto a 92,0 °C, a leitura é de 17,2 A. Despreze qualquer expansão térmica do bastão. Calcule (a) a resistividade e (b) o coeficiente de temperatura da resistividade a 20 °C para o material do bastão.

25.12 Um fio de cobre possui uma seção reta quadrada de lado igual a 2,3 mm. O fio possui comprimento de 4,0 m e transporta uma corrente elétrica de 3,6 A. A densidade dos elétrons livres é igual a $8,5 \times 10^{28}/m^3$. Calcule o módulo (a) da densidade de corrente no fio; (b) do campo elétrico no fio. (c) Qual é o tempo necessário para um elétron percorrer o comprimento do fio?

25.13 Em uma experiência realizada à temperatura ambiente, uma corrente elétrica de 0,820 A flui ao longo de um fio com diâmetro de 3,26 mm. (a) Calcule o módulo do campo elétrico no fio, supondo que o material do fio seja (a) tungstênio; (b) alumínio.

25.14 Um fio de 6,50 m de comprimento e 2,05 mm de diâmetro possui uma resistência de 0,0290 Ω. De qual material é mais provável que o fio seja composto?

25.15 Um filamento cilíndrico de tungstênio com 15,0 cm de comprimento e diâmetro de 1,0 mm deve ser usado em uma máquina para a qual a temperatura variará entre a temperatura ambiente (20 °C) e a temperatura de 120 °C. A corrente é de 12,5 A sob qualquer temperatura (consulte as tabelas 25.1 e 25.2). (a) Qual será o campo elétrico máximo nesse filamento e (b) qual será a sua resistência para esse campo? (c) Qual será a queda máxima de potencial por todo o comprimento do filamento?

25.16 Qual é o comprimento de um fio de cobre com diâmetro de 0,462 mm e resistência igual a 1,0 Ω?

25.17 Nas instalações elétricas de uma casa, geralmente se usa um fio de cobre com diâmetro de 2,05 mm. Calcule a resistência de um fio de cobre com comprimento igual a 24,0 m.

25.18 Que diâmetro deve ter um fio de cobre para que sua resistência seja a mesma que a de um fio de alumínio com mesmo comprimento e com diâmetro igual a 3,26 mm?

25.19 Você deve produzir um conjunto de fios cilíndricos de cobre com 3,50 m de comprimento e resistência de 0,125 Ω cada. Qual será a massa de cada um desses fios?

25.20 Uma mola firmemente comprimida é composta por 75 espirais, cada qual medindo 3,50 cm de diâmetro, e é feita de um fio metálico isolante com 3,25 mm de diâmetro. Um ohmímetro conectado através das suas extremidades opostas registra 1,74 Ω. Qual é a resistividade do metal?

25.21 As faces de um cubo de alumínio possuem comprimento de 1,80 m. Qual é a resistência entre as duas faces opostas do cubo?

25.22 Uma lâmpada movida a bateria possui um filamento de tungstênio. Quando o interruptor que conecta a lâmpada à bateria é inicialmente acionado, a temperatura da lâmpada é de 20 °C e a corrente na lâmpada é de 0,860 A. Após a lâmpada estar acesa por 30 s, a corrente é de 0,220 A. Qual é então a temperatura do filamento?

25.23 Um corpo sólido retangular de puro germânio mede 12 cm × 12 cm × 25 cm. Supondo que cada uma das suas faces é uma superfície equipotencial, qual é a resistência entre as faces opostas que estão (a) mais distantes e (b) mais próximas?

25.24 Você aplica uma diferença de potencial de 4,50 V entre as extremidades de um fio com 2,50 m de comprimento e raio igual a 0,654 mm. A corrente resultante é igual a 17,6 A. Qual é a resistividade do fio?

25.25 Um fio de ouro com diâmetro igual a 0,84 mm conduz uma corrente elétrica. O campo elétrico no fio é igual a 0,49 V/m. Qual é (a) a corrente elétrica no fio; (b) a diferença de potencial entre dois pontos separados por uma distância de 6,4 m; e (c) a resistência de um comprimento do fio igual a 6,4 m?

25.26 A diferença de potencial entre dois pontos de um fio separados por uma distância de 75,0 cm é de 0,938 V quando a densidade de corrente é igual a $4,40 \times 10^7$ A/m^2. Calcule (a) o módulo de $\vec{E}$ no fio; (b) a resistividade do material do fio.

25.27 (a) Qual é a resistência de um fio de nicromo para 0,0 °C, se sua resistência é igual a 100,0 Ω para 11,5 °C? (b) Qual é a resistência de uma barra de carbono a 25,8 °C, se sua resistência é igual a 0,0160 Ω para 0,0 °C?

25.28 Um resistor de carbono pode ser usado como um termômetro. Em um dia de inverno, quando a temperatura é de 4,0 °C, a resistência do resistor de carbono é igual a 217,3 Ω. Qual é a temperatura de um dia de primavera quando a resistência é igual a 215,8 Ω? (Considere a temperatura de referência T_0 igual a 4,0 °C.)

25.29 Um pedaço de fio possui resistência igual a 5,60 μΩ. Calcule a resistência de um resistor formado por 120 fios iguais a esse quando eles são montados (a) lado a lado, formando um cabo com o mesmo comprimento do pedaço de fio considerado; (b) conectados pelas extremidades, formando um fio com um comprimento 120 vezes maior do que o do pedaço de fio inicial.

25.30 Um cilindro oco de alumínio tem 2,50 m de comprimento, raio interno de 3,20 cm e raio externo de 4,60 cm. Trate cada superfície (interna, externa e as duas faces nas extremidades) como uma superfície equipotencial. Em temperatura ambiente, qual será a leitura do ohmímetro, se ele estiver conectado entre (a) as faces opostas e (b) as superfícies interna e externa?

Seção 25.4 Força eletromotriz e circuitos

25.31 Um cabo de transmissão de cobre, que possui 100 km de comprimento e 10,0 cm de diâmetro, carrega uma corrente de 125 A. (a) Qual é a queda potencial através do cabo? (b) Quanta energia elétrica é dissipada como energia térmica por hora?

25.32 Considere o circuito elétrico indicado na Figura 25.33. A tensão entre os terminais da bateria de 24,0 V é igual a 21,2 V durante a passagem da corrente. Calcule (a) a resistência interna r da bateria; (b) a resistência R do resistor do circuito.

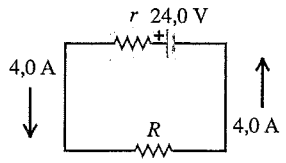


Figura 25.33 Exercício 25.32.

25.33 Um voltímetro ideal está conectado aos terminais de uma bateria enquanto há variação de corrente. A Figura 25.34 mostra um gráfico da leitura do voltímetro em função da corrente I que passa pela bateria. Calcule (a) a fem $\mathcal{E}$ e (b) a resistência interna da bateria.

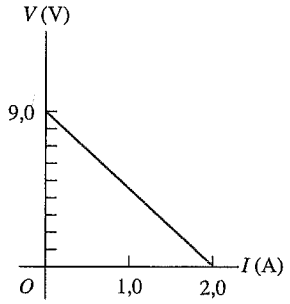


Figura 25.34 Exercício 25.33.

25.34 Um amperímetro ideal está conectado a uma bateria como indica a Figura 25.35. Ache (a) a leitura do amperímetro, (b) a corrente que passa pelo resistor de 4,0 Ω, (c) a voltagem nos terminais da bateria.

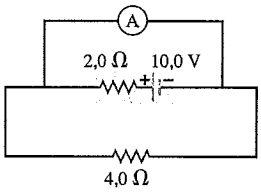


Figura 25.35 Exercício 25.34.

25.35 Um voltímetro ideal V está conectado a um resistor de 2,0 Ω e a uma bateria com fem igual a 5,0 V e resistência interna de 0,5 Ω , como indicado na Figura 25.36. (a) Qual é a corrente no resistor de 2,0 Ω? (b) Qual é a voltagem entre os terminais da bateria durante a passagem da corrente? (c) Qual é a leitura do voltímetro? Explique suas respostas.

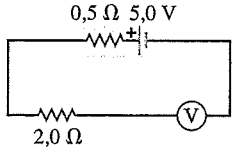


Figura 25.36 Exercício 25.35.

25.36 O circuito elétrico indicado na Figura 25.37 contém duas baterias, cada uma delas com uma fem e uma resistência interna, ligadas em série a dois resistores. Calcule (a) a corrente no circuito (módulo e sentido); (b) a voltagem V_{ab} nos terminais da bateria de 16,0 V; (c) a diferença de potencial V_{ac} do ponto a em relação ao ponto c. (d) Usando a Figura 25.21 como modelo, faça um gráfico do aumento e da queda de potencial no circuito.

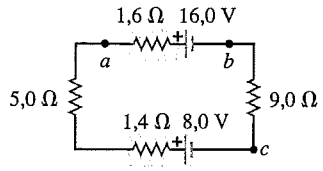


Figura 25.37 Exercícios 25.36, 25.38, 25.39 e 25.48.

25.37 Quando a chave S da Figura 25.38 está aberta, o voltímetro V conectado na bateria lê 3,08 V. Quando a chave está fechada, o voltímetro V indica uma queda de 2,97 V e o amperímetro indica 1,65 A. Calcule a fem, a resistência interna da bateria e a resistência do circuito R. Suponha que os dois instrumentos de medida sejam ideais, de modo que não afetem o circuito.

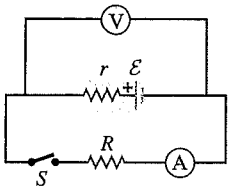


Figura 25.38 Exercício 25.37.

25.38 No circuito indicado na Figura 25.37, o resistor de 5,0 Ω é removido e substituído por outro resistor, com resistência desconhecida R. Depois dessa substituição, a leitura de um voltímetro ideal colocado entre os pontos b e c indica 1,9 V. Calcule (a) a corrente no circuito; (b) a resistência R. (c) Faça um gráfico do aumento e da queda de potencial no circuito (veja a Figura 25.21).

25.39 No circuito indicado na Figura 25.37, a bateria de 16,0 V é removida e depois inserida novamente com a polaridade invertida, de modo que o terminal negativo passe a ficar próximo do ponto a. Calcule (a) a corrente no circuito (módulo e sentido); (b) a voltagem V_{ab} nos terminais da bateria de 16,0 V; (c) a diferença de potencial V_{ac} do ponto a em relação ao ponto c. (d) Faça um gráfico do aumento e da queda de potencial no circuito (veja a Figura 25.21).

25.40 As seguintes medidas foram feitas nos terminais de um resistor de tirita:

I (A)	0,50	1,0	2,0	4,0
V_{ab} (V)	2,55	3,11	3,77	4,58

(a) Faça um gráfico de V_{ab} em função de I. (b) A tirita obedece à lei de Ohm? Como você pode comprovar sua resposta? (c) Faça um gráfico de $R = V_{ab}/I$ em função de I.

25.41 As seguintes medidas de corrente e diferença de potencial foram feitas nos terminais de um resistor fabricado com um fio de nicromo:

I (A)	0,50	1,0	2,0	4,0
V_{ab} (V)	1,94	3,88	7,76	15,52

(a) Faça um gráfico de V_{ab} em função de I. (b) O nicromo obedece à lei de Ohm? Como você pode comprovar sua resposta? (c) Qual é a resistência do resistor em ohms?

Seção 25.5 Energia e potência em circuitos elétricos

25.42 Um resistor submetido a uma diferença de potencial de 15,0 V através de seus terminais pode desenvolver uma energia térmica com uma taxa igual a 327 W. (a) Qual é sua resistência? (b) Qual é a corrente que passa no resistor?

25.43 Lâmpadas. A potência máxima de uma lâmpada (tal como uma lâmpada de 100 W) é a potência que ela dissipa quando conectada através de uma diferença de potencial de 120 V. Qual é a resistência de (a) uma lâmpada de 100 W e (b) uma lâmpada de 60 W? (c) Quanta corrente cada lâmpada consome em condições normais de uso?

25.44 Se uma lâmpada de '75 W' (veja o Problema 25.43) for conectada através de uma diferença de potencial de 220 V (como a usada na Europa), quanta potência será dissipada?

25.45 Lâmpada Européia. Na Europa a voltagem residencial padrão é de 220 V, em vez dos 110 V geralmente usados no Brasil. Portanto uma lâmpada de '100 W' na Europa deve ser usada com uma diferença de potencial de 220 V (veja o Problema 25.44). (a) Se você trouxer uma lâmpada européia de '100 W' para o Brasil, qual deve ser a potência máxima brasileira? (b) Quanta corrente a lâmpada européia de 100 W consome em condições normais de uso no Brasil?

25.46 Um receptor do sistema de posicionamento global (GPS) opera com uma bateria de 9,0 V e consome uma corrente elétrica de 0,13 A. Qual é a energia elétrica que ele consome durante uma hora e meia?

25.47 Considere um resistor com seção reta uniforme de área A, comprimento L e resistividade uniforme ρ conduzindo uma corrente elétrica com densidade uniforme J. Use a Equação (25.18) para calcular a potência elétrica p dissipada por unidade de volume. Expresse o resultado em termos (a) de J e de E; (b) de J e de ρ; (c) de ρ e de E.

25.48 Considere o circuito da Figura 25.37. (a) Qual é a taxa total da dissipação da energia elétrica nos resistores de 5,0 Ω e de 9,0 Ω? (b) Qual é a potência fornecida pela bateria de 16,0 V? (c) Com que taxa a energia elétrica é convertida em outras formas de energia na bateria de 8,0 V? (d) Mostre que a potência fornecida pela bateria de 16,0 V é igual à taxa da dissipação da energia elétrica no restante do circuito.

25.49 A capacidade de uma bateria com acumuladores, tal como a usada no sistema elétrico do automóvel, é especificada em ampères-horas (A · h). Uma bateria de 50 A pode fornecer uma corrente de 50 A durante 1 h, ou 25 A durante 2 h e assim por diante. (a) Qual é a energia total que pode ser fornecida por uma bateria de 12 V e 60-A · h, desprezando sua resistência interna? (b) Que volume de gasolina (em litros) possui um calor total de combustão igual à energia calculada no item (a)? (Veja a Seção 17.6; a densidade da gasolina é igual a 900 kg/m^3.) (c) Se um gerador que fornece uma potência elétrica média igual a 0,45 kW fosse conectado aos terminais da bateria, quanto tempo ele levaria para carregar completamente a bateria?

25.50 No circuito analisado no Exemplo 25.9 (Seção 25.6), o resistor de 4,0 Ω é substituído por um resistor de 8,0 Ω, como no Exemplo 25.10. (a) Calcule a taxa da conversão da energia elétrica em energia química na bateria. Como você compara sua resposta ao resultado obtido no Exemplo 25.9? (b) Calcule a taxa da dissipação da energia elétrica na resistência interna da bateria. Como você compara sua resposta ao resultado obtido no Exemplo 25.9? (c) Use os resultados dos itens (a) e (b) para calcular a potência líquida fornecida pela bateria. Como você compara sua resposta com a energia elétrica dissipada na resistência de 8,0 Ω obtida no Exemplo 25.10?

25.51 Uma lâmpada de 25,0 Ω está conectada aos terminais de uma bateria de 12,0 V com 3,50 Ω de resistência interna. Qual é a porcentagem da potência da bateria que é dissipada através da resistência interna e, portanto, não está disponível para a lâmpada?

25.52 Um voltímetro ideal está conectado aos terminais de uma bateria de 15,0 V, e um aparelho eletrodoméstico de 75,0 Ω também está conectado a esses terminais. Se a leitura do voltímetro for de 11,3 V, (a) quanta potência está sendo dissipada pelo aparelho e (b) qual é a resistência interna da bateria?

25.53 No circuito indicado na Figura 25.39, calcule (a) a taxa da conversão de energia interna (química) em energia elétrica no interior da bateria; (b) a taxa da dissipação da energia elétrica na bateria; (c) a taxa da dissipação da energia elétrica na resistência externa.

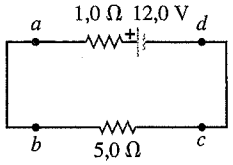


Figura 25.39 Exercício 25.53.

25.54 Uma lanterna comum possui duas pilhas, cada uma delas com uma fem igual a 1,5 V, conectadas em série com uma lâmpada com resistência igual a 17 Ω. (a) Desprezando a resistência interna da pilha, qual é a potência fornecida para a lâmpada? (b) Se a pilha se descarrega em 5,0 h, qual é a energia total fornecida para a lâmpada? A resistência de uma pilha real cresce à medida que ela vai sendo usada. Desprezando a resistência interna inicial, qual é a resistência interna combinada das duas pilhas quando a potência cai até a metade do valor inicial? (Suponha que a resistência da lâmpada permaneça constante. Na verdade, ela varia um pouco quando a corrente no filamento varia, pois ocorre uma oscilação da temperatura do filamento e, portanto, a resistividade do filamento varia.)

25.55 Um aquecedor elétrico de 540 W é projetado para operar em uma linha de 120 V. (a) Qual é sua resistência? (b) Que corrente elétrica ele consome? (c) Se a voltagem cai para 110 V, qual é a potência que o aquecedor consome? (Suponha que a resistência permaneça constante. Na verdade, ela varia um pouco, pois ocorre uma variação da temperatura.) (d) As espiras da resistência do aquecedor são metálicas, de modo que a resistência diminui quando a temperatura diminui. Caso a variação da resistência com a temperatura não seja desprezada, a potência que o aquecedor consome será maior ou menor do que aquela que você calculou no item (c)? Explique.

*Seção 25.6 Teoria da condução em metais

***25.56** O silício puro contém aproximadamente $1,0 \times 10^{16}$ elétrons livres por metro cúbico. (a) Na temperatura ambiente, qual deve ser o tempo livre médio para fornecer um valor de resistividade igual ao indicado na Tabela 25.1? (b) Sua resposta da parte (a) é muito maior do que o valor do tempo livre médio encontrado para o cobre no Exemplo 25.12. Por que, então, o silício puro possui uma resistividade muito maior do que a do cobre?

Problemas

25.57 Um condutor elétrico projetado para transportar correntes elevadas possui comprimento de 14,0 m e uma seção reta circular com diâmetro de 2,50 mm. A resistência entre suas extremidades é igual a 0,104 Ω. (a) Qual é a resistividade do material? (b) Sabendo que o módulo da campo elétrico no condutor é igual a 1,28 V/m,

qual é a corrente elétrica total? (c) Sabendo que o material possui $8,5 \times 10^{28}$ elétrons livres por metro cúbico, calcule a velocidade média de arraste nas condições do item (b).

25.58 Um tubo de plástico de 25,0 m de comprimento e 4,0 cm de diâmetro é mergulhado em uma solução de prata, e uma camada de prata de 0,100 mm de espessura é uniformemente depositada sobre a superfície externa do tubo. Se esse tubo revestido for, em seguida, conectado a uma bateria de 12,0 V, qual será a corrente?

25.59 No seu primeiro dia de trabalho como técnico eletricista, você é solicitado a determinar a resistência por metro de um longo pedaço de fio. A empresa para a qual você trabalha é mal equipada. Você encontra uma bateria, um voltímetro e um amperímetro, mas nenhum instrumento para medir diretamente a resistência (um ohmímetro). Você conecta o voltímetro aos terminais da bateria, e o instrumento registra 12,6 V. Você corta 20,0 m de comprimento do fio e conecta esse pedaço à bateria, com um amperímetro ligado em série, para medir a corrente no fio. A leitura do amperímetro é de 7,0 A. A seguir, você corta um pedaço de 40,0 m do fio e o conecta à bateria, novamente com o amperímetro ligado em série para medir a corrente. O amperímetro lê 4,20 A. Embora o equipamento disponível seja limitado, seu chefe garante que é de alta qualidade. O amperímetro possui uma resistência muito pequena e o voltímetro possui uma resistência alta. Qual é a resistência de 1 metro de fio?

25.60 Um fio de comprimento igual a 2,0 m é fabricado soldando-se a extremidade de um fio de prata com 120 cm de comprimento a um fio de cobre com 80 cm de comprimento. Cada pedaço de fio possui diâmetro igual a 0,60 mm. Os fios estão na temperatura ambiente, de modo que as resistividades são fornecidas pela Tabela 25.1. Uma diferença de potencial de 5,0 V é mantida entre as extremidades do fio de 2,0 m de comprimento. (a) Qual é a corrente na seção de cobre? (b) Qual é a corrente na seção de prata? (c) Qual é o módulo de $\vec{E}$ no cobre? (d) Qual é o módulo de $\vec{E}$ na prata? (e) Qual é a diferença de potencial entre as extremidades da seção de prata do fio?

25.61 Um fio de cobre de comprimento igual a 3,0 m a 20 °C possui uma seção de comprimento igual a 1,20 m, com diâmetro de 1,60 mm, e outra seção de 1,80 m, com diâmetro de 0,80 mm. Na seção com diâmetro igual a 1,60 mm passa uma corrente de 2,5 mA. (a) Qual é a corrente elétrica na seção com diâmetro de 0,80 mm? (b) Qual é o módulo de $\vec{E}$ na seção com diâmetro de 1,60 mm? (c) Qual é o módulo de $\vec{E}$ na seção com diâmetro de 0,80 mm? (d) Qual é a diferença de potencial entre as extremidades do fio de comprimento de 3,0 m?

25.62 Densidade de corrente crítica em supercondutores. Um problema encontrado em alguns dos mais recentes supercondutores de alta temperatura é obter uma densidade de corrente alta o bastante para uso prático, sem causar o reaparecimento da resistência. A densidade de corrente máxima para a qual o material manterá as características de um supercondutor é chamada de densidade de corrente crítica do material. Em 1987, os laboratórios de pesquisa da IBM produziram filmes finos com densidade de corrente crítica de $1,0 \times 10^5$ A/cm^2. (a) Quanta corrente um fio com calibre 18 (veja o Exemplo 25.1, na seção 25.1) desse material poderia carregar e continuar sendo um supercondutor? (b) Pesquisadores estão tentando desenvolver supercondutores com densidade de corrente crítica de $1,0 \times 10^6$ A/cm^2. Qual deve ser o diâmetro do fio cilíndrico desse material para carregar 1000 A sem perder sua condição de supercondutor?

25.63 Um material com resistividade ρ possui a forma de um cone truncado com altura h e raios r_1 e r_2 nas suas extremidades (Figura 25.40). (a) Calcule a resistência do cone entre as duas faces planas. (*Sugestão:* Divida o cone em muitos discos finos e calcule a resistência de um desses discos.) (b) Mostre que seu resultado está de acordo com a Equação (25.10) quando $r_1 = r_2$.

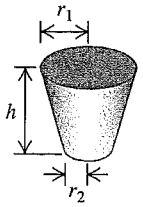


Figura 25.40 Problema 25.63.

25.64 A região entre duas esferas concêntricas condutoras com raios a e b está preenchida por um material condutor com resistividade ρ. (a) Mostre que a resistência entre as esferas é dada por

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

(b) Deduza uma expressão para a densidade de corrente em função do raio em termos da diferença de potencial V_{ab} entre as esferas. (c) Mostre que o resultado da parte (a) se reduz ao resultado da Equação (25.10) quando a distância entre as esferas $L = b - a$ é pequena.

25.65 Corrente de fuga em um dielétrico. Dois capacitores com placas paralelas possuem cargas Q iguais e opostas. O dielétrico possui uma constante dielétrica K e uma resistividade ρ. Mostre que a 'corrente de fuga' através do dielétrico é dada por $I = Q/K\epsilon_0\rho$.

25.66 No circuito indicado na Figura 25.41, R é um resistor variável, cujo valor pode variar de 0 a ∞, e a e b são os terminais de uma bateria com fem $\mathcal{E} = 15,0$ V e uma resistência interna de 4,0 Ω. O amperímetro e o voltímetro são ambos instrumentos ideais. À medida que R varia por toda a gama de valores, quais serão as leituras máxima e mínima (a) do voltímetro e (b) do amperímetro? (c) Faça gráficos qualitativos das leituras de ambos os instrumentos em função de R, conforme R varia de 0 ao ∞.

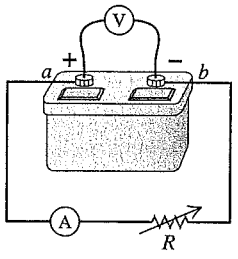


Figura 25.41 Problema 25.66.

25.67 O coeficiente de temperatura da resistência α indicado na Equação (25.12) é igual ao coeficiente de temperatura da resistividade indicado na Equação (25.6) somente quando o coeficiente de dilatação térmica é pequeno. Um tubo vertical cilíndrico contém uma coluna de mercúrio. Para a temperatura de 20 °C, o comprimento da coluna de mercúrio é igual a 12,0 cm. O diâmetro da coluna de mercúrio é de 1,6 mm e não varia com a temperatura porque o vidro possui um valor pequeno para o coeficiente de dilatação térmica. O coeficiente de dilatação térmica do mercúrio é indicado na Tabela 17.2, sua resistividade à temperatura de 20 °C é indicada na Tabela 25.1 e seu coeficiente de temperatura da resis-

tividade é indicado na Tabela 25.2. (a) Para a temperatura de 20 °C, qual é a resistência entre as extremidades da coluna de mercúrio? (b) A coluna de mercúrio é aquecida até 60 °C. Qual é a variação de sua resistividade? (c) Qual é sua variação de comprimento? Explique por que a variação de comprimento é determinada pelo coeficiente de dilatação volumétrica em vez do coeficiente de dilatação linear. (d) Qual é a variação de sua resistência? (*Sugestão:* Como as variações relativas de ρ e de L são pequenas, pode ser útil deduzir a partir da Equação (25.10) uma relação para ΔR em termos de $\Delta\rho$ e de ΔL.) (e) Qual é o coeficiente de temperatura da resistência α indicado na Equação (25.12) para a coluna de mercúrio? Como esse valor se compara ao coeficiente de temperatura da resistividade? O efeito da variação de comprimento é relevante?

25.68 (a) Qual é a diferença de potencial V_{ad} no circuito indicado na Figura 25.42? (b) Qual é a voltagem nos terminais da bateria de 4,0 V? (c) Uma bateria com fem igual a 10,30 V e resistência interna 0,50 Ω é inserida no circuito no ponto d, com seu terminal negativo conectado ao terminal negativo da bateria de 8,0 V. Qual é agora a diferença de potencial V_{bc} nos terminais da bateria de 4,0 V?

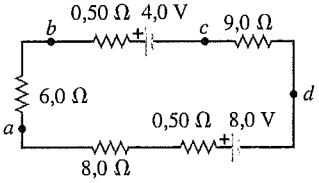


Figura 25.42 Problema 25.68.

25.69 A diferença de potencial nos terminais de uma bateria é igual a 8,4 V quando uma corrente igual a 1,50 A flui do terminal negativo para o terminal positivo da bateria. Quando a corrente é igual a 3,50 A em sentido contrário ao anterior, a diferença de potencial torna-se igual a 9,4 V. (a) Qual é a resistência interna da bateria? (b) Qual é a fem da bateria?

25.70 Uma pessoa cuja resistência do corpo entre as mãos é igual a 10 kΩ segura acidentalmente os terminais de uma fonte de tensão de 14 kV. (a) Sabendo que a resistência interna da fonte de tensão é igual a 2000 Ω, qual é a corrente que passa pelo corpo dessa pessoa? (b) Qual é a potência dissipada em seu corpo? (c) Para que a fonte de tensão se torne uma fonte sem risco seria necessário aumentar sua resistência interna; qual deveria ser a resistência interna da fonte para que a corrente elétrica que passa pelo corpo da pessoa se reduzisse para um valor menor ou igual a 1,0 mA?

25.71 A resistividade volumétrica média do corpo humano (sem considerar a resistência da pele) é aproximadamente igual a 5,0 Ω. O caminho para a condução entre as mãos pode ser visto como um cilindro com 1,6 m de comprimento e diâmetro igual a 0,10 m. A resistência da pele pode tornar-se desprezível molhando-se as mãos com água salgada. (a) Qual é o valor da resistência entre as mãos desprezando-se a resistência da pele? (b) Qual é a diferença de potencial necessária para que ocorra um choque mortal com uma corrente elétrica de 100 mA? (Observe que seu resultado indica que mesmo uma diferença de potencial pequena pode produzir uma corrente elétrica perigosa quando a pele está úmida.) (c) Usando o valor da corrente calculada no item (b), qual é a potência dissipada no corpo?

25.72 Considere um custo médio para energia elétrica de R$ 12,0 por quilowatt-hora. (a) Algumas pessoas deixam a luz da varanda acesa o tempo todo. Qual é o custo anual para se manter uma lâmpada de 75 W acesa dia e noite? (b) Suponha que o seu refrigerador use 400 W de potência quando em funcionamento, e ele funcione 8 horas por dia. Qual é o custo anual de funcionamento do seu refrigerador?

25.73 Uma bateria de carro de 12,6 V, com resistência interna desprezível, é ligada em série com um resistor de 3,2 Ω que obedece à lei de Ohm e com um termistor que não obedece à lei de Ohm, possuindo uma relação voltagem-corrente dada por $V = \alpha I + \beta I^2$, em que $\alpha = 3{,}8\ \Omega$ e $\beta = 1{,}3\ \Omega/\text{A}$. Qual é a corrente que passa no resistor de 3,2 Ω?

25.74 Um cabo cilíndrico de cobre com 1,50 km de comprimento está conectado através de uma diferença de potencial de 220 V. (a) Qual deve ser o seu diâmetro para produzir calor a uma taxa de 50,0 W? (b) Qual é o campo elétrico no interior do cabo sob essas condições?

25.75 Um amperímetro não-ideal. Diferentemente do amperímetro ideal descrito na Seção 25.4, qualquer amperímetro real possui uma resistência diferente de zero. (a) Um amperímetro com resistência R_A é conectado em série com um resistor R e uma bateria com fem $\mathcal{E}$ e resistência interna r. A corrente medida pelo amperímetro é I_A. Determine a corrente que passa no circuito quando o amperímetro é removido, de modo que a bateria e o resistor constituam um circuito completo. Quanto mais 'ideal' for o amperímetro, menor será a diferença entre essa corrente e a corrente I_A. (b) Supondo $R = 3{,}80\ \Omega$, $\mathcal{E} = 7{,}50$ V e $r = 0{,}45\ \Omega$, calcule o valor máximo da resistência do amperímetro R_A de modo que I_A possua um valor com uma diferença máxima de 1% do valor calculado sem o amperímetro. (c) Explique por que a resistência calculada no item (b) representa um valor *máximo*.

25.76 Um cilindro de 1,50 m e raio de 1,10 cm é feito de uma mistura complexa de materiais. Sua resistividade depende da distância x da extremidade esquerda e obedece à fórmula $\rho(x) = a + bx^2$, em que a e b são constantes. Na extremidade esquerda, a resistividade é de $2{,}25 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, e do lado direito é de $8{,}50 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. (a) Qual é a resistência desse bastão? (b) Qual é o campo elétrico na metade do seu comprimento, se ele carregar uma corrente de 1,75 A? (c) Se cortarmos o bastão em dois segmentos de 75,0 cm, qual é a resistência de cada metade?

25.77 De acordo com as normas técnicas do *U.S. National Electrical Code*, os fios de cobre usados nas instalações elétricas de casas, hotéis, edifícios comerciais e instalações industriais devem conduzir uma corrente máxima especificada. A tabela seguinte indica o valor da corrente máxima $I_{máx}$ para diversas dimensões de fios com um verniz isolante. O 'calibre do fio' é um método padronizado para a descrição do diâmetro de um fio. Note que, quanto maior o diâmetro do fio, *menor* o calibre do fio.

Calibre do fio	Diâmetro (cm)	$I_{máx}$ (A)
14	0,163	18
12	0,205	25
10	0,259	30
8	0,326	40
6	0,412	60
5	0,462	65
4	0,519	85

(a) Quais são as considerações usadas para determinar a corrente máxima da fiação elétrica de uma casa? (b) Uma potência total igual a 4200 W deve ser fornecida para os aparelhos elétricos de

uma residência. Sabendo que a diferença de potencial através do conjunto de aparelhos é igual a 120 V, calcule o valor do calibre do fio mais fino que pode ser usado. (c) Suponha que a fiação usada na casa possua o calibre calculado na parte (b) e que seu comprimento total seja igual a 42,0 m. Qual é a taxa de dissipação de energia nesse fio? (d) A casa está construída em um local onde a energia elétrica custa R$ 0,11 por quilowatt-hora. Considere um fio com um diâmetro maior, cujo calibre seja dado pelo calibre seguinte ao calibre calculado no item (b); supondo que você faça a fiação da casa com fios com esse diâmetro maior, quantos reais você poderia obter de economia de energia em um ano? Suponha que os aparelhos elétricos permaneçam ligados durante 12 horas por dia.

25.78 Uma torradeira que usa um aquecedor de nicromo está conectada a uma fonte de 120 V. Quando ela é ligada com a temperatura inicial de 20 °C, o elemento aquecedor transporta uma corrente inicial igual a 1,35 A. Alguns segundos mais tarde, a corrente atinge um valor estacionário de 1,23 A. (a) Qual é a temperatura final do elemento? O valor médio do coeficiente de resistividade do nicromo nesse intervalo de temperatura é $4,5 \times 10^{-4}\ (C^0)^{-1}$. (b) Qual é a potência dissipada no elemento aquecedor i) no instante inicial; ii) no momento em que a corrente atinge um valor estacionário?

25.79 No circuito indicado na Figura 25.43, calcule (a) a corrente através do resistor de 8,0 Ω; (b) a taxa total da dissipação da energia elétrica no resistor de 8,0 Ω e nas demais resistências internas das baterias. (c) Em uma das baterias ocorre conversão de energia química em elétrica. Em qual das duas baterias isso está ocorrendo e qual é a taxa da conversão? (d) Em uma das baterias ocorre conversão de energia elétrica em química. Em qual das duas baterias isso está ocorrendo e qual é a taxa da conversão? (e) Mostre que a taxa global de produção da energia elétrica é igual à taxa global de dissipação da energia elétrica.

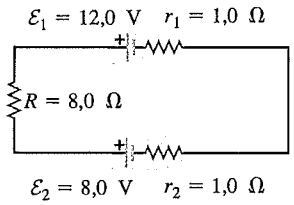


Figura 25.43 Problema 25.79.

25.80 Um raio atinge a extremidade da barra de um pára-raios de aço, produzindo uma corrente transiente de 15000 A que dura 65 μs. A barra possui 2,0 m de comprimento e diâmetro igual a 1,8 cm; e sua outra extremidade está conectada ao solo por meio de um fio de cobre com comprimento de 35 m e diâmetro igual a 8,0 mm. (a) Calcule a diferença de potencial entre o topo da barra de aço e a extremidade inferior do fio de cobre durante a passagem da corrente transiente. (b) Calcule a energia total transferida para a barra e para o fio durante a passagem da corrente transiente.

25.81 Uma bateria de 12,0 V possui uma resistência interna igual a 0,24 Ω e uma capacidade de 50,0 A · h (veja o Exercício 25.49). A bateria é carregada por uma corrente de 10 A que passa através dela durante 5,0 h. (a) Qual é a voltagem indicada pela bateria durante o processo de carga? (b) Qual é a energia elétrica total fornecida para a bateria durante o processo de carga? (c) Qual é a energia elétrica dissipada na resistência interna durante o processo de carga? (d) A seguir, a bateria é completamente descarregada através de um resistor externo, novamente com uma corrente constante igual a 10 A. Qual é a resistência externa do circuito? (e) Qual é a energia elétrica total fornecida para o resistor externo? (f) Qual é a energia elétrica total dissipada na resistência interna? (g) Por que a resposta do item (b) é diferente da resposta do item (e)?

25.82 Repita o Problema 25.81 supondo que a carga e a descarga da bateria sejam feitas com uma corrente igual a 30 A. O tempo para carregar e descarregar a bateria agora é de 1,7 h em vez de 5,0 h. Qual é a diferença de desempenho que se observa?

Problemas desafiadores

25.83 A *experiência de Tolman-Stewart* (1916) demonstrou que as cargas livres de um metal são negativas e forneceu um método quantitativo para a determinação da razão $|q|/m$ entre o módulo da carga e a massa do portador de carga. A experiência consiste em interromper repentinamente a rotação de um carretel com um fio enrolado e medir a diferença de potencial produzida entre suas extremidades. Em um modelo simplificado dessa experiência, considere uma barra metálica de comprimento L que se desloca com uma aceleração $\vec{a}$ da esquerda para a direita. Inicialmente, as cargas se deslocam para a parte esquerda da barra, produzindo um campo elétrico $\vec{E}$ ao longo da barra. No estado estacionário, esse campo exerce uma força sobre as cargas livres, acelerando-as através da barra. (a) Aplique a relação $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ para as cargas livres a fim de obter $|q|/m$ em termos do módulo do campo elétrico induzido $\vec{E}$ e da aceleração $\vec{a}$. (b) Supondo que todas as cargas livres da barra metálica possuam a mesma aceleração, o campo elétrico $\vec{E}$ é o mesmo em todos os pontos da barra. Use esse fato para reescrever a expressão de $|q|/m$ em termos da diferença de potencial V_{bc} entre as extremidades da barra (Figura 25.44). (c) Se as cargas livres possuem um sinal negativo, qual das extremidades da barra, b ou c, estará a um potencial mais elevado? (d) Para uma barra de comprimento igual a 0,50 m e supondo que as cargas livres sejam elétrons (carga $q = -1,60 \times 10^{-19}$ C, massa 9.11×10^{-31} kg), qual deve ser a aceleração necessária para produzir uma diferença de potencial igual a 1,0 mV entre as extremidades da barra? (e) Discuta a razão pela qual, na experiência real, se usou um fio fino girando enrolado em um carretel em vez de uma barra com aceleração linear, como em nosso modelo simplificado.

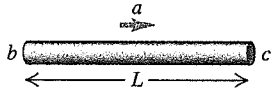


Figura 25.44 Problema desafiador 25.83.

25.84 A relação corrente–voltagem para um diodo semicondutor é dada por

$$I = I_S\left[\exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1\right]$$

em que V é a voltagem nos terminais do diodo, I é a corrente que flui através do diodo, I_S é uma constante característica do dispositivo, e é o módulo da carga do elétron, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura em Kelvin. Esse diodo é conectado em série com um resistor de resistência $R = 1,0\ \Omega$ e com uma bateria de fem $\mathcal{E} = 2,0$ V. A polaridade da bateria é tal que a corrente que flui no diodo segue no sentido correto (Figura 25.45). A bateria possui resistência interna desprezível. (a) Obtenha uma equação para V. Observe que você não pode explicitar V algebri-

camente. (b) O valor de V deve ser obtido usando-se um método numérico. Um método possível consiste em experimentar um certo valor de V e verificar como o membro esquerdo se compara com o membro direito da equação para o valor de V escolhido; a partir daí faça uma nova estimativa para V. Considerando I_S = 1,50 mA e T = 293 K, obtenha uma solução (com precisão de três algarismos significativos) para a queda de tensão V e para a corrente I que passa através do diodo.

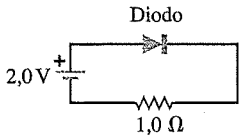


Figura 25.45 Problema desafiador 25.84.

25.85 A resistividade de um semicondutor pode ser alterada adicionando-se diferentes quantidades de impurezas. Uma barra de um semicondutor de comprimento L e seção reta com área A está ao longo do eixo Ox, entre $x = 0$ e $x = L$. O material obedece à lei de Ohm e sua resistividade varia ao longo da barra, de acordo com a relação $\rho(x) = \rho_0 \exp(-x/L)$. A extremidade da barra para $x = 0$ está a um potencial V_0 mais elevado do que o potencial da extremidade $x = L$. (a) Calcule a resistência total da barra e a corrente que flui através dela. (b) Determine o módulo do campo elétrico $E(x)$ na barra em função de x. (c) Faça um gráfico das funções $\rho(x)$, $E(x)$ e $V(x)$ para valores de x compreendidos entre $x = 0$ e $x = L$.

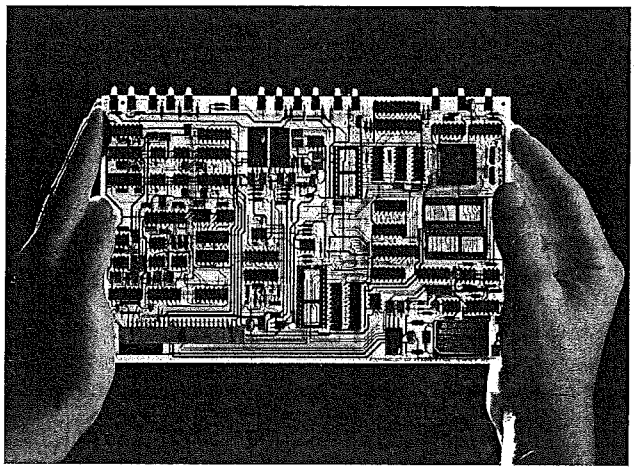
25.86 Uma fonte de fem $\mathcal{E}$ e resistência interna r é conectada a um circuito externo. (a) Mostre que a potência fornecida pela fonte é máxima quando a corrente no circuito é igual à metade do valor da corrente quando a fonte está em curto-circuito. (b) Sabendo que R é a resistência do circuito externo, mostre que a potência fornecida pela fonte é máxima quando $R = r$ e que o valor máximo da potência fornecida pela fonte é igual a $\mathcal{E}^2/4r$.

25.87 O coeficiente de temperatura da resistividade α é dado por

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

em que ρ é a resistividade na temperatura T. A Equação (25.6) é, então, obtida supondo-se que α seja constante e muito menor do que $(T - T_0)^{-1}$. (a) Se α não é constante, porém é dado por $\alpha = -n/T$, em que T é a temperatura em Kelvin e n é uma constante, mostre que a resistividade é dada por $\rho = a/T^n$, em que a é uma constante. (b) Observando a Figura 25.10, podemos ver que essa relação poderia ser usada como uma aproximação para o comportamento de um semicondutor. Usando os valores de ρ e de α referentes ao carbono nas tabelas 25.1 e 25.2, determine a e n. (Na Tabela 25.1, suponha que a 'temperatura ambiente' seja igual a 293 K.) (c) Usando o resultado do item (b), determine a resistividade do carbono para –196 °C e para 300 °C. (Lembre-se de expressar T em kelvins.)

CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA 26



Em um circuito complexo, como o desta placa, é possível conectar vários resistores com diferentes resistências, de modo que todos eles possuam a mesma diferença de potencial? Em caso afirmativo, a corrente que passa por todos os resistores será a mesma?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como analisar circuitos com múltiplos resistores em série ou em paralelo.
- Regras que podem ser aplicadas a qualquer circuito com mais de uma malha.
- Como usar um amperímetro, voltímetro, ohmímetro ou potenciômetro em um circuito.
- Como analisar circuitos que possuem tanto um resistor quanto um capacitor.
- Como a energia elétrica é distribuída em uma residência.

Se você olhar o interior de seu aparelho de TV, do computador, de seu aparelho de som estéreo ou embaixo da capota de seu carro, notará circuitos mais complexos do que os circuitos simples estudados no Capítulo 25. Tanto os conectados por fios como os circuitos impressos integrados em um *chip* semicondutor, todos geralmente incluem diversas fontes, resistores e outros elementos, tais como capacitores, transformadores e motores, interconectados em uma *rede*.

Neste capítulo, estudaremos métodos para analisar essas redes, incluindo como calcular correntes, voltagens e outras propriedades desconhecidas dos elementos do circuito. Vamos aprender a determinar a resistência equivalente para resistores conectados em série ou em paralelo. Para circuitos mais gerais que formam redes precisamos usar duas regras, conhecidas como *leis de Kirchhoff*. Uma delas decorre do princípio da conservação da carga aplicada a uma junção; a outra, do princípio da conservação da energia aplicada a uma carga que se desloca em torno de um circuito fechado. Discutiremos os instrumentos necessários para medir diversas grandezas elétricas. Também analisaremos circuitos com resistores e capacitores, para os quais a corrente varia com o tempo.

O principal assunto deste capítulo são os circuitos de **corrente contínua** (cc), nos quais o sentido da corrente não varia com o tempo. As lanternas e o sistema elétrico de um automóvel são exemplos de circuitos de corrente contínua. Os aparelhos eletrodomésticos são alimentados por **corrente alternada** (ca), na qual a corrente oscila, alternando seu sentido para a frente e para trás. O mesmo princípio de análise de circuitos pode ser aplicado para esses dois tipos de circuito elétrico, e concluímos o capítulo analisando o sistema elétrico de uma casa. Os circuitos com corrente alternada serão estudados com detalhes no Capítulo 31.

26.1 Resistores em série e em paralelo

Os resistores existem em todos os tipos de circuito, desde secadores de cabelos e aquecedores espaciais até circuitos que dividem ou limitam correntes e voltagens. Tais circuitos geralmente contêm muitos resistores, de modo que é conveniente estudar *combinações* de resistores. Um exemplo simples é fornecido pelo conjunto de lâmpadas usadas

como decoração natalina; cada lâmpada é um resistor e, do ponto de vista da análise de circuitos, o conjunto de lâmpadas nada mais é do que uma combinação de resistores.

Considere três resistores com resistências R_1, R_2 e R_3. A Figura 26.1 indica quatro maneiras diferentes para conectá-los entre os pontos a e b. Dizemos que existe uma **ligação em série** quando os elementos de um circuito, tais como resistores, baterias e motores, são ligados em seqüência e há um único caminho de corrente entre os pontos, como indicado na Figura 26.1a. Estudamos ligação em série de *capacitores* na Seção 24.2; verificamos que, em virtude da conservação da carga, todos os capacitores ligados em série devem possuir a mesma carga quando eles estão inicialmente descarregados. No caso de circuitos, estamos mais interessados na *corrente*, que é o fluxo da carga por unidade de tempo.

A Figura 26.1b ilustra uma **ligação em paralelo** de resistores entre os pontos a e b. Cada resistor oferece um caminho alternativo para a corrente entre esses pontos. A *diferença de potencial* é a mesma nos terminais de qualquer um dos elementos ligados em paralelo. Estudamos capacitores em paralelo na Seção 24.2.

Na Figura 26.1c, os resistores R_2 e R_3 estão em paralelo, e essa combinação está em série com o resistor R_1. Na Figura 26.1d, os resistores R_2 e R_3 estão em série, e essa combinação está em paralelo com o resistor R_1.

Qualquer que seja a combinação de resistores, podemos sempre encontrar um resistor *único* capaz de substituir a combinação inteira, produzindo a mesma corrente e a mesma diferença de potencial. Por exemplo, é possível substituir o conjunto de lâmpadas usadas como decoração natalina por uma única lâmpada, submetida à mesma diferença de potencial do conjunto e que consuma a mesma corrente do circuito original. Essa resistência única denomina-se **resistência equivalente** da combinação. Se qualquer um dos circuitos da Figura 26.1 for substituído pela resistência equivalente R_{eq}, poderemos escrever

$$V_{ab} = IR_{eq} \quad \text{ou} \quad R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I}$$

em que V_{ab} é a diferença de potencial entre os terminais a e b do circuito e I é a corrente no ponto a ou b. Para calcularmos a resistência equivalente, supomos uma diferença de potencial V_{ab} nos terminais do circuito real, calculamos a corrente correspondente I e obtemos a razão V_{ab}/I.

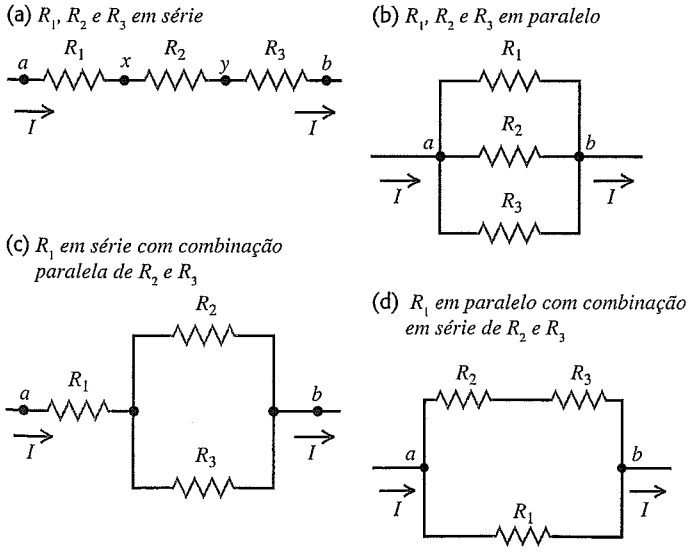


Figura 26.1 Quatro modos diferentes para a ligação entre três resistores.

Resistores em série

Podemos deduzir relações gerais para a resistência equivalente de combinações de resistores em série e em paralelo. Quando os resistores estão ligados em *série*, como indica na Figura 26.1a, a corrente I deve ser a mesma através de todos os resistores. (Como discutimos na Seção 25.4, a corrente *não* é 'consumida' à medida que passa pelo circuito.) Aplicando $V = IR$ para cada resistor, obtemos

$$V_{ax} = IR_1 \quad V_{xy} = IR_2 \quad V_{yb} = IR_3$$

A diferença de potencial nos terminais dos resistores não precisa ser a mesma (exceto no caso especial em que todas as três resistências sejam iguais). A diferença de potencial V_{ab} através da combinação inteira é a soma das diferenças de potencial através de cada elemento:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

logo,

$$\frac{V_{ab}}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

A razão V_{ab}/I é, por definição, a resistência equivalente R_{eq}. Portanto,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

É fácil generalizar o resultado anterior para um número qualquer de resistores:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad (26.1)$$

(resistores em série)

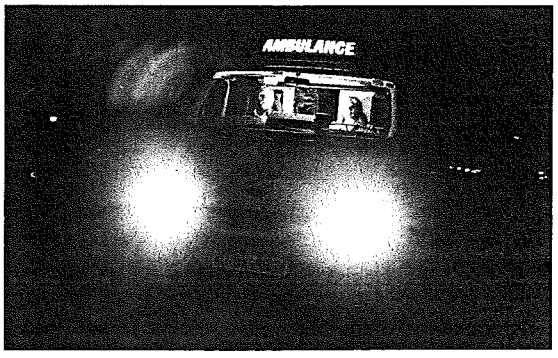


Figura 26.2 Os faróis de um automóvel estão conectados em paralelo. Portanto, cada farol é submetido à mesma diferença de potencial fornecida pelo sistema elétrico do carro, oferecendo máxima luminosidade. Outra vantagem é que, se um farol queima, o outro continua iluminando (veja o Exemplo 26.2).

A resistência equivalente de *qualquer número* de resistores conectados em série é igual à soma das resistências individuais.

A resistência equivalente é *maior* que qualquer uma das resistências individuais.

Vamos comparar o resultado anterior à Equação (24.5) para a associação de *capacitores* em série. As resistências de resistores em série se somam diretamente porque a voltagem através de cada um deles é diretamente proporcional à sua resistência e à corrente comum. No caso dos capacitores, o inverso da capacitância equivalente é dada pela soma dos inversos das capacitâncias individuais, porque a voltagem através de cada um deles é diretamente proporcional à carga comum, porém *inversamente* proporcional a cada capacitância individual.

Resistores em paralelo

Quando os resistores são ligados em *paralelo*, como na Figura 26.1b, a corrente em cada resistor não precisa ser a mesma. Contudo, a diferença de potencial nos terminais de cada resistor deve ser a mesma e igual a V_{ab} (Figura 26.2). (Lembre-se de que a diferença de potencial entre dois pontos não depende da trajetória que liga esses pontos.) Vamos designar por I_1, I_2 e I_3 as correntes que passam nos resistores. Então, usando $I = V/R$, obtemos

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

Geralmente, a corrente é diferente em cada resistor. Como a carga não pode se acumular nem ser extraída do ponto a, a corrente total I deve ser igual à soma das três correntes que passam nos resistores:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \text{ ou}$$

$$\frac{1}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Porém, de acordo com a definição de resistência equivalente R_{eq}, temos $I/V_{ab} = 1/R_{eq}$; logo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

É fácil generalizar o resultado anterior para um *número qualquer* de resistores em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad (26.2)$$

(resistores em paralelo)

Para *qualquer número* de resistores conectados em paralelo, o *inverso* da resistência equivalente é *igual à soma dos inversos* das resistências individuais.

A resistência equivalente é sempre *menor* que qualquer uma das resistências individuais.

Vamos comparar o resultado anterior à Equação (24.7) para a associação de *capacitores* em paralelo. Os inversos das resistências de resistores em paralelo se somam porque a corrente que passa em cada resistor é proporcional à voltagem comum através de cada um deles e *inversamente* proporcional à sua respectiva resistência. As capacitâncias de capacitores ligados em paralelo se somam diretamente porque a carga de cada capacitor é diretamente proporcional à voltagem comum e *diretamente* proporcional a cada capacitância individual.

Para o caso especial de *dois* resistores em paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{e}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (26.3)$$

(dois resistores em paralelo)

Como $V_{ab} = I_1 R_1 = I_2 R_2$, obtemos

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad (26.4)$$

(dois resistores em paralelo)

A partir disso se conclui que as correntes transportadas por dois resistores em paralelo são *inversamente proporcionais* às suas respectivas resistências. A corrente maior flui no caminho que oferece menor resistência.

Estratégia para a solução de problemas 26.1

RESISTORES EM SÉRIE E EM PARALELO

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: muitas redes de resistores são compostas por resistores em série, em paralelo ou por uma combinação de ambos. O principal conceito é que esse tipo de rede pode ser substituído por um único resistor equivalente.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho da rede de resistores.
2. Determine se os resistores estão ligados em série ou em paralelo. Observe que, de um modo geral, podemos considerar circuitos semelhantes aos indicados nas figuras 26.1c e 26.1d como combinações de arranjos de resistores em série e em paralelo.
3. Determine quais são as incógnitas. Elas podem abranger a resistência equivalente da rede, a diferença de potencial de cada resistor ou a corrente que passa por cada resistor.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Use a Equação (26.1) ou (26.2) para calcular a resistência equivalente para uma combinação em série ou em paralelo, respectivamente.
2. Se a rede for mais complexa, tente reduzi-la a combinações em série ou em paralelo. Por exemplo, na Figura 26.1c, inicialmente substituímos pela resistência equivalente os resistores R_2 e R_3, que estão em paralelo; a combinação resultante está em série

com o resistor R_1. Na Figura 26.1d, os resistores R_2 e R_3 que estão em série formam uma combinação em paralelo com R_1.

3. Ao calcular diferenças de potencial, é útil lembrar que, quando resistores são ligados em série, a diferença de potencial total através da combinação é igual à soma de cada diferença de potencial individual. Quando eles são ligados em paralelo, a diferença de potencial é a mesma em cada resistor e igual à diferença de potencial aplicada na combinação em paralelo.
4. Também é útil lembrar uma formulação análoga para as correntes. Quando resistores são ligados em série, a corrente é a mesma através de todos os resistores e igual à corrente que flui na combinação em série. Quando resistores são ligados em paralelo, a corrente total que flui na combinação é dada pela soma das correntes que passam através dos resistores individuais.

AVALIAR *sua resposta*: verifique se os resultados obtidos são consistentes. Quando os resistores estão conectados em série, a resistência equivalente deve ser maior do que aquela de qualquer resistor individual; quando estão conectados em paralelo, a resistência equivalente deve ser menor do que aquela de qualquer resistor individual.

Exemplo 26.1

RESISTÊNCIA EQUIVALENTE Calcule a resistência equivalente do circuito indicado na Figura 26.3a e encontre a corrente que passa em cada resistor. A fonte de fem possui resistência interna desprezível.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta rede composta por três resistores é uma *combinação* de resistências ligadas em série e em paralelo, como na Figura 26.1c. Os resistores de 6 Ω e 3 Ω estão ligados em paralelo, e a sua combinação está em série com o resistor de 4 Ω.

PREPARAR: inicialmente, determinamos a resistência equivalente R_{eq} desta rede como um todo. Obtido esse valor, determinamos a corrente na fem, que é a mesma que a corrente no resistor de 4 Ω. Essa mesma corrente é dividida entre os resistores de 6 Ω e 3 Ω; determinamos quanto vai para cada resistor usando o princípio de que a diferença de potencial deve ser a mesma através desses dois resistores (porque estão conectados em paralelo).

EXECUTAR: as figuras 26.3b e 26.3c mostram etapas sucessivas para a redução do circuito até a obtenção de uma única resistência equivalente. De acordo com a Equação (26.2), os resistores de 6 Ω e 3 Ω que estão em paralelo na Figura 26.3a são equivalentes a um único resistor de 2 Ω, na Figura 26.3b:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega} = \frac{1}{2\,\Omega}$$

(Você obteria o mesmo resultado se usasse a Equação (26.3).) De acordo com a Equação (26.1), a combinação em série do resistor de 2 Ω com o resistor de 4 Ω é equivalente a um único resistor de 6 Ω, na Figura 26.3c.

Para encontrarmos a corrente em cada resistor do circuito original, invertemos as etapas usadas no cálculo da resistência equivalente. No circuito indicado na Figura 26.3d (idêntico ao da Figura 26.3c), a corrente é dada por $I = V_{ab}/R = (18\text{ V}) / (6\,\Omega) = 3$ A. Logo, a corrente que passa no resistor de 2 Ω e no resistor de 4 Ω na Figura 26.3e (idêntica à Figura 26.3b) também é igual a 3 A. A diferença de potencial V_{cb} através do resistor de 2 Ω é, portanto, $V_{cb} = IR = (3\text{ A})\,(2\,\Omega) = 6$V. Essa diferença de potencial também deve ser igual a 6 V, na Figura 26.3f (idêntica à Figura 26.3a). Usando $I = V_{cb}/R$, as correntes nos resistores de 6 Ω e 3 Ω, na Figura 26.3f, são, respectivamente, (6 V)/(6 Ω) = 1 A e (6 V)/(3 Ω) = 2 A.

AVALIAR: note que, para os dois resistores em paralelo entre os pontos c e b na Figura 26.3f, a corrente que passa no resistor de 3 Ω é igual ao dobro da corrente que passa no resistor de 6 Ω; a corrente maior flui pelo caminho que oferece menor resistência, de acordo com a Equação (26.4). Note também que a corrente total que flui através desses dois resistores é igual a 3 A, a mesma corrente que flui através do resistor de 4 Ω entre os pontos a e c.

Exemplo 26.2

LIGAÇÃO EM SÉRIE *VERSUS* LIGAÇÃO EM PARALELO Duas lâmpadas idênticas devem ser conectadas a uma fonte com fem $\mathcal{E}$ = 8 V e resistência interna desprezível. Cada lâmpada possui

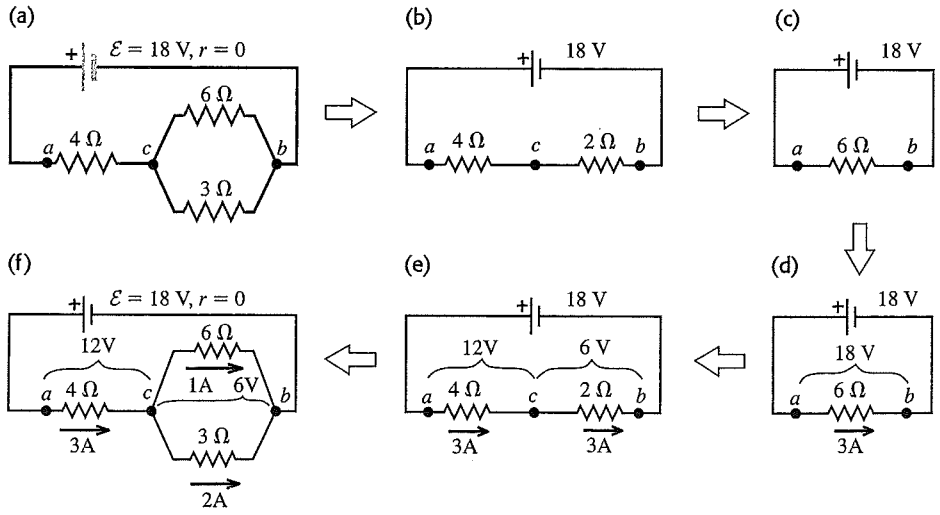


Figura 26.3 Etapas para reduzir o circuito até a obtenção de uma única resistência equivalente e também para determinar a corrente que passa em cada resistor.

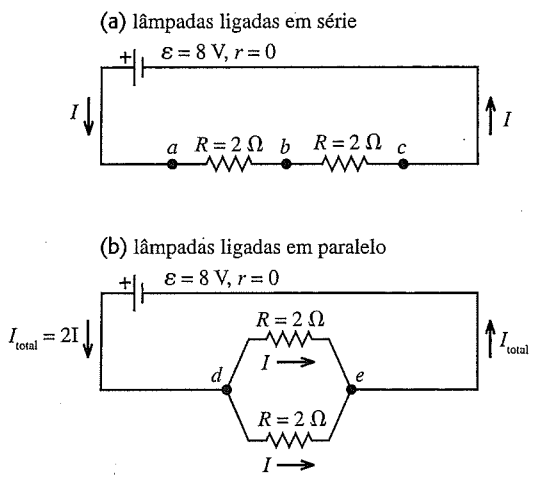


Figura 26.4 Nossos esquemas para esse problema.

resistência $R = 2\ \Omega$. Calcule a corrente que passa em cada lâmpada, a diferença de potencial através de cada lâmpada e a potência fornecida a cada lâmpada e ao circuito todo, supondo que as lâmpadas sejam ligadas (a) em série e (b) em paralelo. (c) Suponha que uma das lâmpadas se queime, ou seja, seu filamento fica interrompido e a corrente não pode mais fluir por ele. O que ocorre com a outra lâmpada, no caso da ligação em série? E no caso da ligação em paralelo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as lâmpadas são meramente resistores em simples ligações em série e conexões em paralelo.

PREPARAR: as figuras 26.4a e 26.4b mostram as esquematizações dos circuitos em série e em paralelo, respectivamente. Quando determinamos a corrente que passa por cada lâmpada, podemos determinar a potência fornecida a cada lâmpada usando a Equação (25.18), $P = I^2R = V^2/R$.

EXECUTAR: (a) De acordo com a Equação (26.1), a resistência equivalente entre os pontos a e c, na Figura 26.4a, é dada pela soma das suas resistências individuais, ou seja,

$$R_{eq} = 2R = 2(2\ \Omega) = 4\ \Omega$$

A corrente é a mesma em qualquer uma das lâmpadas em série:

$$I = \frac{V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{8\ \text{V}}{4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Visto que as lâmpadas possuem a mesma resistência, a diferença de potencial é a mesma através de cada lâmpada:

$$V_{ab} = V_{bc} = IR = (2\ \text{A})(2\ \Omega) = 4\ \text{V}$$

Esse valor corresponde à metade da voltagem de 8 V nos terminais da fonte. Podemos calcular a potência fornecida para cada lâmpada usando qualquer uma das duas fórmulas indicadas na Equação (25.18):

$$P = I^2R = (2\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 8\ \text{W} \quad \text{ou}$$

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{V_{bc}^2}{R} = \frac{(4\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 8\ \text{W}$$

A potência total fornecida para as duas lâmpadas é dada por $P_{total} = 2\ P = 16$ W. Alternativamente, podemos calcular a potência total usando a resistência equivalente $R_{eq} = 4\ \Omega$, através da qual passa a corrente $I = 2$ A e através da qual a diferença de potencial é $V_{ac} = 8$ V:

$$P_{total} = I^2R_{eq} = (2\ \text{A})^2(4\ \Omega) = 16\ \text{W} \quad \text{ou}$$

$$P_{total} = \frac{V_{ac}^2}{R_{eq}} = \frac{(8\ \text{V})^2}{4\ \Omega} = 16\ \text{W}$$

(b) Quando as lâmpadas são ligadas em paralelo, como na Figura 26.4b, a diferença de potencial V_{de} através de cada lâmpada é a mesma e igual a 8 V, a voltagem nos terminais da fonte. Portanto, a corrente que passa em cada lâmpada é

$$I = \frac{V_{de}}{R} = \frac{8\ \text{V}}{2\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

e a potência fornecida para cada lâmpada é

$$P = I^2R = (4\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 32\ \text{W} \quad \text{ou}$$

$$P = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 32\ \text{W}$$

Tanto a diferença de potencial nos terminais de cada lâmpada quanto a corrente através de cada lâmpada são duas vezes maiores do que no caso da associação em série das lâmpadas. Portanto, a potência fornecida para cada lâmpada é *quatro* vezes maior, e a luminosidade de cada lâmpada será maior do que no caso da associação em série das lâmpadas. Para obter a luminosidade máxima de uma lâmpada, a ligação em paralelo é melhor que a ligação em série.

A potência total fornecida para as duas lâmpadas é dada por $P_{total} = 2P = 64$ W, quatro vezes maior que no caso da ligação em série. Esse aumento de potência não é obtido 'de graça'; a energia é extraída da fonte com uma taxa quatro vezes maior. Quando a fonte for uma bateria, ela se descarregará quatro vezes mais rapidamente na ligação em paralelo que na ligação em série.

Podemos também calcular a potência total usando a resistência equivalente R_{eq}, fornecida pela Equação (26.2):

$$\frac{1}{R_{eq}} = 2\left(\frac{1}{2\ \Omega}\right) = 1\ \Omega^{-1} \quad \text{ou} \quad R_{eq} = 1\ \Omega$$

A corrente total que flui no resistor equivalente é $I_{total} = 2I = 2(4\ \text{A}) = 8$ A, e a diferença de potencial através do resistor equivalente é igual a 8 V. Portanto, a potência total é

$$P_{total} = I^2R_{eq} = (8\ \text{A})^2(1\ \Omega) = 64\ \text{W} \quad \text{ou}$$

$$P_{total} = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{1\ \Omega} = 64\ \text{W}$$

A diferença de potencial através do resistor equivalente é a mesma, tanto na ligação em paralelo quanto na ligação em série; porém, como no caso da ligação em paralelo a resistência equivalente R_{eq} é menor, concluímos que $P_{total} = V^2/R_{eq}$ é maior.

(c) No caso da ligação em série, a mesma corrente passa pelas duas lâmpadas. Se uma delas queimar, não haverá nenhuma corrente no circuito e nenhuma das lâmpadas iluminará.

No caso da ligação em paralelo, a diferença de potencial através de qualquer uma das lâmpadas permanece igual a 8 V, mesmo que uma delas queime. Logo, a corrente fornecida para a lâmpada em funcionamento permanece igual a 4 A, e a potência fornecida para essa lâmpada permanece igual a 32 W, a mesma que antes de a outra lâmpada queimar. Esse é outro dos méritos de uma combinação em paralelo das lâmpadas: se uma falhar, a outra não será

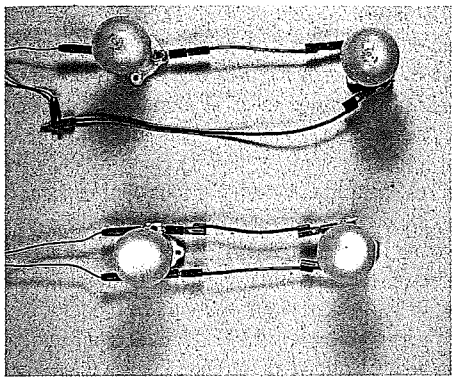


Figura 26.5 Quando ligadas à mesma fonte, duas lâmpadas conectadas em série (no alto da figura) consomem menos potência e brilham com menos intensidade do que duas lâmpadas conectadas em paralelo (na parte de baixo da figura).

afetada. Esse princípio é utilizado nos sistemas de cabeamento elétrico doméstico, que discutiremos na Seção 26.5.

AVALIAR: nosso cálculo da resistência equivalente não é muito preciso; uma lâmpada real *não* é um resistor ôhmico, e a resistência da lâmpada $R = V/I$ *não* é uma constante independente da diferença de potencial V nos terminais da lâmpada. (A resistência do filamento cresce quando sua temperatura aumenta e, portanto, quando V aumenta.) Contudo, ainda continua verdadeira a conclusão de que lâmpadas ligadas em série a uma fonte brilham com intensidade menor do que no caso da ligação em paralelo à mesma fonte (veja a Figura 26.5).

Teste sua compreensão da Seção 26.1 Suponha que as três resistências indicadas na Figura 26.1 possuem a mesma resistência, portanto $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Classifique as quatro combinações mostradas nos itens (a) a (d) da Figura 26.1, por ordem de resistência equivalente, da mais alta à mais baixa. ∎

26.2 Leis de Kirchhoff

Muitas redes envolvendo resistores não podem ser reduzidas a combinações simples de resistores em série e em paralelo. A Figura 26.6a mostra uma fonte de tensão cc com fem $\mathcal{E}_1$ carregando uma bateria com fem menor $\mathcal{E}_2$ e fornecendo corrente para uma lâmpada com resistência R. A Figura 26.6b mostra um circuito 'ponte', usado em diversos instrumentos de medidas e sistemas de controle. (Uma aplicação importante de um circuito 'ponte' é ilustrada no Problema 26.79.) Não precisamos usar nenhum princípio novo para encontrar as correntes nesses circuitos, contudo, existem algumas técnicas que nos ajudam a resolver tais problemas de modo sistemático. Descreveremos as técnicas desenvolvidas pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

Inicialmente, vamos definir dois termos que usaremos freqüentemente. Uma junção ou um **nó** é um ponto do circuito onde ocorre a união de dois ou mais condutores. Um nó também é chamado de *nodo* ou *ponto de ramificação*. Denomina-se **malha** qualquer caminho condutor fechado. O circuito indicado na Figura 26.6a possui dois nós, nos pontos a e b. Na Figura 26.6b, os nós são indicados pelos pontos a, b, c e d, porém os pontos e e f não são nós. Exemplos de malhas possíveis na Figura 26.6b: *acdba*, *acdefa*, *bdefa* e *abcdefa*.

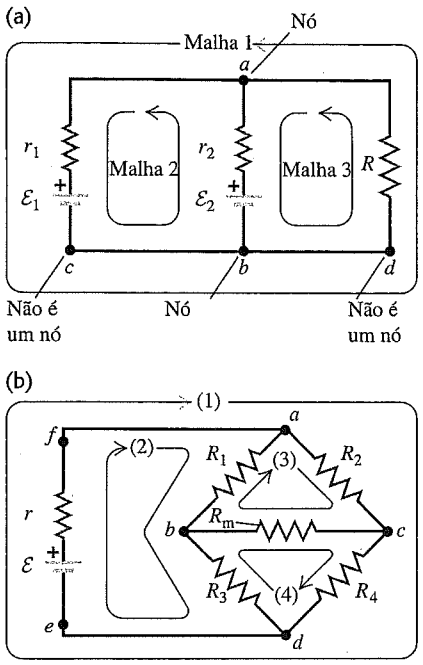


Figura 26.6 Dois exemplos de circuitos que não podem ser reduzidos a combinações simples envolvendo apenas resistores em série e em paralelo.

As leis de Kirchhoff são duas regras enunciadas do seguinte modo:

Lei dos nós de Kirchhoff: *a soma algébrica de todas as correntes que entram ou saem de um nó é igual a zero, ou seja,*

$$\sum I = 0 \qquad (26.5)$$

(lei dos nós, válida para qualquer nó)

Lei das malhas de Kirchhoff: *a soma algébrica de todas as diferenças de potencial através de uma malha*, incluindo os elementos resistivos e a fem de todas as fontes, *é necessariamente igual a zero.* Ou seja,

$$\sum V = 0 \qquad (26.6)$$

(lei das malhas, válida para qualquer malha)

A lei dos nós é baseada na lei da *conservação da carga elétrica*. Um nó não pode acumular cargas, de modo que a carga total que entra em um nó por unidade de tempo deve ser igual à carga total que sai do nó por unidade de tempo (Figura 26.7a). A carga por unidade de tempo é a corrente, de modo que, se consideramos positivas as cargas que entram e negativas as que saem do nó, a soma algébrica de todas as correntes que entram no nó, ou saem dele, deve ser igual a zero. Isso é semelhante ao escoamento da água em uma junção T que liga tubos de água (Figura 26.7b); se chega à junção 1 litro por minuto, não é possível saírem três litros por minuto pelos outros dois tubos. Devemos confessar que usamos a lei dos nós (sem explicitar isso), quando derivamos a Equação (26.2) para resistores em paralelo na Seção 26.1.

A lei das malhas é baseada na natureza *conservativa* das forças eletrostáticas. Suponha que você percorra uma dada malha, medindo sucessivamente todas as diferenças de potencial através dos elementos do circuito. Ao retornar ao ponto de partida, você deve verificar que a *soma algébrica* de todas as diferenças de potencial é igual a zero; caso contrário, você não poderia associar um potencial definido para o referido ponto.

Convenções de sinais para a lei das malhas

Ao aplicar a lei das malhas, precisamos de algumas convenções de sinais. Na seção Estratégia para a Solução de Problemas 26.2, descreveremos com detalhes como usá-las, porém faremos agora um resumo dessas convenções. Sempre supomos um sentido para a corrente elétrica e marcamos o sentido escolhido no diagrama do circuito. A seguir, partindo de qualquer ponto do circuito, percorremos o circuito e adicionamos os termos IR e cada fem, à medida que passamos através dos elementos. Quando atravessamos uma fonte de tensão no sentido do − para +, a fem deve ser considerada *positiva*. Quando atravessamos uma fonte de tensão no sentido do + para −, a fem deve ser considerada *negativa* (Figura 26.8a). Quando atravessamos um resistor no *mesmo* sentido que escolhemos para a corrente, o termo IR é *negativo*, porque a corrente está fluindo no sentido dos potenciais decrescentes. Quando atravessamos um resistor no sentido *contrário* ao sentido da corrente, o termo IR é *positivo*, porque isso corresponde a um aumento de potencial (Figura 26.8b).

As duas leis de Kirchhoff são muito usadas para resolver um grande número de problemas de circuitos elétricos. Geralmente, alguns valores da fem das fontes, das correntes e das resistências são conhecidos; outros, desconhecidos. Usando as leis de Kirchhoff, devemos sempre obter um número de equações igual ao número de incógnitas, a fim de resolver simultaneamente o sistema de equações. Em geral, a parte mais trabalhosa da solução não é o entendimento dos princípios básicos envolvidos, porém o uso correto dos sinais algébricos!

Estratégia para a solução de problemas 26.2

LEIS DE KIRCHHOFF

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: as leis de Kirchhoff são ferramentas importantes para a análise de qualquer circuito mais complexo que uma malha única.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho *grande* para o diagrama do circuito, de modo que haja espaço suficiente para anotar todas as letras e dísticos necessários. Identifique todas as grandezas, conhecidas e desconhecidas, escolhendo sentidos para toda corrente e toda fem desconhecida. Na verdade, não há como saber previamente o sentido real para toda corrente e toda fem desconhecida, mas isso não importa. Caso o sentido real de uma dada grandeza seja contrário ao sentido escolhido, você encontrará um sinal negativo na resposta da referida grandeza. Quando você usa corretamente as leis de Kirchhoff, encontra os módulos e os sentidos corretos para toda corrente e toda fem desconhecida.
2. Quando você identifica as correntes em um diagrama, em geral é mais conveniente aplicar de início a lei dos nós para expressar as correntes em função do menor número possível de grandezas. Por exemplo, na Figura 26.9a, mostramos os símbolos usados para a identificação correta das grandezas pertinentes; na Figura 26.9b, mostramos o mesmo circuito depois de aplicar a lei dos nós ao ponto a, a fim de eliminar I_3.
3. Determine quais grandezas são as incógnitas.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Para aplicar a lei das malhas, escolha qualquer malha do circuito e indique um sentido (horário ou anti-horário) para percorrer a malha. O sentido do percurso não precisa ser o mesmo do sentido escolhido para a corrente.
2. Percorra a malha no sentido que você escolheu, somando algebricamente as diferenças de potencial à medida que atravessa cada elemento. Lembre-se de que uma diferença de potencial positiva corresponde a um aumento de potencial e que uma diferença de potencial negativa corresponde a uma diminuição. Uma fem é positiva quando você a atravessa do terminal − para o +, e negativa quando você a atravessa do + para o −. O termo IR é negativo quando você atravessa um resistor no mesmo sentido que você escolheu para a corrente, e positivo quando o percorre no sentido contrário ao da corrente. A Figura 26.8 resume essas convenções de sinais.
3. Iguale a zero a soma algébrica obtida na etapa 2.
4. Caso seja necessário, escolha outra malha para obter uma relação diferente entre as incógnitas e continue esse procedi-

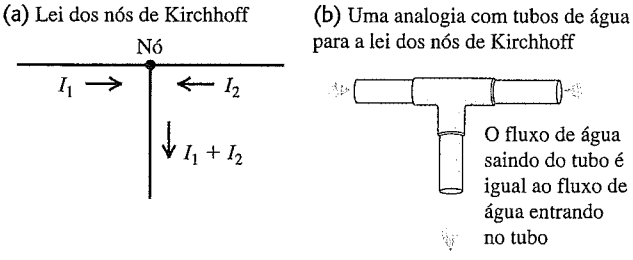


Figura 26.7 (a) A lei dos nós de Kirchhoff diz que há muito mais fluxo de corrente em um nó que fora dele. (b) Uma analogia com tubos de água.

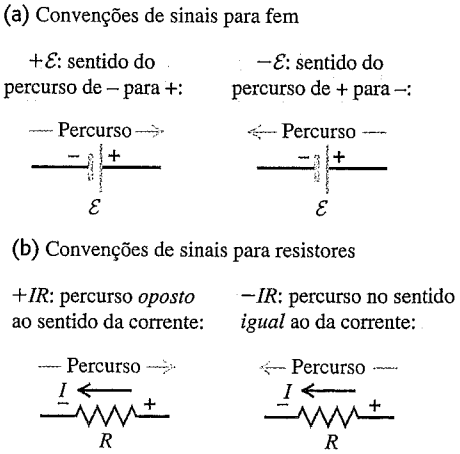
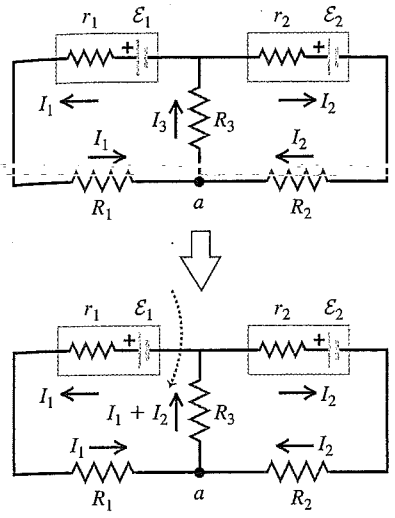


Figura 26.8 Use estas convenções de sinais quando aplicar a lei da malha de Kirchhoff. Em cada parte da figura, 'Percurso' é o sentido que imaginamos percorrer em torno da malha, que não é necessariamente o sentido da corrente.



(a) Três correntes desconhecidas: I_1, I_2, I_3

(b) A aplicação da lei dos nós ao ponto a elimina I_3

Figura 26.9 A aplicação da lei dos nós ao ponto a reduz o número de correntes incógnitas de três para dois.

mento até chegar a um número de equações igual ao número de incógnitas; ou até cada elemento do circuito ter sido incluído em pelo menos uma das malhas escolhidas.

5. Finalmente, resolva o sistema de equações para determinar as incógnitas. Essa etapa é matemática e não física, porém ela pode ser muito complexa. Tome cuidado com as manipulações algébricas: um erro de sinal pode ser fatal e invalidar toda a solução.
6. Você pode usar a mesma convenção de sinais para determinar uma diferença de potencial V_{ab} de um ponto a em relação a qualquer outro ponto b. Comece no ponto b e, com a mesma convenção de sinais da etapa 2, some todas as diferenças de potencial encontradas ao percorrer o circuito de b até a. A soma algébrica dessas diferenças de potencial fornecerá $V_{ab} = V_a - V_b$.

AVALIAR *sua resposta*: confira todas as etapas das operações algébricas. Uma estratégia útil é considerar uma malha diferente daquelas usadas para solucionar os problemas; se a soma das quedas de potencial em torno dessa malha for diferente de zero, há um erro em algum ponto nos cálculos. Como sempre, verifique se as respostas fazem sentido.

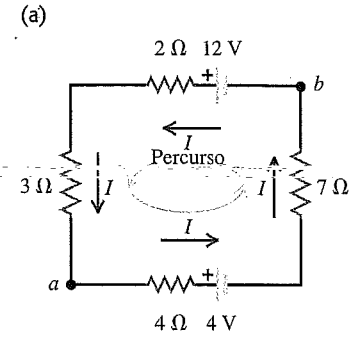
Exemplo 26.3

UM CIRCUITO COM UMA ÚNICA MALHA O circuito indicado na Figura 26.10a contém dois resistores e duas baterias, cada uma delas com uma fem e uma resistência interna. Calcule (a) a corrente no circuito, (b) a diferença de potencial V_{ab} e (c) a potência de cada fem.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se de um circuito simples com uma única malha e que não possui nenhum nó, portanto não precisamos da lei dos nós de Kirchhoff.

PREPARAR: para aplicarmos a lei das malhas a esse circuito com uma única malha, escolhemos inicialmente um sentido para a corrente. Vamos eleger o sentido anti-horário, conforme indicado na Figura 26.10a.



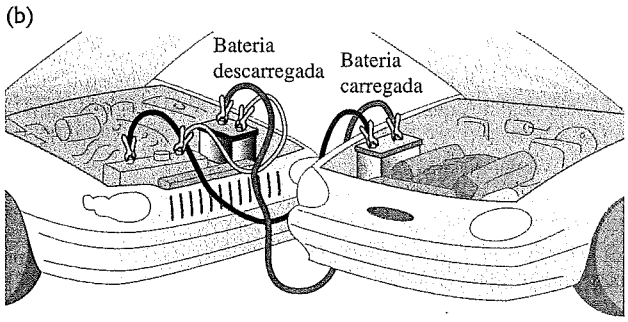


Figura 26.10 (a) Neste exemplo percorremos a malha do circuito no mesmo sentido que escolhemos para a corrente, de modo que os termos IR são negativos. O potencial diminui quando você atravessa a fem inferior do + para o −, porém aumenta quando você atravessa a fem na parte superior do − para o +. (b) Um exemplo real de um circuito do tipo aqui analisado.

EXECUTAR: (a) Partindo do ponto a, percorra a malha no sentido anti-horário, faça a soma algébrica de todas as diferenças de potencial ao longo do percurso e iguale o resultado a zero, como na Equação (26.6). Você obterá a seguinte equação:

$$-I(4\,\Omega) - 4\,\text{V} - I(7\,\Omega) + 12\,\text{V} - I(2\,\Omega) - I(3\,\Omega) = 0$$

Agrupando os termos que contêm I e explicitando I, encontramos

$$8\,\text{V} = I(16\,\Omega) \text{ e } I = 0{,}5\,\text{A}$$

O resultado obtido para I é positivo, o que mostra que o sentido escolhido para a corrente é correto. Como exercício, escolha o sentido contrário para I e resolva novamente a equação; você deverá encontrar $I = -0{,}5$ A, o que indica que o sentido real da corrente é contrário ao escolhido.

(b) Para calcularmos V_{ab}, a diferença de potencial de a em relação a b, partimos do ponto b e fazemos a soma algébrica de todas as diferenças de potencial até chegar ao ponto a. Existem dois percursos para ir de b até a; usando o percurso inferior, obtemos

$$V_{ab} = (0{,}5\,\text{A})(7\,\Omega) + 4\,\text{V} + (0{,}5\,\text{A})(4\,\Omega) = 9{,}5\,\text{V}$$

O ponto a possui um potencial 9,5 V mais elevado do que o potencial do ponto b. Todos os termos dessa soma, incluindo os termos IR, são positivos porque cada um deles representa um *aumento* quando vamos de b até a. Considerando o percurso superior, encontramos

$$V_{ab} = 12\,\text{V} - (0{,}5\,\text{A})(2\,\Omega) - (0{,}5\,\text{A})(3\,\Omega) = 9{,}5\,\text{V}$$

Na relação anterior, os termos IR são negativos porque o sentido do percurso é o mesmo da corrente, o que provoca uma diminuição de potencial ao atravessarmos cada resistor. O resultado obtido é o mesmo nos dois percursos, como era esperado, uma vez que a variação total da diferença de potencial ao longo do

circuito completo deve ser igual a zero. Em cada caso, os aumentos de potencial devem ser positivos e as quedas, negativas.

(c) A potência fornecida pela fem da bateria de 12 V é

$$P = \mathcal{E}I = (12\text{ V})\,(0{,}5\text{ A}) = 6\text{ W}$$

e a potência fornecida pela fem da bateria de 4 V é

$$P = \mathcal{E}I = (-4\text{ V})\,(0{,}5\text{ A}) = -2\text{ W}$$

O sinal negativo de $\mathcal{E}I$ da bateria de 4 V surge porque a corrente percorre a bateria do terminal com potencial mais elevado para o terminal com potencial mais baixo. O valor negativo de P indica que a bateria consome potência porque está *armazenando* energia na bateria e está sendo *recarregada* pela bateria de 12 V.

AVALIAR: aplicando a fórmula $P = I^2R$ a cada um dos quatro resistores da Figura 26.10a, você deve ser capaz de mostrar que a potência total nos quatro resistores é igual a 4 W. Dos 6 W fornecidos pela bateria de 12 V, 2 W são armazenados na bateria de 4 V e 4 W são dissipados nos resistores.

O circuito indicado na Figura 26.10a é semelhante ao usado no caso real quando uma bateria de automóvel de 12 V carrega a bateria de outro automóvel que estava descarregada (Figura 26.10b). Os resistores de 3 Ω e 7 Ω na Figura 26.10a representam os cabos condutores e os conectores usados para ligar as duas baterias (embora os valores das resistências no exemplo real não sejam exatamente iguais aos desse exemplo numérico).

Exemplo 26.4

CARREGANDO UMA BATERIA O circuito indicado na Figura 26.11 contém uma fonte de tensão de 12 V, com resistência interna desconhecida r, conectada a uma bateria descarregada, com fem $\mathcal{E}$ e resistência interna igual a 1 Ω, e com uma lâmpada de resistência de 3 Ω que transporta uma corrente de 2 A. A corrente que passa na bateria descarregada é igual a 1 A no sentido indicado. Calcule a resistência interna desconhecida r, a corrente I e a fem $\mathcal{E}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este circuito possui mais de uma malha, portanto devemos aplicar tanto a lei dos nós quanto a lei das malhas.

PREPARAR: assumimos o sentido da corrente que passa pela fonte de energia de 12 V, conforme indicado. Há três incógnitas, portanto necessitamos de três equações.

EXECUTAR: inicialmente, aplicamos a lei dos nós, Equação (26.5), ao ponto a. Encontramos

$$-I + 1\text{ A} + 2\text{ A} = 0 \quad \text{portanto} \quad I = 3\text{ A}$$

Para determinarmos r, aplicamos a lei das malhas, Equação (26.6), para a malha externa designada por (1); obtemos

$$12\text{ V} - (3\text{ A})r - (2\text{ A})(3\,\Omega) = 0 \quad \text{portanto} \quad r = 2\,\Omega$$

Os termos com as resistências r e 3 Ω são negativos porque o sentido do percurso através desses elementos é o mesmo sentido da corrente e, portanto, existe uma *queda* de potencial em cada um desses elementos. Caso resolvêssemos percorrer a malha externa (1) no sentido contrário, todos os termos teriam sinais opostos, e o resultado obtido para r seria o mesmo.

Para determinarmos $\mathcal{E}$, aplicamos a lei das malhas para a malha designada por (2):

$$-\mathcal{E} + (1\text{ A})(1\,\Omega) - (2\text{ A})(3\,\Omega) = 0 \quad \text{portanto} \quad \mathcal{E} = -5\text{ V}$$

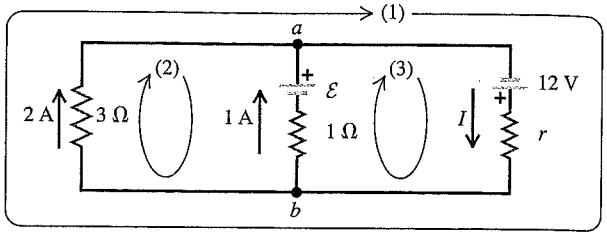


Figura 26.11 No circuito acima, uma fonte de tensão carrega uma bateria descarregada e acende uma lâmpada. Fizemos uma hipótese sobre a polaridade da fem $\mathcal{E}$ da bateria descarregada; essa hipótese está correta?

O termo do resistor de 1 Ω é positivo porque, ao atravessá-lo no sentido oposto ao da corrente, ocorre um *aumento* do potencial. O valor negativo de $\mathcal{E}$ mostra que a polaridade real dessa fem é oposta à indicada na Figura 26.11; o terminal positivo dessa fonte está, na realidade, do lado direito. Como indicado no Exemplo 26.3, a bateria está sendo recarregada.

AVALIAR: para conferir o resultado obtido, podemos usar a malha (3) e obter a equação

$$12\text{ V} - (3\text{ A})(2\,\Omega) - (1\text{ A})(1\,\Omega) + \mathcal{E} = 0$$

a partir da qual concluímos novamente que $\mathcal{E} = -5$ V.

Para uma verificação adicional da consistência do resultado, notamos que $V_{ba} = V_b - V_a$ é igual à voltagem através do resistor de 3 Ω, dada por (2 A) (3 Ω) = 6 V. Percorrendo o ramo da malha superior de a para b, encontramos a diferença de potencial +12 V – (3 A) (2 Ω) = + 6 V, e percorrendo o ramo central obtemos – (–5 V) + (1 A) (1 Ω) = + 6 V. As três maneiras de calcular V_{ba} forneceram os mesmos resultados. Verifique se você entendeu todos os sinais dos cálculos anteriores.

Exemplo 26.5

POTÊNCIA EM UM CIRCUITO PARA CARREGAR UMA BATERIA No circuito do Exemplo 26.4 (indicado na Figura 26.11), encontre a potência fornecida pela bateria de 12 V e a da bateria que está sendo carregada, calculando a potência dissipada em cada resistor.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos os resultados da Seção 25.5, segundo os quais a potência fornecida *por* uma fem para um circuito é $\mathcal{E}I$ e a potência fornecida *para* um resistor por um circuito é $V_{ab}I = I^2R$.

PREPARAR: conhecemos os valores de cada fem, cada corrente e cada resistência do Exemplo 26.4.

EXECUTAR: a potência fornecida pela fem da fonte é

$$P_{\text{fonte}} = \mathcal{E}_{\text{fonte}}\, I_{\text{fonte}} = (12\text{ V})(3\text{ A}) = 36\text{ W}$$

A potência dissipada na resistência interna r da fonte é dada por

$$P_{r\text{-fonte}} = (I_{\text{fonte}})^2\, r_{\text{fonte}} = (3\text{ A})^2(2\,\Omega) = 18\text{ W}$$

portanto, a fonte fornece uma potência líquida $P_{\text{liq}} = 36\text{ W} - 18\text{ W} = 18$ W. Alternativamente, pelo Exemplo 26.4, a voltagem nos terminais da bateria é dada por $V_{ba} = 6$ V; logo, a potência líquida fornecida pela fonte é

$$P_{\text{líquida}} = V_{ba} I_{\text{fonte}} = (6\text{ V})(3\text{ A}) = 18\text{ W}$$

A potência da fem $\mathcal{E}$ da bateria que está sendo carregada é dada por

$$P_{\text{fem}} = \mathcal{E}I_{\text{bateria}} = (-5\,\text{V})(1\,\text{A}) = -5\,\text{W}$$

A potência é negativa porque a corrente de 1 A circula através da bateria do terminal com potencial mais elevado para o terminal com potencial mais baixo. (Conforme dissemos no Exemplo 26.4, a polaridade suposta para essa bateria na Figura 26.11 estava errada.) À medida que a bateria se carrega, ela acumula energia. Uma potência adicional é dissipada em sua resistência interna; essa potência é dada por

$$P_{r\text{-bateria}} = I_{\text{bateria}}{}^2 r_{\text{bateria}} = (1\,\text{A})^2(1\,\Omega) = 1\,\text{W}$$

A potência total fornecida para essa bateria é, portanto, 1 W + |–5 W| = 6 W. Desse total, 5 W representam energia útil armazenada na bateria e o restante corresponde à energia dissipada em sua resistência interna.

A potência dissipada na lâmpada é dada por

$$P_{\text{lâmpada}} = I_{\text{lâmpada}}{}^2 R_{\text{lâmpada}} = (2\,\text{A})^2(3\,\Omega) = 12\,\text{W}$$

AVALIAR: a título de conferência, observe que toda a potência da fonte é contabilizada. Dos 18 W da potência total fornecida pela fonte, 5 W são gastos para carregar a bateria, 1 W é dissipado em sua resistência interna e 12 W são dissipados na lâmpada.

Exemplo 26.6

UM CIRCUITO COMPLETO A Figura 26.12 mostra um circuito 'ponte' como o descrito no início desta seção (veja a Figura 26.6b). Calcule a corrente que circula em cada resistor e a resistência equivalente do circuito com os cinco resistores.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esse circuito não pode ser representado como combinações de ligações em série e ligações em paralelo. Portanto, temos que usar as leis de Kirchhoff para obter os valores das incógnitas.

PREPARAR: Existem cinco correntes diferentes para serem determinadas, porém, aplicando-se a lei dos nós para os nós a e b, podemos representá-las usando três correntes desconhecidas, como indica na figura. A corrente que passa na bateria é igual a $I_1 + I_2$.

EXECUTAR: aplicamos a lei das malhas para as três malhas indicadas e obtemos as três equações seguintes:

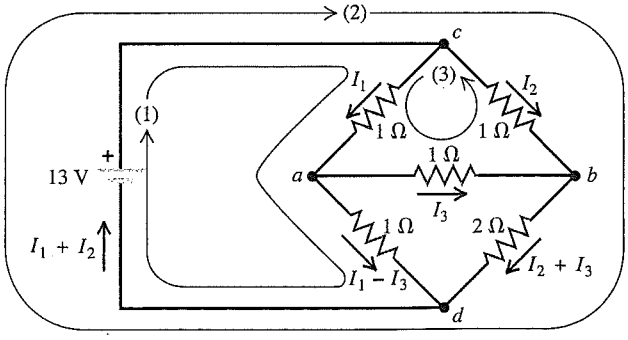


Figura 26.12 Um circuito com diversos resistores.

$$13\,\text{V} - I_1(1\,\Omega) - (I_1 - I_3)(1\,\Omega) = 0 \qquad (1)$$

$$-I_2(1\,\Omega) - (I_2 + I_3)(2\,\Omega) + 13\,\text{V} = 0 \qquad (2)$$

$$-I_1(1\,\Omega) - I_3(1\,\Omega) + I_2(1\,\Omega) = 0 \qquad (3)$$

Trata-se de um sistema com três equações envolvendo três correntes incógnitas. O sistema pode ser resolvido por diversos métodos. Um procedimento direto consiste em explicitar I_2 da terceira equação, obtendo-se $I_2 = I_1 + I_3$; a seguir eliminamos I_2 substituindo essa expressão nas equações (1) e (2). Depois dessa substituição encontramos as duas equações seguintes:

$$13\,\text{V} = I_1(2\,\Omega) - I_3(1\,\Omega) \qquad (1')$$

$$13\,\text{V} = I_1(3\,\Omega) + I_3(5\,\Omega) \qquad (2')$$

Agora podemos eliminar I_3, multiplicando a Equação (1') por 5 e somando membro a membro as duas equações. Obtemos

$$78\,\text{V} = I_1(13\,\Omega) \quad I_1 = 6\,\text{A}$$

Substituindo o resultado anterior na Equação (1') obtemos $I_3 = -1$ A, e finalmente, pela Equação (3), encontramos $I_2 = 5$ A. O valor negativo de I_3 mostra que seu sentido é contrário ao sentido que escolhemos.

A corrente total no circuito equivalente é igual a $I_1 + I_2 = 11$ A, e a queda de potencial através do resistor equivalente é dada pela fem da bateria, ou seja, 13 V. Portanto, a resistência equivalente do circuito é dada por

$$R_{\text{eq}} = \frac{13\,\text{V}}{11\,\text{A}} = 1{,}2\,\Omega$$

AVALIAR: você pode verificar os resultados $I_1 = 6$ A, $I_2 = 5$ A e $I_3 = -1$ A, substituindo esses valores nas três equações (1), (2) e (3). Qual é o resultado?

Exemplo 26.7

DIFERENÇA DE POTENCIAL EM UM CIRCUITO COMPLEXO No circuito do Exemplo 26.6 (Figura 26.12), calcule a diferença de potencial V_{ab}.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita é $V_{ab} = V_a - V_b$, que é o potencial no ponto a em relação ao ponto b.

PREPARAR: para determinarmos V_{ab}, inicialmente, partimos do ponto b e seguimos qualquer caminho até a, somando todas as diferenças de potencial ao longo do percurso. Podemos seguir qualquer trajetória de b para a; o valor de V_{ab} deve ser independente do caminho escolhido, o que fornece uma forma natural de conferir o resultado obtido.

EXECUTAR: o caminho mais simples é ao longo do resistor central de 1 Ω. No exemplo anterior, obtivemos $I_3 = -1$ A, o que mostra que a corrente real nesse ramo do circuito é da direita para a esquerda. Logo, quando percorremos o ramo de b para a, ocorre uma *queda* de potencial cujo módulo é $IR = (1\,\text{A})(1\,\Omega) = 1$ V, e $V_{ab} = -1$ V. Portanto, o potencial do ponto a é 1 V menor do que o potencial do ponto b.

AVALIAR: alternativamente, podemos seguir um percurso através dos dois resistores inferiores. As correntes que passam nesses resistores são dadas por

$$I_2 + I_3 = 5\,\text{A} + (-1\,\text{A}) = 4\,\text{A} \quad \text{e}$$
$$I_1 - I_3 = 6\,\text{A} - (-1\,\text{A}) = 7\,\text{A}$$

e, portanto,

$$V_{ab} = -(4\,\text{A})(2\,\Omega) + (7\,\text{A})(1\,\Omega) = -1\,\text{V}$$

Sugerimos que você tente outros percursos do ponto *b* até *a* para verificar se todos os percursos fornecem o mesmo resultado.

Teste sua compreensão da Seção 26.2 Subtraia a Equação (1) da Equação (2) no Exemplo 26.6. A qual malha na Figura 26.12 essa equação corresponde? Essa equação teria simplificado a solução do Exemplo 26.6? ▮

26.3 Instrumentos de medidas elétricas

Nos dois capítulos anteriores, tratamos de diferença de potencial, corrente e resistência, porém até o momento não dissemos nada a respeito da *medida* dessas grandezas. Muitos dispositivos comuns, incluindo instrumentos do painel do automóvel, carregadores de baterias e instrumentos elétricos baratos, medem uma diferença de potencial, uma corrente ou uma resistência mediante o uso do **galvanômetro de d'Arsonval** (Figura 26.13). Na discussão a seguir vamos chamá-lo simplesmente de *galvanômetro*. Uma bobina pivotada, feita com um fio fino, é colocada no campo magnético de um ímã permanente (Figura 26.14). A mola acoplada à bobina é semelhante à mola helicoidal ligada ao balancim de um relógio. Na posição de equilíbrio, quando não passa nenhuma corrente na bobina, o ponteiro está sobre o zero. Quando passa uma corrente na bobina, o campo magnético exerce um torque sobre a bobina proporcional à corrente que passa na bobina. (Discutiremos essa interação magnética com detalhes no Capítulo 27.) À medida que a bobina gira, a mola exerce um torque restaurador proporcional ao deslocamento angular.

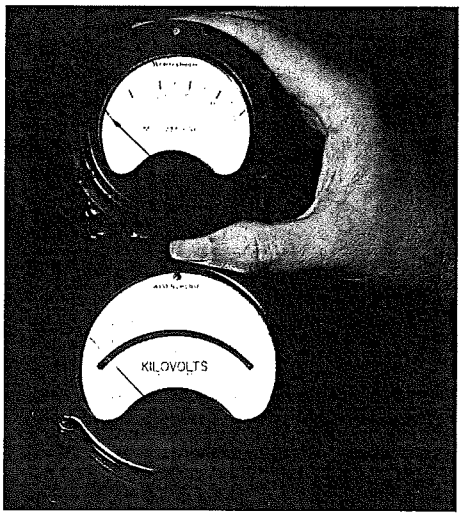


Figura 26.13 O amperímetro (no topo) e o voltímetro (embaixo) são galvanômetros de d'Arsonval. A diferença depende das respectivas conexões internas (veja a Figura 26.15).

Portanto, a deflexão angular da bobina e do ponteiro é diretamente proporcional à corrente que passa na bobina e o dispositivo pode ser calibrado para medir a corrente. A deflexão máxima, em geral da ordem de 90°, denomina-se *deflexão do fundo da escala* ou *deflexão completa da escala*. As características elétricas essenciais de um galvanômetro são a corrente I_{fe}, necessária para produzir a deflexão do fundo da escala (em geral da ordem de 10 μA a 10 mA), e a resistência R_b da bobina (normalmente da ordem de 10 Ω a 1000 Ω).

A deflexão do galvanômetro é diretamente proporcional à *corrente* que passa na bobina. Caso a resistência da bobina obedeça à lei de Ohm, a corrente é proporcional à *diferença de potencial* entre os terminais da bobina e a deflexão também é proporcional a essa diferença de potencial. Por exemplo, considere um galvanômetro com $R_b = 20{,}0\ \Omega$ e que sofre uma deflexão completa da escala quando a corrente é $I_{fe} = 1{,}0$ mA. A diferença de potencial correspondente para essa deflexão completa da escala é dada por

$$V = I_{fe}R_b = (1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{A})(20{,}0\,\Omega) = 0{,}0200\,\text{V}$$

Amperímetros

Um instrumento comum de medida de corrente elétrica é o **amperímetro** (ou miliamperímetro, microamperímetro etc., dependendo do intervalo de medida). *Um amperímetro sempre mede a corrente que passa através dele.* Um amperímetro *ideal*, discutido na Seção 25.4, deveria ter resistência *zero*, de modo que, quando conectado ao ramo de um circuito, não afetaria a corrente que passa nesse ramo. Os amperímetros reais possuem uma resistência finita, contudo é sempre desejável que a resistência do amperímetro seja a menor possível.

É sempre possível adaptar um galvanômetro para medir uma corrente maior do que aquela que produz uma deflexão completa da escala, conectando-se um resistor em paralelo com a bobina (Figura 26.15a), de modo que uma parte da corrente é desviada da bobina para o resistor. O resistor ligado em paralelo denomina-se *resistor do shunt*, ou simplesmente **shunt**, e é designado pelo símbolo R_{sh}.

Suponha que você queira fazer um galvanômetro com resistência R_b e corrente I_{fe} se transformar em um amperímetro com corrente I_a. Para determinar a resistência necessária do shunt R_{sh}, note que, para a nova deflexão completa da escala, a corrente que deve passar na combinação em paralelo é I_a, a corrente que passa na bobina do galvanômetro deve ser I_{fe} e a corrente que passa no shunt deve ser $I_a - I_{fe}$. A diferença de potencial V_{ab} é a mesma para os dois caminhos; logo,

$$I_{fe}R_b = (I_a - I_{fe})R_{sh} \qquad (26.7)$$
(para um amperímetro)

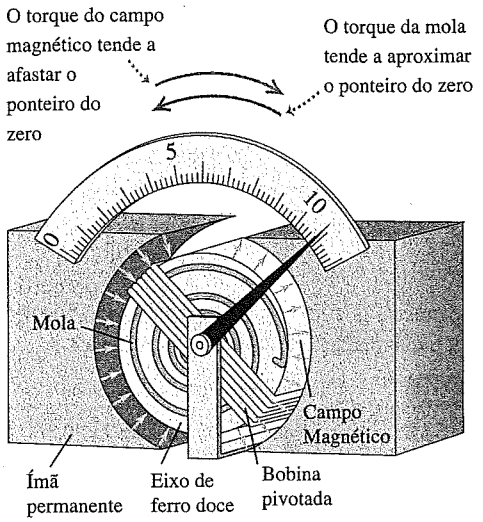


Figura 26.14 Um galvanômetro de d'Arsonval, mostrando a bobina pivotada acoplada a um ponteiro, um ímã permanente, que fornece um campo magnético com módulo constante, e a mola, que proporciona o torque restaurador, o qual se opõe ao torque do campo magnético.

Exemplo 26.8

PROJETO DE UM AMPERÍMETRO Qual é a resistência do shunt que devemos usar para transformar o galvanômetro de 1,0 mA e 20,0 Ω descrito anteriormente em um amperímetro com um intervalo de medida de 0 A até 50,0 mA?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o instrumento está sendo usado como um amperímetro, suas conexões internas são como as indicadas na Figura 26.15a. A incógnita do problema é a resistência do shunt, R_{sh}.

PREPARAR: desejamos que o amperímetro seja capaz de medir uma corrente máxima $I_a = 50{,}0\ \text{mA} \times 10^{-3}\ \text{A}$. A resistência da bobina é $R_b = 20{,}0\ \Omega$, e o galvanômetro mostra a deflexão completa da escala quando a corrente que passa pela bobina é $I_{fe} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ A. Determinamos a resistência do shunt R_{sh} usando a Equação (26.7).

EXECUTAR: Explicitando R_{sh} da Equação (26.7), encontramos

$$R_{sh} = \frac{I_{fe}R_b}{I_a - I_{fe}} = \frac{(1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{A})(20{,}0\ \Omega)}{50{,}0 \times 10^{-3}\ \text{A} - 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{A}}$$
$$= 0{,}408\ \Omega$$

AVALIAR: é útil considerar a resistência equivalente R_{eq} do instrumento como um todo. Pela Equação (26.2),

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_{sh}} = \frac{1}{20{,}0\ \Omega} + \frac{1}{0{,}408\ \Omega}$$
$$R_{eq} = 0{,}400\ \Omega$$

A resistência equivalente é tão pequena em comparação à resistência do galvanômetro que ela é aproximadamente igual à resistência do shunt. Essa resistência do shunt fornece um instrumento com o intervalo de medida desejado de 0 A até 50,0 mA. Para a deflexão completa da escala, $I = I_a = 50{,}0$ mA, a corrente no galvanômetro é de 1,0 mA, a corrente no shunt é igual a 49,0 mA e $V_{ab} = 0{,}0200$ V. Quando a corrente I é *menor* do que 50,0 mA, a corrente na bobina e a deflexão são proporcionalmente menores, porém a resistência equivalente R_{eq} ainda é igual a 0,400 Ω.

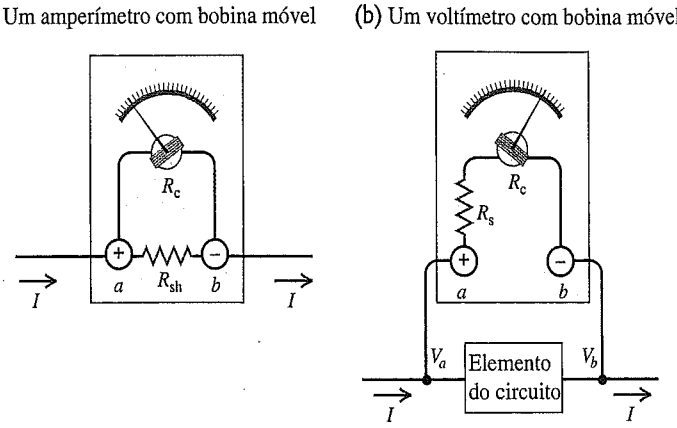


Figura 26.15 Usando o mesmo instrumento para medir (a) corrente e (b) voltagem.

Voltímetros

Esse mesmo galvanômetro básico pode ser usado para medir uma diferença de potencial ou *voltagem*. Um instrumento destinado a medir voltagens denomina-se **voltímetro** (ou milivoltímetro etc., dependendo do intervalo de medida). Um voltímetro sempre mede a diferença de potencial entre dois pontos, e seus terminais devem ser conectados a esses pontos. (O Exemplo 25.7, na Seção 25.4, mostrou o que pode ocorrer quando um voltímetro é conectado de modo incorreto.) Conforme discutimos na Seção 25.4, um voltímetro ideal deveria possuir uma resistência *infinita*, de modo que, quando conectado entre dois pontos de um circuito, ele não alteraria nenhuma corrente. Um voltímetro real sempre possui uma resistência finita, porém um voltímetro deve ter uma resistência tão elevada que, quando conectado entre dois pontos de um circuito, ele não deve alterar significativamente nenhuma corrente.

Para o galvanômetro descrito no Exemplo 26.8, a voltagem nos terminais da bobina do galvanômetro para a deflexão completa da escala era apenas $I_{fe}R_b = (1{,}0 \times 10^{-3}\text{A})\ (20{,}0\ \Omega) = 0{,}0200$ V. Podemos estender esse intervalo de medida conectando uma resistência R_s em *série* com a bobina (Figura 26.15b). Então, somente uma fração da diferença de potencial será aplicada sobre a própria bobina e a diferença de potencial restante será aplicada sobre R_s. Para um voltímetro cuja leitura para a deflexão completa da escala seja igual a V_V, precisamos usar um resistor em série com resistência R_s na Figura 26.15b, tal que

$$V_V = I_{fe}(R_b + R_s) \qquad (26.8)$$
(para um voltímetro)

Exemplo 26.9

PROJETO DE UM VOLTÍMETRO Como podemos transformar um galvanômetro com $I_{fe} = 1{,}0$ mA e $R_b = 20{,}0\ \Omega$ em um voltímetro com um intervalo máximo de medida igual a 10,0 V?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como este instrumento está sendo usado como um voltímetro, suas conexões internas são como as indicadas na Figura 26.15b. A incógnita do problema é a resistência em série R_s.

PREPARAR: a voltagem máxima permitida através do voltímetro é $V_V = 10{,}0$ V. Desejamos que isso ocorra, quando a corrente que passa pela bobina (de resistência $R_b = 20{,}0\ \Omega$) é $I_{fe} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ A. A resistência em série R_s é dada pela Equação (26.8).

EXECUTAR: explicitando R_s na Equação (26.8), obtemos

$$R_s = \frac{V_V}{I_{fe}} - R_b = \frac{10{,}0\ \text{V}}{0{,}00100\text{A}} - 20{,}0\ \Omega = 9980\ \Omega$$

AVALIAR: para a deflexão completa da escala, $V_{ab} = 10{,}0$ V, a voltagem através do galvanômetro é de 0,0200 V, a voltagem através do resistor R_S é igual a 9,98 V e a corrente que passa no voltímetro é de 0,00100 A. Logo, a maior parte da voltagem ocorre através do resistor em série. A resistência equivalente do instrumento é dada por $R_{eq} = 20{,}0\ \Omega + 9980\ \Omega = 10000\ \Omega$. Tal instrumento descreve um 'galvanômetro' de 1000 ohms por volt, fazendo referência à razão entre a resistência e a voltagem da deflexão completa da escala. Em operação normal, a corrente que passa no elemento do circuito cuja diferença de potencial está sendo medida (I na Figura 26.15b) é muito maior do que 0,00100 A, e a resistência entre os pontos a e b do circuito é muito menor do que 10000 Ω. Portanto, o voltímetro retira uma corrente muito pequena do circuito e perturba apenas ligeiramente o circuito que está sendo medido.

Combinação de amperímetros e voltímetros

Um amperímetro e um voltímetro podem ser usados juntos para medidas de *resistência* e de *potência*. A resistência R de um resistor é igual à diferença de potencial V_{ab} entre seus terminais dividida pela corrente I, ou seja, $R = V_{ab}/I$. A potência P fornecida a qualquer elemento do circuito é o produto da diferença de potencial entre seus terminais e a corrente que o atravessa: $P = V_{ab}I$. Em princípio, a maneira mais direta para se obter R ou P consiste em medir simultaneamente V_{ab} e I.

Porém, com voltímetros e amperímetros práticos, isso não é tão simples como parece. Na Figura 26.16a, o amperímetro A lê a corrente I no resistor R. Porém, o voltímetro V lê a *soma* da diferença de potencial V_{ab} entre os terminais do resistor e a diferença de potencial V_{bc} através do amperímetro. Substituindo o terminal do voltímetro de c para b, como indicado na Figura 26.16b, então o voltímetro mede corretamente a diferença de potencial V_{ab}, porém o amperímetro passa a ler a *soma* da corrente I que passa no resistor com a corrente I_V que passa no amperímetro. Em qualquer dos dois casos, seria necessário corrigir a leitura de um instrumento ou do outro, a menos que as correções sejam tão pequenas a ponto de serem desprezadas.

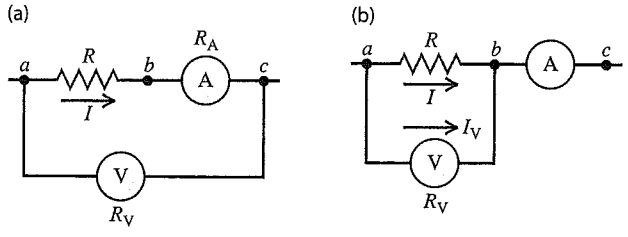


Figura 26.16 Uso simultâneo do amperímetro e do voltímetro para a medida da resistência.

Exemplo 26.10

MEDIDA DE RESISTÊNCIA I Suponha que você queira medir uma resistência desconhecida R usando o circuito indicado na Figura 26.16a. As resistências dos instrumentos são $R_V = 10000\ \Omega$ (para o voltímetro) e $R_A = 2{,}0\ \Omega$ (para o amperímetro). Sabendo que o vol-tímetro lê 12,0 V e o amperímetro, 0,100 A, qual é o valor de R e que potência é dissipada no resistor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o amperímetro lê a corrente $I = 0{,}100$ A através do resistor, e o voltímetro lê a diferença de potencial entre a e c. Caso o amperímetro fosse ideal (ou seja, $R_A = 0$), a diferença de potencial entre b e c seria igual a zero, a leitura do voltímetro V = 12,0 V seria igual à diferença de potencial V_{ab} através do resistor e a resistência seria simplesmente dada por $R = V/I = (12{,}0\ \text{V})/(0{,}100\ \text{A}) = 120\ \Omega$. O amperímetro, porém, *não* é ideal (sua resistência é $R_A = 2{,}0\ \Omega$), portanto a leitura do voltímetro V é, na verdade, a soma das diferenças de potencial V_{bc} (através do amperímetro) e V_{ab} (através do resistor).

PREPARAR: usamos a lei de Ohm para obter a voltagem V_{bc} através do amperímetro a partir da corrente e da resistência que são conhecidas. A seguir, explicitamos V_{ab} e a resistência R. Obtidos esses valores, seremos capazes de calcular a potência P no resistor.

EXECUTAR: pela lei de Ohm, obtemos $V_{bc} = IR_A = (0{,}100\ \text{A})(2{,}0\ \Omega) = 0{,}200$ V e $V_{ab} = IR$. A soma é $V = 12{,}0$ V, portanto a diferença de potencial no resistor é (12,0 V) − (0,200 V) = 11,8 V, e a resistência é

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{11{,}8\ \text{V}}{0{,}100\ \text{A}} = 118\ \Omega$$

A potência dissipada no resistor é dada por

$$P = V_{ab}I = (11{,}8\ \text{V})(0{,}100\ \text{A}) = 1{,}18\ \text{W}$$

AVALIAR: você pode conferir esse resultado para a potência usando a fórmula alternativa $P = I^2R$. A resposta é a mesma?

Exemplo 26.11

MEDIDA DE RESISTÊNCIA II Suponha que os instrumentos do Exemplo 26.10 sejam conectados a outra resistência, desconhecida, usando o circuito indicado na Figura 26.16b e que as leituras obtidas sejam iguais às leituras do Exemplo 26.10. Qual é o valor da nova resistência R e que potência é dissipada no resistor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no Exemplo 26.10 o amperímetro registrou a corrente real que passava pelo resistor, mas a leitura do voltímetro não era a mesma que a diferença de potencial através do resistor. No caso presente, a situação se inverte: a leitura do voltímetro $V = 12{,}0$ V indica a diferença de potencial V_{ab} através do resistor, mas a leitura do amperímetro $I_A = 0{,}100$ A é diferente da corrente I que passa no resistor.

PREPARAR: aplicando a lei dos nós no ponto *b* da Figura 26.16b, temos que $I_A = I + I_V$, onde I_V é a corrente que passa pelo voltímetro. Determinamos I_V a partir dos valores dados de V e da resistência do voltímetro R_V e usamos esse valor para determinar a corrente do resistor I. A seguir, obtemos a resistência R de I e a leitura do voltímetro, e calculamos a potência como no Exemplo 26.10.

EXECUTAR: obtemos $I_V = V/R_V = (12\text{ V})/(10000\ \Omega) = 1{,}20\text{ mA}$. Logo, a corrente I que passa no resistor é dada por $I = I_A - I_V = 0{,}100\text{ A} - 0{,}0012\text{ A} = 0{,}0988\text{ A}$, e a resistência é dada por

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{12{,}0\text{ V}}{0{,}0988\text{ A}} = 121\ \Omega$$

A potência dissipada no resistor é dada por

$$P = V_{ab}I = (12{,}0\text{ V})(0{,}0988\text{ A}) = 1{,}19\text{ W}$$

AVALIAR : os resultados obtidos para R e P não são muito diferentes daqueles obtidos no Exemplo 26.10, no qual os intrumentos de medição estão conectados de outra forma. Isso ocorre porque o amperímetro e o voltímetro são praticamente ideais: em comparação com a resistência R em teste, a resistência do amperímetro R_A é muito pequena e a resistência do voltímetro R_V é muito grande. Contudo, os resultados dos dois exemplos são diferentes, o que demonstra que você deve levar em conta como os amperímetros e os voltímetros são utilizados, ao interpretar as suas leituras.

Ohmímetros

Um método alternativo para medir uma resistência consiste em usar um galvanômetro de d'Arsonval mediante um arranjo chamado de **ohmímetro**. Trata-se de um galvanômetro conectado em série com um resistor e com uma fonte de tensão (geralmente uma pilha), como indicado na Figura 26.17. A resistência R que desejamos medir é conectada entre os pontos x e y.

A resistência em série R_s é variável; ela é ajustada de modo que o ponto x forme um curto-circuito com o ponto y (ou seja, quando $R = 0$), então o galvanômetro sofre uma deflexão completa em sua escala. Quando não existe nada conectando os pontos x e y, ou seja, quando o circuito entre x e y está *aberto* (isto é, quando $R \to \infty$), não existe nenhuma corrente e, portanto, nenhuma deflexão. Para qualquer valor de R entre esses limites, a deflexão depende do valor de R e a escala do galvanômetro pode ser calibrada para medir R diretamente. Correntes mais elevadas correspondem a menores resistências, portanto a leitura da escala é feita de trás para a frente em comparação à escala que mostra as correntes.

Nos casos de maior precisão, os instrumentos que empregam galvanômetros de d'Arsonval foram superados pelos instrumentos eletrônicos com mostradores digitais. Tais instrumentos são mais precisos, estáveis e mecanicamente mais resistentes do que os instrumentos que usam galvanômetros de d'Arsonval. Um voltímetro digital pode ser fabricado com uma resistência interna extremamente elevada, da ordem de 100 MΩ. A Figura 26.18 mostra um *multímetro* digital, um instrumento capaz de medir voltagem, corrente ou resistência em uma ampla gama.

Potenciômetros

O *potenciômetro* é um instrumento que serve para medir a fem de uma fonte sem consumir nenhuma corrente da fonte; ele também possui outras aplicações importantes. Essencialmente, ele compara uma diferença de potencial desconhecida a uma diferença de potencial ajustável e mensurável.

O princípio de funcionamento de um potenciômetro é esquematizado na Figura 26.19a. Os terminais a e b de um reostato de resistência total R_{ab} estão conectados permanentemente a uma fonte de fem conhecida $\mathcal{E}_1$. Um contato deslizante c é conectado por meio de um galvanômetro G a uma fonte cuja fem $\mathcal{E}_2$ desejamos determinar. À medida que o contato deslizante c se desloca ao longo do reostato, a resistência R_{cb} entre os pontos c e b varia; supondo um reostato uniforme, a resistência R_{cb} é proporcional à distância entre os pontos c e b. Para determinar o valor de $\mathcal{E}_2$, o contato c deve ser deslocado até um ponto no qual o ponteiro do galvanômetro não sofra nenhuma deflexão; isso

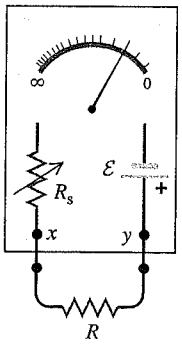


Figura 26.17 Circuito de um ohmímetro. O resistor R_s possui resistência variável, conforme indica a seta que corta o símbolo do resistor. Para usar o ohmímetro, inicialmente conecte x a y e ajuste R_s até que a leitura do instrumento seja zero. A seguir, conecte os terminais do resistor R nos pontos x e y e leia o valor da resistência na escala.

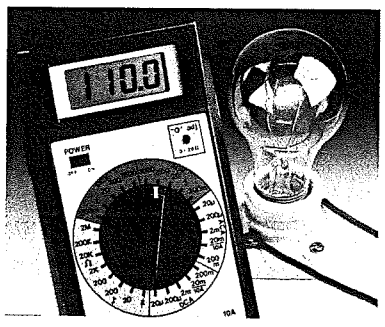


Figura 26.18 Este multímetro digital pode ser usado como um voltímetro, um amperímetro ou ohmímetro.

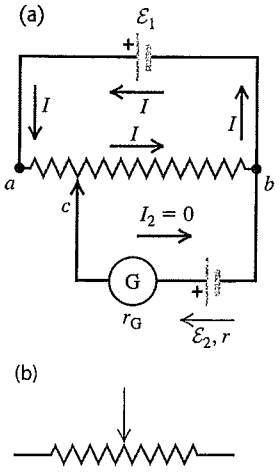


Figura 26.19 (a) Circuito de um potenciômetro. (b) Símbolo de um potenciômetro (resistor variável).

corresponde a uma corrente nula no ramo do circuito onde se encontra $\mathcal{E}_2$. Fazendo $I_2 = 0$, a lei das malhas de Kirchhoff fornece

$$\mathcal{E}_2 = IR_{cb}$$

Quando $I_2 = 0$, a corrente I produzida pela fonte de fem $\mathcal{E}_1$ possui o mesmo valor, qualquer que seja o valor da fem $\mathcal{E}_2$. Recalibramos o dispositivo substituindo $\mathcal{E}_2$ por uma fonte de fem conhecida; a seguir, qualquer fem $\mathcal{E}_2$ pode ser encontrada medindo-se o valor do comprimento cb para o qual $I_2 = 0$ (veja o Problema 26.35). Note que, para que isso funcione, V_{ab} deve ser maior do que a fem $\mathcal{E}_2$.

O termo *potenciômetro* também é usado para qualquer resistor variável, geralmente tendo um elemento de resistência circular e um contato deslizante controlado por um eixo acoplado a um botão. O símbolo de um potenciômetro em circuitos elétricos é indicado na Figura 26.19b.

Teste sua compreensão da Seção 26.3 Você deseja medir a corrente que passa pelo resistor de 2 Ω, indicado na Figura 26.12 (Exemplo 26.6, Seção 26.2), e também a diferença de potencial através dele. (a) Como um amperímetro e um voltímetro devem ser conectados a esse resistor? (i) Amperímetro e voltímetro ligados em série com o resistor; (ii) amperímetro em série com o resistor e voltímetro conectado entre os pontos b e d; (iii) amperímetro conectado entre os pontos b e d e voltímetro em série com o resistor; (iv) amperímetro e voltímetro conectados entre os pontos b e d. (b) Quais resistências esses instrumentos devem ter? (i) As resistências do amperímetro e do voltímetro devem ser maiores do que 2 Ω; (ii) a resistência do amperímetro deve ser maior do que 2 Ω e a do voltímetro, menor do que 2 Ω; (iii) a resistência do amperímetro deve ser menor do que 2 Ω e a do voltímetro maior do que 2 Ω; (iv) as resistências do amperímetro e do voltímetro devem ser menores do que 2 Ω. ∎

26.4 Circuitos *R-C*

Nos circuitos analisados até o momento, tomamos qualquer fem e todas as resistências como *constantes* (independentes do tempo); portanto, os potenciais, as correntes e as potências também são independentes do tempo. Porém, no simples processo de carregar e descarregar um capacitor, verificamos uma situação na qual *ocorrem* variações com o tempo das correntes, das voltagens e das potências.

Muitos dispositivos incorporam circuitos em que um capacitor é carregado e descarregado, alternadamente. Dentre eles estão os marcapassos (Figura 26.20), semáforos, pisca-piscas automotivos e unidades de flash eletrônico. Portanto, é importante compreender o que ocorre nesses circuitos.

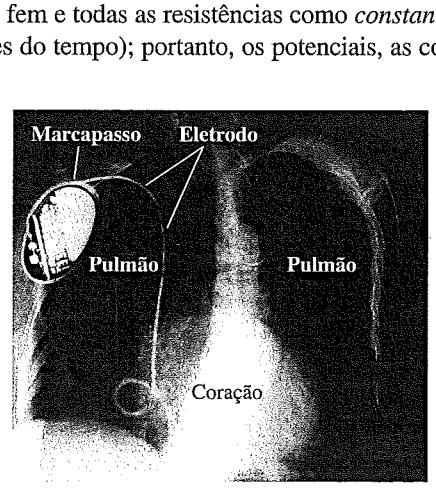


Figura 26.20 Esta imagem de raio X mostra um marcapasso cirurgicamente implantado em um paciente com um nódulo sinoatrial defeituoso; essa parte do coração é a que gera o sinal elétrico que estimula as batidas do coração. Para compensar, o marcapasso (localizado próximo à clavícula) envia um impulso elétrico pelo eletrodo ao coração, a fim de manter as batidas regulares.

Carregando um capacitor

A Figura 26.21 mostra como um circuito simples pode ser usado para carregar um capacitor. Denomina-se **circuito *R-C*** um circuito que possui um resistor em série com um capacitor, tal como ilustrado nessa figura. Idealizamos a bateria (ou fonte de potência) com uma fem $\mathcal{E}$ constante e resistência interna nula ($r = 0$) e desprezamos as resistências dos condutores usados nas conexões.

Começamos com o capacitor inicialmente descarregado (Figura 26.21a); a seguir, em um dado instante $t = 0$, fechamos a chave, completando o circuito e permitindo que a bateria seja carregada pela corrente (Figura 26.21b). Do ponto de vista prático, a corrente começa no mesmo instante em todas as partes do circuito, e a cada instante a corrente é a mesma em todas as partes.

ATENÇÃO Letras minúsculas indicam variação no tempo Até este ponto, tomamos as diferenças de potencial (voltagens), as correntes e as cargas como constantes e usamos as *letras maiúsculas* V, I e Q para designar, respectivamente, essas grandezas. Para distinguir uma grandeza constante daquela que varia com o tempo, usaremos *letras minúsculas* v, i e q para designar, respectivamente, as voltagens, as correntes e as cargas variáveis com o tempo. Sugerimos que você adote essa convenção em seus estudos.

Como o capacitor da Figura 26.21 está inicialmente descarregado, a diferença de potencial v_{bc} através dele é igual a zero para $t = 0$. Para esse instante, pela lei das malhas de Kirchhoff, a voltagem v_{ab} através do resistor R é igual à fem da bateria $\mathcal{E}$. A corrente inicial através do resistor, que chamaremos de I_0, é dada pela lei de Ohm: $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

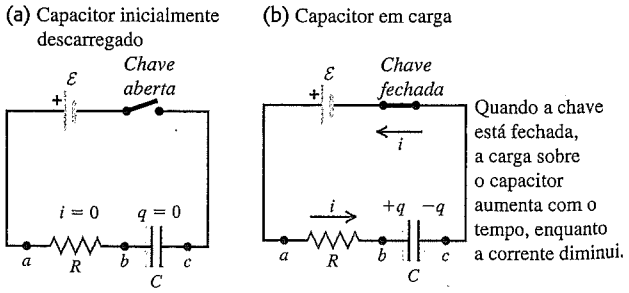


Figura 26.21 Carregando um capacitor. (a) Antes do fechamento da chave, a carga q é igual a zero. (b) Quando a chave é fechada (no instante $t = 0$), a corrente salta de zero para $\mathcal{E}/R$. Com o passar do tempo, q se aproxima de Q_f e a corrente i tende a zero.

À medida que o capacitor se carrega, sua voltagem v_{bc} aumenta e a diferença de potencial v_{ab} através do resistor diminui, o que corresponde à diminuição da corrente. A soma dessas duas voltagens é constante e igual a $\mathcal{E}$. Depois de um longo tempo, o capacitor fica completamente carregado, a corrente torna-se igual a zero e a diferença de potencial v_{ab} através do resistor se anula. Então, a fem total $\mathcal{E}$ surge nos terminais do capacitor e $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Seja q a carga do capacitor e i a corrente no circuito após um tempo t depois de a chave ser fechada. Escolhemos como sentido positivo da corrente aquele que corresponde ao fluxo de carga positiva que entra na placa esquerda do capacitor, como indica na Figura 26.21b. As voltagens instantâneas v_{ab} e v_{bc} são dadas por

$$v_{ab} = iR \quad v_{bc} = \frac{q}{C}$$

Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff, obtemos

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \tag{26.9}$$

Ocorre uma queda de potencial igual a iR quando nos deslocamos de a para b e igual a q/C quando nos deslocamos de b para c. Explicitando i na Equação (26.9), encontramos

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \tag{26.10}$$

Quando a chave está fechada, a carga sobre o capacitor aumenta com o tempo, enquanto a corrente diminui. No instante $t = 0$, quando a chave está inicialmente fechada, o capacitor está descarregado e, portanto, $q = 0$. Substituindo $q = 0$ na Equação (26.10), verificamos que a corrente *inicial* I_0 é dada por $I_0 = \mathcal{E}/R$, como já havíamos observado. Se o capacitor não estivesse conectado no circuito, o último termo da Equação (26.10) não existiria; então, a corrente seria *constante* e igual a $\mathcal{E}/R$.

À medida que a carga q aumenta, o termo q/RC torna-se maior e a carga do capacitor tende a seu valor final, o qual será designado por Q_f. A corrente diminui e por fim se anula. Quando $i = 0$, a Equação (26.10) fornece

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q_f}{RC} \quad Q_f = C\mathcal{E} \tag{26.11}$$

Note que a carga final Q_f não depende de R.

A corrente e a carga do capacitor em função do tempo são indicadas na Figura 26.22. No instante em que a chave é fechada ($t = 0$), a corrente dá um salto para seu valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; depois disso, ela tende a zero gradualmente. A carga do capacitor começa igual a zero e tende a seu valor final dado pela Equação (26.11), $Q_f = C\mathcal{E}$.

Podemos deduzir expressões gerais para a corrente i e para a carga q em função do tempo. Considerando nossa escolha do sentido positivo da corrente (Figura 26.21b), i é a taxa com a qual a carga positiva chega à placa esquerda (positiva) do capacitor; logo, $i = dq/dt$. Fazendo essa substituição na Equação (26.10), obtemos

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

Podemos reagrupar a expressão na forma

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

e, a seguir, integrando ambos os membros da equação, encontramos q' e t', portanto podemos usar q e t para os limites superiores. Os limites inferiores são $q' = 0$ e $t' = 0$:

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

Quando fazemos a integração, obtemos

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Tomando a função exponencial de ambos os membros da equação (ou seja, tomando a função inversa do logaritmo neperiano) e explicitando q, encontramos

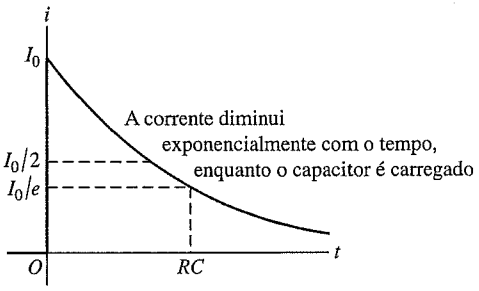
$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC}$$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \tag{26.12}$$

(circuito R-C, capacitor em carga)

A corrente instantânea i nada mais é do que a derivada da Equação (26.12) em relação ao tempo:

(a) Gráfico da corrente *versus* o tempo para um capacitor em carga



(b) Gráfico da carga do capacitor *versus* o tempo para um capacitor em carga

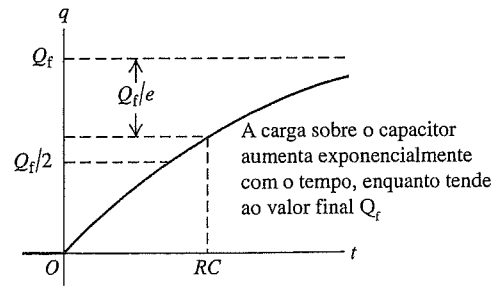


Figura 26.22 A corrente i e a carga q do capacitor em função do tempo para o circuito indicado na Figura 26.21. A corrente inicial é I_0 e a carga inicial do capacitor é igual a zero. A corrente tende a zero assintoticamente e a carga do capacitor tende assintoticamente a seu valor final Q_f.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

(circuito R-C, capacitor em carga) (26.13)

Tanto a carga quanto a corrente são funções *exponenciais* do tempo. A Figura 26.22a mostra um gráfico da Equação (26.13), e a Figura 26.22b explicita um gráfico da Equação (26.12).

Constante de tempo

Depois de um tempo igual a RC, a corrente em um circuito R-C diminui de um valor $1/e$ (aproximadamente igual a 0,368) em relação a seu valor inicial. Nesse instante, a carga do capacitor atingiu $(1 - 1/e) = 0{,}632$ de seu valor final $Q_f = C\mathcal{E}$. O produto RC fornece a medida da velocidade durante o processo de carga do capacitor. O produto RC denomina-se **constante de tempo** ou **tempo de relaxação** do circuito, sendo designado pela letra τ:

$$\tau = RC \qquad (26.14)$$

(constante de tempo para o circuito R-C)

Quando o valor de τ é pequeno, o capacitor se carrega rapidamente; quando ele é grande, o tempo para carregá-lo é mais longo. Se a resistência é pequena, a corrente flui com mais facilidade e o capacitor se carrega mais rapidamente. Quando R é dado em ohms e C, em farads, τ é dado em segundos.

Na Figura 26.22a, o eixo horizontal representa uma *assíntota* da curva. Falando estritamente, a corrente i nunca atinge exatamente o zero. Porém, quanto mais tempo esperamos, mais próxima do zero ela se torna. Depois de um tempo igual a 10 RC, a corrente passa a ser igual a 0,000045 de seu valor inicial. Analogamente, a curva indicada na Figura 26.22b tende assintoticamente à linha horizontal tracejada, assinalada com a ordenada Q_f. A carga q nunca atinge esse valor exato, porém, depois de um tempo igual a 10 RC, a carga torna-se igual a 0,000045 do valor final Q_f. Convidamos você a verificar que o produto RC possui dimensão de tempo.

Descarregando um capacitor

Suponha agora que o capacitor da Figura 26.21b já esteja carregado com uma carga Q_0; a seguir removemos a bateria do circuito R-C e conectamos os pontos a e c a uma chave aberta (Figura 26.23a). Depois fechamos a chave e damos partida ao cronômetro em $t = 0$; nesse instante, $q = Q_0$. Então, o capacitor se *descarrega* através do resistor e sua carga diminui até zero.

Novamente, designamos por q a carga do capacitor em função do tempo e i a corrente variável com o tempo, depois que a chave é fechada. Na Figura 26.23b, fizemos a mesma escolha da Figura 26.21b para o sentido positivo da corrente. Assim, a lei das malhas de Kirchhoff fornece a Equação (26.10), porém com $\mathcal{E} = 0$; ou seja,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \qquad (26.15)$$

A corrente i agora é negativa; isso ocorre porque uma carga positiva q está deixando a placa esquerda do capacitor da Figura 26.23b, de modo que a corrente possui o sentido oposto ao indicado na figura. No instante $t = 0$, quando $q = Q_0$, a corrente inicial é dada por $I_0 = -Q_0/RC$.

Para determinarmos q em função do tempo, reagrupamos a Equação (26.15), novamente mudando os nomes da variáveis para q' e t e integramos. Agora, os limites para q' são de Q_0 até q. Obtemos

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \qquad (26.16)$$

$$q = Q_0 e^{-t/RC}$$

(circuito R-C, capacitor em descarga)

A corrente instantânea i é a derivada da equação anterior em relação ao tempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad (26.17)$$

(circuito R-C, capacitor em descarga)

Os gráficos da corrente e da carga são indicados na Figura 26.24; ambas as grandezas tendem exponencialmente a zero com o tempo. Comparando esses resultados com as equações (26.12) e (26.13), vemos que as expressões das correntes são idênticas, exceto o sentido de I_0. A carga do capacitor tende a zero assintoticamente na Equação (26.16), enquanto a *diferença* entre q e Q_f tende a zero assintoticamente na Equação (26.12).

Considerações de energia permitem obter uma compreensão melhor do comportamento de um circuito R-C. Enquanto o capacitor está sendo carregado, a bateria fornece energia ao circuito com uma taxa instantânea $P = \mathcal{E}i$. A taxa instantânea de dissipação de energia no resistor é i^2R e a taxa instantânea de armazenamento de energia no capacitor é $iv_{bc} = iq/C$. Multiplicando a Equação (26.9) por i, obtemos

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C} \qquad (26.18)$$

A partir desse resultado, conclui-se que uma parte da potência $\mathcal{E}i$ fornecida pela bateria é dissipada no resistor (i^2R) e a outra parte é armazenada no capacitor (iq/C).

A energia *total* fornecida pela bateria enquanto o capacitor está sendo carregado é igual à fem $\mathcal{E}$ multiplicada pela carga total Q_f, ou seja, $\mathcal{E}Q_f$. A energia total armazenada no capacitor, de acordo com a Equação (24.9), é $Q_f\mathcal{E}/2$. Portanto, *exatamente a metade* da energia total fornecida pela bateria é armazenada no capacitor, e a outra metade é dissipada no resistor. É surpreendente que essa divisão meio a meio da energia não dependa de C, nem de R, nem de $\mathcal{E}$. Esse resultado também pode ser obtido detalhadamente, fazendo-se a integral sobre o tempo total para cada uma das grandezas que indicam potência na Equação (26.18). Deixamos esse cálculo como divertimento para você (veja o Problema 26.87).

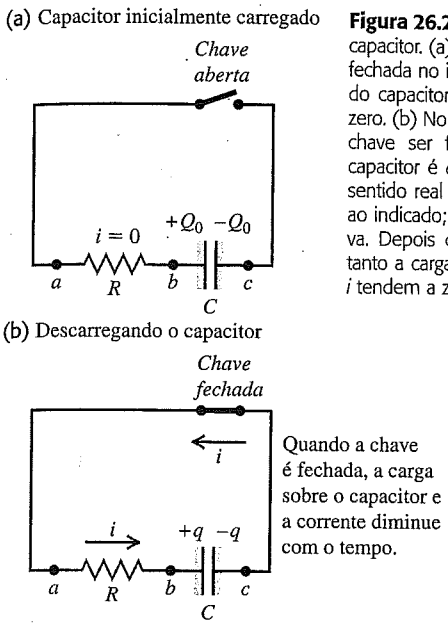


Figura 26.23 Descarregando um capacitor. (a) Antes de a chave ser fechada no instante $t = 0$, a carga do capacitor é Q_0 e a corrente é zero. (b) No instante t depois de a chave ser fechada, a carga do capacitor é q e a corrente é i. O sentido real da corrente é oposto ao indicado; a corrente i é negativa. Depois de um longo tempo, tanto a carga q quanto a corrente i tendem a zero.

Exemplo 26.12

CARREGANDO UM CAPACITOR Um resistor com resistência 10 MΩ é conectado em série com um capacitor cuja capacitância é de 1,0 μF e com uma bateria de fem igual a 12,0 V. Antes de a chave ser fechada no instante $t = 0$, o capacitor está descarregado. (a) Qual é a constante de tempo? (b) Qual é a fração da carga final que está sobre uma das placas quando $t = 46$ s? (c) Qual é a fração da corrente inicial que permanece quando $t = 46$ s?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta situação é a mesma daquela indicada na Figura 26.21, com $R = 10\ \text{M}\Omega$, $C = 1{,}0\ \mu\text{F}$ e $\mathcal{E} = 12{,}0$ V. A carga e a corrente variam com o tempo, conforme a Figura 26.22. As incógnitas são (a) a constante de tempo, (b) a carga q no instante $t = 46$ s dividida pela carga final Qf e (c) a corrente i no instante $t = 46$ s dividida pela corrente inicial i_0.

PREPARAR: para um capacitor que está sendo carregado, a carga é dada pela Equação (26.12) e a corrente, pela Equação (26.13). A Equação (26.14) fornece a constante de tempo.

EXECUTAR: (a) De acordo com a Equação (26.14), a constante de tempo é

$$\tau = RC = (10 \times 10^6\ \Omega)(1{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 10\ \text{s}$$

(b) De acordo com a Equação (26.12),

$$\frac{q}{Q_\text{f}} = 1 - e^{-t/RC} = 1 - e^{-(46\ \text{s})/(10\ \text{s})} = 0{,}99$$

O capacitor fica 99% carregado depois de um tempo igual a 4,6 RC, ou 4,6 constantes de tempo.

(c) De acordo com a Equação (26.13),

$$\frac{i}{I_0} = e^{-4{,}6} = 0{,}010$$

Depois de um tempo igual a 4,6 constantes de tempo, a corrente diminuiu para 1,0% do seu valor inicial.

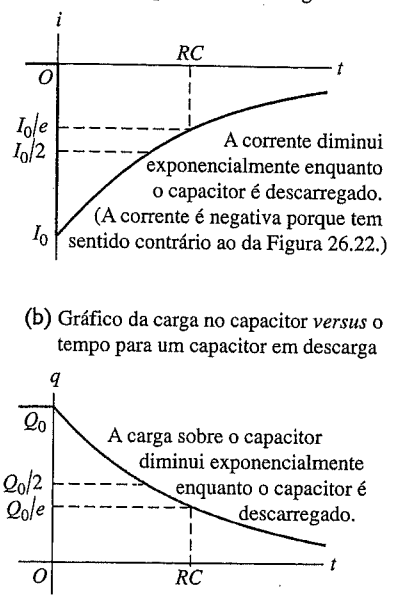


Figura 26.24 A corrente i e a carga q do capacitor em função do tempo para o circuito indicado na Figura 26.23. A corrente inicial é I_0 e a carga inicial do capacitor é Q_0; tanto i quanto q tendem a zero assintoticamente.

AVALIAR: a constante de tempo é relativamente longa porque a resistência é muito grande. O circuito se carregará mais rapidamente, se uma resistência menor for usada.

Exemplo 26.13

DESCARREGANDO UM CAPACITOR O resistor e o capacitor do Exemplo 26.12 são conectados novamente, como indica a Figura 26.23. Antes de a chave ser fechada, o capacitor foi carregado com uma carga igual a 5,0 μC. A seguir, a chave é fechada no instante $t = 0$ e o capacitor começa a se descarregar. (a) Em que instante a carga do capacitor é igual a 0,50 μC? (b) Qual é a corrente nesse instante?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste caso, o capacitor está sendo descarregado, portanto a carga q e a corrente i variam com o tempo, conforme indica a Figura 26.24. As incógnitas são (a) o valor de t para o qual $q = 0{,}50\ \mu\text{C}$ e (b) o valor de i nesse instante.

PREPARAR: a carga é dada pela Equação (26.16) e a corrente, pela Equação (26.17).

EXECUTAR: (a) De acordo com a Equação (26.16), o tempo t é dado por

$$t = -RC \ln \frac{q}{Q_0}$$

$$= -(10 \times 10^6\ \Omega)(1{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F}) \ln \frac{0{,}50\ \mu\text{C}}{5{,}0\ \mu\text{C}} = 23\ \text{s}$$

O resultado equivale a 2,3 vezes a constante de tempo $\tau = RC = 10$ s.

(b) De acordo com a Equação (26.17), para $Q_0 = 5{,}0\ \mu\text{C} = 5{,}0 \times 10^{-6}$ C,

$$i = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = -\frac{5{,}0 \times 10^{-6}\,\text{C}}{10\,\text{s}}e^{-2{,}3} = -5{,}0 \times 10^{-8}\,\text{A}$$

Durante a descarga do capacitor, a corrente possui um sentido contrário ao da corrente que flui quando o capacitor está carregando.

AVALIAR: poderíamos economizar o esforço para calcular $e^{-t/RC}$ notando que, no referido instante, $q = 0{,}10Q_0$; de acordo com a Equação (26.16), isso significa que $e^{-t/RC} = 0{,}10$.

Teste sua compreensão da Seção 26.4 A energia armazenada em um capacitor é igual a $q^2/2C$. Quando um capacitor é descarregado, qual fração da energia inicial permanece, após um tempo decorrido equivalente a uma constante de tempo? (i) $1/e$; (ii) $1/e^2$; (iii) $1 - 1/e$; (iv) $(1 - 1/e)^2$; (v) a resposta depende da quantidade de energia armazenada inicialmente. ∎

26.5 Sistemas de distribuição de potência

Concluímos este capítulo com uma breve discussão sobre aplicações práticas de sistemas de distribuição de potência em residências e automóveis. Os automóveis usam sistemas elétricos com corrente contínua (cc), enquanto a distribuição da energia elétrica para uso comercial, industrial e doméstico é feita através da corrente alternada (ca), em virtude da facilidade de aumentar ou diminuir a diferença de potencial mediante o uso de transformadores. Os conceitos básicos sobre a fiação e sobre as conexões podem ser aplicados para os dois tipos de corrente. Discutiremos os circuitos de corrente alternada com detalhes no Capítulo 31.

Lâmpadas, motores e demais aparelhos elétricos devem sempre ser conectados em *paralelo* com a fonte de tensão (pelos fios fornecidos pela companhia de distribuição de energia elétrica ou pelos fios provenientes da bateria e do alternador de um automóvel). Se os aparelhos elétricos fossem conectados em série, caso um aparelho queimasse, todos os demais deixariam de funcionar (veja o Exemplo 26.2 na Seção 26.1). O esquema básico do sistema de fiação de uma casa é indicado na Figura 26.25. Um dos fios da 'linha', como chamamos o par de fios condutores, denomina-se fio *neutro*; ele é sempre conectado à 'terra' existente no painel de entrada. Para uma casa, o *terra* é na realidade um eletrodo inserido no solo (geralmente um bom condutor) ou, algumas vezes, conectado aos canos de água metálicos. Os eletricistas costumam chamar um dos fios da linha de 'neutro' — que possui o mesmo potencial da terra — e o outro fio de 'ligado' ou 'com tensão', o qual possui um dado potencial em relação à terra. Muitos sistemas de distribuição para uso doméstico apresentam *duas* linhas com tensão com polaridades contrárias em relação ao fio neutro. Voltaremos a falar desses detalhes mais adiante.

No Brasil, a voltagem nominal para uso residencial é da ordem de 110 V a 120 V, porém em algumas cidades é possível contratar 240 V para uso residencial. (Para corrente alternada, que varia senoidalmente com o tempo, esses números representam o *valor quadrático médio* da voltagem, o qual equivale a $1/\sqrt{2}$ do valor de pico da voltagem. Na Seção 31.1, discutiremos essa questão com detalhes.) A corrente I que flui em um dispositivo depende da potência P dada pela Equação (25.17): $P = VI$. Logo, $I = P/V$. Por exemplo, a corrente que passa em uma lâmpada de 100 W é dada por

$$I = \frac{P}{V} = \frac{100\,\text{W}}{120\,\text{V}} = 0{,}83\,\text{A}$$

A potência fornecida para a lâmpada na realidade depende de sua resistência R. Usando a Equação (25.18), a qual afirma que $P = VI = I^2R = V^2/R$ para um resistor, concluímos que a resistência da lâmpada anterior em sua temperatura de operação é dada por:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120\,\text{V}}{0{,}83\,\text{A}} = 144\,\Omega \quad \text{ou}$$

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\,\text{V})^2}{100\,\text{W}} = 144\,\Omega$$

De modo análogo, um ferro elétrico de 1500 W consome uma corrente de (1500 W) / (120 V) = 12,5 A e possui resistência

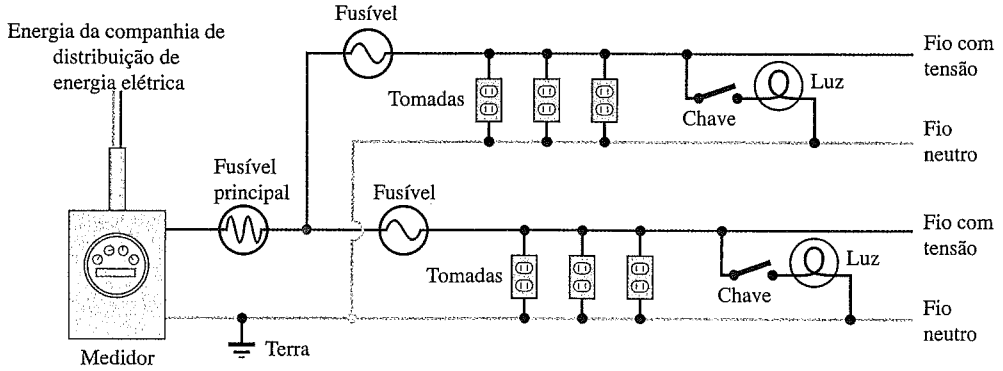


Figura 26.25 Diagrama esquemático ilustrando uma parte da rede de fios de uma casa. Somente dois circuitos da rede são indicados; as redes reais podem possuir de quatro até trinta circuitos. As lâmpadas e os eletrodomésticos podem ser conectados às tomadas. Os fios usados para a conexão com a terra, que geralmente não conduzem nenhuma corrente, não são indicados.

em sua temperatura de operação igual a 9,6 Ω. Como a resistividade varia com a temperatura, a resistência desses dispositivos é consideravelmente menor quando eles estão frios. Se você medir a resistência de uma lâmpada de 100 W com um ohmímetro (cuja corrente fornecida é muito pequena e produz um aumento de temperatura desprezível), provavelmente encontrará um valor aproximadamente igual a 10 Ω. Quando você liga o interruptor da lâmpada, essa pequena resistência produz uma corrente muito elevada que faz aquecer o filamento da lâmpada. É por isso que, quando a lâmpada já foi usada muito tempo e está na iminência de se queimar, em geral ela se queima quando você liga o interruptor.

Sobrecargas do circuito e curtos-circuitos

A corrente máxima disponível para um circuito individual é limitada pela resistência dos fios. Como discutimos na Seção 25.5, a perda de potência dada por I^2R faz aquecer os fios e, em casos extremos, produz incêndio ou fusão dos fios. Geralmente, na fiação de uma casa se usa fio de calibre 12. Ele possui diâmetro de 2,05 mm e pode transportar com segurança uma corrente máxima da ordem de 20 A (sem superaquecimento). Diâmetros maiores, tais como o de calibre 8 (3,26 mm) ou calibre 6 (4,11 mm), são usados para aparelhos que consomem muita corrente — como fornos elétricos e secadoras de roupa —, e fios de calibre 2 (6,54 mm) ou maiores são empregados na linha principal da qual provém a fiação para as casas.

Os fusíveis e os disjuntores servem para proteção contra a sobrecarga e o superaquecimento. Um *fusível* contém um fio feito com uma liga de estanho-chumbo com baixo ponto de fusão; o fio se funde e interrompe o circuito quando uma corrente supera o valor máximo especificado para o fusível (figura 26.26a). Um *disjuntor* é um dispositivo eletromecânico que serve para o mesmo objetivo, usando um eletroímã ou uma lâmina bimetálica para 'desarmá-lo e interromper o circuito quando a corrente máxima superar o valor especificado (Figura 26.26b). O disjuntor tem a vantagem de poder ser armado depois que tiver sido desarmado, voltando posteriormente a funcionar, ao passo que um fusível, depois de queimado, deve ser substituído. Contudo, durante a operação, um fusível é um pouco mais confiável do que um disjuntor.

Quando seu sistema possui um fusível e você usa muitos aparelhos elétricos na mesma tomada, o fusível se queima. *Não* substitua o fusível por outro com especificação de corrente mais elevada; se fizer isso, correrá o risco de incêndio em razão do superaquecimento. A única solução mais segura consiste em distribuir os aparelhos elétricos em diversos circuitos. As cozinhas modernas geralmente possuem três ou quatro circuitos separados de 20 A.

O contato entre um fio neutro e outro com tensão produz um *curto-circuito*. Essa situação, que pode ser provocada por perda de isolamento ou por uma série de falhas mecânicas, permite um caminho com resistência baixa, gerando uma corrente muito elevada que produz incêndio ou fusão dos fios quando o sistema não é protegido por um fusível ou disjuntor (veja o Exemplo 25.11 na Seção 25.5). Uma situação igualmente perigosa ocorre quando um fio se parte, formando um

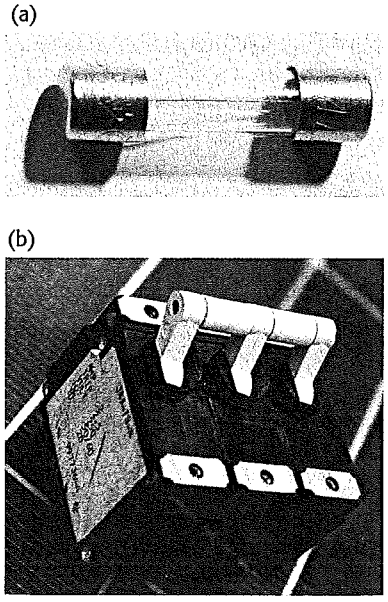


Figura 26.26 (a) A corrente em excesso fundirá o fio delgado de liga de chumbo–estanho que percorre a extensão do fusível, dentro da cápsula transparente. (b) A mudança neste disjuntor do circuito ocorrerá se a corrente máxima permitida for excedente.

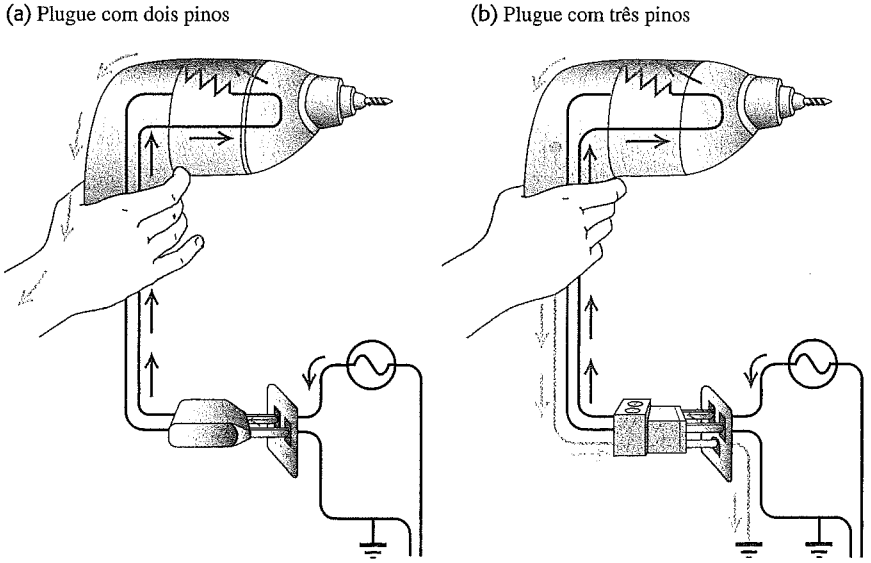


Figura 26.27 (a) Quando uma furadeira elétrica que possui algum defeito de isolamento é conectada a uma tomada comum de parede por meio de um plugue com dois pinos, uma pessoa pode receber um choque. (b) Quando a mesma furadeira elétrica com defeito é conectada por meio de um plugue com três pinos, em uma tomada com três fios, não há choque, porque a carga elétrica, em vez de fluir pelo seu corpo, flui para a terra pelo terceiro fio. Quando a corrente que flui para a terra é elevada, o fusível se queima.

circuito aberto. Isso é perigoso por causa das centelhas que podem surgir no ponto de contato exposto.

Na prática aprovada, um fusível ou disjuntor é colocado *somente* no fio que possui tensão, nunca no fio neutro. Se um fusível fosse instalado no fio neutro e surgisse uma corrente elevada, produzida por perda de isolamento ou qualquer outro motivo, o fusível se fundiria. O fio com tensão continuaria vivo no circuito e você poderia levar um choque ao tocar no fio ou em uma torneira. Por um motivo semelhante, o interruptor de parede de uma lâmpada deve sempre ser instalado no fio com tensão e nunca no fio neutro.

Uma proteção adicional contra os perigos de choque é proporcionada pelo *fio terra* incluído nas instalações modernas. Esse condutor geralmente é ligado ao terminal redondo ou em forma de U das tomadas de parede com três orifícios e dos plugues com três pinos de diversos aparelhos. Ele é conectado ao fio neutro da linha no painel de entrada. O fio terra geralmente não conduz nenhuma corrente, porém ele conecta à terra a caixa metálica, o invólucro ou o gabinete do aparelho. Quando o fio que possui tensão entra em contato acidentalmente com a caixa ou com o invólucro, o fio terra permite a passagem da corrente e o fusível se queima. Sem a presença do fio terra, a caixa ou o invólucro poderia ficar com um potencial de 120 V acima da terra. Então, se você tocasse ao mesmo tempo no aparelho e na parte metálica de um tubo ou uma torneira (ou até mesmo sobre um piso condutor), poderia receber um choque perigoso (Figura 26.27). Em algumas situações, especialmente no caso de tomadas situadas fora da casa ou próximas a tubos metálicos, costuma-se usar um tipo especial de disjuntor, chamado de *interruptor de falha da terra* (GFI ou GFCI). Tal dispositivo sente a diferença de corrente entre o fio que possui tensão e o fio terra (que normalmente não transporta corrente) e se desarma quando a corrente supera um valor muito pequeno, em geral da ordem de 5 mA.

Fiação doméstica e automotiva

Muitos sistemas modernos de fiação de uma casa usam, na realidade, uma estrutura mais elaborada do que a descrita anteriormente. A companhia de distribuição de energia elétrica fornece *três* fios condutores (Figura 26.28). Um é o fio neutro e os outros dois são fios de 120 V em relação ao fio neutro, porém com defasagens opostas, de modo que a voltagem entre esses dois fios é igual a 240 V. A companhia de distribuição de energia elétrica chama esses fios de *linha com três fios*, em contraste à linha com dois fios de 120 V (e mais o fio terra) descrita anteriormente. Com uma linha de três fios, as lâmpadas de 120 V e os aparelhos eletrodomésticos podem ser conectados entre o fio neutro e qualquer um dos outros dois fios, também chamados de fases, e os aparelhos que necessitam de potência mais elevada, que usam 240 V, tais como fornos elétricos e secadoras de roupa, são conectados entre as duas fases, cada uma das quais com uma tensão de 120 V.

Para impedir erros na instalação da fiação de uma casa que recebe energia elétrica de um sistema trifásico, costuma-se usar uma cor para cada linha. O código de cores recomenda que os fios que possuam fases no sistema com dois fios sejam pretos (ou preto e vermelho no sistema bifásico para fornecer 240 V); o fio neutro possui isolamento branco e os fios conectados à terra estão desencapados ou possuem cor verde. Porém, o fio neutro é indicado pela cor preta em dispositivos de eletrônica e no interior de alguns equipamentos. Tome cuidado com as convenções!

Quase todas as observações anteriores podem ser aplicadas para o sistema de fiação de um automóvel. A voltagem é da ordem de 13 V (corrente contínua); a potência é fornecida pela bateria e pelo alternador, que carrega a bateria quando o

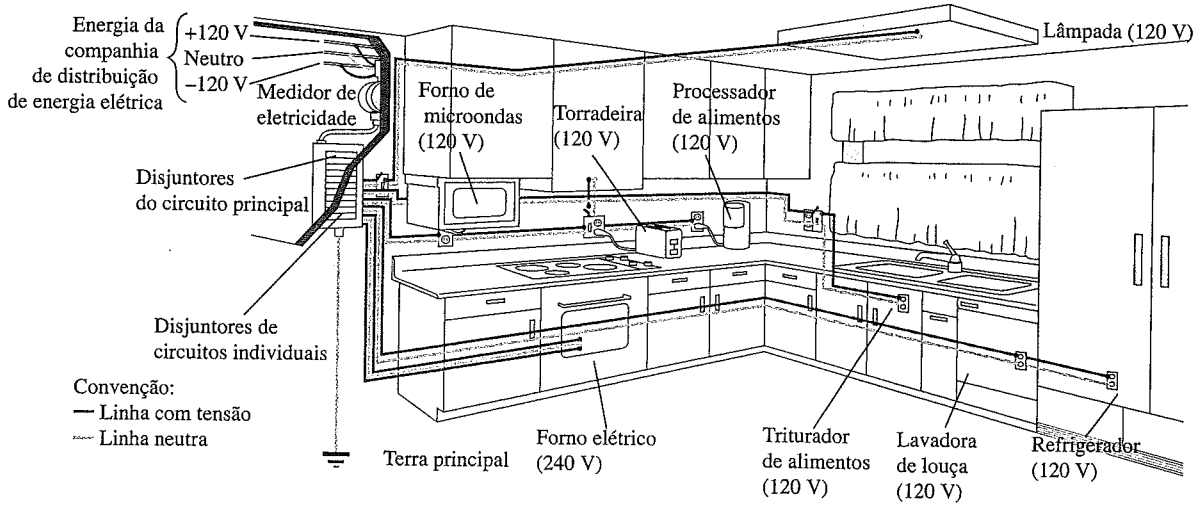


Figura 26.28 Diagrama de uma instalação elétrica normal de 120-240 V, mostrando a fiação em uma cozinha. Os fios conectados à terra não são exibidos. Fios coloridos geralmente são usados para identificar cada fio da linha nas instalações, porém não existe uma uniformidade nas convenções; por exemplo, o fio neutro é indicado pela cor preta na eletrônica, porém, em instalações elétricas, o fio neutro pode ser branco ou então apresentar um isolante verde.

motor está funcionando. O fio neutro é ligado à carroceria do automóvel. Como a tensão é baixa, não é necessário usar um condutor ligado à terra por segurança. Os fusíveis e disjuntores funcionam com princípios semelhantes aos aplicados na fiação de uma casa. Como a voltagem é menor (menos energia por carga) é necessária uma corrente mais elevada (maior quantidade de carga por segundo) para a mesma potência; por exemplo, uma lâmpada de 100 W necessita de uma corrente de (100 W)/(13V) = 8 A.

Embora tenhamos usado a *potência* nas discussões precedentes, é a *energia* que nós compramos da empresa distribuidora. A potência é a energia por unidade de tempo, de modo que a energia é a potência média multiplicada pelo tempo. A unidade de energia geralmente vendida pela empresa distribuidora é o quilowatt-hora (1 kW · h):

$$1\ \text{kW} \cdot \text{h} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3{,}6 \times 10^6\ \text{W} \cdot \text{s} = 3{,}6 \times 10^6\ \text{J}$$

Por exemplo, quando você usa um ferro elétrico de 1500 W continuamente durante uma hora, seu gasto de energia é de 1,5 kW · h. Suponha que um quilowatt-hora de energia custe 40 centavos; nesse caso você pagaria 60 centavos por seu consumo de energia elétrica. O preço a ser pago pelo uso das lâmpadas e dos eletrodomésticos de sua casa pode ser calculado de modo análogo, se você souber a potência marcada na lâmpada ou no aparelho. Contudo, alguns aparelhos (incluindo certos tipos de ferro elétrico) possuem controle de temperatura, que desliga automaticamente o aparelho quando uma determinada temperatura é atingida; nesse caso, o cálculo da energia efetiva deve levar em conta uma potência média que pode ser menor do que a potência especificada no aparelho.

Exemplo 26.14

UM CIRCUITO DE COZINHA Uma torradeira de 1800 W, uma frigideira elétrica de 1,3 kW e uma lâmpada de 100 W são ligadas a um mesmo circuito de 20 A e 120 V. (a) Qual é a corrente que atravessa cada dispositivo e qual é a resistência de cada um deles? (b) Essa combinação fará o fusível se queimar?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: quando conectados ao mesmo circuito, os três dispositivos são ligados em paralelo e a voltagem nos terminais de cada um deles é igual a 120 V.

PREPARAR: obtemos a corrente I consumida por cada aparelho usando a relação $P = VI$, onde P é a potência consumida pelo aparelho. Para achar a resistência R de cada aparelho, usamos a relação $P = V^2R$.

EXECUTAR: (a) Para simplificar o cálculo da corrente e da resistência, observamos que $I = P/V$ e $R = V^2/P$. Encontramos

$$I_{\text{torradeira}} = \frac{1800\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 15\ \text{A} \qquad R_{\text{torradeira}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1800\ \text{W}} = 8\ \Omega$$

$$I_{\substack{\text{frigideira}\\\text{elétrica}}} = \frac{1300\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 11\ \text{A} \qquad R_{\substack{\text{frigideira}\\\text{elétrica}}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1300\ \text{W}} = 11\ \Omega$$

$$I_{\text{lâmpada}} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0{,}83\ \text{A} \qquad R_{\text{lâmpada}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

Para uma voltagem constante, o dispositivo que possui a *menor* resistência (nesse caso, a torradeira) é aquele no qual flui a maior corrente e o que recebe a maior potência.

(b) A corrente total ao longo da linha é a soma das correntes que fluem nos três dispositivos:

$$I = I_{\text{torradeira}} + I_{\substack{\text{frigideira elétrica}}} + I_{\text{lâmpada}} = 15\ \text{A} + 11\ \text{A} + 0{,}83\ \text{A} = 27\ \text{A}$$

A corrente total supera o valor máximo de 20 A estipulado para a linha; portanto o fusível se queimará.

AVALIAR: poderíamos também calcular a corrente, inicialmente determinando a resistência equivalente das três resistências associadas em paralelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_{\text{torradeira}}} + \frac{1}{R_{\substack{\text{frigideira}\\\text{elétrica}}}} + \frac{1}{R_{\text{lâmpada}}}$$

$$= \frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{11\ \Omega} + \frac{1}{144\ \Omega} = 0{,}22\ \Omega^{-1}$$

$$R_{\text{eq}} = 4{,}5\ \Omega$$

A corrente total é $I = V/R_{\text{eq}} = (120\ \text{V})/(4{,}5\ \Omega) = 27\ \text{A}$, o que equivale ao resultado anterior. Um terceiro método para calcular I consiste em usar $I = P/V$ e simplesmente dividir a potência total consumida pelos três elementos pela voltagem:

$$I = \frac{P_{\text{torradeira}} + P_{\substack{\text{frigideira}\\\text{elétrica}}} + P_{\text{lâmpada}}}{V} = \frac{1800\ \text{W} + 1300\ \text{W} + 100\ \text{W}}{120\ \text{V}}$$

$$= 27\ \text{A}$$

Na vida cotidiana, encontramos correntes dessa ordem de grandeza em uma cozinha, e essa é a razão pela qual uma cozinha moderna dispõe de mais de um circuito de 20 A. Na prática, a torradeira e a frigideira elétrica devem ser colocadas em circuitos diferentes e, assim, a corrente em cada circuito será menor do que a corrente máxima de 20 A.

Teste sua compreensão da Seção 26.5 Para impedir que o fusível no Exemplo 26.14 queime, um eletricista substitui o fusível por outro de 40 A. É recomendável fazer isso? ▮

Resumo

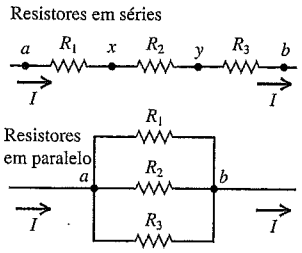
Resistores em série e em paralelo: quando diversos resistores $R1$, $R2$, $R3$, ... são conectados em série, a resistência equivalente é igual à soma das resistências individuais. Em uma conexão de resistores em série, a *corrente* que passa através de todos os resistores é a mesma. Quando diversos resistores são conectados em paralelo, o inverso da resistência equivalente R_{eq} é a soma dos inversos das resistências individuais. A *diferença de potencial* nas extremidades de todos os resistores ligados em paralelo é a mesma (exemplos 26.1 e 26.2).

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad (26.1)$$

(resistores em série)

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad (26.2)$$

(resistores em paralelo)



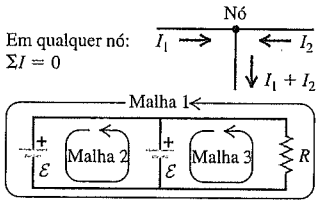
As leis de Kirchhoff: a lei dos nós de Kirchhoff é baseada na lei da conservação da carga. Ela afirma que, em um nó, a soma algébrica de todas as correntes que chegam e saem é igual a zero. A lei das malhas de Kirchhoff é baseada na lei da conservação da energia e na natureza conservativa dos campos eletrostáticos. Ela afirma que a soma algébrica de todas as diferenças de potencial ao longo de um percurso fechado de qualquer malha deve ser igual a zero. Para aplicar as leis de Kirchhoff, você deve usar consistentemente as regras de sinais (exemplos 26.3 a 26.7).

$$\sum I = 0 \tag{26.5}$$

(lei dos nós)

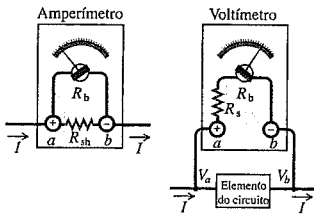
$$\sum V = 0 \tag{26.6}$$

(lei das malhas)



Em torno de qualquer malha: $\Sigma V = 0$

Instrumentos de medição elétrica: no galvanômetro de d'Arsonval, a deflexão é proporcional à corrente que passa na bobina. Para um grande intervalo de correntes, adicionamos um resistor em paralelo denominado shunt, de modo que uma parte da corrente é desviada da bobina para o resistor. Tal instrumento denomina-se amperímetro. Quando adicionamos um resistor em série, o instrumento pode ser calibrado para a leitura de uma diferença de potencial ou voltagem. Então, o instrumento passa a ser um voltímetro. Um bom amperímetro possui resistência interna muito pequena; um bom voltímetro possui resistência interna muito grande (exemplos 26.8 a 26.11).



Circuitos *R-C*: quando um capacitor é carregado por uma bateria em série com um resistor, a corrente e a carga no capacitor não são constantes. A carga tende assintoticamente a seu valor final e a corrente tende assintoticamente a zero. A carga no capacitor e a corrente no circuito são dadas pelas equações (26.12) e (26.13). Depois de um tempo $\tau = RC$, a carga tende a um valor igual a $1/e$ do valor final. Esse intervalo de tempo denomina-se constante de tempo ou tempo de relaxação do circuito. Quando um capacitor é descarregado, a corrente e a carga são dadas em função do tempo pelas equações (26.16) e (26.17). A constante de tempo é a mesma para o carregamento e o descarregamento (exemplos 26.12 e 26.13).

Carregamento do capacitor:

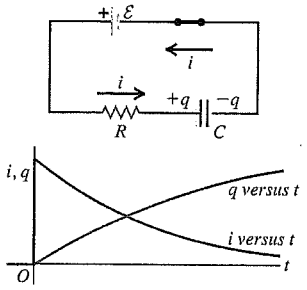
$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \tag{26.12}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \tag{26.13}$$

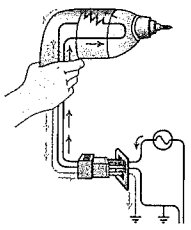
Descarregamento do capacitor:

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \tag{26.16}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \tag{26.17}$$



Fiação Doméstica: no sistema de fios usados em residências, os diversos dispositivos são ligados em paralelo à linha de distribuição elétrica, a qual possui um par de condutores, um 'com tensão' e o outro 'neutro'. Existe um fio 'terra' adicional para maior segurança. A corrente máxima permitida em um circuito é determinada pelas dimensões dos fios e pela temperatura máxima que ele pode suportar. A proteção contra correntes excessivas e o risco de incêndio resultante é feita mediante o uso de fusíveis ou disjuntores (Exemplo 26.14).



Principais termos

amperímetro, 178
circuito *R-C*, 182
constante de tempo (tempo de relaxação), 184
corrente alternada, 168
corrente contínua, 168
galvanômetro de d'Arsonval, 178
Lei das malhas de Kirchhoff, 173
Lei dos nós de Kirchhoff, 173
ligação em paralelo, 169

ligação em série, 169
malha, 173
nó, 173
ohmímetro, 181
resistência equivalente, 169
shunt, 178
voltímetro, 179

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

A diferença de potencial V é a mesma através dos resistores conectados em paralelo. Entretanto, uma corrente I diferente passará através de cada resistor, se as resistências R forem diferentes: $I = V/R$.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

26.1 Resposta: (a), (c), (d), (b) Segue a justificativa: os três resistores na Figura 26.1a estão ligados em série, portanto $R_{eq} = R + R + R = 3R$. Na Figura 26.1b, os três resistores estão ligados em paralelo, portanto $1/R_{eq} = 1/R + 1/R + 1/R = 3/R$ e $R_{eq} = R/3$. Na Figura 26.1c, o segundo e o terceiro resistores estão ligados em paralelo, portanto a resistência equivalente R_{23} é dada por $1/R_{23} = 1/R + 1/R = 2/R$; portanto $R_{23} = R/2$. Essa combinação está em série com o primeiro resistor, portanto os três resistores juntos possuem resistência equivalente $R_{eq} = R + R/2 = 3R/2$. Na Figura 26.1d, o segundo e o terceiro resistores estão em série, portanto a resistência equivalente é $R_{23} = R + R = 2R$. Essa combinação está em paralelo com o primeiro resistor, portanto a resistência equivalente da combinação de três resistores é dada por $1/R_{eq} = 1/R + 1/2R = 3/2R$. Portanto, $R_{eq} = 2R/3$.

26.2 Resposta: malha *cbdac* A Equação (2) menos a Equação (1) resulta em $-I_2\,(1\ \Omega) - (I_2 + I_3)\,(2\ \Omega) + (I_1 - I_3)\,(1\ \Omega) + I_1\,(1\ \Omega) = 0$. Podemos obter essa equação aplicando a lei das malhas em torno do caminho de c para b para d para a para c na Figura 26.12. Não se trata de uma nova equação, portanto ela não teria ajudado a resolver o Exemplo 26.6.

26.3 Respostas: (a) (ii), (b) (iii) Um amperímetro deve sempre ser conectado em série com o elemento do circuito em questão, e um voltímetro deve sempre ser conectado em paralelo. O amperímetro ideal teria resistência igual a zero, e o voltímetro ideal teria resistência infinita, de modo que as suas presenças não surtiriam nenhum efeito sobre a corrente ou a voltagem do resistor. Nenhuma dessas idealizações é possível, mas a resistência do amperímetro deve ser bem menor do que 2 Ω e a resistência do voltímetro, bem maior do que 2 Ω.

26.4 Resposta: (ii) Após o intervalo de uma constante de tempo, $t = RC$ e a carga inicial Q_0 diminui para $Q_0e^{-t/RC} = Q_0e^{-RC/RC} = Q_0e^{-1} = Q_0/e$. Logo, a energia armazenada diminui de $Q_0^2/2C$ para $(Q_0/e)^2/2C = Q_0^2/2Ce^2$, uma fração $1/e^2 = 0{,}135$ do seu valor inicial. Esse resultado não depende do valor inicial da energia.

26.5 Resposta: não Trata-se de algo muito perigoso a fazer. O fusível aceitará correntes de até 40 A, o dobro do valor máximo da fiação. A quantidade de potência $P = I^2R$ dissipada em uma seção do fio pode, portanto, ser até quatro vezes maior que o valor máximo, portanto os fios podem sofrer aquecimento e iniciar um incêndio.

Questões para discussão

Q26.1 Duas lâmpadas incandescentes de 120 V apresentam potências de 60 W e 120 W; qual dos dois filamentos possui maior resistência? Se essas lâmpadas forem conectadas em série com uma fonte de tensão de 120 V, na extremidade de qual lâmpada ocorrerá a maior queda de potencial? E no caso de uma ligação em paralelo? Explique seu raciocínio.

Q26.2 Duas lâmpadas de 120 V com potências de 25 W e 200 W foram conectadas em série com uma fonte de tensão de 240 V. Parecia ser uma boa idéia, porém uma das lâmpadas se queimou quase imediatamente após a ligação. Qual das duas lâmpadas se queimou e por quê?

Q26.3 Você liga diversas lâmpadas idênticas a uma pilha de lanterna. O que ocorre com a luminosidade das lâmpadas à medida que o número de lâmpadas aumenta quando a ligação é (i) em série? (ii) em paralelo? A bateria dura mais quando a ligação é em série ou quando é em paralelo? Explique seu raciocínio.

Q26.4 No circuito indicado na Figura 26.29, três lâmpadas idênticas são ligadas a uma pilha de lanterna. Compare os diversos índices de luminosidade das lâmpadas. Em qual das lâmpadas passa a maior corrente? Qual das lâmpadas possui a maior diferença de potencial em seus terminais? O que ocorrerá quando a lâmpada A for retirada do circuito? E quando a lâmpada B for retirada? E a lâmpada C? Explique.

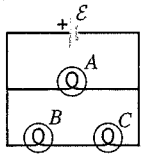


Figura 26.29 Questão Q26.4.

Q26.5 Quando dois resistores R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$) são conectados em série como indica a Figura 26.30, qual das seguintes afirmações é verdadeira? Justifique a sua resposta caso a caso. (a) $I_1 = I_2 = I_3$. (b) A corrente é maior em R_1 que em R_2. (c) O consumo de energia elétrica é o mesmo para ambos os resistores. (d) O consumo de energia elétrica é maior em R_2 do que em R_1. (e) A queda de potencial é a mesma para ambos os resistores. (f) O potencial no ponto a é igual ao do ponto c. (g) O potencial no ponto b é inferior ao do ponto c. (h) O potencial no ponto c é inferior ao do ponto b.

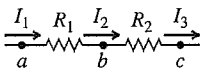


Figura 26.30 Questão Q26.5.

Q26.6 Quando dois resistores R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$) são conectados em paralelo como indica a Figura 26.31, qual das seguintes afirmações é verdadeira? Justifique a sua resposta caso a caso. (a) $I_1 = I_2$. (b) $I_3 = I_4$. (c) A corrente é maior em R_1 do que em R_2. (d) O consumo de energia elétrica é o mesmo para ambos os resistores. (e) O consumo de energia elétrica é maior em R_2 do que em R_1. (f) $V_{cd} = V_{ef} = V_{ab}$. (g) O potencial no ponto c é superior ao do ponto d. (h) O potencial no ponto f é superior ao do ponto e. (i) O potencial no ponto c é superior ao do ponto e.

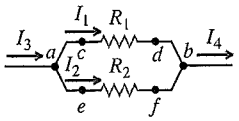


Figura 26.31 Questão Q26.6.

Q26.7 Por que as luzes do carro ficam com pouca intensidade no momento em que o motor de arranque é acionado?

Q.26.8 Um resistor consiste de três tiras metálicas idênticas conectadas como indica a Figura 26.32. Se uma das tiras for retirada, a leitura do amperímetro aumenta, diminui ou não varia? Por quê?

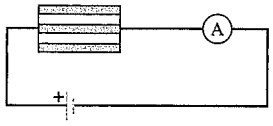


Figura 26.32 Questão Q26.8.

Q26.9 Uma lâmpada é conectada ao circuito indicado na Figura 26.33. Ao fecharmos a chave S, a luminosidade da lâmpada aumenta, diminui ou não varia? Explique por quê.

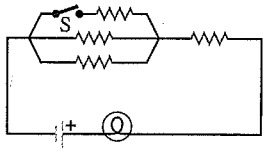


Figura 26.33 Questão Q26.9.

Q26.10 Uma bateria real, com resistência interna desprezível, é conectada a uma lâmpada, como indica a Figura 26.34. Quando a chave S é fechada, o que acontece com a intensidade da luz? Por quê?

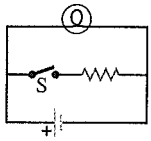


Figura 26.34 Questão Q26.10.

Q26.11 Se a bateria na Questão Q26.10 fosse ideal e não possuísse resistência interna, o que aconteceria com a luminosidade da lâmpada, quando a chave S fosse fechada? Por quê?

Q26.12 No circuito indicado na Figura 26.35, o que acontece com a luminosidade das lâmpadas, quando a chave S é fechada, caso a bateria (a) não tenha resistência interna e (b) não possua resistência interna desprezível? Explique.

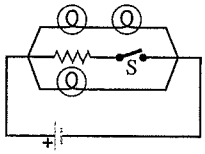


Figura 26.35 Questão Q26.12.

Q26.13 É possível conectar resistores de modo que eles não possam ser reduzidos a uma combinação em série ou em paralelo? Em caso afirmativo, dê exemplos. Em caso negativo, explique por quê.

Q26.14 O sentido da corrente de uma bateria pode ser invertido conectando-a a uma segunda bateria com fem mais elevada, ligando o pólo positivo de uma ao pólo positivo da outra. Quando o sentido da corrente da bateria é invertido, sua fem também se inverte? Por quê?

Q26.15 Em uma lanterna com duas pilhas, elas são geralmente conectadas em série. Por que não ligá-las em paralelo? Qual seria uma possível vantagem na conexão de pilhas idênticas em paralelo?

Q26.16 A arraia elétrica (gênero *Torpedo*) aplica um choque elétrico para atordoar sua presa e se defender de predadores. (Na Roma antiga, os médicos praticavam uma forma primitiva de terapia eletroconvulsiva para curar dores de cabeça e artritismos.) A Figura 26.36a mostra a arraia *Torpedo* vista de baixo para cima. A voltagem é produzida por células finas em forma de placas, denominadas *eletrócitos*; cada uma delas funciona como uma bateria com força eletromotriz aproximadamente igual a 10^{-4} V. Grupos de eletrócitos empilhados são distribuídos lateralmente na parte inferior da *Torpedo* (Figura 26.36b); nessas pilhas, a face positiva de um eletrócito toca a face negativa do eletrócito adjacente (Figura 26.36c). Qual é a vantagem de empilhar os eletrócitos? Por que essas pilhas se distribuem lateralmente?

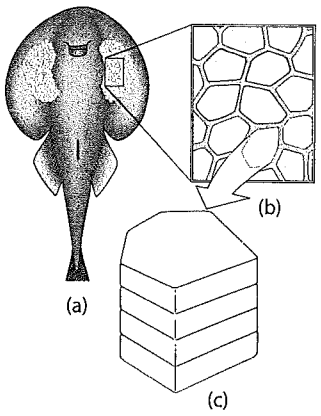


Figura 26.36 Questão Q26.16.

Q26.17 A fem de uma pilha de lanterna não varia apreciavelmente com o tempo, porém sua resistência interna muda com a idade e com o uso. Qual é o instrumento que você usaria para medir a idade de uma bateria?

Q26.18 É possível montar um circuito de tal modo que a diferença de potencial nos terminais da bateria seja igual a zero? Em caso afirmativo, forneça um exemplo. Em caso negativo, diga por que não.

Q26.19 Verifique se a constante de tempo RC possui unidades de tempo.

Q26.20 Para uma resistência muito grande é fácil construir um circuito R-C com uma constante de tempo da ordem de alguns segundos ou minutos. Como esse resultado poderia servir para a determinação de uma resistência tão grande que não pudesse ser medida com os instrumentos comuns?

Q26.21 Quando um resistor, uma bateria e um capacitor são ligados em série, o resistor influencia a carga máxima que pode ser armazenada no capacitor? Por quê? Para que serve o resistor? Um estudante de física tentou fazer um cachorro quente inserindo um prego em cada extremidade da salsicha, enrolando um fio em torno de cada um dos pregos e enfiando a outra extremidade dos fios em uma tomada na parede. (*Nota:* Não tente fazer isso! Você poderá receber um choque potencialmente fatal.) Ele conseguiu cozinhar a salsicha, porém as luzes de seu apartamento se apagaram. Explique por quê.

Q26.22 Quanto maior o diâmetro do fio usado na fiação de uma casa, maior é o valor da corrente máxima que pode ser transportada com segurança pelo fio. Por quê? A corrente máxima permitida depende do comprimento do fio? Ela depende do material com o qual o fio é fabricado? Explique seu raciocínio.

Exercícios

Seção 26.1 Resistores em série e em paralelo

26.1 Um fio uniforme de resistência R é cortado em três partes iguais. Uma das partes forma um círculo e é conectada entre as

outras duas partes (Figura 26.37). Qual é a resistência entre as extremidades opostas a e b?

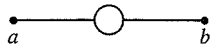


Figura 26.37 Exercício 26.1.

26.2 Um equipamento possui um resistor X que se projeta de uma abertura lateral. Esse resistor é conectado a outros três resistores, como indica a Figura 26.38. Um ohmímetro conectado através de a e b registra 2,0 Ω. Qual é a resistência de X?

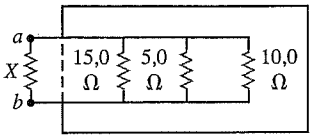


Figura 26.38 Exercício 26.2.

26.3 (a) Prove que, quando dois resistores são ligados em paralelo, a resistência equivalente da combinação é sempre menor do que a resistência de qualquer um dos resistores. (b) Generalize o resultado do item (a) para N resistores.

26.4 Um resistor de 32 Ω é ligado em paralelo a outro de 20 Ω e o conjunto é conectado a uma fonte de tensão cc de 240 V. (a) Qual é a resistência da ligação em paralelo? (b) Qual é a corrente total da combinação em paralelo? (c) Qual é a corrente que passa através de cada resistor?

26.5 Uma combinação triangular de resistores é indicada na Figura 26.39. Qual é a corrente que essa combinação consumirá de uma bateria de 35,0 V, com resistência interna desprezível, quando ela é conectada através de (a) ab; (b) bc; (c) ac? (d) Caso a bateria tenha uma resistência de 3,0 Ω, qual é a corrente que essa combinação consumirá, se a bateria for conectada através de bc?

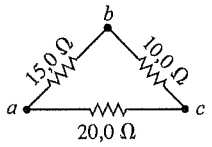


Figura 26.39 Exercício 26.5.

26.6 Para o circuito indicado na Figura 26.40, ambos os instrumentos são ideais, a bateria possui resistência interna desprezível e a leitura do amperímetro é igual a 1,25 A. (a) Qual é a leitura do voltímetro? (b) Qual é a fem $\mathcal{E}$ da bateria?

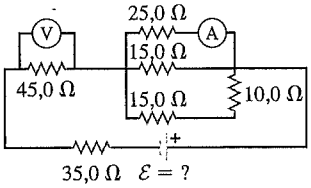


Figura 26.40 Exercício 26.6.

26.7 Para o circuito indicado na Figura 26.41, determine a leitura do amperímetro ideal, caso a bateria tivesse uma resistência interna de 3,26 Ω.

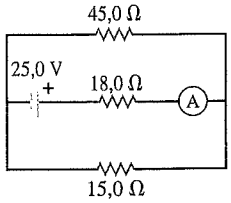


Figura 26.41 Exercício 26.7.

26.8 Três resistores, com resistências de 1,60 Ω, 2,40 Ω e 4,80 Ω, são ligados em paralelo a uma bateria de 28,0 V, que possui resistência interna desprezível. Calcule (a) a resistência equivalente da combinação; (b) a corrente através de cada resistor; (c) a corrente total através da bateria; (d) a voltagem através de cada resistor; (e) a energia dissipada em cada resistor. (f) Qual dos dois resistores dissipa mais energia, aquele que possui a maior resistência ou o de menor resistência? Explique por quê.

26.9 Agora os três resistores do Exercício 26.8 estão ligados em série na mesma bateria. Responda as mesmas perguntas para a nova situação.

26.10 Potência máxima de um resistor. A *potência máxima* especificada sobre o resistor é a maior potência que pode ser dissipada no resistor, sem que ele atinja uma temperatura demasiadamente elevada. (a) Se a potência máxima que um resistor de 15 kΩ pode suportar é igual a 5,0 W, qual é a diferença de potencial máxima permitida nos terminais do resistor? (b) Um resistor de 9,0 kΩ deve ser conectado a uma fonte de tensão de 120 V. Qual é a potência máxima necessária? (c) Um resistor de 100,0 Ω e outro de 150,0 Ω, ambos com potência máxima de 2,0 W, são conectados em série através de uma diferença de potencial variável. Qual deve ser a maior diferença de potencial, sem que ocorra superaquecimento em qualquer dos resistores, e qual é a taxa de calor gerada em cada resistor sob essas condições?

26.11 Calcule a resistência equivalente do circuito indicado na Figura 26.42 e determine a corrente que passa em cada resistor. A bateria possui resistência interna desprezível.

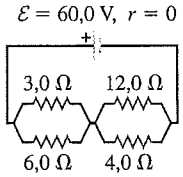


Figura 26.42 Exercício 26.11.

26.12 Calcule a resistência equivalente do circuito indicado na Figura 26.43 e a corrente que passa em cada resistor. A bateria possui resistência interna desprezível.

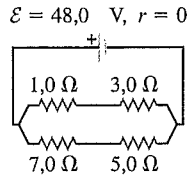


Figura 26.43 Exercício 26.12.

26.13 No circuito indicado na Figura 26.44, cada resistor representa uma lâmpada. Considere $\mathcal{E} = 9{,}0$ V e $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4{,}50$ Ω. (a) Determine a corrente em cada lâmpada. (b) Calcule a potência dissipada em cada lâmpada. Quais são as lâmpadas que brilham com mais intensidade? (c) A lâmpada com resistência R_4 é removida do circuito, deixando o fio interrompido. Agora qual é a corrente que passa a circular nas resistências restantes R_1, R_2 e R_3? (d) Depois que R_4 é removida, qual é a potência consumida em cada uma das lâmpadas restantes? (e) Depois que R_4 é removida, qual é a lâmpada que brilha com mais intensidade? Indique a(s) lâmpada(s) que deve(m) possuir brilho menos intenso. Explique por que existem efeitos diferentes para as diversas lâmpadas.

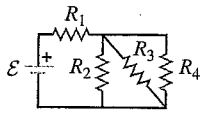


Figura 26.44 Exercício 26.13.

26.14 Considere o circuito indicado na Figura 26.45. A corrente que passa pelo resistor de 6,0 Ω é igual a 4,0 A, no sentido indicado. Quais são as correntes que passam pelos resistores de 25,0 Ω e 20,0 Ω?

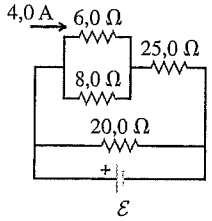


Figura 26.45 Exercício 26.14.

26.15 No circuito indicado na Figura 26.46, a voltagem através do resistor de 2,0 Ω é de 12,0 V. Indique a fem da bateria e a corrente que passa pelo resistor de 6,0 Ω?

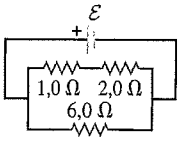


Figura 26.46 Exercício 26.15.

26.16 Uma lâmpada com três intensidades. Uma lâmpada possui somente dois filamentos, porém apresenta três posições de operação com diferentes brilhos (fraco, médio e forte). (a) Uma dada lâmpada com três intensidades é conectada a uma fonte de 120 V e pode dissipar 60 W, 120 W ou 180 W. Descreva como os dois filamentos são dispostos no bulbo e calcule a resistência de cada filamento. (b) Suponha que o filamento com resistência mais elevada se queime. Qual é a potência dissipada pela lâmpada em cada uma das três posições de operação? Qual deve ser o brilho (fraco, médio ou forte) em cada uma das três posições de operação? (c) Repita o item (b) supondo que o filamento com resistência menor se queime.

26.17 Lâmpadas em série e em paralelo. Duas lâmpadas possuem resistências de 400 Ω e 800 Ω. Supondo que as duas lâmpadas sejam conectadas em série a uma fonte de 120 V, calcule (a) a corrente que passa em cada lâmpada; (b) a potência dissipada em cada lâmpada e (c) a potência total dissipada nas duas lâmpadas. Agora as duas lâmpadas são conectadas em paralelo à fonte de 120 V. Calcule (d) a corrente que passa em cada lâmpada; (e) a potência dissipada em cada lâmpada; (f) a potência total dissipada nas duas lâmpadas. (g) Em cada situação qual é a lâmpada que brilha com mais intensidade? (h) Em qual caso o brilho combinado das duas lâmpadas possui mais intensidade?

26.18 Lâmpadas em série. Uma lâmpada de 60 W e 120 V e outra lâmpada de 200 W e 120 V são conectadas em série a uma fonte de 240 V. Sabemos que as resistências das lâmpadas não variam com a corrente. (*Nota:* A descrição da lâmpada fornece a potência que ela dissipa quando é ligada à diferença de potencial especificada; por exemplo, uma lâmpada de 25 W e 120 V dissipa uma potência de 25 W quando ligada a uma tensão de 120 V.) (a) Calcule a corrente que passa nas lâmpadas. (b) Determine a potência dissipada em cada lâmpada. Uma das lâmpadas se queimará rapidamente. Qual delas? Por quê?

26.19 No circuito da Figura 26.47, um resistor de 20 Ω está imerso em 100 g de água pura, contida em um recipiente de isopor isolante. Supondo que a água esteja inicialmente a 10,0 °C, quanto tempo levará para ela atingir a temperatura de 58,0 °C?

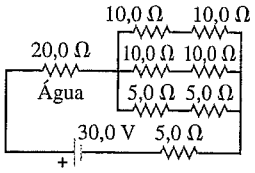


Figura 26.47 Exercício 26.19.

26.20 No circuito indicado na Figura 26.48, a taxa de dissipação da energia elétrica de R_1 é igual a 20,0 W. (a) Determine R_1 e R_2. (b) Qual é a fem da bateria? (c) Ache a corrente que passa por R_2 e pelo resistor de 10,0 Ω. (d) Calcule o consumo total de energia elétrica em todos os resistores e a energia elétrica fornecida pela bateria. Mostre que seus resultados estão de acordo com a conservação de energia.

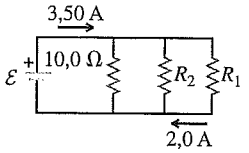


Figura 26.48 Exercício 26.20.

Seção 26.2 Leis de Kirchhoff

26.21 No circuito indicado na Figura 26.49, calcule (a) a corrente no resistor R; (b) a resistência R; (c) a fem desconhecida $\mathcal{E}$. (d) Se o circuito fosse cortado no ponto x, qual seria a nova corrente no resistor R?

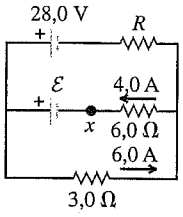


Figura 26.49 Exercício 26.21.

26.22 Calcule a fem $\mathcal{E}_1$ e a fem $\mathcal{E}_2$ no circuito da Figura 26.50 e a diferença de potencial do ponto b em relação ao ponto a.

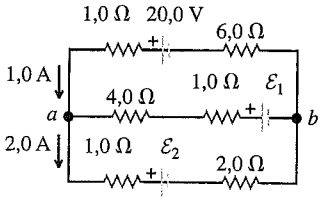


Figura 26.50 Exercício 26.22.

26.23 No circuito indicado na Figura 26.51, calcule (a) a corrente no resistor de 3,0 Ω; (b) a fem $\mathcal{E}_1$ e a fem $\mathcal{E}_2$; (c) a resistência R. Observe que foram fornecidas três correntes.

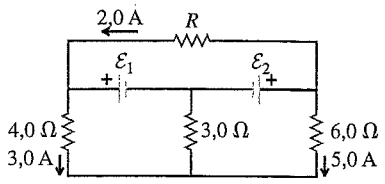


Figura 26.51 Exercício 26.23.

26.24 No circuito indicado na Figura 26.52, determine (a) a corrente em cada ramo; (b) a diferença de potencial V_{ab} do ponto a em relação ao ponto b.

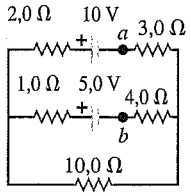


Figura 26.52 Exercícios 26.24, 26.25 e 26.26.

26.25 A bateria de 10,0 V indicada na Figura 26.52 é removida do circuito e reconectada com sua polaridade invertida, de modo que o terminal positivo fica perto do ponto a. O restante do circuito permanece como indicado na figura. Calcule (a) a corrente em cada ramo; (b) a diferença de potencial V_{ab} do ponto a em relação ao ponto b.

26.26 A bateria de 5,0 V indicada na Figura 26.52 é removida do circuito e substituída por uma bateria de 20,0 V, com seu terminal negativo perto do ponto b. O restante do circuito permanece como indicado na figura. Calcule (a) a corrente em cada ramo; (b) a diferença de potencial V_{ab} do ponto a em relação ao ponto b.

26.27 No circuito indicado na Figura 26.53, as baterias possuem resistência interna desprezível e ambos os instrumentos são ideais. Com a chave aberta, o voltímetro registra 15,0 V. (a) Ache a fem $\mathcal{E}$ da bateria. (b) Qual será a leitura do amperímetro quando a chave for fechada?

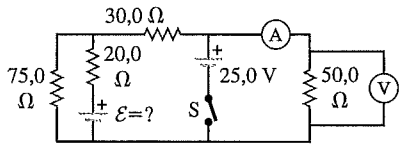


Figura 26.53 Exercício 26.27.

26.28 No circuito indicado na Figura 26.54, ambas as baterias possuem resistência interna desprezível e o amperímetro ideal registra 15,0 A. Ache a fem $\mathcal{E}$ da bateria. A polaridade indicada está correta?

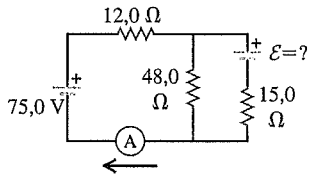


Figura 26.54 Exercício 26.28.

26.29 No circuito indicado na Figura 26.55, todos os instrumentos são ideais e a resistência interna das baterias é desprezível. (a) Calcule a leitura do voltímetro com a chave S aberta. Qual ponto tem potencial mais elevado: a ou b? (b) Com a chave fechada, determine a leitura do voltímetro e do amperímetro. Em qual sentido (para cima ou para baixo) a corrente passa pela chave?

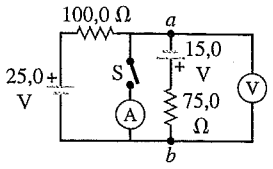


Figura 26.55 Exercício 26.29.

26.30 No circuito indicado na Figura 26.12 (Exemplo 26.6), o resistor de 2 Ω é substituído por um resistor de 1 Ω e o resistor central de 1 Ω (através do qual a corrente é igual a I_3) é substituído por um resistor de resistência desconhecida R. O restante do circuito permanece como indicado na figura. (a) Determine a corrente que passa em cada resistor. Faça um diagrama do circuito e assinale ao lado de cada resistor a corrente que passa através dele. (b) Calcule a corrente equivalente do circuito. (c) Encontre a diferença de potencial V_{ab}. (d) Suas respostas para os itens (a), (b) e (c) não dependem do valor de R. Explique por quê.

Seção 26.3 Instrumentos de medidas elétricas

26.31 A resistência da bobina de um galvanômetro é igual a 25,0 Ω e a corrente necessária para atingir uma deflexão até o fundo da escala é de 500 μA. (a) Mostre em um diagrama como converter o galvanômetro em um amperímetro capaz de fornecer uma leitura até o fundo da escala igual a 20,0 mA e calcule a resistência de shunt. (b) Mostre como converter o galvanômetro em um voltímetro capaz de fornecer uma leitura até o fundo da escala igual a 500 mV e calcule a resistência em série.

26.32 A resistência da bobina de um galvanômetro é igual a 9,36 Ω e uma corrente de 0,0224 A produz nele uma deflexão até o fundo da escala. O único shunt disponível possui resistência de 0,0250 Ω. Qual é o valor da resistência R que deve ser conectada em série com a bobina? (Veja a Figura 26.56.)

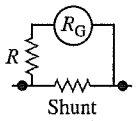


Figura 26.56 Exercício 26.32.

26.33 Um circuito é composto de uma combinação em série de resistores de 6,0 kΩ e 5,0 kΩ, conectados através de uma bateria de 50,0 V, com resistência interna desprezível. Você deseja medir a real diferença de potencial (ou seja, a diferença de potencial sem a presença do instrumento) através do resistor de 5,0 kΩ, usando um voltímetro com resistência interna igual a 10,0 kΩ. (a) Qual é a diferença de potencial medida pelo voltímetro através do resistor de 5,0 kΩ? (b) Qual é a *real* diferença de potencial através desse resistor, quando o instrumento não está presente? (c) Qual é a porcentagem de erro da leitura do voltímetro em relação à real diferença de potencial?

26.34 Um galvanômetro com resistência de 25,0 Ω possui uma resistência shunt de 1,0 Ω instalada, para convertê-lo em um amperímetro. O instrumento é então usado para medir a corrente em um circuito que consiste de um resistor de 15,0 Ω conectado através dos terminais de uma bateria de 25,0 V, com resistência interna desprezível. (a) Qual é a corrente medida pelo amperímetro? (b) Qual deve ser a *real* corrente no circuito (ou seja, a corrente sem a presença do amperímetro)? (c) Qual é a porcentagem de erro da leitura do amperímetro em relação à *real* diferença de potencial?

26.35 Considere o circuito potenciômetro indicado na Figura 26.19a. O resistor entre a e b é um fio uniforme, de comprimento l, com um contato deslizante c, situado a uma distância x de b. Uma fem desconhecida $\mathcal{E}_2$ é medida deslizando-se o contato até que a leitura do galvanômetro indique zero. (a) Mostre que nessas circunstâncias a fem desconhecida é dada por $\mathcal{E}_2 = (x/l)\,\mathcal{E}_1$. (b) Por que a resistência interna do galvanômetro não é importante? (c) Considere $\mathcal{E}_1 = 9{,}15$ V e $l = 1{,}0$ m. A leitura do galvanômetro G é zero quando $x = 0{,}365$ m. Qual é o valor da fem $\mathcal{E}_2$?

26.36 No ohmímetro indicado na Figura 26.17, a bobina do instrumento possui resistência $R = 15{,}0\ \Omega$ e a corrente que produz uma deflexão completa na sua escala é $I_{fe} = 3{,}60$ mA. A fonte é uma pilha de lanterna com fem $\mathcal{E} = 1{,}50$ V e resistência interna desprezível. O ohmímetro deve indicar uma corrente igual à metade da corrente que produz deflexão completa em sua escala quando está conectado a um resistor com $R = 600\ \Omega$. Qual é o valor da resistência em série R_s necessária?

26.37 No ohmímetro indicado na Figura 26.57, M é um instrumento de medida de 2,50 mA com resistência interna de 65,0 Ω. (Um medidor de 2,50 mA é aquele no qual ocorre uma deflexão completa em sua escala quando existe uma corrente de 2,50 mA passando através dele.) A bateria B possui uma fem igual a 1,52 V e resistência interna desprezível. Escolhemos o valor de R de tal modo que, quando os terminais a e b estão em curto ($R_x = 0$), ocorre a deflexão completa em sua escala. Quando a e b estão abertos ($R_x = \infty$), a leitura do instrumento de medida indica zero. (a) Qual é a resistência do resistor R? (b) Para que corrente a resistência R_x é igual a 200 Ω? (c) Para que valores de R_x a deflexão da escala corresponde a $\left(\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{4}\right)$ da deflexão completa da escala, sabendo que a deflexão é proporcional à corrente que passa no galvanômetro?

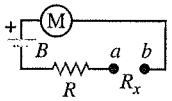


Figura 26.57 Exercício 26.37.

Seção 26.4 Circuitos *R-C*

26.38 Um capacitor de 4,60 μF inicialmente descarregado é conectado em série a um resistor de 7,50 kΩ e a fonte de fem $\mathcal{E} = 125$ V e que possui resistência interna desprezível. Imediatamente após a conexão do circuito, qual é (a) a queda de tensão através do capacitor? (b) A queda de tensão através do resistor? (c) A carga do capacitor? (d) A corrente através do resistor? (e) Depois de muito tempo após a ligação do circuito (depois de várias constantes de tempo), quais são os valores das quatro grandezas precedentes?

26.39 Um capacitor é carregado até um potencial de 12,0 V e a seguir é conectado a um voltímetro com resistência interna igual a 3,40 MΩ. Depois de 4,0 s, a leitura do voltímetro indica 3,0 V. Qual é (a) o valor da capacitância e (b) a constante de tempo do circuito?

26.40 Um capacitor de 12,4 μF é conectado através de um resistor de 0,895 MΩ a uma diferença de potencial constante de 60,0 V. (a) Calcule a carga do capacitor nos seguintes instantes depois que a conexão é feita: 0; 5,0 s; 10,0 s; 20,0 s e 100,0 s. (b) Calcule as correntes de carga do capacitor nos mesmos instantes. (c) Faça um gráfico para os itens (a) e (b) para t entre 0 e 20 s.

26.41 No circuito indicado na Figura 26.58, ambos os capacitores têm carga inicial de 45,0 V. (a) Quanto tempo após a chave S ser fechada o potencial através de cada capacitor será reduzido a 10,0 V e (b) qual será a corrente nesse instante?

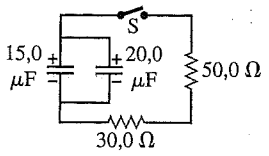


Figura 26.58 Exercício 26.41.

26.42 Um resistor e um capacitor são conectados em série a uma fonte fem. A constante de tempo para o circuito é de 0,870 s. (a) Um segundo capacitor, idêntico ao primeiro, é acrescentado em série. Qual é a constante de tempo para esse novo circuito? (b) No circuito original, um segundo capacitor, idêntico ao primeiro, é conectado em paralelo ao primeiro capacitor. Qual é a constante de tempo para esse novo circuito?

26.43 Uma fonte fem com $\mathcal{E} = 120$ V, um resistor com $R = 80{,}0\ \Omega$ e um capacitor com $C = 4{,}0$ μF são conectados em série. À medida que o capacitor é carregado, quando a corrente no resistor for igual a 0,9 A, qual será o módulo da carga em cada placa do capacitor?

26.44 Um capacitor de 1,50 μF está sendo carregado através de um resistor de 12,0 Ω ligado a uma bateria de 10,0 V. Qual será a corrente quando o capacitor adquirir $\frac{1}{4}$ da sua carga máxima? Será equivalente a $\frac{1}{4}$ da corrente máxima?

26.45 No circuito indicado na Figura 26.59, cada capacitor possui carga inicial de módulo igual a 3,50 nC em suas placas. Após a chave S ser fechada, qual será a corrente no circuito no instante em que os capacitores tiverem perdido 80,0% da energia inicial armazenada?

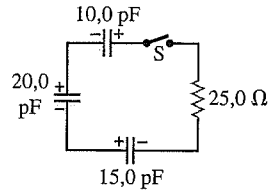


Figura 26.59 Exercício 26.45.

26.46 Um capacitor de 12,0 μF é carregado a um potencial de 50,0 V e depois descarregado através de um resistor de 175 Ω. Quanto tempo leva para o capacitor perder (a) metade da carga e (b) metade da energia armazenada?

26.47 No circuito indicado na Figura 26.60, os capacitores estão inicialmente descarregados, a bateria não possui resistência interna e o amperímetro é ideal. Ache a leitura do amperímetro (a) logo após a chave S ser fechada e (b) após a chave estar fechada há muito tempo.

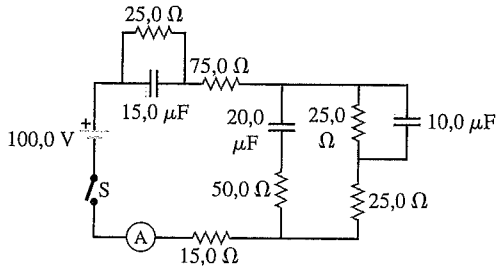


Figura 26.60 Exercício 26.47.

26.48 No circuito indicado na Figura 26.61, $C = 5{,}90$ μF, $\mathcal{E} = 28{,}0$ V e a fonte da fem possui resistência interna desprezível. Inicialmente, o capacitor está descarregado e a chave S está na posição 1. A seguir, a chave S é colocada na posição 2, de modo que o capacitor

começa a se carregar. (a) Após muito tempo depois que a chave é colocada na posição 2, qual é a carga do capacitor? (b) Verifica-se que a carga do capacitor é igual a 110 μC cerca de 3,0 ms após a chave ser colocada na posição 2. Qual é o valor da resistência R? (c) Quanto tempo depois que a chave é colocada na posição 2 a carga do capacitor é igual a 99,0% do valor final da carga encontrado no item (a)?

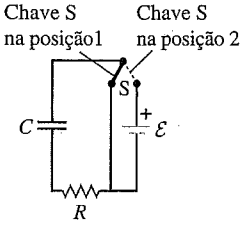


Figura 26.61 Exercícios 26.48 e 26.49.

26.49 Um capacitor com $C = 1{,}50 \times 10^{-5}$ F é conectado em série, como indica a Figura 26.61, a um resistor $R = 980\ \Omega$ e a uma fonte de fem $\mathcal{E} = 18{,}0$ V, cuja resistência interna é desprezível. Inicialmente, o capacitor está descarregado e a chave S está na posição 1. A seguir, a chave S é colocada na posição 2, de modo que o capacitor começa a se carregar. Depois de permanecer na posição 2 durante 10,0 ms, a chave é colocada novamente na posição 1, de modo que o capacitor começa a se descarregar. (a) Calcule a carga do capacitor imediatamente *antes* de a chave ser colocada novamente na posição 1. (b) Determine a queda de voltagem nos terminais do resistor e nos terminais do capacitor no instante mencionado no item (a). (c) Calcule a queda de voltagem nos terminais do resistor e nos terminais do capacitor imediatamente *depois* que a chave é retirada da posição 2 e colocada novamente na posição 1. (d) Calcule a carga do capacitor 10,0 ms depois que a chave sai da posição 2 e volta para a posição 1.

Seção 26.5 Sistemas de distribuição de potência

26.50 O aquecedor de um secador elétrico possui uma potência máxima especificada igual a 4,1 kW para uma fonte de 240 V. (a) Qual é a corrente que passa no elemento aquecedor? Um fio com calibre 12 possui diâmetro suficiente para fornecer essa corrente? (b) Qual é a resistência do aquecedor em sua temperatura de operação? (c) Supondo que cada kWh custe 40 centavos, quantos reais são necessários para operar o secador durante uma hora?

26.51 Um aquecedor elétrico de 1500 W é ligado a uma tomada de 120 V e o circuito possui um disjuntor de 20 A. Você conecta um secador de cabelo na mesma tomada. Ele possui quatro posições com potências máximas iguais a 600 W, 900 W, 1200 W e 1500 W. Você começa com o secador de cabelo na posição de 600 W e vai aumentando a potência até que o disjuntor salta. Qual é essa potência que faz o disjuntor saltar?

26.52 Quantas lâmpadas de 90 W e 120 V podem ser conectadas a uma fonte de 120 V com disjuntor de 20 A, sem fazer esse disjuntor saltar? (Veja a nota do Exercício 26.18.)

26.53 O elemento aquecedor de uma estufa elétrica é constituído por um fio envolvido por um material eletricamente isolado que, por sua vez, está no interior de um invólucro metálico. O fio aquecedor possui resistência de 20 Ω na temperatura ambiente (23,0 °C) e um coeficiente de temperatura da resistividade $\alpha = 2{,}8 \times 10^{-3}\ (°C)^{-1}$. O elemento aquecedor opera em uma linha de 120 V. (a) Quando o elemento aquecedor é inicialmente ligado, qual é a corrente que ele consome e qual é a potência nele dissipada? (b) Quando o elemento aquecedor atinge a temperatura de operação de 280 °C, qual é a corrente que ele consome e a potência nele dissipada?

Problemas

26.54 Necessitamos de um resistor de 400 Ω e 2,4 W, porém dispomos apenas de alguns resistores de 400 Ω e 1,2 W. (Veja o Exercício 26.10.) (a) Quais são as duas combinações de resistores disponíveis que fornecem a resistência e a potência desejadas? (b) Sabendo que essas combinações dissipam uma potência total de 2,4 W, qual é a potência dissipada em cada resistor para cada combinação determinada no item (a)?

26.55 Um cabo de 20,0 m de comprimento consiste de um núcleo cilíndrico em níquel maciço, com 10,0 cm de diâmetro, envolto por um casca cilíndrica em cobre, com 10,0 cm de diâmetro interno e 20,0 cm de diâmetro externo. A resistividade do níquel é igual a $7{,}8 \times 10^{-3}$ Ω m. (a) Qual é a resistência desse cabo? (b) Se considerarmos esse cabo como um material único, qual é a sua resistividade equivalente?

26.56 Dois fios idênticos de 1,0 Ω são colocados lado a lado e soldados, de modo a estarem em contato por metade dos seus comprimentos. Qual é a resistência equivalente dessa combinação?

26.57 As duas lâmpadas mencionadas no Exemplo 26.2 (Seção 26.1) são ligadas em paralelo a outra fonte, de resistência interna igual a 0,8 Ω e cuja fem é dada por $\mathcal{E} = 8{,}0$ V. Cada lâmpada possui resistência $R = 2{,}0\ \Omega$ (supostamente independente da corrente que passa pela lâmpada). (a) Calcule a corrente que passa em cada lâmpada, a diferença de potencial nos terminais de cada lâmpada e a potência fornecida para cada uma. (b) Suponha que uma das lâmpadas se queime, de modo que o filamento seja interrompido e não passe mais corrente através dele. Determine a potência fornecida para a lâmpada restante. O brilho da lâmpada restante aumenta ou diminui em relação a seu brilho existente antes de a outra lâmpada se queimar?

26.58 Cada um dos três resistores indicados na Figura 26.62 possui uma resistência de 2,4 Ω e pode consumir uma potência máxima de 36 W sem se tornar excessivamente quente. Qual é a potência máxima que o circuito pode dissipar?

Figura 26.62 Problema 26.58.

26.59 Caso um ohmímetro seja conectado entre os pontos a e b em cada circuito indicado na Figura 26.63, qual será a sua leitura?

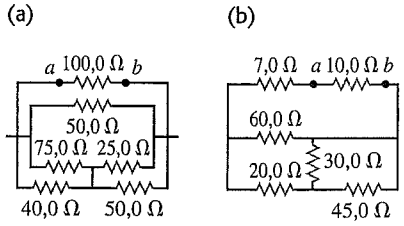


Figura 26.63 Problema 26.59.

26.60 No circuito indicado na Figura 26.64, um resistor de 20,0 Ω está inserido em um grande bloco de gelo a 0,0 °C, e a bateria possui resistência interna desprezível. Qual é a taxa (em g/s) em que esse circuito derreterá o gelo? (O calor latente de fusão para o gelo é de $3{,}34 \times 10^5$ J/kg.)

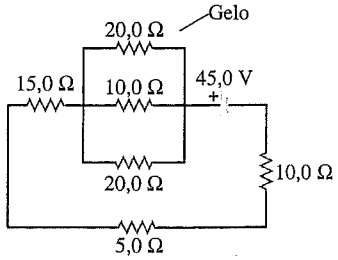


Figura 26.64 Problema 26.60.

26.61 Calcule as correntes I_1, I_2 e I_3 indicadas na Figura 26.65.

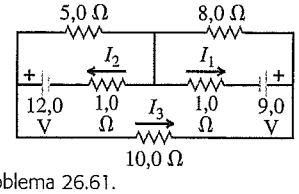


Figura 26.65 Problema 26.61.

26.62 Qual deve ser o valor da fem $\mathcal{E}$ indicada na Figura 26.66 para que a corrente que passa no resistor de 7,0 Ω seja igual a 1,80 A? Cada fonte de fem possui resistência interna desprezível.

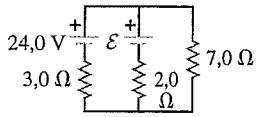


Figura 26.66 Problema 26.62.

26.63 Calcule a corrente que passa em cada um dos três resistores indicados na Figura 26.67. Cada fonte de fem possui resistência interna desprezível.

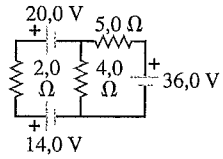


Figura 26.67 Problema 26.63.

26.64 (a) Calcule a corrente que passa em cada resistor e na bateria do circuito indicado na Figura 26.68. (b) Qual é a resistência equivalente do circuito?

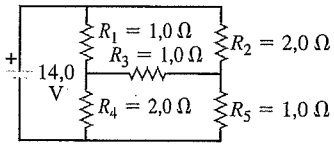


Figura 26.68 Problema 26.64.

26.65 (a) Calcule o potencial do ponto *a* em relação ao ponto *b* na Figura 26.69. (b) Sabendo que os pontos *a* e *b* são conectados por um fio com resistência desprezível, calcule a corrente que passa na bateria de 12,0 V.

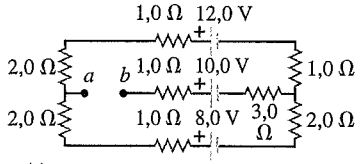


Figura 26.69 Problema 26.65.

26.66 Considere o circuito indicado na Figura 26.70: (a) Qual deve ser a fem $\mathcal{E}$ da bateria para que uma corrente de 2,0 A passe pela bateria de 5,0 V, conforme indicado? A polaridade da bateria está correta conforme indicado? (b) Quanto tempo leva para 60,0 J de energia termal ser produzida no resistor de 10,0 Ω?

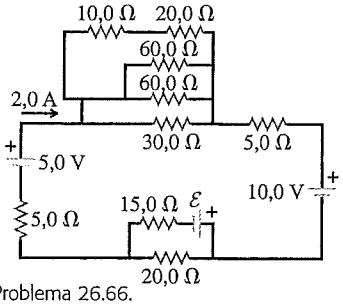


Figura 26.70 Problema 26.66.

26.67 No circuito indicado na Figura 26.71, a corrente que passa pela bateria de 12,0 V é medida em 70,6 mA no sentido indicado. Qual é a voltagem nos terminais V_{ab} da bateria de 24,0 V?

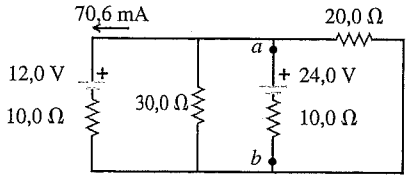


Figura 26.71 Problema 26.67.

26.68 No circuito indicado na Figura 26.72, todos os resistores são classificados a uma potência máxima de 1,0 W. Qual é a fem $\mathcal{E}$ máxima que a bateria pode ter, sem queimar algum resistor?

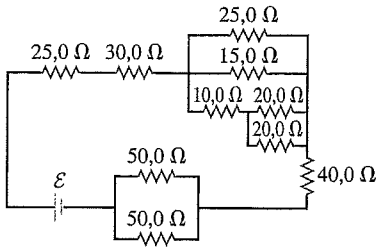


Figura 26.72 Problema 26.68.

26.69 No circuito indicado na Figura 26.73, a corrente na bateria de 20,0 V é igual a 5,0 A no sentido indicado, e a voltagem através do resistor de 8,0 Ω é de 16,0 V, com a extremidade inferior do resistor a uma potência mais elevada. Ache (a) a fem (incluindo sua polaridade) da bateria X; (b) a corrente *I* que passa pela bateria de 200,0 V (incluindo seu sentido); (c) a resistência *R*.

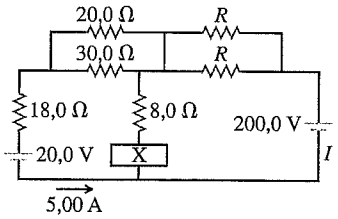


Figura 26.73 Problema 26.69.

26.70 Três resistores idênticos são conectados em série. Quando uma certa diferença de potencial é aplicada através da combinação, a potência total dissipada é igual a 27 W. Qual seria a potência total dissipada se os três resistores fossem conectados em paralelo através da mesma diferença de potencial?

26.71 Um resistor R_1 consome uma energia elétrica P_1, quando conectada a uma fem $\mathcal{E}$. Quando o resistor R_2 é conectado à mesma fem, ela consome energia elétrica P_2. Em termos de P_1 e P_2, qual é a energia elétrica total consumida, quando ambos estão conectados a essa fonte fem (a) em paralelo e (b) em série?

26.72 O capacitor indicado na Figura 26.74 está inicialmente descarregado. A chave está fechada no instante $t = 0$. (a) Imediatamente após a chave ser fechada, qual é a corrente que passa através de cada resistor? (b) Qual é a carga final sobre o capacitor?

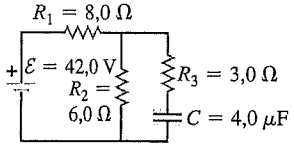


Figura 26.74 Problema 26.72.

26.73 A Figura 26.75 mostra uma convenção geralmente usada nos diagramas de circuitos. A bateria (ou outra fonte de tensão) não é mostrada explicitamente. Fica implícito que o ponto no topo do diagrama, indicado com o dístico '36,0 V', está conectado ao terminal positivo de uma bateria de 36,0 V, que possui resistência interna desprezível; e o ponto indicado na parte inferior simboliza a 'terra' e está conectado ao terminal negativo da bateria. Embora não indicado explicitamente, o circuito é completado pela bateria. (a) Qual é a diferença de potencial V_{ab} do ponto a em relação ao ponto b quando a chave S está aberta? (b) Qual é a corrente que passa pela chave S quando ela está fechada? (c) Qual é a resistência equivalente do circuito quando a chave S está fechada?

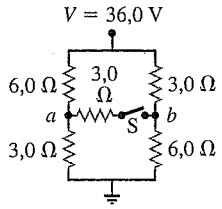


Figura 26.75 Problema 26.73.

26.74 (Veja o Problema 26.73.) (a) Qual é o potencial do ponto a em relação ao ponto b na Figura 26.76 quando a chave S está aberta? (b) Qual dos pontos, a ou b, possui o potencial mais elevado? (c) Qual é o potencial final do ponto b em relação à terra quando a chave S está fechada? (d) Como varia a carga de cada capacitor quando a chave S é fechada?

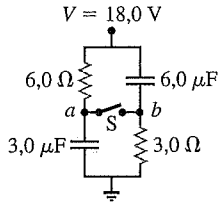


Figura 26.76 Problema 26.74.

26.75 Um amperímetro com diversas escalas. A resistência da bobina móvel do galvanômetro G, indicado na Figura 26.77, é igual a 48,0 Ω e a deflexão até o fundo da escala ocorre quando a corrente é de 0,020 A. Quando o instrumento está conectado ao circuito que está sendo medido, existe uma conexão com o terminal designado pelo sinal + e a outra conexão depende do intervalo de corrente desejado. Calcule os módulos das resistências R_1, R_2 e R_3 necessárias para que o galvanômetro seja convertido em um amperímetro com diversas escalas, que produz deflexão até o fundo de cada escala para correntes de 10,0 A, 1,0 A e 0,100 A.

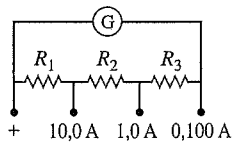


Figura 26.77 Problema 26.75.

26.76 Um voltímetro com diversas escalas. A Figura 26.78 mostra a fiação interna de um voltímetro com 'três escalas', cujas conexões são o terminal +, 3,0 V, 15,0 V e 150 V. Quando o instrumento está ligado ao circuito que está sendo medido, existe uma conexão com o terminal designado pelo sinal + e a outra conexão depende do intervalo desejado da diferença de potencial a ser medida. A resistência R_G da bobina móvel é igual a 40,0 Ω e a deflexão até o fundo da escala ocorre quando a corrente é de 1,0 mA. Calcule as resistências R_1, R_2 e R_3 e a resistência total do instrumento em cada uma das suas escalas.

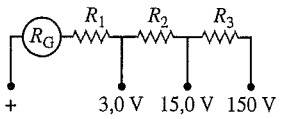


Figura 26.78 Problema 26.76.

26.77 O ponto a na Figura 26.79 é mantido a um potencial constante de 400 V acima do potencial da terra. (Veja o Problema 26.73.) (a) Qual é a leitura do voltímetro com a escala apropriada quando uma resistência igual a $5,0 \times 10^4$ Ω está ligada entre o ponto b e a terra? (b) Qual é a leitura do voltímetro quando a resistência é de $5,0 \times 10^6$ Ω? (c) Qual será a leitura do voltímetro quando a resistência for infinita?

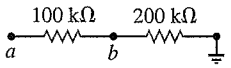


Figura 26.79 Problema 26.77.

26.78 Um voltímetro de 150 V possui resistência igual a 30000 Ω. Quando ele está conectado em série através de uma fonte de 110 V a uma resistência grande R, a leitura indica 68 V. Calcule o valor da resistência R.

26.79 A ponte de Wheatstone. O circuito indicado na Figura 26.80 denomina-se *ponte de Wheatstone* e é usado para determinar uma resistência desconhecida X por comparação com três resistores M, N e P, cujas resistências podem variar. Para cada conjunto, a resistência de cada um desses resistores pode ser conhecida com precisão. Com as chaves K_1 e K_2 fechadas, fazemos variar essas resistências até que a corrente indicada no galvanômetro seja igual a zero; dizemos, então, que a ponte está *equilibrada*. (a) Mostre que, quando isso ocorre, a resistência desconhecida é dada por $X = MP/N$. (Essa técnica possibilita uma precisão muito grande para a comparação de resistores.) (b) Sabendo que o galvanômetro indica deflexão igual a zero quando $M = 850,0$ Ω, $N = 15,0$ Ω e $P = 33,48$ Ω, qual é o valor da resistência desconhecida X?

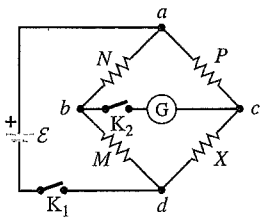


Figura 26.80 Problema 26.79.

26.80 Um certo galvanômetro possui resistência de 65,0 Ω e indica uma deflexão até o fundo da escala quando passa uma corrente de 1,50 mA em sua bobina. Ele deve ser substituído por um segundo galvanômetro, que possui resistência de 38,0 Ω e que indica uma deflexão até o fundo da escala quando passa uma corrente de 3,60 μA em sua bobina. Projete um circuito incorporando o segundo galvanômetro, de tal modo que a resistência equivalente do circuito seja igual à resistência do primeiro galvanômetro; e que a deflexão até o fundo da escala do segundo galvanômetro ocorra quando a corrente que passa no circuito for igual à corrente que produz deflexão até o fundo da escala do primeiro galvanômetro.

26.81 Um resistor de 224 Ω e outro de 589 Ω são ligados em série a uma fonte de 90,0 V. (a) Qual é a voltagem nos terminais de cada resistor? (b) Um voltímetro conectado nos terminais do resistor de 224 Ω indica uma leitura de 23,8 V. Calcule a resistência do voltímetro. (c) Determine a leitura do mesmo voltímetro quando ele é conectado nos terminais do resistor de 589 Ω. (d) As leituras indicadas pelo voltímetro são menores do que as voltagens 'verdadeiras' (ou seja, aquelas que existem quando o voltímetro não está presente). Seria possível projetar um voltímetro capaz de fornecer uma leitura *maior* do que a voltagem 'verdadeira'? Explique.

26.82 Um capacitor de 2,36 μF, inicialmente descarregado, é conectado em série a um resistor de 4,26 Ω e a uma fonte de fem $\mathcal{E}$ = 120 V, que possui resistência interna desprezível. (a) Imediatamente após a conexão do circuito, qual é (i) a taxa com a qual a energia elétrica está sendo dissipada no resistor? (ii) a taxa com a qual a energia elétrica armazenada no capacitor está aumentando? (iii) a potência elétrica líquida fornecida pela fonte? Como se comparam as respostas dos itens (i), (ii) e (iii)? (b) Responda todas as perguntas do item (a) para um tempo muito longo depois que o circuito é conectado. (c) Responda todas as perguntas do item (a) no instante para o qual a carga do capacitor é a metade de seu valor final.

26.83 Um capacitor inicialmente descarregado é conectado em série a um resistor e uma fonte de fem $\mathcal{E}$ = 110 V, que possui resistência interna desprezível. Imediatamente após a ligação do circuito, a corrente que passa no resistor é igual a 6,5 × 10^{-5} A. A constante de tempo do circuito é de 6,2 s. Calcule a resistência do resistor e a capacitância do capacitor.

26.84 Um resistor com R = 850 Ω é conectado com as placas de um capacitor carregado, cuja capacitância é dada por C = 4,62μF. Imediatamente antes de a conexão ser feita, a carga no capacitor é igual a 8,10 mC. (a) Qual é a energia armazenada inicialmente no capacitor? (b) Qual é a potência elétrica dissipada no resistor imediatamente após a conexão ser feita? (c) Qual é a potência elétrica dissipada no resistor no instante em que a energia armazenada no capacitor se reduziu à metade do valor calculado no item (a)?

26.85 Estritamente falando, a Equação (26.16) mostra que seria necessário um tempo *infinito* para descarregar completamente um capacitor. Contudo, na prática, podemos considerar um capacitor completamente descarregado depois de um intervalo de tempo finito. Para exemplificar, considere um capacitor com capacitância C conectado a um resistor R e suponha que ele esteja completamente descarregado quando sua carga q for igual a somente um elétron. (a) Calcule o tempo necessário para atingir esse estado considerando C = 0,920 μF, R = 670 kΩ e Q_0 = 7,0 μC. A quantas constantes de tempo isso corresponde? (b) Para um dado valor de Q_0, o tempo necessário para atingir esse estado é sempre igual ao mesmo número de constantes de tempo, independentemente dos valores de C e de R? Por quê?

26.86 Um circuito R-C possui uma constante de tempo RC. (a) Quando o circuito está descarregando, quanto tempo levará para a energia armazenada ser reduzida a $1/e$ do seu valor inicial? (b) Quando ele está carregando, quanto tempo levará para a energia armazenada atingir $1/e$ do seu valor máximo?

26.87 A corrente no processo de carga de um capacitor é dada pela Equação (26.13). (a) A potência instantânea fornecida pela bateria é igual a $\mathcal{E}i$. Integre essa expressão para calcular a energia total fornecida pela bateria. (b) A potência total dissipada no resistor é igual a i^2R. Integre essa expressão para calcular a energia total dissipada no resistor. (c) Calcule a energia final armazenada no capacitor e mostre que ela é igual à energia total fornecida pela bateria menos a energia dissipada no resistor, obtidas nos itens (a) e (b). (d) Que fração da energia fornecida pela bateria é armazenada no capacitor? Como essa fração depende de R?

26.88 Usando a Equação (26.17) para a corrente durante o processo de descarga do capacitor, deduza uma expressão para a potência instantânea $P = i^2R$ no resistor. (b) Integre a expressão de P para calcular a energia total dissipada no resistor e mostre que ela é igual à energia total armazenada inicialmente no capacitor.

Problemas desafiadores

26.89 De acordo com o teorema da superposição, a resposta (corrente) em um circuito é proporcional ao estímulo (voltagem) que a produz. Isso é verdade mesmo quando existem diversas fontes no circuito. Podemos aplicar esse teorema para analisar um circuito sem que seja preciso usar as leis de Kirchhoff, considerando as correntes no circuito como sendo a superposição das correntes oriundas da ação de cada fonte, independentemente das outras. Sendo assim, o circuito pode ser analisado calculando-se resistências equivalentes em vez de usar o método (algumas vezes) mais complicado fornecido pelas leis de Kirchhoff. Além disso, aplicando o teorema da superposição, podemos verificar como a modificação de uma fonte em uma parte do circuito pode afetar as correntes em todas as partes do circuito, sem que seja necessário usar as leis de Kirchhoff para recalcular todas as correntes. Considere o circuito indicado na Figura 26.81. Caso o circuito fosse redesenhado com as fontes de 55,0 V e 57,0 V substituídas por curtos-circuitos, o circuito poderia ser analisado pelo método das resistências equivalentes sem empregar o método fornecido pelas leis de Kirchhoff; e a corrente em cada ramo poderia ser determinada de modo simples. Analogamente, redesenhando o circuito com as fontes de 92,0 V e 55,0 V substituídas por curtos-circuitos, o circuito poderia também ser analisado de modo simples. Finalmente, redesenhando o circuito com as fontes de 92,0 V e 57,0 V substituídas por curtos-circuitos, o circuito poderia ser novamente analisado de modo simples. Superpondo-se as três correntes obtidas em cada um dos ramos usando-se os três circuitos simplificados, a corrente efetiva de cada ramo pode ser calculada. (a) A partir das leis de Kirchhoff, calcule as correntes nos ramos com os resistores de 140,0 Ω, 210,0 Ω e 35,0 Ω. (b) Usando um circuito semelhante ao da Figura 26.81, porém com as fontes de 55,0 V e 57,0 V substituídas por curtos-circuitos, determine a corrente em cada resistência. (c) Repita o procedimento do item (b) com as fontes de 92,0 V e 55,0 V substituídas por curtos-circuitos, mantendo intacta a fonte de 57,0 V. (d) Repita o procedimento do item (b) com as fontes de 92,0 V e 57,0 V substituídas por curtos-circuitos, mantendo intacta a fonte de 55,0 V. (e) Verifique o teorema da superposição comparando as correntes obtidas nos itens (b), (c) e (d) com as obtidas no item (a). (f) Se a fonte de 57,0 V fosse substituída por uma fonte de 80,0 V, quais seriam as novas correntes em todos os ramos do circuito? (*Sugestão*: usando o teorema da superposição, calcule novamente as correntes obtidas na parte (c) lembrando que essas correntes devem ser proporcionais ao valor da fem da fonte substituída. A seguir, superponha as novas correntes com aquelas obtidas nos itens (b) e (d).)

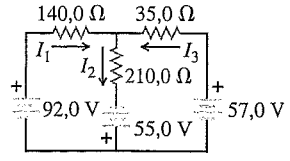


Figura 26.81 Problema desafiador 26.89.

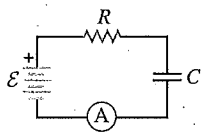


Figura 26.82 Problema desafiador 26.90.

26.90 Um capacitor de alarme contra roubo. A capacitância de um capacitor pode ser alterada por um material dielétrico que, embora fora do capacitor, esteja suficientemente próximo do capacitor para ser polarizado pelo campo elétrico existente nas bordas de um capacitor carregado. Esse efeito é da ordem de picofarads (pF), porém ele pode ser usado com um circuito eletrônico apropriado para detectar uma variação do material dielétrico que está nas vizinhanças do capacitor. Tal material dielétrico poderia ser o corpo humano, e esse efeito poderia ser usado para projetar um alarme contra ladrões. Considere o circuito simples indicado na Figura 26.82. A fonte de tensão possui fem $\mathcal{E} = 1000$ V e o capacitor apresenta capacitância $C = 10{,}0$ pF. O circuito eletrônico para detectar a corrente, representado por um amperímetro no diagrama, possui resistência desprezível, sendo capaz de detectar uma corrente da ordem de pelo menos 1,0 μA e que persista por um tempo de pelo menos 200 μs depois que a capacitância mudar repentinamente de C para C'. O alarme contra ladrões é projetado para ser ativado quando a capacitância varia de 10%. (a) Determine a carga no capacitor de 10,0 pF quando ele está plenamente carregado. (b) Supondo que o capacitor esteja plenamente carregado antes de o intruso ser detectado e desprezando o tempo necessário para produzir a variação de capacitância de 10%, deduza uma equação que forneça a corrente que passa em R em função do tempo t desde o momento em que a capacitância foi alterada. (c) Determine o intervalo de valores para os quais a resistência R satisfaça as condições especificadas do alarme contra ladrões. O que ocorreria se o valor de R fosse demasiadamente pequeno? E se fosse muito grande? (*Sugestão*: não há como resolver analiticamente o problema, porém é possível usar um método numérico. Expresse o valor de R como uma função logarítmica de R mais grandezas conhecidas. Comece com um valor estimado de R e calcule pela expressão um novo valor. Continue esse procedimento até obter um valor de R com três algarismos significativos.)

26.91 Malha infinita. A rede com os resistores R_1 e R_2 indicados na Figura 26.83 se estende até o infinito pelo lado direito. Prove que a resistência total R_T dessa rede infinita é dada por

$$R_T = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$$

(*Sugestão*: uma vez que a rede se estende até o infinito, a resistência da rede situada à direita dos pontos c e d também é igual a R_T.)

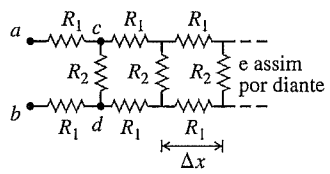


Figura 26.83 Problemas desafiadores 26.91 e 26.93.

26.92 Suponha que um resistor com resistência R esteja sobre cada aresta de um cubo (um total de 12 resistores) e que os resistores sejam conectados através dos vértices do cubo. Calcule a resistência equivalente entre dois vértices opostos ao longo da diagonal do cubo (pontos a e b indicados na Figura 26.84).

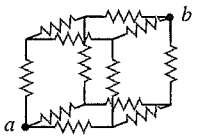
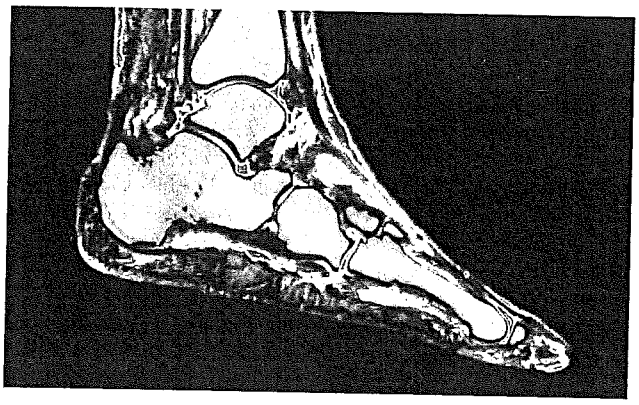


Figura 26.84 Problema desafiador 26.92.

26.93 Axônios e cadeia atenuadora. A rede que se estende até o infinito na Figura 26.83 denomina-se *cadeia atenuadora*, uma vez que nessa cadeia de resistores a diferença de potencial entre o fio superior e o fio inferior diminui, ou se atenua, ao longo do comprimento da cadeia. (a) Mostre que, se a diferença de potencial entre os pontos a e b indicados na Figura 26.83 é V_{ab}, então a diferença de potencial entre os pontos c e d é dada por $V_{cd} = V_{ab}/(1 + \beta)$, em que $\beta = 2R_1(R_T + R_2)/R_TR_2$ e R_T, a resistência total da rede, foi obtida no Problema Desafiador 26.91. (Veja a sugestão dada naquele problema.) (b) Se a diferença de potencial entre os terminais a e b da extremidade esquerda da rede na Figura 26.83 for V_0, mostre que a diferença de potencial entre os pontos do fio superior e os pontos do fio inferior, situados a uma distância igual a n segmentos da rede contados a partir da extremidade esquerda, é dada por $V_n = V_0/(1 + \beta)^n$. Considerando $R_1 = R_2$, quantos segmentos serão necessários para produzir uma redução da diferença de potencial V_n até um valor menor do que 1,0% do valor de V_0? (c) Uma cadeia atenuadora infinita fornece um modelo para a propagação de um pulso de voltagem ao longo de uma fibra nervosa, conhecida como axônio. Cada segmento da rede na Figura 26.83 representa um pequeno segmento do axônio com um comprimento Δx. A resistência R_1 representa a resistência do fluido dentro e fora da parede da membrana do axônio. A resistência da membrana para uma corrente que flui através da parede é representada por R_2. Para um segmento de axônio com um comprimento $\Delta x = 1{,}0$ μm, $R_1 = 6{,}4 \times 10^3\ \Omega$ e $R_2 = 8{,}0 \times 10^8\ \Omega$ (a parede da membrana é um bom isolante). Calcule R_T e β para um axônio infinitamente comprido. (Essa aproximação é boa, visto que o comprimento do axônio é muito maior do que sua largura; o maior axônio no sistema nervoso humano possui cerca de 1 m de comprimento, porém seu raio é aproximadamente igual a 10^{-7} m.) (d) Qual é a fração da diminuição da diferença de potencial entre a parte interna e a parte externa do axônio depois de uma distância igual a 2,0 mm? (e) A atenuação da diferença de potencial calculada no item (d) mostra que o axônio não pode ser simplesmente um cabo passivo conduzindo a corrente elétrica; a diferença de potencial deve ser periodicamente reforçada ao longo do comprimento do axônio. Esse mecanismo do potencial de ação é lento, de modo que o sinal se propaga ao longo do axônio com uma velocidade aproximadamente de 30 m/s. Quando se torna necessária uma resposta mais rápida, o axônio é revestido com uma camada de material gorduroso, denominado mielina. Os segmentos possuem comprimento aproximado de 2 mm e são separados por lacunas, chamadas de *nodos de Ranvier*. A mielina produz um aumento da resistência de um segmento de 1,0 μm da membrana para $R_2 = 3{,}3 \times 10^{12}\ \Omega$. Para esse axônio revestido com a camada de mielina, qual é a fração da diminuição da diferença de potencial entre a parte interna e a parte externa do axônio depois de uma distância compreendida entre dois nodos de Ranvier consecutivos? Essa atenuação menor permite que a velocidade de propagação aumente.

CAMPO MAGNÉTICO E FORÇAS MAGNÉTICAS 27



O sistema de imagens por ressonância magnética torna possível a visualização de detalhes do tecido humano (tal como o pé mostrado aqui) que não são visíveis em imagens de raios X. Entretanto, o tecido humano não é constituído de material magnético (portanto, não é atraído por um ímã). Então como a ressonância magnética funciona?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- As propriedades dos ímãs e como eles interagem entre si.
- A natureza da força que um campo magnético exerce sobre uma partícula carregada em movimento.
- Qual é a diferença entre as linhas do campo magnético e as linhas do campo elétrico.
- Como analisar o movimento de uma partícula carregada em um campo magnético.
- Algumas aplicações práticas de campos magnéticos em química e física.
- Como analisar as forças magnéticas que atuam sobre condutores que transportam correntes.
- Como os circuitos de corrente se comportam quando colocados em um campo magnético.

Todas as pessoas utilizam a força magnética. Ela está presente em motores elétricos, nos cinescópios de TV, nos fornos de microondas, em alto-falantes, nas impressoras de computadores e nos discos magnéticos usados nos computadores. Um dos aspectos mais familiares do magnetismo é aquele associado ao ímã permanente, que atrai objetos de ferro não imantados e também atrai ou repele outro ímã. A agulha de uma bússola alinhada ao campo magnético da Terra fornece um exemplo da interação magnética. Contudo, a natureza *fundamental* do magnetismo é a interação produzida por cargas elétricas que se movem. Diferentemente da força elétrica, que atua sempre sobre uma carga, quer ela esteja em movimento ou em repouso, as forças magnéticas só atuam sobre cargas em *movimento*.

Embora as forças elétricas sejam diferentes das forças magnéticas, usamos o conceito de *campo* para descrever ambos os tipos de força. No Capítulo 21, estudamos que a força elétrica surge em duas etapas: (1) uma carga produz um campo elétrico no espaço na sua vizinhança e (2) uma segunda carga reage a esse campo. As forças magnéticas também surgem em duas etapas. Em primeiro lugar, uma carga *em movimento* ou um conjunto de cargas em movimento (ou seja, uma corrente elétrica) produz um campo *magnético*. A seguir, uma segunda corrente ou carga em movimento reage a esse campo magnético e sofre a ação de uma força magnética.

Neste capítulo, estudaremos a segunda etapa da interação magnética – ou seja, como as cargas em movimento *reagem* aos campos magnéticos. Estudaremos principalmente como calcular as forças magnéticas e os torques, e descobriremos por que os ímãs conseguem atrair objetos metálicos, como clipes de papel. No Capítulo 28, completaremos a abordagem à interação magnética, examinando como as cargas em movimento e as correntes *produzem* os campos magnéticos.

27.1 Magnetismo

Os fenômenos magnéticos foram observados, inicialmente há pelo menos cerca de 2500 anos, em fragmentos de minério de ferro imantados nas proximidades da antiga cidade de Magnésia (agora chamada de Manisa, no oeste da Turquia). Esses fragmentos hoje são conhecidos como **ímãs permanentes**; você provavelmente possui diversos ímãs permanentes presos na porta da geladeira de sua casa. Verificou-se que um ímã permanente exerce uma força sobre outro ímã ou sobre um pedaço de ferro não-imantado. Descobriu-se que, deixando uma haste de ferro em contato com um ímã natural, ela se torna imantada. Quando essa

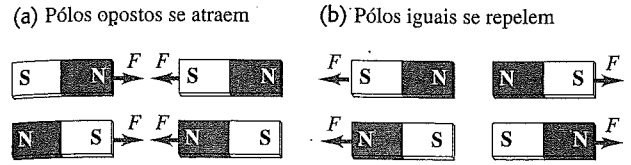


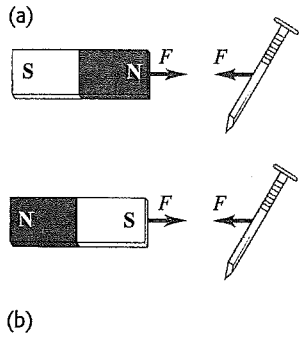
Figura 27.1 (a) Quando os pólos opostos (N e S, ou S e N) de um ímã estão muito próximos, ocorre atração entre os ímãs. (b) Quando os pólos iguais (N e N, ou S e S) de um ímã estão muito próximos, ocorre repulsão entre os ímãs.

haste imantada 'flutua' sobre a água ou é suspensa por um fio preso em seu centro, ela tende a se alinhar com a direção norte–sul. A agulha de uma bússola comum nada mais é do que um fragmento de ferro imantado como esse.

Antes de compreender a relação da interação magnética em termos de cargas em movimento, as interações de ímãs permanentes e de agulhas de bússolas eram explicadas com base em *pólos magnéticos*. Quando um ímã permanente possui *forma de barra*, podendo girar livremente, uma de suas extremidades aponta para o norte. Essa extremidade denomina-se *pólo norte* ou *pólo N*; a outra extremidade é o *pólo sul* ou *pólo S*. Os pólos opostos se atraem e os pólos de mesmo nome se repelem (Figura 27.1). Um objeto que contém ferro, porém não imantado (ou seja, quando ele não possui nenhuma tendência para apontar para o norte nem para o sul), é atraído por *qualquer* um dos pólos de um ímã permanente (Figura 27.2). Essa é a atração que ocorre entre um ímã e a porta de aço de uma geladeira. Por analogia à interação elétrica, podemos descrever as interações mostradas nas figuras 27.1 e 27.2 afirmando que o ímã cria um *campo magnético* no espaço em torno dele e um segundo corpo sofre a ação desse campo. A agulha de uma bússola tende a se alinhar ao campo magnético do local onde ela está.

A própria Terra é um ímã. Seu Pólo Norte geográfico está próximo do pólo *sul* magnético, sendo essa a razão pela qual o pólo norte da agulha de uma bússola aponta para o norte. O eixo de simetria do campo magnético da Terra não é paralelo ao eixo geográfico (ou eixo de rotação), de modo que a direção indicada pela agulha da bússola é ligeiramente desviada da direção geográfica norte–sul. Esse desvio, que varia de um local para outro, denomina-se *declinação magnética* ou *variação magnética*. Além disso, o campo magnético não é horizontal na maior parte dos pontos da superfície terrestre; o ângulo para cima ou para baixo indica a *inclinação magnética*. Sobre os pólos magnéticos, o campo magnético é vertical.

A Figura 27.3 mostra um esboço do campo magnético da Terra. As curvas chamadas de *linhas do campo magnético* mostram a direção e o sentido indicados pelas agulhas das bússolas em cada ponto; essas linhas serão discutidas com detalhes na Seção 27.3. A direção do campo em cada ponto é definida pela força que o campo exerceria sobre um pólo norte magnético situado no respectivo ponto. Na Seção 27.2, descreveremos um modo mais fundamental para a definição do módulo, da direção e do sentido de um campo magnético.



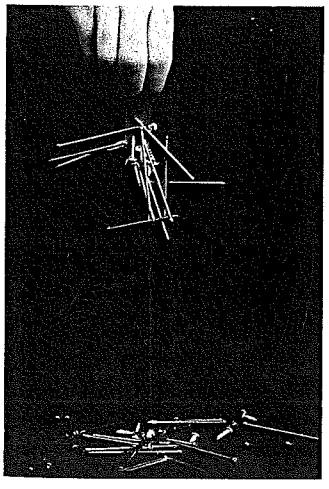


Figura 27.2 (a) Qualquer pólo de um ímã atrai um objeto não imantado que contenha ferro, tal como um prego. (b) Um exemplo real.

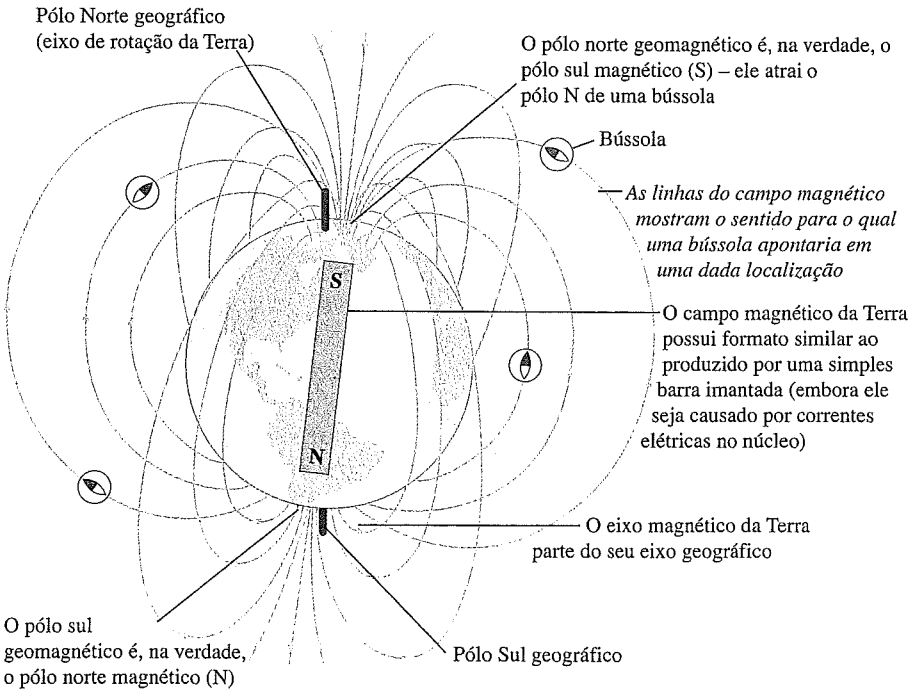


Figura 27.3 Esboço do campo magnético da Terra. O campo, cuja origem imaginamos que seja devida a correntes existentes no núcleo líquido da Terra, varia com o tempo; os indícios geológicos mostram que esse campo inverte seu sentido em períodos irregulares da ordem de meio milhão de anos.

Pólos magnéticos *versus* carga elétrica

O conceito de pólo magnético pode parecer semelhante ao de carga elétrica; o pólo norte e o pólo sul podem parecer análogos a uma carga positiva e uma negativa. Porém, essa analogia é capaz de causar confusão. Embora existam cargas negativas e positivas isoladas, não existe *nenhuma* evidência experimental da existência de um pólo magnético isolado; os pólos magnéticos sempre existem formando pares. Quando uma barra imantada é partida ao meio, cada extremidade de cada pedaço constitui um pólo (Figura 27.4). A existência de um pólo magnético isolado, ou **monopolo magnético**, teria conseqüências importantes para a física teórica. Pesquisas intensas com o propósito de detectar monopolos magnéticos têm sido realizadas, porém até o momento nenhuma obteve êxito.

A primeira evidência da relação entre o magnetismo e o movimento de cargas foi descoberta em 1819 pelo cientista dinamarquês Hans Christian Oersted. Ele verificou que a agulha de uma bússola era desviada por um fio conduzindo uma corrente elétrica, conforme indica a Figura 27.5. Pesquisas semelhantes foram realizadas na França por André Ampère. Alguns anos depois, Michael Faraday, na Inglaterra, e Joseph Henry, nos Estados Unidos, descobriram que o movimento de um ímã nas vizinhanças de uma espira condutora pode produzir corrente elétrica na espira. Agora sabemos que as forças magnéticas entre os dois corpos indicados nas figuras 27.1 e 27.2 são produzidas fundamentalmente pelo efeito magnético dos elétrons dos átomos no interior dos corpos. (Também há interações *elétricas* entre os dois corpos, mas elas são muito mais fracas que as interações magnéticas, porque os dois corpos são eletricamente neutros.) No interior de um corpo imantado, tal como um ímã permanente, existe um movimento *coordenado* de alguns elétrons dos átomos; em um corpo não imantado, esses movimentos não são coordenados. (Na Seção 27.7, descrevemos esses movimentos mais detalhadamente e mostraremos a origem das interações indicadas nas figuras 27.1 e 27.2.)

Verifica-se que as interações elétricas e magnéticas estão relacionadas. Nos capítulos seguintes, desenvolveremos os princípios unificadores do eletromagnetismo, culminando com a formulação desses princípios nas *equações de Maxwell*. Essas equações representam uma síntese do eletromagnetismo, do mesmo modo que as leis do movimento de Newton constituem uma síntese da mecânica, e, assim como as leis de Newton, essas equações representam uma imensa conquista intelectual da humanidade.

Teste sua compreensão da Seção 27.1 Suponha que você corte a parte inferior da agulha da bússola indicada na Figura 27.5a. Você descarta essa parte, faz um furo na parte superior que restou e coloca essa parte no pino ao centro da bússola. Essa parte que sobrou da agulha ainda oscilará para leste e para oeste, quando uma corrente for aplicada, como na Figura 27.5b? ∎

27.2 Campo magnético

Para introduzirmos apropriadamente o conceito de campo magnético, vamos fazer uma revisão da formulação da interação *elétrica* apresentada no Capítulo 21, onde apresentamos o conceito de campo *elétrico*. Descrevemos as interações elétricas em duas etapas:

1. Uma distribuição de cargas elétricas em repouso cria um campo elétrico $\vec{E}$ no espaço em torno da distribuição.
2. O campo elétrico exerce uma força $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre qualquer carga q que esteja presente no campo.

Podemos descrever as interações magnéticas de modo análogo:

1. Uma carga móvel ou uma corrente elétrica cria um **campo magnético** em suas vizinhanças (além do campo *elétrico*).
2. O campo magnético exerce uma força $\vec{F}$ sobre qualquer outra corrente ou carga que se mova no interior do campo.

Neste capítulo, vamos nos concentrar no *segundo* aspecto da interação: considerando um certo campo magnético, qual é a força que ele exerce sobre uma corrente ou sobre uma carga que se move? No Capítulo 28, voltaremos ao problema da determinação de campos magnéticos *criados* por correntes e cargas que se movem.

Tal como no caso do campo elétrico, o campo magnético é um *campo vetorial*, ou seja, trata-se de uma grandeza vetorial associada a cada ponto do espaço. Vamos usar o símbolo $\vec{B}$ para designar um campo magnético. Em cada ponto do espaço, a direção de $\vec{B}$ é dada pela direção da agulha de uma bússola e o sentido aponta para o norte da agulha. As setas indicadas na Figura 27.3 sugerem a direção e o sentido do campo magnético da Terra; para qualquer ímã, o vetor $\vec{B}$ sai do pólo norte e entra no pólo sul.

Forças magnéticas sobre cargas em movimento

São quatro as características da força magnética que atuam sobre uma carga em movimento. Em primeiro lugar, seu módulo é proporcional ao módulo da carga. Se uma carga de 1 μC se move com a mesma velocidade de uma carga de 2 μC no interior de um campo magnético, a força magnética sobre a carga de 2 μC é duas vezes maior do que a força magnética que atua sobre a carga de 1 μC. Em segundo lugar, o módulo da força também é proporcional ao módulo, ou 'intensidade', do campo; se dobrarmos o valor do módulo do campo (por exemplo, usando dois ímãs idênticos em vez de um) sem alterar o valor da carga ou de sua velocidade, a força dobra.

A terceira característica é que a força magnética também depende da velocidade da partícula. Esse comportamento é bastante diferente da força elétrica, que é sempre a mesma, independentemente de a carga estar em repouso ou

em movimento. Uma carga elétrica em movimento *não* sofre a ação de forças magnéticas. A quarta é que a força magnética $\vec{F}$ *não possui* a mesma direção do campo magnético $\vec{B}$, porém atua sempre em uma direção simultaneamente *perpendicular* à direção de $\vec{B}$ e à direção da velocidade $\vec{v}$. Verifica-se que o módulo F da força é proporcional ao componente da velocidade $\vec{v}$ perpendicular ao campo; quando esse componente for nulo (ou seja, quando $\vec{v}$ e $\vec{B}$ forem paralelos ou antiparalelos), a força magnética será igual a zero.

A Figura 27.6 mostra essas relações. A direção de $\vec{F}$ é sempre perpendicular ao plano com $\vec{v}$ e $\vec{B}$. O módulo da força é dado por

$$F = |q|v_{\perp}B = |q|vB\text{sen}\phi \qquad (27.1)$$

em que $|q|$ é o módulo da carga e ϕ é o ângulo medido no sentido da rotação do vetor $\vec{v}$ para o $\vec{B}$, como indicado na figura.

A descrição não especifica completamente o sentido de $\vec{F}$; existem sempre dois sentidos opostos na direção perpendicular ao plano de $\vec{v}$ com $\vec{B}$. Para completarmos a descrição, precisamos da regra da mão direita usada para definir o produto vetorial na Seção 1.10. (Antes de prosseguir, seria conveniente você fazer uma revisão dessa seção.) Desenhe os vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ com suas origens no mesmo ponto, como na Figura 27.7a. Imagine uma rotação do vetor $\vec{v}$ até que ele fique na mesma direção do vetor $\vec{B}$ (fazendo uma rotação de ϕ, o menor ângulo entre os dois vetores). Feche os dedos de sua mão direita em torno da linha perpendicular ao plano de $\vec{v}$ e $\vec{B}$, de modo que a rotação dos dedos indique um sentido da rotação de $\vec{v}$ para $\vec{B}$. Então, o dedo polegar aponta no sentido da força $\vec{F}$ que atua sobre uma carga *positiva*. (Alternativamente, podemos dizer que o sentido da força $\vec{F}$ sobre uma carga positiva é dado pelo sentido do avanço de um parafuso de rosca direita, quando ele gira de $\vec{v}$ para $\vec{B}$.)

Essa discussão mostra que a força sobre uma carga q que se desloca com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético $\vec{B}$ possui módulo, direção e sentido dados por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (27.2)$$

(força magnética sobre uma partícula carregada em movimento)

Esse é o primeiro de uma série de produtos vetoriais que encontraremos ao estudar as relações que envolvem campos magnéticos. É importante notar que a Equação (27.2) *não* foi deduzida teoricamente, mas obtida com base em observações *experimentais*.

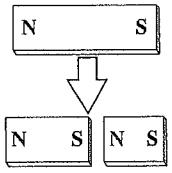
A Equação (27.2) é válida tanto para cargas positivas quanto para cargas negativas. Quando q é negativa, o sentido da força $\vec{F}$ é contrário ao sentido do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$ (Figura 27.7b). Quando duas cargas de mesmo módulo e sinais opostos se deslocam no mesmo campo $\vec{B}$, com a mesma velocidade (Figura 27.8), as forças possuem o mesmo módulo, porém com sentidos opostos. As figuras 27.6, 27.7 e 27.8 mostram diversos exemplos de relações entre as direções e os sentidos de $\vec{F}$, $\vec{v}$ e $\vec{B}$ para cargas positivas e negativas. Verifique se você entendeu as relações indicadas nessas figuras.

A Equação (27.1) fornece o módulo da força magnética $\vec{F}$ da Equação (27.2). Podemos escrever esse módulo de outro modo equivalente. Visto que ϕ é o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$, podemos interpretar B sen ϕ como o componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}$, ou seja, $B_{\perp}$. Com essa notação, o módulo da força é dado por

$$F = |q|vB_{\perp} \qquad (27.3)$$

Ao contrário das cargas elétricas, os pólos magnéticos sempre se formam em pares e não podem ser isolados.

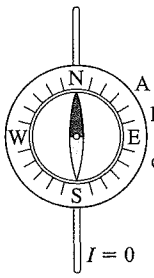
Quebrar um ímã em duas partes...



... produz dois ímãs, não dois pólos isolados.

Figura 27.4 Ao partir uma barra imantada, cada pedaço passará a possuir um pólo norte e um pólo sul, mesmo que as partes sejam de tamanhos diferentes. (Quanto menor o pedaço, menos intenso será o magnetismo.)

(a)



A agulha aponta para o norte quando não existe nenhuma corrente.

(b)

A agulha oscila quando existe uma corrente.
O sentido da oscilação depende do sentido da corrente.

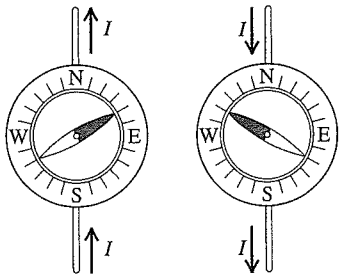
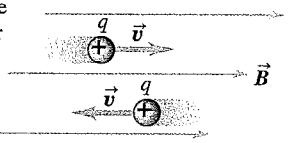


Figura 27.5 Na experiência de Oersted, uma bússola é colocada diretamente sobre um fio horizontal (aqui visto de cima). Quando a bússola é colocada diretamente embaixo do fio, os sentidos das oscilações da agulha se invertem.

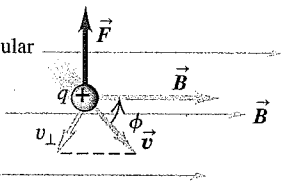
(a)

A **força magnética** será igual a **zero** quando o movimento de uma carga for **paralelo** ao campo magnético.



(b)

Quando o movimento de uma carga forma um ângulo ϕ com o campo magnético, a carga sofre uma força magnética com módulo $F = |q|v_\perp B = |q|vB \text{ sen } \phi$.



(c)

Quando o movimento da carga for **perpendicular** ao campo magnético, a carga sofrerá uma força magnética máxima com módulo $F_{máx} = qvB$.

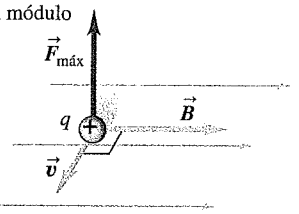


Figura 27.6 A força magnética $\vec{F}$ que atua sobre uma carga positiva q que se move com velocidade $\vec{v}$ é simultaneamente perpendicular a $\vec{v}$ e ao campo magnético $\vec{B}$. Para dados valores da velocidade escalar v e da intensidade do campo magnético B, a maior força ocorre quando $\vec{v}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares.

Algumas vezes, essa forma é mais conveniente, sobretudo em problemas que envolvem *correntes* em vez do movimento de partículas individuais. Discutiremos as forças que atuam sobre correntes mais adiante neste capítulo.

Pela Equação (27.1), vemos que as *unidades* de B devem ser as mesmas de F/qv. Portanto, as unidades SI de B são equivalentes a 1 N · s/C · m, ou, como um ampère é igual a um coulomb por segundo (1 A = 1 C/s), obtemos as unidades 1 N/A · m. Essa unidade denomina-se **tesla** (abreviado por T), em homenagem a Nikola Tesla (1857-1943), eminente cientista e inventor sérvio-americano. Então,

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

A unidade de B do sistema cgs é o **gauss** (1 G = 10^{-4} T), que também é muito usada. Os instrumentos de medida do campo magnético são chamados de magnetômetros, porém algumas vezes são denominados também *gaussímetros*.

O campo magnético da Terra é da ordem de 10^{-4} T ou 1 G. Campos magnéticos da ordem de 10 T ocorrem no interior dos átomos e são importantes na análise de espectros atômicos. O maior campo magnético estacionário produzido em laboratório até o momento é da ordem de 45 T. Alguns eletroímãs pulsantes podem produzir campos magnéticos de 120 T durante intervalos de tempo de um milissegundo. O campo magnético na superfície de uma estrela de nêutrons é estimado em 10^8 T.

Medição de campos magnéticos com cargas de teste

Para pesquisarmos um campo magnético desconhecido, podemos medir o módulo, a direção e o sentido da força que atua sobre uma carga de teste que está se *movendo* no campo; a seguir usamos a Equação (27.2) para determinarmos $\vec{B}$. O feixe de elétrons em um tubo de raios catódicos, tal como o de televisores, é um dispositivo apropriado para fazer tais medidas. O canhão de elétrons dispara um feixe estreito de elétrons com uma velocidade conhecida. Quando não existe nenhuma força capaz de desviar o feixe, ele colide com o centro da tela.

Quando um campo magnético está presente, em geral o feixe de elétrons se desvia. Porém, quando a velocidade

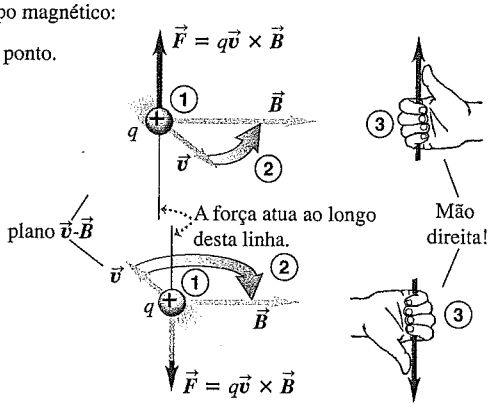
(a)

Regra da mão direita para determinar a direção e o sentido da força magnética que atua sobre uma carga **positiva** que se move em um campo magnético:

① Coloque $\vec{v}$ e $\vec{B}$ com as origens no mesmo ponto.

② Imagine a rotação de $\vec{v}$ para $\vec{B}$ no plano $\vec{v}$-$\vec{B}$ (através do ângulo menor).

③ A força atua ao longo de uma linha perpendicular ao plano $\vec{v}$-$\vec{B}$. Feche os dedos da sua *mão direita* em torno dessa linha, na mesma direção e sentido da rotação de $\vec{v}$. Seu polegar apontará na direção e no sentido em que a força atua.



(b)

Se a carga for negativa, a direção e o sentido da força serão *opostos* aos dados pela regra da mão direita.

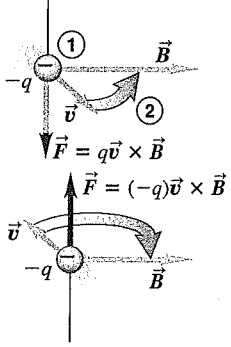


Figura 27.7 Como encontrar a direção e o sentido da força magnética que atua sobre uma partícula carregada em movimento.

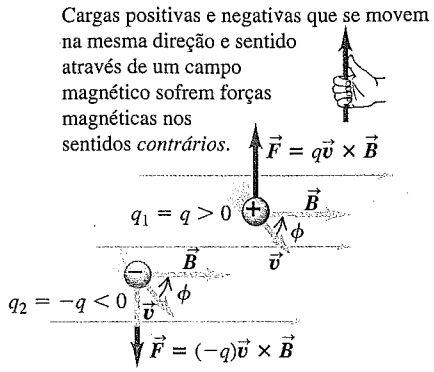


Figura 27.8 Duas cargas de mesmo módulo, porém com sinais opostos, se deslocando com a mesma velocidade no mesmo campo magnético. As forças magnéticas que atuam sobre as cargas possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém com sentidos contrários.

do feixe é paralela ou antiparalela ao campo, então $\phi = 0$ ou π na Equação (27.1) e $F = 0$; não existe nenhuma força e, portanto, nenhum desvio. Se o feixe de elétrons não se desvia quando sua direção é paralela a um certo eixo, como na Figura 27.9a, o vetor $\vec{B}$ deve apontar para cima ou para baixo ao longo desse eixo.

Se, a seguir, girarmos o tubo de 90° (Figura 27.9b), $\phi = \pi/2$ na Equação (27.1) e a força magnética atinge seu valor máximo; o feixe é desviado ao longo de uma direção perpendicular ao plano de $\vec{B}$ e de $\vec{v}$. O módulo e o sentido do desvio determinam o módulo e o sentido do vetor $\vec{B}$. Podemos realizar outras experiências para as quais o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{v}$ esteja compreendido entre zero e 90° para confirmar a Equação (27.1) ou (27.3) e a discussão feita a partir dessas relações. Observe que o elétron possui carga negativa; a força indicada na Figura 27.9b apresenta sentido contrário à força que atua sobre uma carga positiva.

Quando uma partícula carregada se move em uma região do espaço onde existem, *simultaneamente,* um campo elétrico e um campo magnético, ambos os campos exercem forças sobre a partícula. A força resultante $\vec{F}$ é a soma vetorial da força elétrica e da força magnética:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (27.4)$$

Estratégia para a solução de problemas 27.1

FORÇAS MAGNÉTICAS

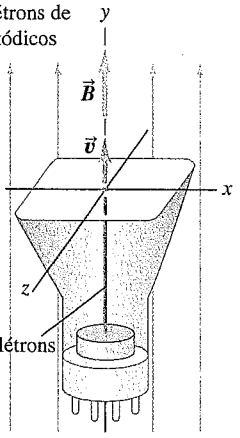
IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a regra da mão direita permite determinar a força magnética que atua sobre uma partícula carregada em movimento.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Desenhe os dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ com as respectivas origens em um mesmo ponto, de modo que você possa visualizar e desenhar o plano formado por esses dois vetores.
2. Identifique o ângulo ϕ entre os dois vetores.
3. Identifique as incógnitas. Elas podem ser o módulo, a direção e o sentido da força ou o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

(a) Se o feixe de elétrons de um tubo de raios catódicos não sofre nenhuma deflexão quando o feixe é paralelo ao eixo Oy, o vetor $\vec{B}$ aponta para cima ou para baixo ao longo desse eixo.



(b) Se o feixe sofre uma deflexão no sentido negativo do eixo Oz quando o eixo do tubo é paralelo ao eixo Ox, então o vetor $\vec{B}$ aponta de baixo para cima.

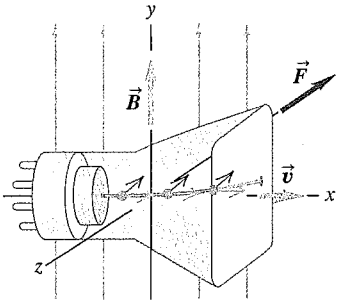


Figura 27.9 A direção e o sentido de um campo magnético usando um tubo de raios catódicos. Como os elétrons possuem uma carga negativa, a força magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ no item (b) aponta no sentido contrário ao dado pela regra da mão direita (veja Figura 27.7b).

1. Expresse a força magnética usando a Equação (27.2), $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. O módulo da força é dado pela Equação (27.1), $F = qvB$ sen ϕ.
2. Lembre-se de que $\vec{F}$ é sempre perpendicular ao plano dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$. A direção e o sentido do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$ é determinado pela regra da mão direita; tome como referência a Figura 27.7 até que você tenha dominado esse assunto. Quando q for uma carga negativa, a força será *oposta* ao produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$.

AVALIAR *sua resposta*: sempre que possível, resolva o problema usando dois métodos. Aplique diretamente a definição de produto vetorial. A seguir, determine os componentes dos vetores em algum sistema com eixos convenientes e calcule o produto vetorial algebricamente, a partir dos componentes. Verifique se os dois resultados estão de acordo.

Exemplo 27.1

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE UM PRÓTON Um feixe de prótons ($q = 1{,}6 \times 10^{-19}$C) se move a $3{,}0 \times 10^5$ m/s em um campo magnético uniforme, com módulo igual a 2,0 T, orientado ao longo do eixo positivo Oz, como mostra a Figura 27.10. A velocidade de cada próton está contida no plano xz, formando um ângulo de 30° com o eixo $+Oz$. Determine a força que atua sobre o próton.

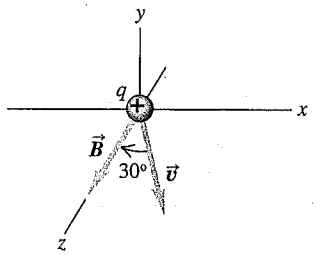


Figura 27.10 Direção e sentido de $\vec{v}$ e $\vec{B}$ para um feixe de prótons em um campo magnético.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa a expressão para o campo magnético que atua sobre uma partícula carregada em movimento.

PREPARAR: a Figura 27.10 mostra que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ estão no plano xz. O ângulo entre esses vetores é igual a 30°. As incógnitas são o módulo, a direção e o sentido da força $\vec{F}$.

EXECUTAR: a carga é positiva, portanto a força está no mesmo sentido que o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$. A regra da mão direita mostra que a força está orientada para a parte negativa do eixo Oy. Pela Equação (27.1), o módulo dessa força é

$$\begin{aligned} F &= qvB\text{sen}\phi \\ &= (1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C})(3{,}0 \times 10^{5}\,\text{m/s})(2{,}0\,\text{T})(\text{sen}\,30°) \\ &= 4{,}8 \times 10^{-14}\,\text{N} \end{aligned}$$

AVALIAR: alternativamente, usando notação vetorial, pela Equação (27.2) obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (3{,}0 \times 10^{5}\,\text{m/s})(\text{sen}30°)\hat{\imath} + (3{,}0 \times 10^{5}\,\text{m/s})(\cos 30°)\hat{k} \\ \vec{B} &= (2{,}0\,\text{T})\hat{k} \\ \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C})(3{,}0 \times 10^{5}\,\text{m/s})(2{,}0\,\text{T}) \\ &\quad \times (\text{sen}30°\,\hat{\imath} + \cos 30°\hat{k}) \times \hat{k} \\ &= (-4{,}8 \times 10^{-14}\,\text{N})\hat{\jmath} \end{aligned}$$

(Lembre-se de que $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ e $\hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$.) Novamente obtemos que a força está no sentido negativo de Oy, com módulo igual a $4{,}8 \times 10^{-14}$ N.

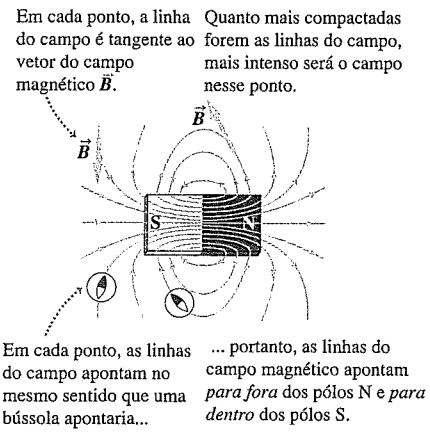
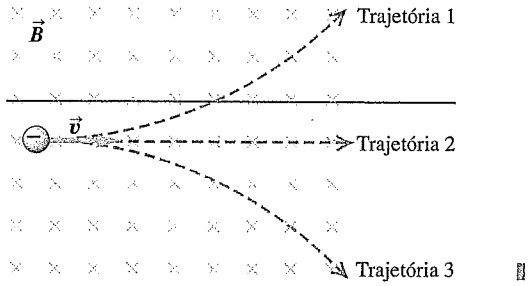


Figura 27.11 As linhas do campo magnético de um ímã permanente. Note que as linhas de campo passam pelo interior do ímã.

Se o feixe fosse constituído por *elétrons* em vez de prótons, a carga seria negativa ($q = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C), e o sentido da força se mostraria oposto ao sentido anterior. A força seria, então, orientada no sentido *positivo* do eixo Oy, porém o módulo seria o mesmo que o calculado anteriormente, $F = 4{,}8 \times 10^{-14}$ N.

Teste sua compreensão da Seção 27.2 A figura à esquerda indica um campo magnético $\vec{B}$ orientado para o plano do papel (preenchido por ×s). Uma partícula com carga negativa se move nesse plano. Qual dos três caminhos — 1, 2 ou 3 — a partícula seguirá?



27.3 Linhas do campo magnético e fluxo magnético

Podemos representar qualquer campo magnético pelas **linhas do campo magnético**, do mesmo modo que fizemos para o campo magnético da Terra, na Figura 27.3. A idéia é idêntica à que empregamos para as linhas de campo elétrico, introduzidas na Seção 21.6. Desenhamos as linhas de tal modo que a linha que passa em cada ponto seja tangente ao vetor campo magnético $\vec{B}$ no ponto considerado (Figura 27.11). Tal como no caso das linhas de campo elétrico, desenhamos apenas algumas linhas representativas; se não fosse assim, essas linhas deveriam preencher todo o espaço. Nos locais onde as linhas de campo são agrupadas mais compactamente, o módulo do campo magnético é elevado; quando a distância entre as linhas for grande, o módulo do campo magnético será pequeno. Além disso, como $\vec{B}$ só pode ter uma direção e um sentido em cada ponto, concluímos que duas linhas de campo não podem se interceptar.

ATENÇÃO Linhas do campo magnético não são 'linhas de força' As linhas do campo magnético são, algumas vezes, chamadas de 'linhas de forças magnéticas', porém achamos que esse nome não é adequado para designá-las; diferentemente do caso das linhas do campo elétrico, elas *não* apontam na mesma direção da força que atua sobre a carga (Figura 27.12). A Equação (27.2) mostra que a força que atua sobre uma partícula que se move é sempre perpendicular ao campo magnético e, portanto, é ortogonal à linha de campo magnético que passa pelo ponto onde a partícula está. A direção da força depende da velocidade da partícula e do sinal da carga, de modo que apenas observar a direção de uma linha de campo magnético não é suficiente para a determinação da direção da força que atua sobre uma partícula carregada arbitrária que se move. As linhas de campo magnético *possuem* a mesma direção da agulha magnética de uma bússola colocada em cada ponto do campo; isso pode ajudar a visualizar essas linhas.

As linhas do campo magnético produzidas por diversas fontes comuns de campos magnéticos são indicadas nas figuras 27.11 e 27.13. No espaço vazio entre os pólos do eletroímã mostrado na Figura 27.13a, as linhas do campo são quase retas paralelas igualmente espaçadas, o que mostra que o campo magnético nessa região é praticamente *uniforme* (ou seja, constante em módulo, direção e sentido).

Como os padrões do campo magnético são tridimensionais, geralmente é necessário desenhar linhas do campo magnético que apontam para dentro ou para fora do plano de um esboço. Para isso, usamos um ponto (·) para representar um vetor orientado para fora do plano e uma cruz (×) para representar um vetor orientado para dentro do plano (Figura 27.13b). Esta é uma boa forma de lembrar essas convenções: pense em um ponto como a ponta de uma flecha que vem diretamente na sua direção e pense na cruz como as penas de uma flecha se afastando de você.

A Figura 27.14 mostra a técnica familiar usada para a visualização das linhas do campo magnético mediante a distribuição das partículas de limalha de ferro.

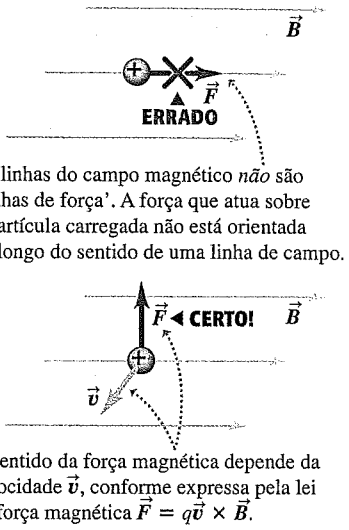


Figura 27.12 Campos magnéticos *não* são 'linhas de força'.

Fluxo magnético e leis de Gauss para o magnetismo

Definimos o **fluxo magnético** Φ_B através de uma superfície de modo análogo à descrição do fluxo elétrico relacionado com a lei de Gauss, na Seção 22.2. Podemos dividir qualquer superfície em elementos de área dA (Figura 27.15). Para cada elemento, determinamos $B_\perp$, o componente de $\vec{B}$ normal à superfície do elemento conforme indicado. De acordo com a figura, temos $B_\perp = B\cos\phi$, em que ϕ é o ângulo entre a direção de $\vec{B}$ e a reta perpendicular à superfície. (Cuidado para não confundir o ângulo ϕ com Φ_B.) Em geral, esse componente varia de ponto a ponto sobre a superfície. Definimos o fluxo magnético $d\Phi_B$ através da superfície como

$$d\Phi_B = B_\perp dA = B\cos\phi\, dA = \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (27.5)$$

O fluxo magnético *total* através da superfície é a soma das contribuições dos elementos de área individuais:

$$\Phi_B = \int B_\perp dA = \int B\cos\phi\, dA = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (27.6)$$

(fluxo magnético através de uma superfície)

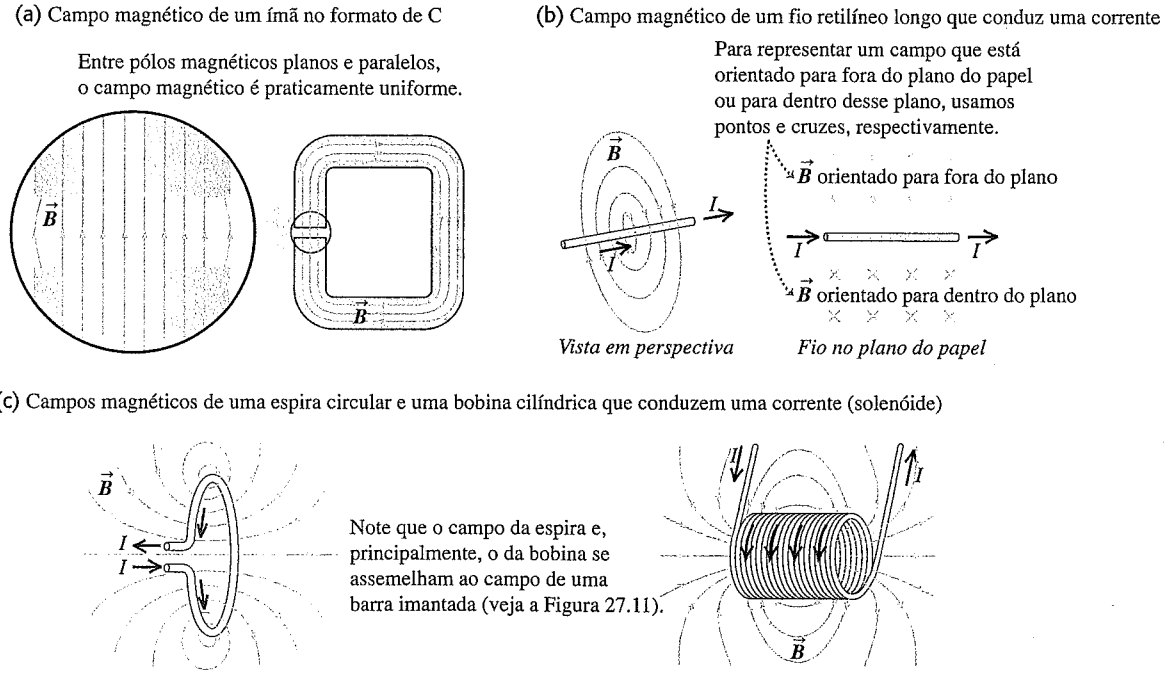


Figura 27.13 Linhas de campo magnético produzidas por várias fontes comuns de campo magnético.

(A equação anterior usa os conceitos do vetor área e de integral de superfície que introduzimos na Seção 22.2; talvez seja bom fazer uma revisão dessa discussão.)

O fluxo magnético é uma grandeza *escalar*. No caso especial para o qual $\vec{B}$ é uniforme sobre uma superfície plana com área total A, $B_\perp$ e ϕ são os mesmos em todos os pontos sobre a superfície, e portanto

$$\Phi_B = B_\perp A = BA\cos\phi \tag{27.7}$$

Se $\vec{B}$ é perpendicular à superfície, então $\cos\phi = 1$ e a Equação (27.7) se reduz a $\Phi_B = BA$. Usaremos muito o conceito de fluxo magnético quando estudarmos a indução eletromagnética no Capítulo 29.

A unidade SI de fluxo magnético é dada pela unidade de campo magnético (1 T) multiplicada pela unidade de área (1 m^2). Essa unidade é chamada de **weber** (1 Wb), em homenagem ao físico alemão Wilhelm Weber (1804-1891):

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2$$

Também 1 T = 1 N/A · m, portanto

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2 = 1\ \text{N}\cdot\text{m/A}$$

Na lei de Gauss, o fluxo *elétrico* total através de uma superfície fechada é proporcional à carga elétrica total existente no interior da superfície. Por exemplo, quando a superfície fechada engloba um dipolo elétrico, o fluxo total é zero porque a carga total é igual a zero. (Convém fazer uma revisão da Seção 22.3 sobre a lei de Gauss.) Por analogia, se existisse uma carga magnética (monopolo magnético), o fluxo *magnético* total através de uma superfície fechada seria proporcional à carga magnética no interior da superfície fechada. Porém, conforme dissemos, apesar das pesquisas intensas, nenhum monopolo magnético livre jamais foi observado. Concluímos que

O fluxo magnético total através de uma superfície fechada é sempre igual a zero.

Simbolicamente,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{27.8}$$

(fluxo magnético através de qualquer superfície fechada)

A equação anterior é, às vezes, chamada de *lei de Gauss do magnetismo*. Você pode verificá-la examinando as figuras 27.11 e 27.13; desenhando-se uma superfície fechada em qualquer um dos mapas dos campos magnéticos indicados na figura, você notará que cada linha do campo que entra na superfície também sai da mesma superfície; o fluxo total através da superfície considerada é igual a zero. Da Equação (27.8), decorre que as linhas do campo magnético devem ser sempre fechadas.

ATENÇÃO Linhas do campo magnético não têm extremos Diferentemente do caso de uma linha do campo elétrico, que sempre começa e termina em cargas elétricas, as linhas do campo magnético *nunca* possuem pontos extremos; tais pontos indicariam a existência de um monopolo. Você pode ficar tentado a desenhar linhas do campo magnético que começam no pólo norte de um ímã e terminam no pólo sul. Mas, como indica a Figura 27.11, as linhas de campo de um ímã, na verdade, continuam pelo interior do ímã. Como todas as demais linhas do campo magnético, elas formam circuitos fechados.

Para a lei de Gauss, que sempre se aplica a uma superfície *fechada*, o vetor da área $d\vec{A}$ na Equação (27.6) aponta, invariavelmente, *para fora* da superfície. Contudo, algumas aplicações de fluxo *magnético* envolvem uma superfície *aberta* com uma linha de contorno; nesse caso, existe uma ambigüidade de sinal na Equação (27.6), pois há dois sentidos possíveis para o vetor $d\vec{A}$. Nesses casos, devemos escolher um dos dois sentidos como 'positivo' e usar consistentemente a escolha feita.

Quando o elemento de área $d\vec{A}$ na Equação (27.5) forma um ângulo reto com a linha do campo, então $B_\perp = B$; chamando de $dA_\perp$ o elemento de área, obtemos

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_\perp} \tag{27.9}$$

Ou seja, o módulo do campo magnético é igual ao *fluxo por unidade de área* ao longo de uma área ortogonal ao campo magnético. Por essa razão, o campo magnético $\vec{B}$ é, algumas vezes, chamado de **densidade de fluxo magnético**.

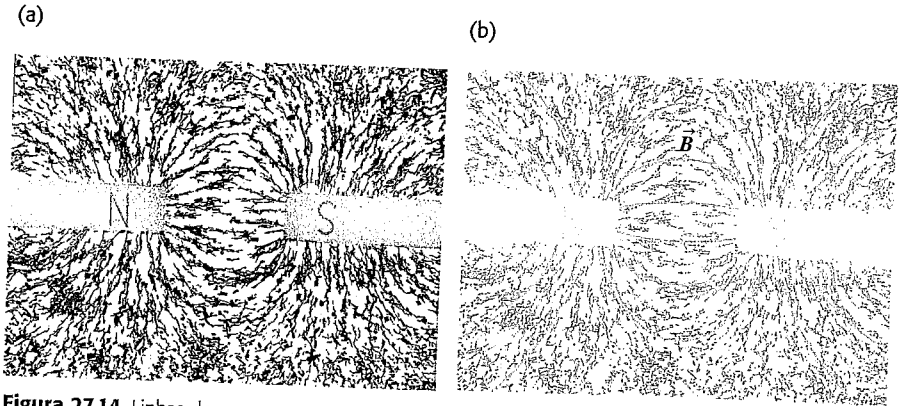


Figura 27.14 Linhas do campo magnético produzidas por várias fontes comuns de campo magnético.

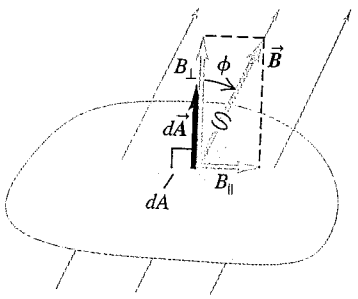


Figura 27.15 O fluxo do campo magnético através de um elemento de área dA é definido pela relação $d\Phi_B = B_\perp dA$.

Exemplo 27.2

CÁLCULOS DE FLUXO MAGNÉTICO A Figura 27.16a mostra a vista de perfil de um plano com área de 3,0 cm^2 em um campo magnético uniforme. Sabendo que o fluxo magnético através da área é igual a 0,90 mWb, calcule o módulo do campo magnético e determine a direção e o sentido do vetor da área.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: em muitos problemas, devemos calcular o fluxo de um dado campo magnético através de uma dada área. Neste exemplo, entretanto, conhecemos o fluxo, a área, a direção e o sentido do campo magnético. As incógnitas são o módulo do campo, a direção e o sentido do vetor da área.

PREPARAR: como o campo é uniforme, B e ϕ permanecem constantes em todos os pontos sobre a superfície. Logo, podemos usar a Equação (27.7): $\Phi_B = BA\cos\phi$. A incógnita é B.

EXECUTAR: a área A é igual a $3{,}0 \times 10^{-4}\text{m}^2$; a direção de $\vec{A}$ é perpendicular à superfície, de modo que ϕ pode ser 60° ou 120°. Porém, Φ_B, B e A possuem todos valores positivos, logo, cos ϕ também deve ser positivo. Esse fato elimina a solução 120°, de modo que $\phi = 60°$, e obtemos

$$B = \frac{\Phi_B}{A\cos\phi} = \frac{0{,}90 \times 10^{-3}\,\text{Wb}}{(3{,}0 \times 10^{-4}\,\text{m}^2)(\cos 60°)} = 6{,}0\,\text{T}$$

O vetor da área $\vec{A}$ é perpendicular à área no sentido indicado na Figura 27.16b.

AVALIAR: uma boa maneira de conferir o resultado obtido é calcular o produto $BA\cos\phi$ para se certificar de que é igual ao valor dado do fluxo magnético Φ_B. Será que é?

Teste sua compreensão da Seção 27.3 Imagine que você se mova ao longo do eixo do circuito pelo qual passa corrente da Figura 27.13c, partindo de um ponto bem à esquerda do circuito e terminando em um ponto bem à direita dele. (a) Como a intensidade do campo magnético varia à medida que você se move ao longo dessa trajetória? (i) Ela permanece a mesma em todos os pontos ao longo da trajetória; (ii) ela aumenta e a seguir diminui; (iii) ela diminui e em seguida aumenta. (b) A direção do campo magnético varia à medida que você se move ao longo da trajetória? ▮

27.4 Movimento de partículas carregadas em um campo magnético

Quando uma partícula carregada se move no interior de um campo magnético, sobre ela atua uma força magnética dada pela Equação (27.2), e seu movimento pode ser determinado pelas leis de Newton. A Figura 27.17 mostra um exemplo simples. Uma partícula com carga positiva q está em um ponto O e se move com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético uniforme $\vec{B}$, penetrando no plano da figura. Os vetores $\vec{B}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, de modo que a força magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ possui módulo $F = qvB$ e sua direção é indicada na figura. A força é *sempre* perpendicular a $\vec{v}$, de modo que

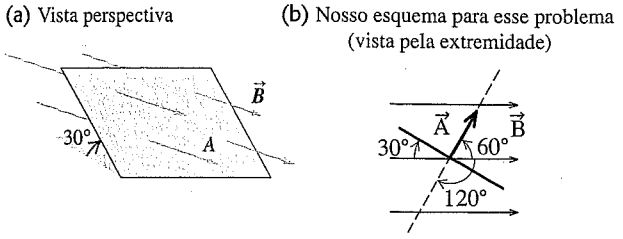


Figura 27.16 (a) Uma área plana A em um campo magnético uniforme $\vec{B}$. (b) O vetor da área $\vec{A}$ forma um ângulo igual a 60° com $\vec{B}$. (Se você considerasse $\vec{A}$ apontando no sentido oposto, ϕ seria igual a 120° e o fluxo magnético Φ_B seria negativo.)

ela não pode alterar o *módulo* da velocidade, apenas sua direção. Explicando de outro modo, a força magnética nunca possui componente paralelo à velocidade da partícula, portanto uma força magnética nunca pode realizar um *trabalho* sobre a partícula. Isso permanece válido mesmo se o campo magnético não é uniforme.

Quando uma partícula carregada se move em uma região onde só existe campo magnético, o módulo de sua velocidade permanece sempre constante.

Usando o referido princípio, vemos que, para a situação indicada na Figura 27.17a, os módulos dos vetores $\vec{F}$ e $\vec{v}$ permanecem constantes. Nos pontos tais como P e S, as direções da força e da velocidade variam conforme o indicado, porém os módulos de todos os vetores permanecem constantes. A partícula, portanto, se move sob a ação de uma força de módulo constante, cuja direção forma sempre um ângulo reto com a direção da velocidade da partícula. Comparando essa situação com a discussão do movimento circular uniforme feita nas seções 3.4 e 5.4, vemos que a trajetória da partícula é *circular*, sendo descrita com velocidade de módulo constante v. A aceleração centrípeta é igual a v^2/R e, como a única força que atua sobre a partícula é a força magnética, de acordo com a segunda lei de Newton temos

$$F = |q|vB = m\frac{v^2}{R} \qquad (27.10)$$

em que m é a massa da partícula. Resolvendo a Equação (27.10), obtemos a expressão para o raio R da trajetória circular:

$$R = \frac{mv}{|q|B} \qquad (27.11)$$

(raio de uma órbita circular em um campo magnético)

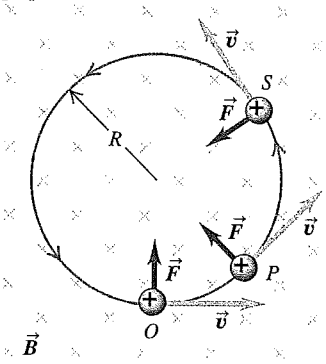
Podemos também escrever a Equação (21.11) como $R = p/|q|B$, em que $p = mv$ é o módulo do momento da partícula. Quando a carga q é negativa, a partícula se move em *sentido horário* ao redor da órbita, como na Figura 27.17a.

A velocidade angular ω da partícula pode ser encontrada pela Equação (9.13), $v = R\omega$. Combinando-a à Equação (27.11), obtemos

$$\omega = \frac{v}{R} = v\frac{|q|B}{mv} = \frac{|q|B}{m} \qquad (27.12)$$

(a) A órbita de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme

Uma carga que forma ângulos retos em relação a um campo uniforme $\vec{B}$ se move a uma velocidade escalar constante, porque $\vec{F}$ e $\vec{v}$ são sempre perpendiculares entre si.



(b) Um feixe de elétrons (indicado por um arco luminoso) se curva em um campo magnético

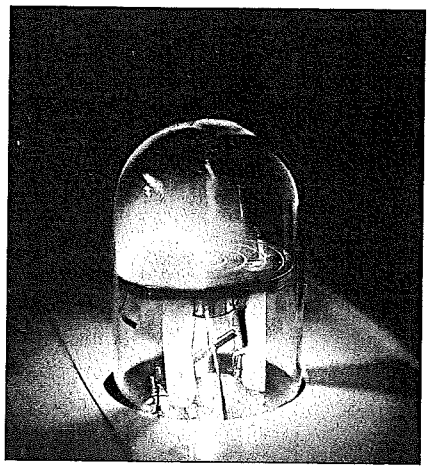


Figura 27.17 Uma partícula carregada se move perpendicularmente a um campo magnético uniforme $\vec{B}$.

Quando a velocidade de uma partícula carregada possui um componente paralelo ($v_{\parallel}$) e um componente perpendicular ($v_{\perp}$) à direção de um campo magnético uniforme, a partícula descreve uma trajetória helicoidal.

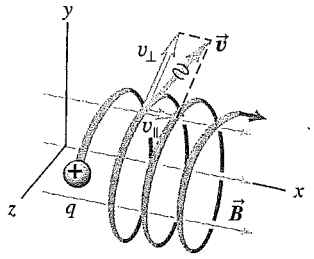


Figura 27.18 O caso genérico de uma partícula carregada que se move em um campo magnético uniforme $\vec{B}$. O campo magnético não realiza trabalho sobre a partícula, portanto sua velocidade escalar e energia cinética permanecem constantes.

O número de revoluções por unidade de tempo é dado por $f = \omega/2\pi$. Essa freqüência f é independente do raio R da trajetória. Ela é chamada de **freqüência ciclotrônica**; em um acelerador de partículas chamado *ciclotron*, as partículas se movem em órbitas quase circulares e recebem uma aceleração duas vezes em cada ciclo, fazendo aumentar a energia e o raio da órbita, porém sem alterar sua freqüência nem a velocidade angular. Analogamente, um *magnetron* — uma fonte comumente usada para gerar microondas para um forno de microondas e para sistemas de radar — emite uma radiação com freqüência igual à de um movimento circular de elétrons em uma câmara a vácuo entre os pólos de um ímã.

Quando a velocidade inicial *não* é perpendicular, o *componente* da velocidade paralelo ao campo permanece constante, porque não existe nenhuma força nessa direção. Portanto, a partícula descreve uma hélice (Figura 27.18). O raio da hélice é dado pela Equação (27.11), em que v agora é o componente da velocidade perpendicular ao campo magnético $\vec{B}$.

O movimento de uma partícula carregada em um campo magnético não uniforme é mais complexo. A Figura 27.19 mostra um campo produzido por duas bobinas circulares separadas por uma certa distância. Uma partícula próxima a qualquer uma das bobinas sofre a ação de uma força magnética que a atrai para o centro da região; partículas com velocidade suficientemente elevada descrevem uma espiral de uma extremidade para outra e depois retornam para a extremidade inicial, seguindo a mesma trajetória em sentido inverso. Como as partículas carregadas podem ficar confinadas nesse tipo de campo magnético, ele é chamado de *garrafa magnética*. Essa técnica serve para confinar plasmas muito quentes, com temperaturas da ordem de 10^6 K. De modo semelhante, o campo magnético da Terra, que não é uniforme, confina partículas carregadas provenientes do Sol no interior de regiões em forma de rosca ao redor da Terra, como indicado na Figura 27.20. Essas regiões, chamadas de *cinturões de radiação de Van Allen*, foram descobertas em 1958 a partir dos dados obtidos pelos instrumentos a bordo do satélite Explorer I.

As forças magnéticas que atuam sobre partículas carregadas desempenham um papel importante nos estudos sobre partículas elementares. A Figura 27.21 mostra uma câmara de bolhas cheia de hidrogênio líquido e com um campo magnético perpendicular ao plano da foto. Um raio gama de energia elevada expele um elétron de um átomo de hidrogênio, deslocando-o em alta velocidade e criando um traço visível no hidrogênio líquido. O traço mostra um elétron se curvando de cima para baixo devido à força magnética. A energia da colisão também produz outro elétron e um pósitron (um elétron com carga positiva). Devido às suas cargas contrárias, as trajetórias do elétron e do pósitron se curvam em direções opostas. À medida que essas partículas se deslocam no interior do hidrogênio líquido, elas colidem com outras partículas carregadas, perdendo energia e velocidade. Em conseqüência disso, o raio de curvatura diminui, conforme sugere a Equação (27.11). (A velocidade do elétron é comparável à velocidade da luz, de modo que a Equação (27.11) não pode ser diretamente aplicada neste caso.) Experiências semelhantes permitem que físicos determinem a massa e a carga de partículas recém-descobertas.

Estratégia para a solução de problemas 27.2

MOVIMENTO EM CAMPOS MAGNÉTICOS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: ao analisar o movimento de uma partícula carregada em campos elétricos e em campos magnéticos, você deve aplicar a segunda lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, em que a força resultante é dada por $\Sigma\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Em geral, as outras forças, tais como as forças gravitacionais, podem ser desprezadas. Muitos problemas são semelhantes aos problemas do movimento circular discutidos nas seções 3.3, 3.4 e 5.4; seria conveniente fazer uma revisão dessas seções.

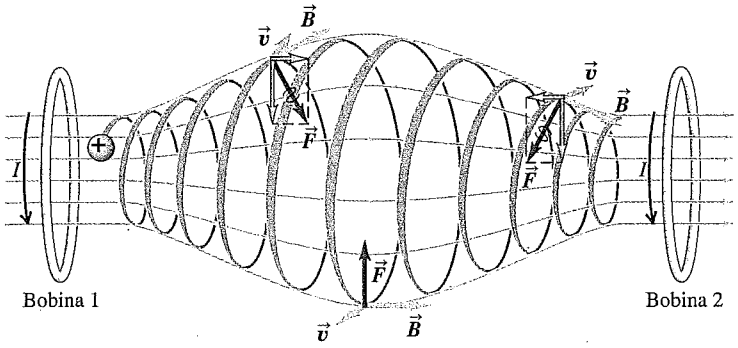


Figura 27.19 Uma garrafa magnética. As partículas situadas próximas da extremidade da região sofrem a ação de uma força magnética orientada para o centro da região. Isso fornece um método para confinar, em uma região do espaço, um gás ideal com temperatura da ordem de 10^6 K, que poderia fundir qualquer material de um recipiente.

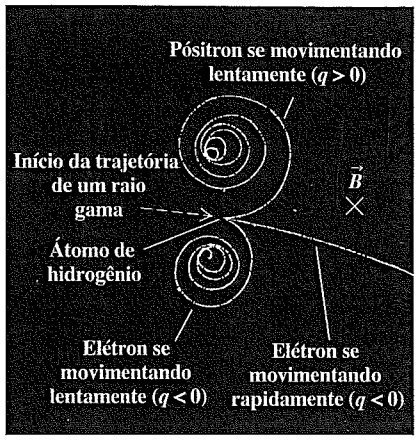


Figura 27.21 Esta imagem, obtida em uma câmara de bolha, é de um raio gama com energia elevada (o qual não deixa nenhum traço) que entra na câmara e colide com um elétron de um átomo de hidrogênio. Esse elétron dispara em alta velocidade no sentido da direita. Parte da energia da colisão é transferida para outro elétron e para um pósitron (um elétron com carga positiva). Um campo magnético é orientado para o plano da imagem, fazendo com que as partículas positiva e negativa se curvem em sentidos diferentes.

(a) (b)

Figura 27.20 (a) Os cinturões de radiação de Van Allen em torno da Terra. Nas proximidades dos pólos, partículas carregadas podem escapar desses cinturões e ingressar na atmosfera, produzindo a aurora boreal ('luzes do hemisfério norte') e a aurora austral ('luzes do hemisfério sul'). (b) Foto de uma aurora boreal.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Determinar a(s) incógnita(s).
2. Geralmente, o uso de componentes fornece o método mais eficiente. Escolha um sistema de coordenadas e, a seguir, decomponha todas as grandezas vetoriais (incluindo $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$ e $\vec{a}$) em seus respectivos componentes nesse sistema.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Se as partículas se movem perpendicularmente a um campo magnético uniforme, a trajetória é circular, na qual o raio e a velocidade angular são dados pelas equações (27.11) e (27.12), respectivamente.
2. Se os seus cálculos envolvem uma trajetória mais complexa, a fórmula $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ pode ser usada sob forma de componentes $\Sigma F_x = ma_x$ e assim por diante. Esse método é particularmente útil quando existe simultaneamente um campo elétrico e um campo magnético.

AVALIAR *sua resposta*: verifique se os resultados obtidos são razoáveis.

Exemplo 27.3

MOVIMENTO DE ELÉTRONS EM UM FORNO DE MICROONDAS Um magnétron de um forno de microondas emite ondas eletromagnéticas com freqüência f = 2450 MHz. Qual é o módulo do campo magnético necessário para que os elétrons se movam em órbitas circulares com essa freqüência?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema se refere a um movimento circular como o indicado na Figura 27.17a. A incógnita é o módulo do campo B.

PREPARAR: usamos a Equação (27.12) para relacionar a velocidade angular em um movimento circular à massa e à carga da partícula e ao módulo do campo magnético B.

EXECUTAR: a velocidade angular que corresponde à freqüência f é $\omega = 2\pi f = (2\pi)\,(2450 \times 10^6\ \text{s}^{-1}) = 1{,}54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}$. Pela Equação (27.12), obtemos

$$B = \frac{m\omega}{|q|} = \frac{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})\,(1{,}54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1})}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 0{,}0877\ \text{T}$$

AVALIAR: a intensidade de campo magnético encontrada é moderada e pode ser facilmente obtida em laboratório com um ímã permanente. As ondas eletromagnéticas de 2450 MHz são fortemente absorvidas pelas moléculas de água, de modo que elas são particularmente úteis para aquecer e cozinhar alimentos.

Exemplo 27.4

MOVIMENTO HELICOIDAL DE UMA PARTÍCULA Em uma situação semelhante à indicada na Figura 27.18, suponha que a partícula carregada seja um próton ($q = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1{,}67 \times 10^{-7}$ kg) e que o campo magnético uniforme seja paralelo ao eixo Ox e possua módulo igual a 0,500 T. Só existe a força magnética atuando sobre o próton. No instante $t = 0$, o próton possui componentes da velocidade dados por $v_x = 1{,}50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ e $v_z = 2{,}0 \times 10^5$ m/s. (a) Para $t = 0$, calcule a força que atua sobre o próton e sua aceleração. (b) Determine o raio da trajetória helicoidal, a velocidade angular do próton e o *passo* da hélice (a distância percorrida ao longo do eixo da hélice durante uma revolução).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a força é dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ e a aceleração é dada pela segunda lei de Newton. A força é perpendicular à velocidade, portanto a velocidade escalar do próton não varia. Logo, o raio da trajetória helicoidal é exatamente a fornecida pela Equação (27.11) para o movimento circular, mas com v substituído pelo componente da velocidade perpendicular a $\vec{B}$. A velocidade angular é dada pela Equação (27.12).

PREPARAR: usamos o sistema de coordenadas indicado na Figura 27.18. Dada a velocidade angular, podemos determinar o tempo necessário para uma revolução; dada a velocidade paralela ao campo magnético, podemos determinar a distância percorrida ao longo da hélice nesse período.

EXECUTAR: (a) Como $v_y = 0$, o vetor velocidade é dado por $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}$. Usando a Equação (27.2) e lembrando que $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \mathbf{0}$ e $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}) \times B\hat{\imath} = qv_zB\hat{\jmath} \\ &= (1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(2{,}0 \times 10^5\,\text{m/s})(0{,}500\,\text{T})\hat{\jmath} \\ &= (1{,}60 \times 10^{-14}\,\text{N})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

(Para conferir a consistência das unidades, lembre-se de que, pela Seção 27.2, temos 1 T = 1 N/A · m = 1 N · s/C · m.) Esse módulo parece ser o de uma força muito fraca, porém a aceleração é extremamente grande porque a massa do próton é muito pequena:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1{,}60 \times 10^{-14}\,\text{N}}{1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}}\hat{\jmath} = (9{,}58 \times 10^{12}\,\text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$

(b) Para $t = 0$, o componente da velocidade perpendicular a $\vec{B}$ é v_z, portanto

$$\begin{aligned}R &= \frac{mv_z}{|q|B} = \frac{(1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg})(2{,}0 \times 10^5\,\text{m/s})}{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(0{,}500\,\text{T})} \\ &= 4{,}18 \times 10^{-3}\,\text{m} = 4{,}18\,\text{mm}\end{aligned}$$

De acordo com a Equação (27.12), a velocidade angular é dada por

$$\omega = \frac{|q|B}{m} = \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(0{,}500\,\text{T})}{1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}} = 4{,}79 \times 10^7\,\text{rad/s}$$

O tempo necessário para completar uma revolução (o período) é $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(4{,}79 \times 10^7\,\text{s}^{-1}) = 1{,}31 \times 10^{-7}$ s. O passo é a distância percorrida ao longo do eixo Ox nesse intervalo de tempo, ou seja,

$$\begin{aligned}v_xT &= (1{,}50 \times 10^5\,\text{m/s})(1{,}31 \times 10^{-7}\,\text{s}) \\ &= 0{,}0197\,\text{m} = 19{,}7\,\text{mm}\end{aligned}$$

AVALIAR: o passo da hélice é quase cinco vezes maior do que seu raio. Essa trajetória helicoidal é muito mais 'esticada' ao longo do eixo do que a trajetória indicada na Figura 27.18.

Teste sua compreensão da Seção 27.4 (a) Se você duplicar a velocidade escalar da partícula carregada na Figura 27.17a, enquanto mantém o campo magnético constante (assim como a carga e a massa), como isso afetará o raio da trajetória? (i) O raio não varia; (ii) o raio dobra; (iii) o raio é quatro vezes maior; (iv) o raio se reduz à metade; (v) o raio se reduz para $\frac{1}{4}$. (b) Como isso afeta o tempo necessário para completar uma órbita circular? (i) O tempo não varia; (ii) o tempo dobra; (iii) o tempo é 4 vezes maior; (iv) o tempo se reduz pela metade; (v) o tempo se reduz para $\frac{1}{4}$. ∎

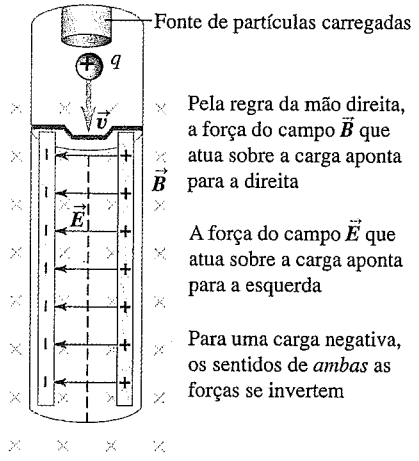
27.5 Aplicações de movimento e partículas carregadas

Esta seção descreve diversas aplicações dos princípios introduzidos neste capítulo. Estude-as cuidadosamente, levando em conta as recomendações feitas na Estratégia para a Solução de Problemas 27.2 (Seção 27.4).

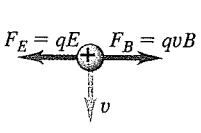
Seletor de velocidades

Em um feixe de partículas carregadas gerado por um catodo quente ou por um material radioativo, nem todas as partículas se movem com a mesma velocidade. Muitas aplicações, porém,

(a) Diagrama esquemático de um seletor de velocidades



(b) Diagrama do corpo livre para uma partícula positiva



Somente quando uma partícula carregada possui $v = E/B$ as forças elétrica e magnética se cancelam. Todas as outras partículas sofrem desvio

Figura 27.22 a) Um seletor de velocidades para partículas carregadas usa um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular a um campo elétrico $\vec{E}$. Somente quando a velocidade da partícula é dada por $v = E/B$, ela pode se deslocar sem deflexão. (b) A força elétrica e a magnética que atuam sobre uma partícula carregada. Os sentidos dessas forças se inverterão quando a carga for negativa.

requerem um feixe em que a velocidade de todas as partículas seja igual. Podemos selecionar partículas com velocidades específicas mediante um *seletor de velocidades*, que usa campos elétricos e campos magnéticos. Na Figura 27.22a, uma partícula carregada com massa m, carga q e velocidade v entra em uma região do espaço onde existe um campo magnético e um campo elétrico, ambos perpendiculares à velocidade da partícula e ortogonais entre si. O campo elétrico $\vec{E}$ está orientado da direita para a esquerda e o campo magnético $\vec{B}$ está entrando no plano da figura. Quando q é positivo, a força elétrica com módulo qE é orientada da direita para a esquerda e a força magnética com módulo qvB é orientada da esquerda para a direita. Para dados valores dos módulos E e B, para um valor particular v, a força elétrica possui módulo igual ao da força magnética: a força resultante é igual a zero e a partícula se desloca em linha reta com velocidade constante. Para que a força resultante seja igual a zero, $\Sigma F_y = 0$, é necessário que $-qE + qvB = 0$; explicitando a velocidade v para a qual não existe nenhum desvio, obtemos

$$v = \frac{E}{B} \qquad (27.13)$$

Somente partículas com velocidades iguais a E/B podem passar através do campo sem sofrer nenhum desvio (Figura 27.22b). Ajustando os valores de E e B de modo apropriado, podemos selecionar partículas com determinadas velocidades para serem usadas em outras experiências. Como q foi eliminada e não aparece na Equação (27.13), um seletor de velocidades funciona do mesmo modo tanto para cargas positivas quanto para elétrons e outras cargas negativas.

Experiência de Thomson para determinar a razão e/m

J. J. Thomson (1856 -1940), realizando uma das experiências que marcaram o final do século XIX, aplicou a idéia descrita anteriormente para medir a razão entre a carga e a massa do elétron. Para essa experiência, realizada em 1897, no Laboratório de Cavendish, em Cambridge, Inglaterra, Thomson usou o dispositivo indicado na Figura 27.23. Em um recipiente de vidro sob vácuo elevado, os elétrons provenientes de um catodo quente são acelerados e agrupados em um feixe por uma diferença de potencial V entre dois anodos, A e A'. A velocidade v dos elétrons é determinada pelo potencial V que os acelera. A energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ é igual à diferença da energia potencial eV, em que e é o módulo da carga do elétron:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \qquad (27.14)$$

Os elétrons passam entre as placas P e P' e colidem com a tela no final do tubo, que é recoberto com um material que se torna fluorescente (cintila) no ponto onde ocorre a colisão. Os elétrons passam pelo tubo ao longo de uma trajetória retilínea quando a Equação (27.13) é satisfeita; ao ser combinada à Equação (27.14), teremos

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{logo} \quad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} \qquad (27.15)$$

Todas as grandezas do membro direito podem ser medidas, portanto a razão e/m entre a carga e a massa do elétron pode ser determinada. Usando esse método, é *impossível* medir e ou m separadamente, somente a razão entre essas grandezas pode ser verificada.

O aspecto mais relevante das medidas de Thomson de e/m é que ele encontrou um *único valor* para essa grandeza. Ela não dependia do material do catodo, do gás residual do tubo, nem de nenhum outro parâmetro da experiência. Essa independência mostrou que as partículas do feixe — agora chamadas de elétrons — constituem um componente comum de toda matéria. Portanto, atribuímos a Thomson a descoberta da primeira partícula subatômica, o elétron. Ele também verificou que a *velocidade* dos elétrons no feixe era aproximadamente igual a um décimo da velocidade da luz, um valor

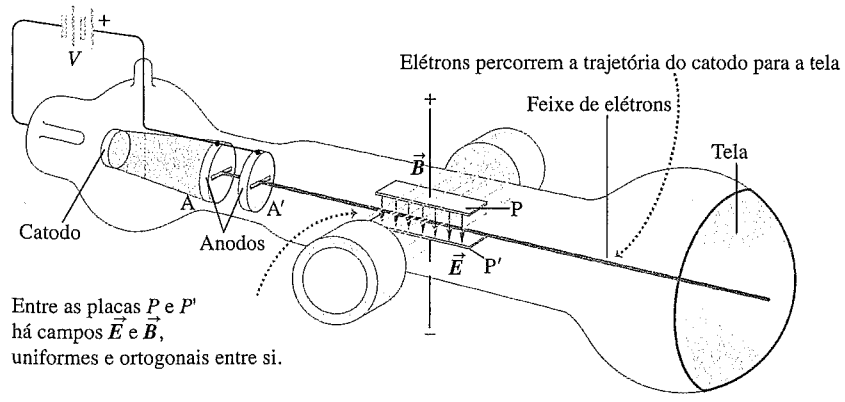
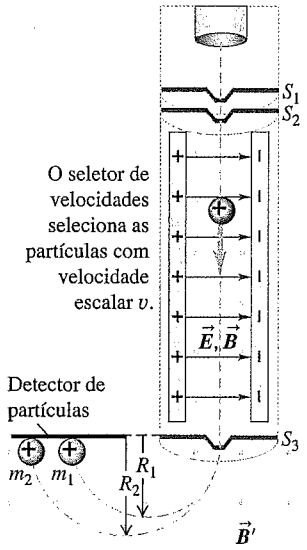


Figura 27.23 Dispositivo de Thomson para determinar a razão e/m de um elétron.



O campo magnético separa as partículas de acordo com a massa; quanto maior a massa da partícula, maior é o raio da sua trajetória.

Figura 27.24 O espectrômetro de massa Bainbridge utiliza um seletor de velocidades para produzir partículas com velocidade constante v. Na região que possui um campo magnético B', as partículas com massas mais elevadas ($m_2 > m_1$) descrevem trajetórias com um raio R maior ($R_2 > R_1$).

muito maior do que as velocidades de partículas materiais medidas anteriormente.

Até a data da edição deste livro, o valor de *e/m* mais preciso conhecido é

$$e/m = 1{,}75882012(15) \times 10^{11}\ \text{C/kg}$$

Na expressão anterior, o termo (15) indica a incerteza dos dois últimos algarismos, 12.

Quinze anos após as experiências de Thomson, o físico americano Robert Millikan mediu com precisão a carga do elétron (veja o Problema Desafiador 23.91). Esse valor, com o valor de *e/m*, pode ser usado para a determinação da *massa* do elétron. O valor mais preciso conhecido até o momento é dado por

$$m = 9{,}1093826(16) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

Espectrômetro de massa

Técnicas semelhantes às usadas na experiência de Thomson de *e/m* podem ser empregadas para medir massas de íons e, portanto, massas atômicas e massas moleculares. Em 1919, Francis Aston (1877-1945), um aluno de Thomson, construiu a primeira versão de um instrumento atualmente conhecido como **espectrômetro de massa**. Uma variante construída por Bainbridge é indicada na Figura 27.24. Íons positivos provenientes de uma fonte passam através das fendas S_1 e S_2, formando um feixe estreito. A seguir, o feixe passa por um seletor de velocidades com campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ortogonais entre si, como já foi descrito, a fim de bloquear todos os íons, exceto aqueles com velocidades v dadas pela razão E/B. Finalmente, os íons passam em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao plano da figura, onde eles se movem ao longo de arcos circulares com raio R determinado pela Equação (27.11): $R = mv/qB'$. Íons com massas diferentes colidem com a placa fotográfica em diferentes pontos, e assim os valores de R podem ser medidos. Supomos que cada átomo tenha perdido um elétron, de modo que o íon possua carga precisamente igual a $+e$. Conhecendo-se os valores de todas as grandezas nessa equação, exceto m, podemos calcular a massa m do íon.

Um dos primeiros resultados desse trabalho foi a descoberta de que o néon possui duas espécies de átomos, cujas massas atômicas são 20 e 22 g/mol. Essas espécies são agora chamadas de **isótopos** do elemento. Experiências posteriores mostraram que muitos elementos possuem diversos isótopos, átomos com propriedades químicas idênticas, porém com massas diferentes por causa dos diferentes números de nêutrons existentes em seus núcleos. Esta é uma das muitas aplicações dos espectômetros de massa em química e física.

Exemplo 27.5

UMA EXPERIÊNCIA PARA *e/m* Você monta um dispositivo para reproduzir a experiência de *e/m* de Thomson com um potencial acelerador igual a 150 V e um campo elétrico com módulo igual a $6{,}0 \times 10^6$ N/C. (a) A que fração da velocidade da luz corresponde a velocidade dos elétrons? (b) Qual é o módulo do campo magnético necessário? (c) Com esse campo magnético, o que ocorreria com o feixe de elétrons, se você aumentasse o potencial acelerador para um valor superior a 150 V?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se da mesma situação indicada na Figura 27.23.

PREPARAR: usamos a Equação (27.14) para determinar a velocidade escalar dos elétrons e a Equação (27.13) para determinar o campo magnético.

EXECUTAR: (a) A velocidade v do elétron é relacionada com o potencial acelerador mediante a Equação (27.14):

$$v = \sqrt{2(e/m)V} = \sqrt{2(1{,}76 \times 10^{11}\ \text{C/kg})(150\ \text{V})}$$
$$= 7{,}27 \times 10^6\ \text{m/s}$$
$$\frac{v}{c} = \frac{7{,}27 \times 10^6\ \text{m/s}}{3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 0{,}024$$

Os elétrons se deslocam com velocidade igual a 2,4% da velocidade da luz.

(b) Pela Equação (27.13),

$$B = \frac{E}{v} = \frac{6{,}0 \times 10^6\ \text{N/C}}{7{,}27 \times 10^6\ \text{m/s}} = 0{,}83\ \text{T}$$

(c) O aumento do potencial acelerador V produz um aumento da velocidade do elétron v. Na Figura 27.23, isso não produz aumento da força elétrica de baixo para cima eE, porém faz aumentar a força magnética de cima para baixo evB. Portanto, o feixe de elétrons se encurvará *para baixo* e colidirá na extremidade do tubo em um ponto abaixo do ponto que atingiria sem deflexão.

AVALIAR: o campo magnético requisitado é relativamente grande. Se o campo magnético B máximo disponível é menor que 0,83 T, a intensidade do campo elétrico E teria que ser reduzida para se manter a razão E/B desejada na Equação (27.15).

Exemplo 27.6

LOCALIZAÇÃO DE PERDAS DE UM SISTEMA A VÁCUO Não existe quase nenhum hélio no ar atmosférico ambiente, de modo que, se o hélio for borrifado na parte externa de um pequeno orifício de um sistema a vácuo, sua presença será detectada na saída da bomba conectada a esse sistema. Imagine que você queira projetar um detector de perdas de um sistema a vácuo que usa um espectômetro de massa para detectar íons He^+ (carga $+e = +1{,}60 \times 10^{-19}$ C, massa igual a $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg). Os íons emergem do seletor de velocidades com velocidade igual a $1{,}0 \times 10^5$ m/s. Eles se encurvam descrevendo uma trajetória semicircular pela ação de um campo magnético B' e são detectados a uma distância de 10,16 cm da fenda S_3 indicada na Figura 27.24. Calcule o módulo do campo magnético B'.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o movimento do íon após ele passar pela fenda S_3 na Figura 27.24 é exatamente o movimento em trajetória circular descrito na Seção 27.4 (Figura 27.17).

PREPARAR: usamos a Equação (27.11) para relacionar a intensidade do campo magnético B' (a incógnita) ao raio da curvatura da trajetória e à massa, à carga e à velocidade escalar do íon.

EXECUTAR: a distância dada é o *diâmetro* da trajetória semicircular indicada na Figura 27.24, portanto o raio é $R = \frac{1}{2}(10{,}16 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 5{,}08 \times 10^{-2}\ \text{m}$. Pela Equação (27.11), $R = mv/qB'$, obtemos o seguinte resultado:

$$B' = \frac{mv}{qR} = \frac{(6{,}65 \times 10^{-27}\,\text{kg})(1{,}0 \times 10^{5}\,\text{m/s})}{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C})(5{,}08 \times 10^{-2}\,\text{m})} = 0{,}0817\ \text{T}$$

AVALIAR: os detectores de perdas a hélio são dispositivos reais, amplamente usados no diagnóstico de problemas com sistema de alto vácuo. Nosso resultado indica que somente um pequeno campo magnético é necessário, o que torna possível construir detectores relativamente compactos.

Teste sua compreensão da Seção 27.5 No Exemplo 27.6, íons He^+ com carga $+e$ se movem a $1{,}0 \times 10^5$ m/s em trajetória retilínea, através de um seletor de velocidades. Suponha que os íons He^+ sejam substituídos por íons He^{2+}, no qual ambos os elétrons foram removidos do átomo do hélio e a carga do íon é igual a $+2e$. Qual é a velocidade em que os íons He^{2+} devem atravessar o mesmo seletor de velocidades, para que o movimento seja retilíneo? (i) aproximadamente $4{,}0 \times 10^5$ m/s; (ii) aproximadamente $2{,}0 \times 10^5$ m/s; (iii) $1{,}0 \times 10^5$ m/s; (iv) aproximadamente $0{,}50 \times 10^5$ m/s; (v) aproximadamente $0{,}25 \times 10^5$ m/s. ∎

27.6 Força magnética sobre um condutor transportando uma corrente

Como funciona um motor elétrico? As forças que o fazem girar são as forças que um campo magnético produz sobre um condutor que transporta uma corrente. As forças magnéticas que atuam sobre as cargas que se movem no interior do condutor são transmitidas para o material do condutor, que, como um todo, sofre a ação dessa força distribuída ao longo de seu comprimento. O galvanômetro com bobina móvel descrito na Seção 26.3 também usa as forças magnéticas que atuam sobre condutores.

Podemos calcular a força atuante sobre um condutor que transporta uma corrente, começando com a força magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ que age sobre uma única carga. A Figura 27.25 mostra o segmento de um fio condutor retilíneo, com seção reta A e comprimento l; a corrente escoa de baixo para cima. O fio está no interior de um campo magnético $\vec{B}$, perpendicular ao plano da figura e orientado *para dentro* do plano. Vamos supor, inicialmente, que a carga seja positiva. Mais adiante, mostraremos o que ocorre quando a carga é negativa.

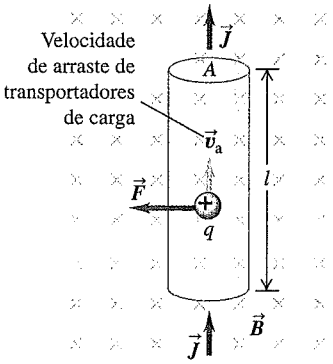


Figura 27.25 Força sobre uma carga positiva se movendo em um condutor que transporta uma corrente.

A velocidade de arraste $\vec{v}_a$ está orientada de baixo para cima, perpendicularmente ao vetor $\vec{B}$. A força média sobre cada carga é $\vec{F} = q\vec{v}_a \times \vec{B}$, orientada da direita para a esquerda, como indica a figura; uma vez que $\vec{v}_a$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, o módulo da força é dado por $F = qv_aB$.

Para deduzirmos uma expressão para a força *total* sobre todas as cargas que se movem ao longo de um comprimento l do condutor com área da seção reta A, podemos usar a mesma linguagem adotada nas equações (25.2) e (25.3) da Seção 25.1. O número de cargas por unidade de volume é n; um segmento do condutor de comprimento l possui volume Al e contém um número de cargas igual a nAl. A força total $\vec{F}$ sobre *todas* as cargas que se movem nesse segmento possui módulo

$$F = (nAl)(qv_aB) = (nqv_aA)(lB) \qquad (27.16)$$

Pela Equação (25.3), a densidade de corrente é dada por $J = nqv_a$. O produto JA fornece a corrente total I, de modo que a Equação (27.16) pode ser reescrita na forma

$$F = IlB \qquad (27.17)$$

Quando o campo $\vec{B}$ não é perpendicular ao fio e forma um ângulo ϕ com ele, podemos tratar a situação com o mesmo método adotado na Seção 27.2 para uma única carga. Somente o componente de $\vec{B}$ perpendicular ao fio (e ortogonal à velocidade de arraste das cargas) pode exercer força; esse componente é dado por $B_\perp = B\text{sen}\phi$. O módulo da força magnética sobre o segmento é então

$$F = IlB_\perp = IlB\text{sen}\phi \qquad (27.18)$$

Força $\vec{F}$ sobre um fio retilíneo transportando uma corrente positiva e orientada, formando um ângulo ϕ com um campo magnético $\vec{B}$:

- O módulo é $F = IlB_\perp = IlB\ \text{sen}\ \phi$.
- A direção e o sentido de $\vec{F}$ são dados pela regra da mão direita.

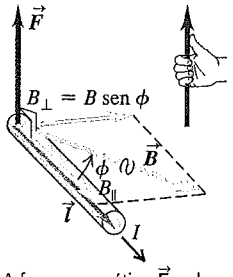


Figura 27.26 A força magnética $\vec{F}$ sobre um segmento de fio retilíneo de comprimento $\vec{l}$ que transporta uma corrente I (no mesmo sentido de $\vec{l}$) é simultaneamente perpendicular a $\vec{l}$ e ao campo magnético $\vec{B}$.

A força é sempre perpendicular tanto ao condutor quanto ao campo, e a mesma regra da mão direita que usamos para uma carga que se move (Figura 27.26) pode ser aplicada para determinar a direção e o sentido da força. Logo, a força pode ser expressa como um produto vetorial, tal como no caso da força sobre uma única carga em movimento. Representando o segmento do fio pelo vetor $\vec{l}$ ao longo do fio e com sentido idêntico ao da corrente, então a força $\vec{F}$ que atua sobre o segmento é dada por

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \tag{27.19}$$

(força magnética sobre um segmento de fio retilíneo)

A Figura 27.27 ilustra as direções e os sentidos dos vetores $\vec{B}$, $\vec{l}$ e $\vec{F}$ em diferentes casos.

Quando o condutor não é retilíneo, podemos dividi-lo em segmentos infinitesimais $d\vec{l}$. A força $d\vec{F}$ sobre cada segmento é

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \tag{27.20}$$

(força magnética sobre um segmento de fio infinitesimal)

A seguir, podemos integrar a expressão anterior ao longo do fio para calcularmos a força total sobre um condutor com qualquer forma. A integral resultante é uma *integral de linha*, a mesma operação matemática utilizada quando definimos o trabalho (Seção 6.3) e o potencial elétrico (Seção 23.2).

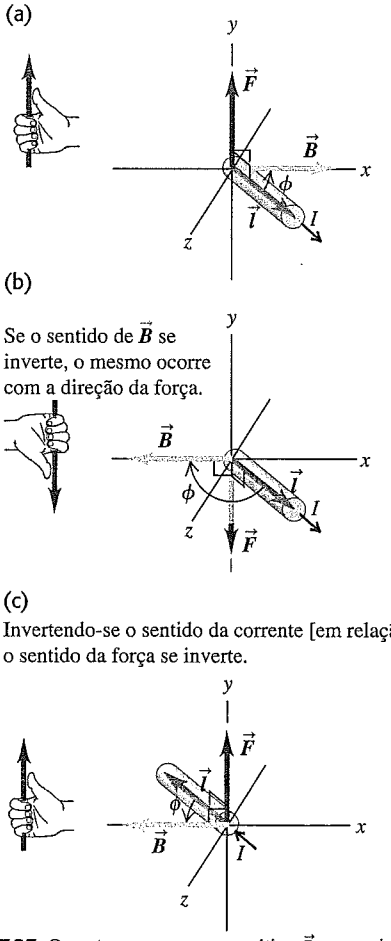


Figura 27.27 Os vetores campo magnético $\vec{B}$, comprimento $\vec{l}$ e força $\vec{F}$ para um fio retilíneo que transporta uma corrente I.

ATENÇÃO Corrente não é um vetor Como discutimos na Seção 25.1, a corrente I não é um vetor. O sentido do fluxo das cargas é indicado pelo vetor $d\vec{l}$, e não por I. Se o condutor for curvo, a corrente I será a mesma em todos os pontos ao longo do seu comprimento, mas $d\vec{l}$ mudará de direção e sentido, de modo que seja sempre tangente ao condutor.

Finalmente, o que ocorreria se as cargas que se movem fossem negativas, tal como elétrons em um metal? Na Figura 27.25, uma corrente de baixo para cima corresponde a uma velocidade de arraste de cima para baixo. Porém, como agora a carga q é negativa, a direção e o sentido da força $\vec{F}$ são os mesmos que no caso anterior. Portanto, as equações desde a Equação (27.17) até a (27.20) são válidas *qualquer* que seja o sinal da carga, mesmo quando existem *ambos* os sinais; isso ocorre em alguns materiais semicondutores e em soluções iônicas.

Uma aplicação das forças magnéticas exercidas sobre um fio que transporta uma corrente pode ser observada em um alto-falante (Figura 27.28). O campo magnético radial criado pelo ímã permanente exerce uma força sobre a bobina do alto-falante, que é proporcional à corrente que passa na bobina; o sentido da força pode ser para a direita ou para a esquerda, dependendo do sentido da corrente. O sinal proveniente do amplificador produz oscilação no módulo e no sentido da corrente. O cone do alto-falante que está ligado à bobina responde com uma oscilação cuja amplitude é proporcional à amplitude da corrente que percorre a bobina. Quando giramos o botão que controla o volume, ocorre um aumento da corrente do amplificador e, portanto, cresce a amplitude da oscilação do cone e aumenta a intensidade do som produzido pelo movimento do cone.

Exemplo 27.7

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE UM CONDUTOR RETILÍNEO Uma barra de cobre retilínea conduz uma corrente de 50,0 A de oeste para leste em uma região entre os pólos de um grande eletroímã. Nessa região, existe um campo magnético no plano horizontal orientado para o nordeste (ou seja, considerando uma rotação de 45° do leste para o norte), com módulo igual a 1,20 T. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética que atua sobre uma seção de 1,0 m da barra. (b) Mantendo-se a barra no plano horizontal, como ela deve ser orientada para que o módulo da força seja máximo? Qual é o módulo da força nesse caso?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se de um segmento de fio retilíneo em um campo magnético uniforme, que é a mesma situação indicada na Figura 27.26. As incógnitas deste problema são a força $\vec{F}$ que atua sobre o segmento de barra e o ângulo ϕ para o qual o módulo da força é máximo.

PREPARAR: a Figura 27.29 indica a situação. Podemos determinar o módulo da força magnética usando a Equação (27.18); e a direção e o sentido pela regra da mão direita. Alternativamente, podemos determinar o vetor força (módulo, direção e sentido) usando a Equação (27.19).

EXECUTAR: (a) O ângulo ϕ entre a direção da corrente e o campo é igual a 45°. Pela Equação (27.18), obtemos

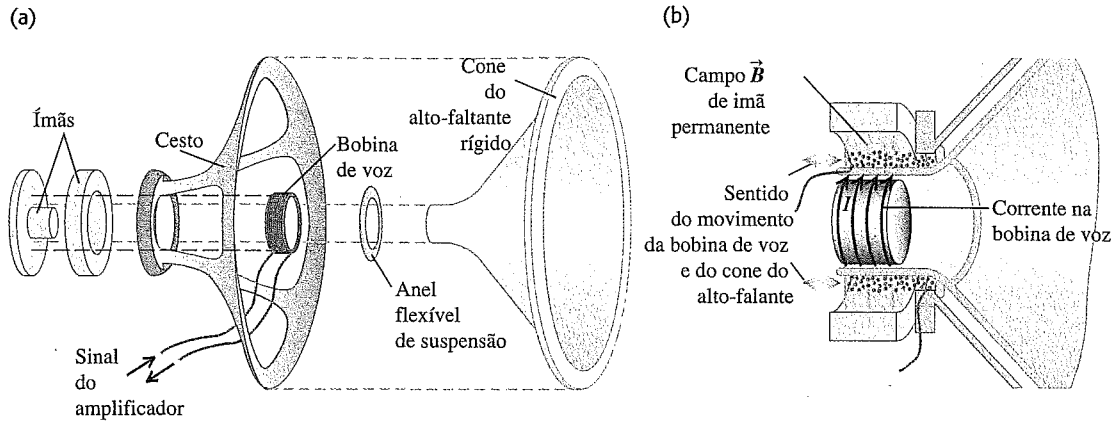


Figura 27.28 (a) Componentes de um alto-falante. (b) O ímã permanente cria um campo magnético que exerce uma força sobre a bobina do alto-falante; para uma corrente I no sentido indicado, a força é orientada para a direita. Quando uma corrente elétrica oscilante percorre a bobina do alto-falante, o cone ligado à bobina oscila com a mesma freqüência.

$$F = IlB \operatorname{sen}\phi = (50{,}0\ \text{A})(1{,}0\ \text{m})(1{,}20\ \text{T})(\operatorname{sen} 45°) = 42{,}4\ \text{N}$$

A *direção* da força é perpendicular ao plano formado pela corrente e pelo campo, ambos contidos no plano horizontal. Logo, a força deve ser vertical; a regra da mão direita mostra que o sentido da força é de *baixo para cima* (saindo do plano da figura).

Alternativamente, podemos usar um sistema de coordenadas de um eixo Ox apontando de oeste para leste, o eixo Oy do sul para o norte e o eixo Oz de baixo para cima. Portanto,

$$\vec{l} = (1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} \qquad \vec{B} = (1{,}20\ \text{T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\operatorname{sen} 45°)\hat{\jmath}]$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= I\vec{l} \times \vec{B} \\ &= (50\ \text{A})(1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} \times (1{,}20\ \text{T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\operatorname{sen} 45°)\hat{\jmath}] \\ &= (42{,}4\ \text{N})\hat{k}\end{aligned}$$

Se o condutor estivesse em equilíbrio mecânico sob a ação do próprio peso e da força magnética de baixo para cima, seu peso seria igual a 42,4 N e sua massa seria

$$m = \frac{w}{g} = \frac{42{,}4\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 4{,}33\ \text{kg}$$

(b) O módulo da força é máximo quando $\phi = 90°$; logo, $\vec{l}$ é perpendicular a $\vec{B}$. Para obtermos a força de baixo para cima, giramos a barra no sentido dos ponteiros do relógio de 45°, a partir da orientação indicada na Figura 27.29, de modo que a corrente passa a ser orientada a sudeste. Portanto, a força magnética possui módulo

$$F = IlB = (50{,}0\ \text{A})(1{,}0\ \text{m})(1{,}20\ \text{T}) = 60{,}0\ \text{N}$$

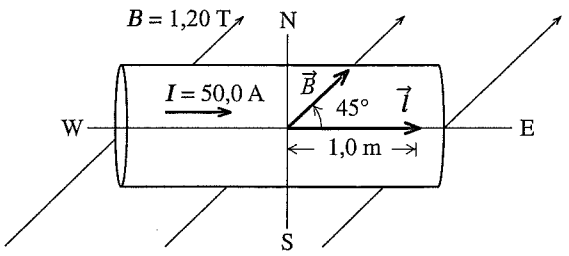


Figura 27.29 Nosso esquema da barra de cobre visto por cima.

e a massa da barra que pode ser sustentada pela força magnética é $m = w/g = (60{,}0\ \text{N})/(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 6{,}12\ \text{kg}$.

AVALIAR: esse é um exemplo simples de levitação magnética, que é também usada em trens especiais de alta velocidade. Uma tecnologia convencional baseada no eletromagnetismo pode fazer o trem levitar acima dos trilhos; a eliminação do atrito das rodas com os trilhos permite que o trem atinja velocidades superiores a 400 km/h.

Exemplo 27.8

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE UM CONDUTOR CURVO Na Figura 27.30, o campo magnético $\vec{B}$ é uniforme e perpendicular ao plano da figura, apontado para fora. O condutor possui um segmento retilíneo de comprimento L perpendicular ao plano da figura no lado direito, transportando uma corrente com sentido oposto ao do campo $\vec{B}$; a seguir, o fio continua sobre uma semicircunferência de raio R e, finalmente, continua com um segmento retilíneo de comprimento L, situado sobre o eixo Ox, conforme indicado. O condutor transporta uma corrente I. Calcule a força magnética total sobre os três segmentos de fio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: dois dos três segmentos de fio são retilíneos e o campo magnético é uniforme, portanto podemos obter a força que atua sobre eles usando os conceitos estudados nesta seção. Podemos analisar o segmento curvo inicialmente dividindo-o em um grande número de segmentos retilíneos infinitesimais. Determinamos a força que atua sobre um desses segmentos e, a seguir, integramos para determinar a força sobre o segmento curvo como um todo.

PREPARAR: achamos a força que atua sobre os segmentos retilíneos usando a Equação (27.19); e definimos a força que atua sobre a parte infinitesimal do segmento curvo usando a Equação (27.20). A força magnética total sobre os três segmentos é a soma vetorial das forças que atuam sobre cada segmento individual.

EXECUTAR: vamos começar com os segmentos mais fáceis (os segmentos retilíneos). Não existe *nenhuma* força sobre o segmento retilíneo do lado direito, situado perpendicularmente ao plano da figura, porque o vetor desse segmento é antiparalelo a $\vec{B}$; $\vec{L} \times \vec{B} = \mathbf{0}$, ou, como $\phi = 180°$, $\operatorname{sen}\phi = 0$. Para o segmento retilíneo do lado

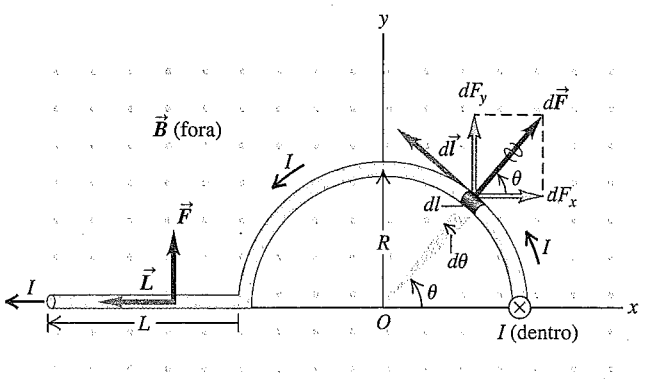


Figura 27.30 Qual é a força magnética total sobre o condutor?

esquerdo, $\vec{L}$ aponta da direita para a esquerda, perpendicularmente a $\vec{B}$. O módulo da força é $F = ILB$, sua direção é vertical e o sentido é de baixo para cima (no sentido $+y$ indicado na figura).

A parte mais interessante é a semicircunferência. A figura mostra um elemento $d\vec{l}$ cujo comprimento é $dl = R\,d\theta$ para um ângulo θ. A direção do produto $d\vec{l} \times \vec{B}$ é radial e o sentido aponta para fora do centro; verifique se você é capaz de identificar a direção e o sentido. Como $d\vec{l}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, o módulo dF da força sobre o segmento $d\vec{l}$ é dado por $dF = I\,dl\,B$, portanto obtemos

$$dF = I(R\,d\theta)B$$

Os componentes da força $d\vec{F}$ sobre o segmento $d\vec{l}$ são

$$dF_x = IR\,d\theta\,B\cos\theta \qquad dF_y = IR\,d\theta\,B\operatorname{sen}\theta$$

Para determinarmos os componentes da força total, integramos essas expressões, fazendo θ variar de 0 até π para levar em conta a semicircunferência. Encontramos

$$F_x = IRB\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$$

$$F_y = IRB\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 2IRB$$

Finalmente, somando as forças sobre os segmentos retilíneos e sobre o segmento semicircular, obtemos a força total:

$$F_x = 0 \qquad F_y = IB(L + 2R)$$

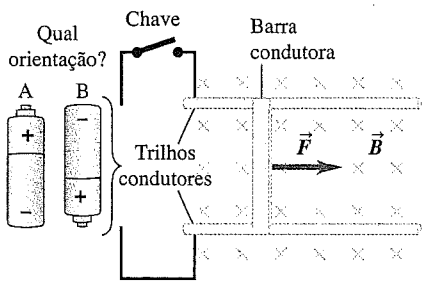
ou

$$\vec{F} = IB(L + 2R)\hat{j}$$

AVALIAR: por simetria, poderíamos prever que F_x deveria ser igual a zero. Na metade direita da semicircunferência, o componente x da força é positivo (orientado para a direita) e na metade esquerda é negativo (orientado para a esquerda); portanto, as contribuições positivas e negativas da integral se anulam.

Observe que essa força é igual à força que seria exercida caso a semicircunferência fosse substituída por um segmento retilíneo ao longo do eixo Ox. Você pode explicar por quê?

Teste sua compreensão da Seção 27.6 A figura a seguir mostra uma vista aérea de dois trilhos condutores sobre os quais uma barra condutora pode deslizar. Um campo magnético uniforme está orientado perpendicularmente ao plano da figura, conforme indicado. Uma pilha deve ser conectada aos dois trilhos de modo que, quando a chave for fechada, a corrente fluirá através da barra e provocará uma força magnética capaz de empurrar a barra para a direita. Em qual sentido, A ou B, a pilha deve ser colocada no circuito? ■



27.7 Força e torque sobre uma espira de corrente

Condutores que transportam corrente são, em geral, fechados e formam espiras, de modo que é necessário usar os resultados da Seção 27.6 para encontrar a força magnética *total* e o torque *total* sobre um condutor em forma de espira. Muitos dispositivos práticos utilizam a força magnética ou o torque sobre uma espira condutora, incluindo alto-falantes (Figura 27.28) e galvanômetros (Seção 26.3). Portanto, os resultados desta seção são de suma importância prática. Esses resultados também nos auxiliam a entender o comportamento do ímã em forma de barra descrito na Seção 27.1.

Como exemplo, vamos examinar uma espira de corrente retangular em um campo magnético uniforme. Podemos representar a espira como uma série de segmentos retilíneos. Verificaremos que a *força* total sobre a espira é igual a zero, porém pode existir um *torque* resultante atuando sobre a espira, com algumas propriedades interessantes.

A Figura 27.31a mostra uma espira retangular com lados a e b. Uma linha perpendicular ao plano da espira (isto é, *normal* ao plano) forma um ângulo ϕ com a direção do campo magnético $\vec{B}$ e a espira conduz uma corrente I. Os fios que conduzem a corrente para dentro e para fora da espira e a fonte da fem foram omitidos para que o diagrama ficasse simples.

A força $\vec{F}$ sobre o lado direito da espira (comprimento a) é orientada para a direita, no sentido $+Ox$, conforme indicado. Sobre esse lado, $\vec{B}$ é perpendicular à direção da corrente e a força sobre esse lado possui módulo

$$F = IaB \tag{27.21}$$

Uma força $-\vec{F}$ com mesmo módulo, porém com sentido contrário, atua sobre o lado oposto da espira, como indica a figura.

Os lados de comprimento b formam um ângulo $(90° - \phi)$ com a direção de $\vec{B}$. As forças sobre esses lados são os vetores $\vec{F}'$ e $-\vec{F}'$; os módulos F' desses vetores são dados por

$$F' = IbB\operatorname{sen}(90° - \phi) = IbB\cos\phi$$

As linhas de ação de ambas as forças estão sobre o eixo Oy.

A força *total* sobre a espira é igual a zero porque as forças sobre os lados opostos se cancelam aos pares.

A força resultante sobre uma espira de corrente em um campo magnético uniforme é igual a zero. Contudo, o *torque* resultante geralmente é diferente de zero.

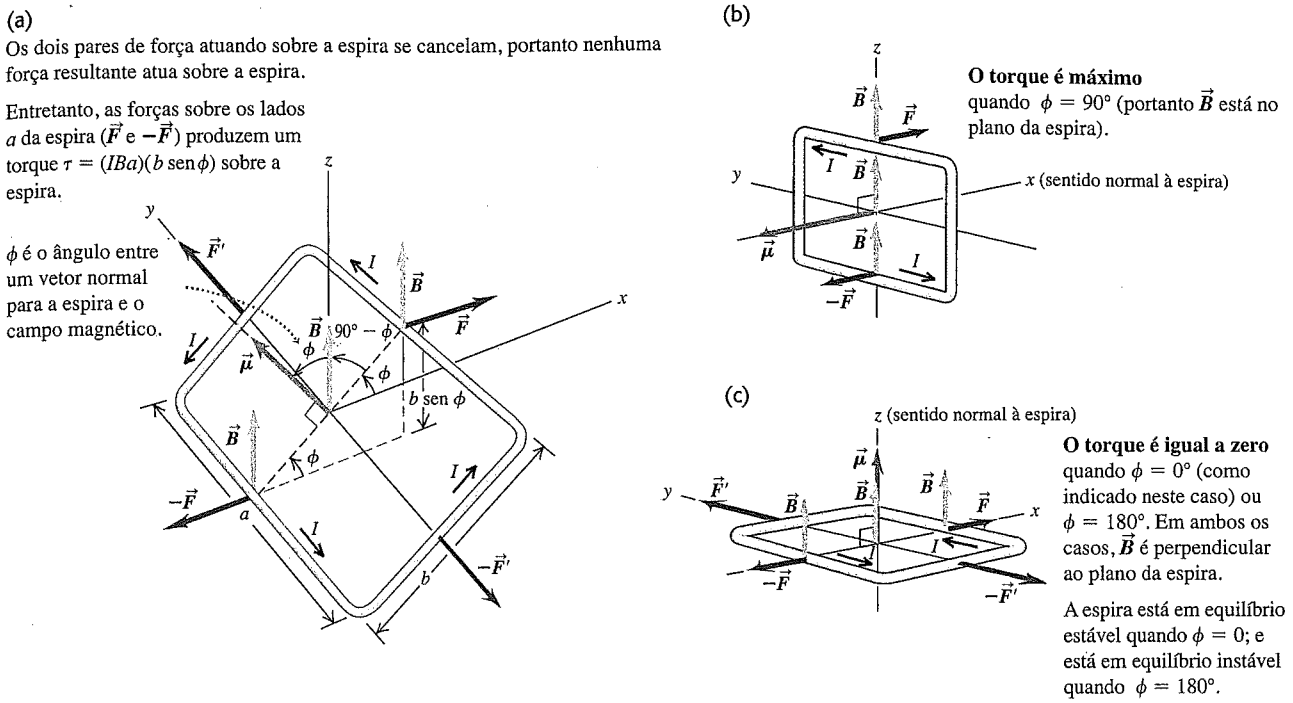


Figura 27.31 Torque sobre uma espira transportando corrente em um campo magnético uniforme.

(Talvez você queira fazer uma revisão da discussão sobre torque feita na Seção 10.1.) As duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ na Figura 27.31a estão ao longo da mesma linha e, portanto, fornecem um torque resultante igual a zero em relação a qualquer ponto. Tanto a força $\vec{F}$ como a $-\vec{F}$ estão ao longo de duas linhas diferentes e cada uma delas fornece um torque em torno do eixo Oy. De acordo com a regra da mão direita, para determinar a direção e sentido do torque, verificamos que os vetores dos torques produzidos por $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ atuam no sentido $+Oy$; portanto, o vetor do torque resultante $\vec{\tau}$ também. O braço do momento para cada uma dessas forças (dado pela distância perpendicular entre a linha de ação da força e o eixo de rotação) é igual a $(b/2)$ sen ϕ, de modo que o torque de cada uma dessas forças possui módulo $F(b/2)$ sen ϕ. Usando a Equação (27.21) para F, o módulo do torque resultante é dado por

$$\tau = 2F(b/2)\operatorname{sen}\phi = (IBa)(b\operatorname{sen}\phi) \qquad (27.22)$$

O torque atinge seu valor máximo quando $\phi = 90°$, $\vec{B}$ está no plano da espira e a normal a esse plano é perpendicular a $\vec{B}$ (Figura 27.31b). O torque é igual a zero quando ϕ é igual a 0° ou 180° e a normal à espira é paralela ou antiparalela ao campo (Figura 27.31c). O valor $\phi = 0°$ é uma posição de equilíbrio estável, porque o torque é igual a zero nesse ponto e, quando a espira gira ligeiramente a partir desse ponto, o torque resultante tenderá a fazê-la girar de volta para $\phi = 0°$. A posição $\phi = 180°$ corresponde a um equilíbrio *instável*; se ela for deslocada ligeiramente a partir dessa posição, a espira tenderá a se afastar ainda mais da posição $\phi = 180°$. A Figura 27.31 mostra uma rotação em torno do eixo Oy, porém, como a força resultante sobre a espira é igual a zero, a Equação (27.22) do torque permanece válida para *qualquer* escolha dos eixos.

A área A da espira é igual a ab, de modo que podemos reescrever a Equação (27.22) na forma

$$\tau = IBA\operatorname{sen}\phi \qquad (27.23)$$

(módulo do torque sobre uma espira)

O produto IA denomina-se **momento de dipolo magnético** ou **momento magnético** da espira, para o qual usamos a letra grega μ:

$$\mu = IA \qquad (27.24)$$

Essa grandeza é análoga ao momento de dipolo elétrico introduzido na Seção 21.7. Em termos de μ, o módulo do torque sobre uma espira de corrente é

$$\tau = \mu B\operatorname{sen}\phi \qquad (27.25)$$

em que ϕ é o ângulo entre a normal ao plano da espira (dada pela direção e sentido do vetor área $\vec{A}$) e o vetor $\vec{B}$. O torque tende a fazer o corpo girar no sentido de ϕ *decrescente*, ou seja, no sentido da posição de equilíbrio estável no qual a espira fica no plano xy, perpendicular à direção do vetor do campo $\vec{B}$ (Figura 27.31c). Uma espira de corrente, ou qualquer outro corpo que sofra um torque magnético dado pela Equação (27.25), é também chamado de **dipolo magnético**.

Torque magnético: forma vetorial

Podemos também definir um vetor do momento magnético $\vec{\mu}$ com módulo igual a IA; isso é indicado na Figura 27.31. A direção de $\vec{\mu}$ é definida como a perpendicular ao plano da espira, com sentido determinado pela regra da mão direita, conforme indicado na Figura 27.32. Enrole os dedos da sua mão direita em torno da periferia da espira no sentido da rotação da corrente. A seguir, estenda seu dedo polegar de modo que ele fique perpendicular ao plano da espira; sua direção e seu sentido coincidem com o vetor $\vec{\mu}$ (e com o vetor da área $\vec{A}$ da espira). O torque atinge seu valor máximo quando $\vec{\mu}$ é perpendicular a $\vec{B}$ e é zero quando esses vetores são paralelos ou antiparalelos. Na posição de equilíbrio estável, $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$ são paralelos.

Finalmente, podemos descrever essa interação em termos de torque $\vec{\tau}$ de modo análogo ao que usamos para descrever as interações de um dipolo *elétrico,* na Seção 21.7. Pela Equação (27.25), o módulo de $\vec{\tau}$ é igual ao módulo de $\vec{\mu} \times \vec{B}$, e pela Figura 27.31 vemos que as direções também obedecem a esse mesmo produto vetorial. Logo,

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad (27.26)$$

(vetor do torque sobre uma espira)

O resultado anterior é diretamente análogo ao que encontramos na Seção 21.7 para o torque exercido por um campo elétrico $\vec{E}$ sobre um dipolo *elétrico* com momento de dipolo $\vec{p} \cdot \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Energia potencial para um dipolo magnético

Quando um dipolo magnético muda de orientação em um campo magnético, o campo realiza um trabalho sobre ele. Para um deslocamento infinitesimal $d\phi$, o trabalho dW é dado por $\tau d\phi$ e ocorre uma variação correspondente da energia potencial. Como sugere a discussão anterior, a energia potencial é mínima quando $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$ são paralelos e máxima quando esses vetores são antiparalelos. Para determinarmos uma expressão para a energia potencial U em função da orientação, podemos usar a bela simetria entre a interação de um dipolo elétrico e de um dipolo magnético. O torque sobre um dipolo *elétrico* em um campo *elétrico* é dado por $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$; verificamos na Seção 21.7 que a energia potencial correspondente é $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. O torque sobre um dipolo *magnético* em um campo *magnético* é dado por $\vec{\mu} \times \vec{B}$; logo, concluímos imediatamente que a energia potencial correspondente vem de

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\phi \qquad (27.27)$$

(energia potencial para um dipolo magnético)

Com essa definição, U é igual a zero quando o momento de dipolo magnético é perpendicular ao campo magnético.

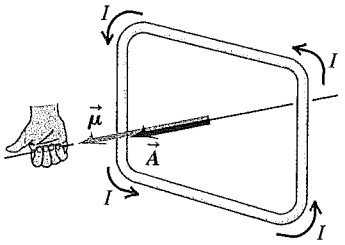


Figura 27.32 A regra da mão direita fornece a direção e o sentido do momento magnético de uma espira que conduz uma corrente. O vetor da área $\vec{A}$ possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor do momento magnético; $\vec{\mu} = I\vec{A}$ é uma equação vetorial.

Torque magnético: espiras e bobinas

Embora tenhamos deduzido todas as equações desde a Equação (27.21) até a (27.27) para uma espira retangular, todas essas relações continuam válidas para uma espira plana com qualquer forma. Qualquer espira plana pode ser aproximada com o grau de precisão que desejamos por um número muito grande de espiras retangulares, conforme indicado na Figura 27.33. Se todas essas espiras transportam a mesma corrente no sentido horário, então as forças e os torques sobre os lados de espiras adjacentes se cancelam e somente os torques e as forças que não se cancelam são produzidos pelas correntes em torno da fronteira externa. Logo, todas as relações anteriores permanecem válidas para uma espira de corrente plana de qualquer forma, com um momento magnético $\vec{\mu}$ dado por $\vec{\mu} = I\vec{A}$.

Podemos também generalizar toda essa discussão para uma bobina formada por um conjunto de N espiras planas agrupadas de modo compacto; para isso é suficiente multiplicar por um fator N a energia potencial, o torque, o momento magnético e a força correspondentes a cada espira.

Um arranjo de interesse particular é o **solenóide**, um enrolamento helicoidal de um fio, tal como um fio bobinado sobre um cilindro circular (Figura 27.34). Quando o enrolamento é compacto, o solenóide pode ser aproximado por muitas espiras circulares situadas em planos perpendiculares ao eixo longitudinal do cilindro. O torque total sobre um solenóide em um campo magnético é simplesmente dado pela soma dos torques sobre cada espira individual. Para um solenóide com N espirais em um campo magnético B, o momento magnético é dado por $\mu = NIA$ e

$$\tau = NIAB\text{sen}\phi \qquad (27.28)$$

em que ϕ é o ângulo entre o eixo do solenóide e a direção do campo. O vetor do momento magnético $\vec{\mu}$ está ao longo do eixo do solenóide. O torque é máximo quando o eixo do solenóide é perpendicular ao campo magnético e zero quando eles são paralelos. O efeito desse torque tende a fazer o solenóide girar até que seu eixo fique paralelo ao campo. Os solenóides também são úteis como *fontes* de campos magnéticos, como discutiremos no Capítulo 28.

O galvanômetro de d'Arsonval, descrito na Seção 26.3, usa o torque magnético sobre uma bobina que conduz uma corrente. Como indica a Figura 26.14, o campo magnético não é uniforme, porém *radial*, de modo que as forças laterais sobre a bobina são sempre perpendiculares ao seu plano. Portanto, o ângulo ϕ na Equação (27.28) é sempre igual a 90° e o torque magnético é diretamente proporcional à corrente, independen-

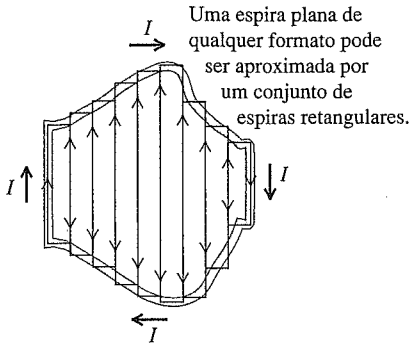
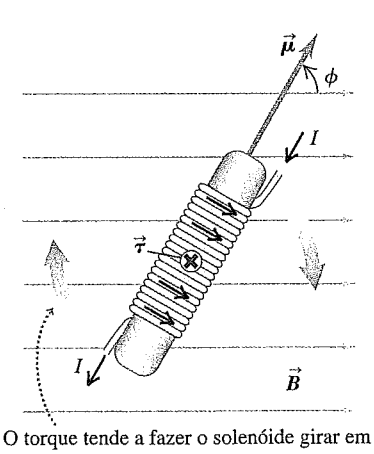


Figura 27.33 O conjunto de retângulos se superpõe à espira plana irregular quando o número de retângulos tende ao infinito e a largura de cada retângulo tende a zero.

temente da orientação da bobina. Um torque restaurador proporcional ao deslocamento angular da bobina é fornecido por duas molas capilares, que também servem como contatos elétricos com a bobina. Quando uma corrente é fornecida para a bobina, ela gira com seu ponteiro até que o torque restaurador seja exatamente igual ao torque magnético. Logo, o desvio do ponteiro do galvanômetro é proporcional à corrente.

Uma importante aplicação médica do torque sobre um dipolo magnético é o método de diagnóstico por imagem que usa a ressonância magnética (RM). Um paciente é colocado em um campo magnético de aproximadamente 1,5 T, 10^4 vezes mais forte que o campo da Terra. O núcleo de cada átomo de hidrogênio no tecido a ser examinado possui um momento de dipolo magnético submetido a um torque que o alinha ao campo aplicado. A seguir, o tecido é iluminado por ondas de radiofreqüência na medida certa para tirar esses momentos magnéticos do alinhamento. A absorção dessas ondas de radiofreqüência pelo tecido é proporcional à quantidade de hidrogênio presente. Logo, o tecido humano, rico em hidrogênio, destoa do osso, que é deficiente em hidrogênio, o que torna a ressonância magnética ideal para a análise dos detalhes em tecido humano que não são visíveis em imagens de raios X (veja a imagem no início deste capítulo).



O torque tende a fazer o solenóide girar em sentido horário no plano da página, alinhando o momento magnético $\vec{\mu}$ com o campo $\vec{B}$.

Figura 27.34 O torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ sobre este solenóide imerso em um campo magnético uniforme está orientado diretamente para o plano da página. Um solenóide real possui muito mais espiras enroladas, de modo mais compacto.

Exemplo 27.9

TORQUE MAGNÉTICO SOBRE UMA BOBINA CIRCULAR

Uma bobina circular com raio de 0,0500 m possui 30 espiras e está situada sobre um plano horizontal. Ela conduz uma corrente de 5,0 A no sentido anti-horário, quando observada de cima para baixo. A bobina está em um campo magnético uniforme orientado da esquerda para a direita, com módulo igual a 1,20 T. Calcule o módulo do momento magnético e o módulo do torque sobre a bobina.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa a definição de momento magnético e a expressão para o torque sobre um dipolo magnético em um campo magnético.

PREPARAR: A Figura 27.35 mostra a situação. O módulo μ do momento magnético de uma única espiral do fio é dado em termos da corrente e da área da bobina pela Equação (27.24). Para N espirais, o momento magnético é N vezes maior. O módulo τ do torque é determinado pela Equação (27.25).

EXECUTAR: a área da bobina é

$$A = \pi r^2 = \pi(0{,}0500\ \text{m})^2 = 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

O momento magnético de cada espira da bobina é

$$\mu = IA = (5{,}0\ \text{A})(7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2) = 3{,}93 \times 10^{-2}\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

e o momento magnético total de todas as 30 espirais da bobina é

$$\mu_{\text{total}} = (30)(3{,}93 \times 10^{-2}\ \text{A} \cdot \text{m}^2) = 1{,}18\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

O ângulo ϕ entre a direção de $\vec{B}$ e a direção de $\vec{\mu}$ (que está ao longo da normal ao plano da bobina) é igual a 90°. Pela Equação (27.25),

$$\tau = \mu_{\text{total}} B \text{sen}\phi = (1{,}18\ \text{A} \cdot \text{m}^2)(1{,}20\ \text{T})(\text{sen}90°) = 1{,}41\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Alternativamente, pela Equação (27.23), o torque sobre cada espira da bobina é

$$\tau = IBA\text{sen}\phi = (5{,}0\ \text{A})(1{,}20\ \text{T})(7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(\text{sen}90°) = 0{,}0471\ \text{N} \cdot \text{m}$$

e o torque total sobre a bobina é

$$\tau = (30)(0{,}0471\ \text{N} \cdot \text{m}) = 1{,}41\ \text{N} \cdot \text{m}$$

AVALIAR: o torque tende a fazer o lado direito da bobina girar para baixo e o lado esquerdo girar para cima, até que ela atinja uma posição na qual a normal a seu plano seja paralela a $\vec{B}$.

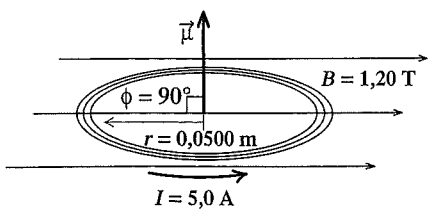


Figura 27.35 Nosso esquema para esse problema.

Exemplo 27.10

ENERGIA POTENCIAL DE UMA BOBINA EM UM CAMPO MAGNÉTICO Se a bobina do Exemplo 27.9 gira a partir de sua posição inicial até uma posição na qual seu momento magnético seja paralelo a $\vec{B}$, qual é a variação de sua energia potencial?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a posição inicial é a indicada na Figura 27.35. Na posição final, a bobina é girada a 90° no sentido horário, de modo que $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$ sejam paralelos ($\phi = 0$).

PREPARAR: calculamos a energia potencial para cada orientação usando a Equação (27.27). A seguir, tomamos a diferença entre os valores final e original para determinar a variação na energia potencial.

EXECUTAR: pela Equação (27.27), a energia potencial inicial U_1 é

$$U_1 = -\mu_{total}B\cos\phi_1 = -(1{,}18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1{,}20\ \text{T})(\cos 90°) = 0$$

e a energia potencial final U_2 é

$$U_2 = -\mu_{total}B\cos\phi_2 = -(1{,}18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1{,}20\ \text{T})(\cos 0°) = -1{,}41\ \text{J}$$

AVALIAR: a variação de energia potencial é igual a –1,41 J; a energia potencial diminui porque a rotação ocorre no mesmo sentido do torque magnético.

Dipolo magnético em um campo magnético não uniforme

Vimos que a força resultante sobre uma espira de corrente (ou seja, um dipolo magnético) é igual a zero quando ela está em um campo magnético uniforme. A Figura 27.36 mostra duas espiras de corrente em um campo magnético *não uniforme* $\vec{B}$ produzido por uma barra imantada; em ambos os casos, a força resultante sobre cada espira *não* é *igual* a zero. Na Figura 27.36a, o momento magnético $\vec{\mu}$ possui sentido oposto ao do campo e a força $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ sobre um segmento da espira possui um componente radial e um componente orientado para a direita. Quando essas forças são somadas para se determinar a força resultante $\vec{F}$ sobre a espira, os componentes radiais se cancelam, de modo que a força resultante é orientada para a direita, afastando a espira do ímã. Note que, nesse caso, a força é direcionada no sentido da região na qual as linhas de campo estão mais afastadas e o módulo B do campo magnético possui um valor mais baixo. A polaridade do ímã está invertida na Figura 27.36b, de modo que, nesse caso, $\vec{B}$ e $\vec{\mu}$ são paralelos; agora a força resultante sobre a espira é orientada para a esquerda, no sentido da região onde o campo magnético é mais forte nas vizinhanças do pólo do ímã. Mais adiante nesta seção, retomaremos essas observações para explicar por que um ímã pode atrair pequenos objetos de ferro não-magnetizados.

Dipolos magnéticos e materiais magnéticos

O comportamento de um solenóide em um campo magnético (Figura 27.34) assemelha-se ao de um ímã em forma de barra ou ao ímã de uma bússola; caso eles possam girar livremente, o solenóide e o ímã se orientam de modo que fiquem com os respectivos eixos paralelos ao campo $\vec{B}$. Em ambos os casos, isso decorre da interação entre um campo magnético e as cargas em movimento; a diferença é que, no caso de um ímã em forma de barra, o movimento da carga ocorre na escala microscópica do átomo.

Imagine um elétron como uma bola carregada girando. Nessa analogia, a circulação da carga em torno do eixo de rotação é semelhante a uma espira de corrente e o elétron adquire um momento magnético resultante. (Essa analogia, embora útil, não é exata; um elétron não é, na realidade, uma esfera girando. Uma explicação completa da origem do momento magnético do elétron envolve a mecânica quântica, que foge aos objetivos deste capítulo.) Em um átomo de ferro, alguns momentos magnéticos dos elétrons se alinham entre si e o átomo possui um momento magnético resultante. (Em contraste, os átomos de quase todos os elementos possuem momento magnético pequeno ou igual a zero.) Em um fragmento de ferro não-magnetizado, não existe nenhum alinhamento global dos momentos magnéticos dos átomos; a soma vetorial desses momentos magnéticos é igual a zero e o momento magnético resultante também (Figura 27.37a). Porém, em um ímã de ferro, os momentos magnéticos de muitos átomos são paralelos e existe um momento magnético resultante $\vec{\mu}$ apreciável (Figura 27.37b). Quando o ímã fica paralelo a um campo magnético $\vec{B}$, o campo exerce um torque dado pela Equação (27.26), que tende a alinhar $\vec{\mu}$ a $\vec{B}$ (Figura 27.37c). Um ímã em forma de barra tende a alinhar seu eixo ao campo $\vec{B}$ de tal modo que uma reta que liga o pólo sul ao pólo norte do ímã possua a mesma direção e sentido de $\vec{B}$; portanto, o significado real do pólo norte e do pólo sul de um

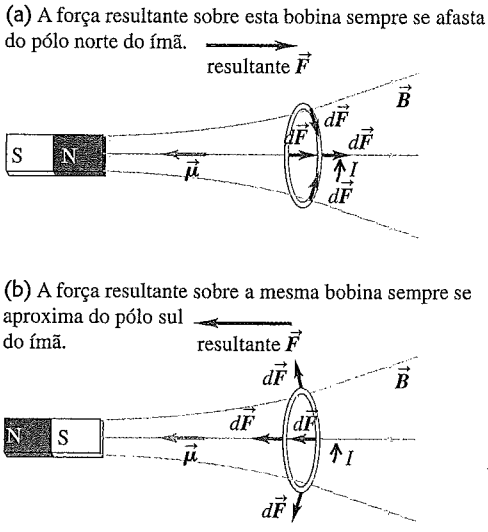


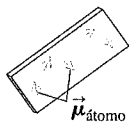
Figura 27.36 Forças sobre espiras conduzindo correntes em um campo magnético não uniforme $\vec{B}$. Em cada caso, o eixo do ímã em forma de barra é perpendicular ao plano da espira e passa através do centro da espira.

ímã é que eles representam, respectivamente, a frente e a traseira do momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$.

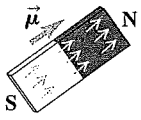
O torque que atua sobre uma espira de corrente em um campo magnético também explica como um objeto de ferro semelhante ao indicado na Figura 27.37a torna-se imantado. Quando um clipe de papel é colocado próximo de um ímã poderoso, os momentos magnéticos dos átomos do clipe do papel tendem a se alinhar ao campo magnético $\vec{B}$ do ímã. Quando o clipe de papel é removido, seus dipolos atômicos tendem a permanecer alinhados e o clipe adquire um momento magnético resultante. O clipe de papel pode perder sua magnetização se for aquecido; a energia interna acrescentada pelo aquecimento faz seus dipolos ficarem orientados ao acaso, e o momento resultante se anula.

A descrição do dipolo magnético de um ímã em forma de barra explica as forças de atração e repulsão entre os ímãs indicados na Figura 27.1. O momento magnético $\vec{\mu}$ de um ímã em forma de barra aponta do seu pólo sul para o pólo norte, portanto as espiras de corrente nas figuras 27.36a e 27.36b são equivalentes a um ímã em forma de barra com pólo norte no lado esquerdo. Logo, a situação descrita na Figura 27.36a é equivalente a dois ímãs em forma de barra com seus respectivos pólos norte próximos um do outro; a força resultante é repulsiva, tal como na Figura 27.1b. Na Figura 27.36b, novamente temos a equivalência entre dois ímãs em forma de barra, porém agora com o pólo sul do ímã da esquerda em frente ao pólo norte do ímã da direita. A força resultante é de atração, como na Figura 27.1a.

(a) Ferro não-imantado: os momentos magnéticos se orientam ao acaso.



(b) Em uma barra de ferro imantada, os momentos magnéticos se alinham.



(c) Um campo magnético cria um torque sobre a barra de ferro imantada que tende a alinhar o seu momento dipolo ao campo $\vec{B}$.

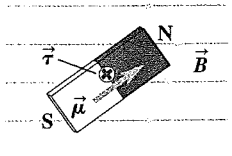


Figura 27.37 (a) Uma barra de ferro não-imantada. (Somente alguns momentos magnéticos atômicos representativos são indicados.) (b) Uma barra de ferro imantada (ímã em forma de barra). O momento magnético resultante do ímã aponta do pólo sul para seu pólo norte. (c) Uma barra de ferro imantada em um campo magnético.

Finalmente, podemos explicar como um ímã consegue atrair um objeto de ferro não-magnetizado (Figura 27.2). Trata-se de um processo com duas etapas. Inicialmente, os momentos magnéticos atômicos do ferro tendem a se alinhar ao campo $\vec{B}$ do ímã, de modo que o ferro adquire um momento de dipolo magnético resultante $\vec{\mu}$ paralelo ao campo. A seguir, o campo não uniforme do ímã atrai o dipolo magnético. A Figura 27.38a mostra um exemplo. O pólo norte do ímã está próximo do canivete (que contém ferro) e o dipolo magnético produzido no canivete é equivalente a uma espira de corrente que circula em sentido oposto ao indicado na Figura 27.36a. Portanto, a força magnética resultante sobre o canivete é oposta à força sobre a espira indicada na Figura 27.36a e o canivete é atraído pelo ímã. Trocando-se a polaridade do ímã, como indicado na Figura 27.38b, ocorre a inversão de ambos os sentidos dos vetores $\vec{B}$ e $\vec{\mu}$. A situação agora é equivalente à indicada na Figura 27.36b; analogamente ao caso da espira naquela figura, o canivete é atraído pelo ímã. Portanto, um objeto não-magnetizado contendo ferro é sempre atraído por qualquer um dos pólos de um ímã. Em contraste, objetos com cobre, alumínio ou madeira não são atraídos por ímãs; os momentos de dipolo magnéticos desses materiais, caso não sejam nulos, possuem uma tendência muito pequena para se alinharem ao campo magnético externo.

Nossa discussão sobre a interação entre ímãs e objetos de ferro foi apenas uma abordagem superficial de um assunto conhecido como *propriedades magnéticas dos materiais*. Essas propriedades serão analisadas com maior profundidade na Seção 28.8.

Teste sua compreensão da Seção 27.7 A Figura 27.13c mostra as linhas do campo magnético em função de uma espira circular que transporta corrente. (a) Qual é a direção e o sentido do momento magnético dessa espira? (b) Qual lado da espira é equivalente ao pólo norte de um ímã, e qual lado é equivalente ao pólo sul? ■

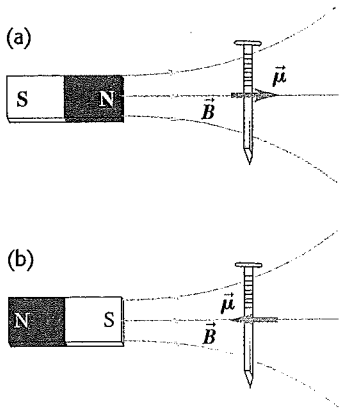


Figura 27.38 Um ímã em forma de barra atrai objetos de ferro não-imantados em duas etapas. Inicialmente, o campo $\vec{B}$ do ímã produz um momento magnético resultante no prego; depois, como o campo magnético do ímã não é uniforme, o dipolo magnético resultante é atraído pelo ímã. A atração é a mesma no caso de o prego estar próximo (a) do pólo norte ou (b) do pólo sul do ímã.

27.8 O motor de corrente contínua

Os motores elétricos desempenham um papel importante na sociedade contemporânea. Em um motor, o torque magnético atua sobre um condutor que transporta uma corrente e a energia é convertida em energia mecânica. Como exemplo, vamos examinar um tipo simples de motor de corrente contínua (cc), indicado na Figura 27.39.

A parte móvel do motor é o *rotor*, uma espira que pode girar em torno de um eixo e possui extremidades abertas ligadas a dois contatos. As extremidades dos fios do rotor são ligadas a dois segmentos condutores, que formam um *comutador*. Na Figura 27.39a, cada um dos dois segmentos dos comutadores entra em contato com uma *escova,* ligada a um circuito externo que inclui uma fonte de fem. Isso produz uma corrente que entra no rotor pelo lado esquerdo e sai pelo lado direito. Portanto, o rotor é uma espira de corrente com momento magnético $\vec{\mu}$. O rotor está situado entre os pólos opostos de um ímã permanente, de modo que existe um campo magnético $\vec{B}$ que exerce um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ sobre o rotor. Para a orientação do rotor indicada na Figura 27.39a, o torque faz o rotor girar em sentido anti-horário, o que faz alinhar $\vec{\mu}$ com $\vec{B}$.

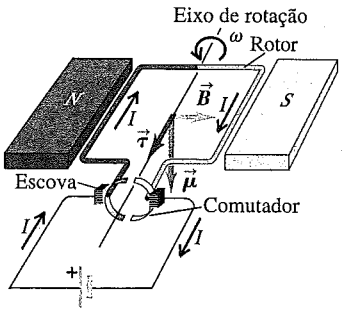
Na Figura 27.39b, o rotor girou 90° a partir de sua orientação na Figura 27.39a. Se a corrente através do rotor fosse constante, o rotor atingiria sua posição de equilíbrio; ele simplesmente oscilaria em torno dessa orientação. Porém, agora, o comutador entra em ação; nesse instante, as duas escovas estão em contato com *ambas* as partes isolantes dos segmentos dos comutadores. Não há diferença de potencial entre os segmentos do comutador, nenhuma corrente flui através do rotor e o momento magnético é igual a zero. Em virtude da inércia, o rotor continua a girar no sentido anti-horário e a corrente flui novamente através do rotor, como indica a Figura 27.39c. Porém, agora a corrente entra pelo lado do comutador, oposto ao indicado na Figura 27.39a. Embora a corrente esteja circulando em sentido contrário em relação aos comutadores, o próprio rotor girou 180° e o momento magnético $\vec{\mu}$ possui a mesma direção e o mesmo sentido do campo magnético. Portanto, o torque magnético $\vec{\tau}$ na Figura 27.39c possui a mesma direção e o mesmo sentido que o torque magnético da Figura 27.39a. Graças ao comutador, a corrente se inverte a cada giro de 180°, de modo que o torque faz sempre o rotor girar no sentido anti-horário. Quando o motor 'começa a acelerar', o torque magnético médio é equilibrado por um torque oposto produzido pela resistência do ar, pelo atrito nos mancais do motor e entre as escovas e os segmentos do comutador.

O motor simples indicado na Figura 27.39 possui uma única espira em seu rotor. Em motores práticos, o rotor apresenta muitas espirais; isso produz um aumento no momento magnético e no torque, de modo que o motor pode girar com cargas maiores. O torque também pode aumentar usando-se um campo magnético mais forte, por isso muitos motores são projetados com eletroímãs em vez de ímãs. Outra dificuldade do modelo simples indicado na Figura 27.39 é que o módulo do torque aumenta e diminui à medida que rotor gira. Isso pode ser remediado empregando no rotor bobinas independentes, orientadas com ângulos diferentes (Figura 27.40).

Potência para motores elétricos

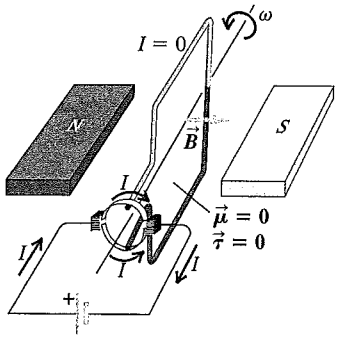
Como o motor converte energia elétrica em energia mecânica ou trabalho, ele necessita de um suprimento de energia elétrica. Se a diferença de potencial entre os terminais for igual a V_{ab} e a corrente for igual a I, então a potên-

(a) As escovas são alinhadas sobre os segmentos do comutador.



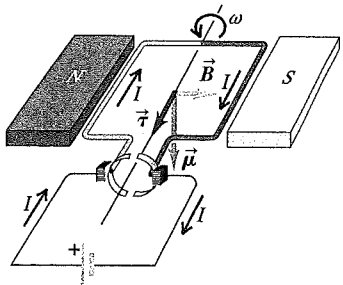
- A corrente entra pelo lado esquerdo do rotor e sai pelo lado direito.
- O torque magnético faz o rotor girar no sentido anti-horário.

(b) O rotor girou 90°.



- Cada escova está em contato com ambos os segmentos do comutador, de modo que a corrente não passa pelo rotor.
- Nenhum torque magnético atua sobre o rotor.

(c) O rotor girou 180°.



- As escovas estão novamente alinhadas aos segmentos do comutador. Dessa vez, a corrente entra pelo lado direito e sai pelo lado esquerdo.
- Logo, o torque magnético volta a atuar sobre o rotor no sentido anti-horário.

Figura 27.39 Diagrama esquemático de um motor cc simples. O rotor é uma espira de fio que pode girar livremente; as extremidades do rotor são ligadas a dois condutores curvos que formam o comutador. Entre os dois segmentos do comutador existe um material isolante.

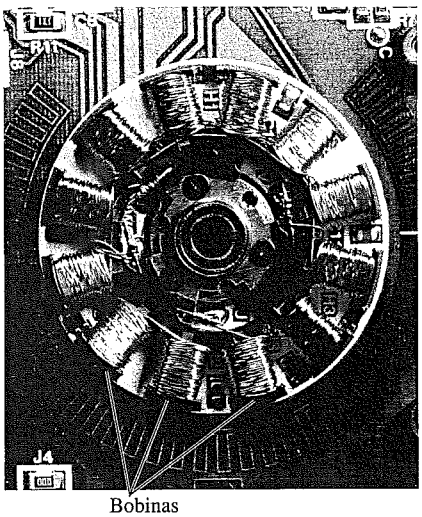


Figura 27.40 Este motor de um drive de disco magnético usado em um computador possui 12 bobinas que transportam corrente. Elas interagem com ímãs permanentes sobre uma plataforma giratória (não mostrada) para fazê-la girar. (Este projeto é o inverso do indicado na Figura 27.39, em que os ímãs permanentes são estacionários e a bobina gira.) Como há múltiplas bobinas, o torque magnético é quase constante e a plataforma gira a uma taxa também muito constante.

cia fornecida será $P = V_{ab}I$. Mesmo quando as bobinas do motor possuem resistência desprezível, deve existir uma diferença de potencial entre os terminais para que P seja diferente de zero. Essa diferença de potencial é produzida, principalmente, pelas forças magnéticas exercidas sobre as correntes nos condutores do rotor à medida que ele gira no campo magnético. A fem associada $\mathcal{E}$ denomina-se fem *induzida*, também chamada de fem de *realimentação* porque seu sentido é oposto ao da corrente. No capítulo 29, estudaremos uma fem induzida que surge em virtude do movimento de um condutor em um campo magnético.

Para um motor em *série*, o rotor é conectado em série ao eletroímã que produz um campo magnético; em um motor *shunt* ou motor com ligação em *paralelo*, eles são conectados em paralelo. Para um motor em série com resistência interna r, V_{ab} é maior do que $\mathcal{E}$ e a diferença é a queda de potencial Ir através da resistência interna. Ou seja,

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir \qquad (27.29)$$

Como a força magnética é proporcional à velocidade, $\mathcal{E}$ *não* é constante, mas sim proporcional à velocidade de rotação do rotor.

Exemplo 27.11

UM MOTOR CC EM SÉRIE Um motor cc com seu rotor e suas bobinas de campo ligadas em série possui uma resistência interna igual a 2,0 Ω. Quando está girando com sua carga total em uma linha de 120 V, ele recebe uma corrente de 4,0 A. (a) Qual é a fem no rotor? (b) Qual é a potência fornecida pela fonte ao motor? (c) Qual é a taxa de dissipação de energia na resistência do motor? (d) Qual é a potência mecânica desenvolvida? (e) Qual é a eficiência do motor? (f) O que ocorreria se, por causa de uma falha, o rotor repentinamente deixasse de girar?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa os conceitos de potência e queda de potência em um motor cc em série.

PREPARAR: conhecemos a resistência interna $r = 2{,}0\ \Omega$, a voltagem $V_{ab} = 120$ V através do motor e a corrente $I = 4{,}0$ A que passa pelo motor. Usamos a Equação (27.29) para determinar a fem $\mathcal{E}$ a partir dessas grandezas. A potência fornecida ao motor é $V_{ab}I$, a taxa de dissipação da energia é I^2r e o fornecimento de energia pelo motor é a diferença entre o fornecimento de potência e a sua dissipação. A eficiência e é a razão entre o fornecimento de energia mecânica e o consumo de energia elétrica.

EXECUTAR: (a) Pela Equação (27.29), $V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$, temos

$$120\ \text{V} = \mathcal{E} + (4{,}0\ \text{A})(2{,}0\ \Omega) \quad \text{e portanto} \quad \mathcal{E} = 112\ \text{V}$$

(b) A potência P fornecida pela fonte é a potência que entra no motor, ou seja,

$$P_{\text{entrada}} = V_{ab}I = (120\ \text{V})(4{,}0\ \text{A}) = 480\ \text{W}$$

(c) A potência P dissipada na resistência r é

$$P_{\text{dissipada}} = I^2r = (4{,}0\ \text{A})^2(2{,}0\ \Omega) = 32\ \text{W}$$

(d) A potência mecânica desenvolvida é a potência elétrica que entra no motor menos a potência dissipada na resistência do motor (supondo que não ocorra nenhuma outra perda de potência):

$$P_{\text{saída}} = P_{\text{entrada}} - P_{\text{dissipada}} = 480\ \text{W} - 32\ \text{W} = 448\ \text{W}$$

(e) A eficiência e do motor é a razão entre a potência líquida na saída do motor e a potência que entra no motor:

$$e = \frac{P_{\text{saída}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{448\ \text{W}}{480\ \text{W}} = 0{,}93 = 93\%$$

(f) Quando o rotor deixa de girar repentinamente, a fem $\mathcal{E}$ de realimentação (que é proporcional à velocidade do rotor) cai para zero. De acordo com a Equação (27.29), a corrente passa para

$$I = \frac{V_{ab}}{r} = \frac{120\ \text{V}}{2{,}0\ \Omega} = 60\ \text{A}$$

e a potência P dissipada na resistência r torna-se

$$P_{\text{dissipada}} = I^2r = (60\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 7200\ \text{W}$$

AVALIAR: caso essa sobrecarga excessiva não queime um fusível ou faça saltar um disjuntor, as bobinas rapidamente se fundem. Quando o motor é ligado, surge uma corrente mais elevada até que o motor adquira velocidade. Essa corrente inicial produz uma queda de voltagem maior do que a usual ($V = IR$) na fonte de alimentação que supre a corrente. Um efeito semelhante ocorre quando as luzes de uma casa brilham com pouca intensidade no momento em que o motor do condicionador de ar ou da máquina de lavar roupas começa a funcionar.

Teste sua compreensão da Seção 27.8 Ao circuito indicado na Figura 27.39, você acrescenta uma chave conectada em série à fonte de fem, de modo que a corrente possa ser ligada e desligada. Quando você fecha a chave, permitindo que a corrente flua, o rotor passará a girar, independentemente da sua orientação original? ∎

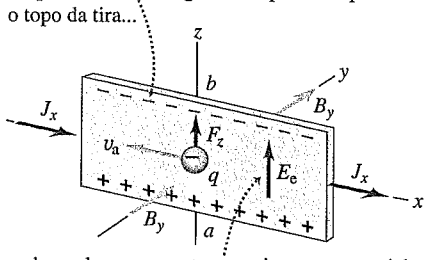
27.9 O efeito Hall

A realidade das forças que atuam sobre as cargas que se movem no interior de um condutor em um campo magnético é demonstrada de maneira espetacular pelo *efeito Hall*, análogo ao desvio transversal de um feixe de elétrons em um campo magnético no vácuo. (Esse efeito foi descoberto pelo físico norte-americano Edwin Hall, em 1879, enquanto ele ainda era um aluno da graduação.) Para descrevermos esse efeito, vamos considerar um condutor em forma de uma tira larga, como na Figura 27.41. A corrente está no sentido $+x$ e existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular ao plano da tira, no sentido $+y$. A velocidade de arraste da carga móvel (com módulo $|q|$) possui módulo v_a. A Figura 27.41a mostra o caso de uma carga negativa, tal como o caso dos elétrons de um metal, e a Figura 27.41b mostra uma carga positiva. Em ambos os casos, a força magnética é orientada de baixo para cima, porque a força magnética sobre um condutor depende do sentido da corrente e não do fato de a carga ser positiva ou negativa. Em ambos os casos, uma carga móvel se move para a extremidade *superior* da tira sob a ação da força magnética $F_z = |q| v_a B$.

Se os portadores de carga são elétrons, como na Figura 27.41a, cargas negativas em excesso se acumulam na extremidade superior da tira, deixando cargas positivas em excesso em sua extremidade inferior. Esse acúmulo de cargas continua até que o campo eletrostático transversal $\vec{E}_e$ torne-se suficientemente grande para produzir uma força elétrica (módulo $|q|E_e$) igual e oposta à força magnética (módulo $|q| v_a B$). Depois disso, as cargas que se movem não sofrem mais nenhum desvio produzido por nenhuma força transversal. Esse campo elétrico produz uma diferença de potencial transversal entre as extremidades opostas da tira, denominada *voltagem Hall* ou *fem Hall*. A polaridade depende do sinal da carga que se move. A experiência mostra que, para uma tira metálica, a extremidade superior da tira na Figura 27.41a *torna-se* carregada negativamente, o que mostra que os portadores da carga em um metal são, na verdade, elétrons negativos.

(a) Portadores de carga negativos (elétrons)

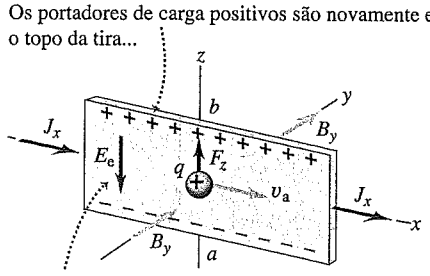
Os portadores de carga são empurrados para o topo da tira...



... de modo que o ponto *a* esteja a um potencial mais elevado do que o ponto *b*.

(b) Portadores de carga positivos

Os portadores de carga positivos são novamente empurrados para o topo da tira...



... de modo que a polaridade da diferença de potencial seja oposta à indicada na situação (a).

Figura 27.41 Forças sobre portadores de carga de um condutor em um campo magnético.

Contudo, quando o portador de carga é *positivo*, como na Figura 27.41b, então as cargas *positivas* se acumulam na extremidade superior, e a diferença de potencial é *oposta* à situação indicada no caso de cargas negativas. Logo após a descoberta feita por Hall, em 1879, verificou-se que alguns materiais, em particular alguns *semicondutores*, exibem uma fem Hall oposta à existente nos metais, como se os portadores de carga fossem positivos. Hoje, sabemos que nesses materiais ocorre a chamada *condução por buracos*. No interior de tais materiais há lugares, chamados de *buracos*, que deveriam ser ocupados por elétrons, mas que na realidade estão vazios. A ausência de carga elétrica negativa equivale a uma carga elétrica positiva. Quando um elétron se move para preencher um buraco, ele deixa outro buraco no local onde se encontrava. Portanto, o buraco se move em sentido contrário ao do elétron.

Em termos dos eixos coordenados, na Figura 27.41b, o campo eletrostático $\vec{E}_e$ para o caso de a carga q positiva está no sentido $-z$; seu componente E_z é negativo. O campo magnético está no sentido $+y$ e podemos escrever esse campo como B_y. A força magnética (no sentido $+z$) é dada por $qv_a B_y$. A densidade de corrente J está no sentido $+x$. No caso estacionário, quando as forças qE_z e $qv_a B_y$ possuem módulos iguais mas sentidos contrários,

$$qE_z + qv_a B_y = 0 \quad \text{ou} \quad E_z = -v_a B_y$$

Isso confirma que, quando q é positiva, E_z é negativo. A densidade de corrente J_x é dada por

$$J_x = nqv_a$$

Eliminando v_a entre as equações anteriores, obtemos

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \qquad (27.30)$$

(efeito Hall)

Note que o resultado anterior (assim como toda a dedução) é verdade tanto no caso de q positiva como no caso de carga negativa. Quando q é negativa, E_z é positivo e vice-versa.

Podemos medir J_x, B_y e E_z, para determinarmos o produto nq. Tanto no caso de metais como de semicondutores, q possui módulo igual ao da carga do elétron, de modo que o efeito Hall possibilita uma determinação direta de n, a concentração dos portadores de carga no material. O *sinal* das cargas é determinado pela polaridade da fem Hall, conforme descrevemos.

O efeito Hall também pode ser usado para a determinação da velocidade de arraste do elétron v_a em metais. Como vimos no Capítulo 25, essas velocidades são muito pequenas, geralmente da ordem de 1 mm/s ou menos *condução por buracos*. Quando deslocamos o condutor em sentido oposto ao da corrente com uma velocidade igual à velocidade de arraste, então todos os elétrons permanecem em repouso em relação ao campo magnético e a fem Hall desaparece. Portanto, a velocidade do condutor necessária para fazer a fem se anular é igual à velocidade de arraste.

Exemplo 27.12

APLICAÇÃO DO EFEITO HALL Uma placa de cobre com 2,0 mm de altura e 1,50 cm de comprimento é colocada em um campo magnético uniforme de 0,40 T, como indicado na Figura 27.41a. Quando você faz passar uma corrente de 75 A no sentido +x, verifica, por meio de uma medida cuidadosa, que o potencial na parte inferior da placa é 0,81 μV mais elevado do que no topo. A partir dessa medida, determine a concentração dos elétrons no cobre.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema descreve uma experiência com o efeito Hall.

PREPARAR: usaremos a Equação (27.30) para obtermos a concentração do elétron móvel n.

EXECUTAR: inicialmente, encontramos a densidade de corrente J_x e o campo elétrico E_z:

$$J_x = \frac{I}{A} = \frac{75\ \text{A}}{(2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1{,}50 \times 10^{-2}\ \text{m})} = 2{,}5 \times 10^{6}\ \text{A/m}^2$$

$$E_z = \frac{V}{d} = \frac{0{,}81 \times 10^{-6}\ \text{V}}{1{,}5 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 5{,}4 \times 10^{-5}\ \text{V/m}$$

A seguir, pela Equação (27.30),

$$n = \frac{-J_x B_y}{qE_z} = \frac{-(2{,}5 \times 10^{6}\ \text{A/m}^2)(0{,}40\ \text{T})}{(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5{,}4 \times 10^{-5}\ \text{V/m})} = 11{,}6 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

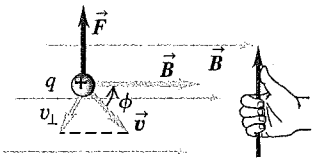
AVALIAR: o valor real de n para o cobre é igual a $8{,}5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$, o que mostra que o modelo simples do efeito Hall usado nesta seção, o qual despreza os efeitos das interações quânticas dos elétrons e dos íons, deve ser usado com cuidado. Esse exemplo também mostra que, para um bom condutor, a fem Hall é muito pequena, mesmo quando a densidade de corrente é elevada. Os dispositivos que usam o efeito Hall para medidas de campo magnético e outros objetivos geralmente utilizam materiais semicondutores, para os quais até mesmo densidades de corrente moderadas fornecem uma fem Hall muito maior.

Teste sua compreensão da Seção 27.9 Um fio de cobre de seção reta quadrada está orientado verticalmente. Os quatro lados do fio estão voltados para o norte, o sul, o leste e o oeste. Há um campo magnético uniforme orientado do leste para o oeste, e o fio carrega a corrente de cima para baixo. Qual lado do fio possui potencial elétrico mais elevado? (i) Lado norte; (ii) lado sul; (iii) lado leste; (iv) lado oeste. ▮

Resumo

Forças magnéticas: as interações magnéticas são fundamentalmente interações entre partículas carregadas que se movem. Essas interações são descritas pelo vetor do campo magnético designado pelo símbolo $\vec{B}$. Uma partícula com carga q que se desloca com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético $\vec{B}$ sofre a ação de uma força $\vec{F}$ que é perpendicular a ambos, $\vec{v}$ e $\vec{B}$. A unidade SI de campo magnético é o tesla (1 T = N/A · m). (Veja o exemplo 27.1.)

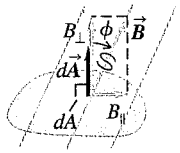
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{27.2}$$



Campo magnético e fluxo magnético: um campo magnético pode ser representado graficamente pelas linhas do campo magnético. Em cada um de seus pontos, a linha do campo magnético é tangente à direção de $\vec{B}$ no ponto considerado. O campo magnético é mais forte nas regiões onde as linhas do campo magnético estão distribuídas de modo mais compacto. O fluxo magnético Φ_B através de uma superfície é definido de forma análoga à definição do fluxo elétrico. A unidade SI de fluxo magnético é o weber (1 Wb = 1T · m^2). O fluxo magnético total através de qualquer superfície fechada é igual a zero (lei de Gauss do magnetismo). Conseqüentemente, as linhas de campo magnético sempre formam trajetórias fechadas. (Veja o exemplo 27.2.)

$$\Phi_B = \int B_\perp dA = \int B\cos\phi\, dA = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \tag{27.6}$$

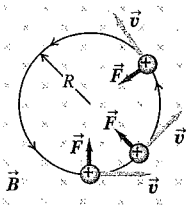
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(superfície fechada)} \tag{27.8}$$



Movimento em um campo magnético: a força magnética é sempre perpendicular a $\vec{v}$; quando somente forças magnéticas atuam sobre uma partícula, o módulo de sua velocidade permanece constante. Se uma partícula possui velocidade inicial perpendicular a um campo magnético uniforme, ela se move ao longo de uma circunferência com raio R que depende da força do campo magnético B e da massa da partícula m, da velocidade escalar v e da carga q. (Exemplos 27.3 e 27.4.)

Um campo magnético perpendicular a um campo elétrico pode ser usado como um seletor de velocidades. A força elétrica cancela a força magnética quando $v = E/B$. (Veja os exemplos 27.5 e 27.6.)

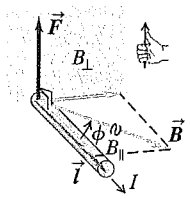
$$R = \frac{mv}{|q|B} \tag{27.11}$$



Força magnética sobre um condutor: a força $\vec{F}$ sobre um segmento retilíneo $\vec{l}$ de um condutor, que transporta uma corrente I em um campo magnético uniforme $\vec{B}$, experimenta uma força $\vec{F}$ que é perpendicular tanto a $\vec{B}$ quanto ao vetor $\vec{l}$, que aponta na direção da corrente e possui módulo igual ao comprimento do segmento. A mesma relação fornece a força $d\vec{F}$ sobre um segmento infinitesimal $d\vec{l}$. (Veja os exemplos 27.2 e 27.8.)

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \tag{27.19}$$

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} \tag{27.20}$$

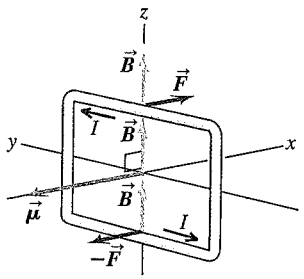


Torque magnético: A força resultante sobre uma espira de corrente com área A e corrente I em um campo magnético uniforme $\vec{B}$ é igual a zero, porém o torque que atua sobre a espira possui um módulo τ. O vetor torque $\vec{\tau}$ pode ser expresso com base no momento de dipolo magnético $\vec{\mu} = I\vec{A}$ da espira, assim como a energia potencial U de um momento magnético em um campo magnético $\vec{B}$. O momento magnético de uma espira depende somente da corrente e de sua área; ele não depende da forma da espira. (Veja os exemplos 27.9 e 27.10.)

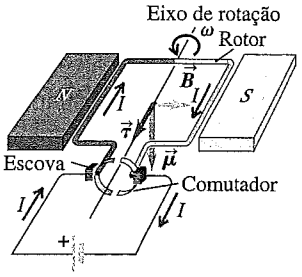
$$\tau = IBA\text{sen}\phi \tag{27.23}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{27.26}$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B\cos\phi \tag{27.27}$$

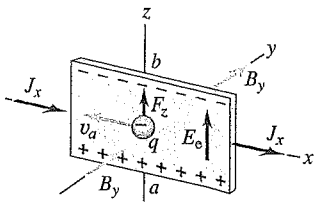


Motores elétricos: em um motor cc, uma força magnética exerce um torque sobre uma corrente que passa no rotor. O movimento do rotor através do campo magnético produz uma fem induzida, chamada fem de realimentação. Para um motor em série, no qual a bobina do rotor está em série com as bobinas que produzem o campo magnético, a voltagem em seus terminais é dada pela fem de realimentação somada ao valor Ir correspondente à queda de potencial através da resistência interna. (Veja o exemplo 27.11.)



Efeito Hall: o efeito Hall é a diferença de potencial medida perpendicularmente à direção da corrente que passa em um condutor colocado em um campo magnético. A voltagem Hall é determinada pela condição de que a força elétrica associada seja exatamente igual à força magnética que atua sobre a carga que se move. As medidas de efeito Hall são usadas para determinar o sinal e a densidade n dos portadores de carga mediante a relação abaixo. (Veja o exemplo 27.12.)

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \tag{27.30}$$



Principais termos

campo magnético, 204
densidade de fluxo magnético, 210
dipolo magnético, 221
espectrômetro de massa, 216
fluxo magnético, 209
freqüência ciclotrônica, 212
gauss, 206
ímãs permanentes, 202
isótopos, 216
linhas do campo magnético, 208
momento de dipolo magnético, 221
momento magnético, 221
monopolo magnético, 204
solenóide, 222
tesla, 206
weber, 210

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

No método diagnóstico de ressonância magnética, os núcleos dos átomos de hidrogênio dentro do tecido humano atuam como espiras de corrente em miniatura, cujos momentos magnéticos se alinham ao campo aplicado. Veja detalhes na Seção 27.7.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

27.1 Resposta: sim Quando um ímã é cortado, cada parte passa a ter um pólo norte e um pólo sul (veja Figura 27.4). Logo, a pequena parte restante se comporta como a agulha original da bússola.

27.2 Resposta: caminho 3 Ao aplicar a regra da mão direita aos vetores $\vec{v}$ (que aponta para a direita) e $\vec{B}$ (que aponta para dentro do plano da figura), temos que a força $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ atua sobre uma carga *positiva* e deve apontar *de baixo para cima*. Como a carga é *negativa*, a força aponta *de cima para baixo*, e a partícula segue uma trajetória que se encurva para baixo.

27.3 Resposta: (a) (ii), (b) não O módulo de $\vec{B}$ aumentaria à medida que você se movesse para a direita, atingindo o valor máximo quando você passa através do plano do circuito. Se você se movesse para além do plano do circuito, o módulo do campo diminuiria. Pode-se verificar isso pelo espaçamento entre as linhas de campo: quanto mais próximas as linhas de campo, maior a intensidade do campo. O sentido do campo seria orientado para a direita em todos os pontos ao longo da trajetória, uma vez que a trajetória está ao longo de uma linha de campo e o sentido de $\vec{B}$ em qualquer ponto é tangente à linha de campo que passa por esse ponto.

27.4 Respostas: (a) (ii), (b) (i) O raio da órbita, de acordo com a Equação (27.11), é diretamente proporcional à velocidade escalar, por isso duplicar a velocidade da partícula faz o raio dobrar também. A partícula possui o dobro da trajetória a percorrer para completar uma órbita, mas está se movendo com o dobro da velocidade, portanto o tempo para uma órbita não varia. Esse resultado também segue a Equação (27.12), segundo a qual a velocidade angular ω independe da velocidade linear v. Portanto, o tempo por órbita, $T = 2\pi/\omega$, também não depende de v.

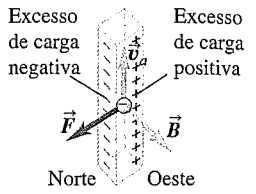
27.5 Resposta: (iii) Pela Equação (27.13), a velocidade $v = E/B$ com a qual as partículas se movem diretamente através do seletor de velocidades não depende do módulo ou do sinal da carga ou da massa da partícula. O único requisito é que as partículas (neste caso, íons) possuam uma carga diferente de zero.

27.6 Resposta: A Essa orientação fará a corrente fluir no sentido horário em torno do circuito e, portanto, através da barra condutora, no sentido de cima para baixo da figura. Pela regra da mão direita, a força magnética $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ que atua sobre a barra apontará para a direita.

27.7 Respostas: (a) para a direita; (b) pólo norte à direita, pólo sul à esquerda Se você fechar os dedos da sua mão direita em torno da bobina e no sentido da corrente, seu polegar direito apontará para a direita (perpendicularmente ao plano da bobina). Esse é o sentido do momento magnético $\vec{\mu}$. O momento magnético aponta do pólo sul para o pólo norte, e o lado esquerdo equivale ao pólo sul.

27.8 Resposta: não O rotor não passará a girar quando a chave for fechada, caso o rotor esteja inicialmente orientado como indica a Figura 27.39b. Nesse caso, nenhuma corrente passa pelo rotor e, portanto, não há torque magnético. Essa situação pode ser remediada usando-se múltiplas bobinas de rotor orientadas, de modo a formar ângulos diferentes em torno do eixo de rotação. Com essa combinação, sempre haverá um torque magnético, seja qual for a orientação.

27.9 Resposta: (ii) Os portadores de carga móveis em cobre são elétrons com carga negativa, que se movem de baixo para cima pelo fio para fornecer uma corrente de cima para baixo. Pela regra da mão direita, a força que atua sobre uma carga positiva que se move de baixo para cima em um campo magnético que aponta do leste para oeste estaria orientada para o sul; logo, a força sobre uma partícula carregada com carga negativa é orientada para o norte. O resultado é um excesso de carga negativa sobre o lado norte do fio, deixando um excesso de carga positiva – e portanto um potencial elétrico mais elevado – sobre o lado sul.



Questões para discussão

Q27.1 Pode uma partícula carregada se mover em um campo magnético sem sofrer a ação de nenhuma força? Se pode, como? Se não, por quê?

Q27.2 Em qualquer ponto do espaço, o campo elétrico $\vec{E}$, por definição, possui a mesma direção e sentido da força elétrica que atua sobre uma carga positiva situada nesse ponto. Por que não definimos o campo magnético $\vec{B}$ de modo análogo, como se possuísse a mesma direção e o mesmo sentido da força magnética que atua sobre uma carga positiva que se move?

Q27.3 A Seção 27.2 descreve um procedimento para se determinar o sentido da força magnética usando a mão direita. Se você usar o mesmo procedimento, mas com a mão esquerda, você terá o sentido correto da força? Explique.

Q27.4 A força magnética sobre uma partícula carregada em movimento é sempre perpendicular ao campo magnético $\vec{B}$. Será que a trajetória da partícula é sempre perpendicular às linhas de campo magnético? Explique sua resposta.

Q27.5 Uma partícula carregada entra em uma região cúbica do espaço onde existe um campo magnético uniforme. Fora dessa região, não há nenhum campo magnético. É possível que a partícula fique confinada no interior da região cúbica? Por quê?

Q27.6 Se a força magnética não realiza nenhum trabalho sobre uma partícula carregada, como ela pode produzir algum efeito sobre o movimento da partícula? Existem outros exemplos de forças que não realizam trabalho, mas que produzem um efeito significativo sobre o movimento da partícula?

Q27.7 Uma partícula carregada se move através de uma região no espaço com velocidade constante (módulo, direção e sentido). Se o campo magnético externo for igual a zero, você pode concluir que o campo elétrico externo na região também será igual a zero? Explique. (Por 'externo' nos referimos aos campos que não são os produzidos pela partícula carregada.) Se o campo elétrico externo for igual a zero na região, você pode concluir que o campo magnético externo na região também é igual a zero?

Q27.8 Como uma espira de corrente poderia ser usada como bússola? Essa bússola conseguiria distinguir a diferença entre o norte e o sul? Por quê?

Q27.9 Como você poderia determinar a direção de um campo magnético fazendo apenas observações *qualitativas* da força magnética sobre um fio retilíneo que conduz uma corrente?

Q27.10 Uma espira de fio frouxa e capaz de se mover transporta uma corrente I. A espira é colocada sobre uma mesa horizontal em um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao plano da mesa. Isso faz com que a espira se dilate, adquirindo uma forma circular enquanto permanece sobre a mesa. Faça um diagrama mostrando todas as orientações possíveis do campo magnético $\vec{B}$ e da corrente I que possibilitam esse evento. Explique seu raciocínio.

Q27.11 Várias cargas entram em um campo magnético uniforme apontado para dentro da página. (a) Qual trajetória uma carga positiva q, que se move com uma velocidade de módulo v, seguiria através do campo? (b) Qual trajetória uma carga positiva q, que se move com uma velocidade de módulo $2v$, seguiria através do campo? (c) Qual trajetória uma carga negativa $-q$, que se move com uma velocidade de módulo v, seguiria através do campo? (d) Qual trajetória uma partícula neutra seguiria através do campo?

Q27.12 Cada uma das pontas assinaladas com letras, nos vértices do cubo na Figura 27.42, representa uma carga positiva q se movendo com uma velocidade de módulo v no sentido indicado. A região na figura está em um campo magnético uniforme $\vec{B}$, paralelo ao eixo Ox e orientado da esquerda para a direita. Quais cargas sofrem ação de uma força em função de $\vec{B}$? Qual é o sentido da força sobre cada carga?

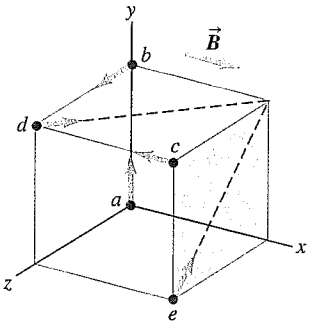


Figura 27.42 Questão Q27.12.

Q27.13 Um aluno afirma que, se um raio atingisse o metal do poste que sustenta uma bandeira, a força exercida sobre o poste pelo campo magnético da Terra seria suficientemente grande para entortar o poste. As correntes típicas de um raio são da ordem de 10^4 a 10^5 A. A opinião do estudante pode ser justificada? Explique seu raciocínio.

Q27.14 Câmara de Bolhas I. Certos tipos de câmara de bolhas são preenchidos com hidrogênio líquido. Quando uma partícula (tal como um elétron ou um próton) passa através do líquido, ela deixa um traço de bolhas, que pode ser fotografado para mostrar a trajetória da partícula. O aparato é imerso em um campo magnético conhecido, que faz a partícula encurvar-se. A Figura 27.43 indica o traço da imagem de uma câmara de bolhas revelando a trajetória de um elétron. (a) Como você pode determinar o *sinal* da carga de uma partícula a partir da fotografia da sua trajetória? (b) Como um físico pode determinar o *momento linear* e a *velocidade* desse elétron, usando medidas feitas pela fotografia, considerando-se que o campo magnético é conhecido e perpendicular ao plano da figura? (c) É evidente que o elétron está girando em círculos cada vez menores. Quais propriedades do elétron devem estar mudando para causar esse comportamento? Por que isso ocorre? (d) Qual seria a trajetória de um nêutron em uma câmara de bolhas? Por quê?

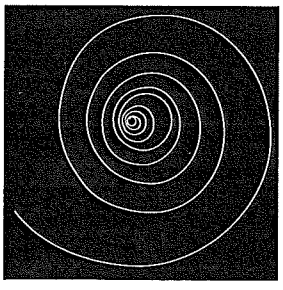


Figura 27.43 Questão Q27.14.

Q27.15 Um alto-falante comum, como o descrito na Figura 27.28, não deve ser colocado perto de um monitor de computador nem próximo da tela da TV. Por quê?

Q27.16 Câmara de Bolhas II. A Figura 27.44 mostra as trajetórias de diversas partículas em uma câmara de bolhas. (Veja Questão para Discussão Q27.14.) As duas espirais próximas ao topo da fotografia são produzidas por duas partículas que foram criadas no mesmo instante por um raio gama de elevada energia. (a) O que você pode concluir sobre os *sinais* das cargas dessas duas partículas, supondo que o campo magnético seja perpendicular ao plano da fotografia e que ele aponte para dentro do papel? (b) Qual das duas partículas (a da direita ou a da esquerda) teve maior momento linear inicial? Como você sabe? (c) Por que as trajetórias se encurvam para dentro? O que faz isso acontecer?

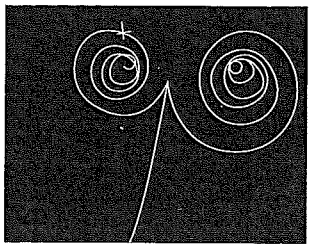


Figura 27.44 Questão Q27.16.

Q27.17 Se uma fem é produzida em um motor cc, seria possível usar, de algum modo, o motor como gerador ou fonte, retirando potência dele em vez de fornecer potência para ele? Como isso poderia ocorrer?

Q27.18 Quando a polaridade de uma voltagem aplicada a um motor cc é invertida, o sentido do movimento *não* se inverte. Por que não? Como o sentido do movimento *poderia* ser invertido?

Q27.19 Em uma experiência do efeito Hall, existe a possibilidade de *nenhuma* diferença de potencial transversal ser estabelecida? Em que circunstâncias isso poderia ocorrer?

Q27.20 As voltagens no efeito Hall são muito maiores no caso de maus condutores (tal como o germânio) do que no caso de bons condutores (tal como o cobre), considerando dimensões iguais e correntes iguais. Por quê?

Q27.21 Seria possível construir um acelerador no qual as forças sobre as partículas, destinadas a aumentar a velocidade e a produzir mudanças na direção da velocidade, fossem *todas* magnéticas? Por quê?

Q27.22 Uma força magnética que atua sobre uma partícula carregada nunca pode realizar trabalho, pois a cada instante a força é perpendicular à velocidade. O torque exercido por um campo magnético pode realizar trabalho sobre uma corrente quando a espira gira. Explique como essa aparente contradição pode ser conciliada.

Exercícios

Seção 27.2 Campo magnético

27.1 Uma partícula com carga igual a $-1{,}24 \times 10^{-8}$C se move com velocidade instantânea $\vec{v} = (4{,}19 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-3{,}85 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. Qual é a força exercida sobre essa partícula por um campo magnético (a) $\vec{B} = (1{,}40 \text{ T})\,\hat{\imath}$ e (b) $\vec{B} = (1{,}40 \text{ T})\,\hat{k}$?

27.2 Uma partícula com massa igual a 0,195 g possui carga $-2{,}50 \times 10^{-8}$ C e se desloca com velocidade inicial horizontal do sul para o norte com módulo igual a $4{,}0 \times 10^4$ m/s. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético mínimo capaz

de manter a partícula se movendo na mesma direção e sentido da velocidade inicial no campo magnético da Terra.

27.3 Em um campo magnético de 1,25 T orientado verticalmente de baixo para cima, uma partícula com uma carga de módulo 8,50 μC e que, inicialmente, se move para o norte a 4,75 km/s é desviada para leste. (a) Qual é o sinal da carga dessa partícula? Faça um desenho para ilustrar como você obteve sua resposta. (b) Determine a força magnética que atua sobre a partícula.

27.4 Uma partícula com massa igual a $1,81 \times 10^{-3}$ kg e carga $1,22 \times 10^{-8}$ C em um dado instante possui uma velocidade $\vec{v} = (3,0 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{j}$. Qual é o módulo, a direção e o sentido da aceleração da partícula produzida por um campo magnético uniforme $\vec{B} = (1,63 \text{ T})\hat{i} + (0,980 \text{ T})\hat{j}$?

27.5 Um elétron sofre a ação de uma força magnética de módulo igual a $4,60 \times 10^{-15}$ N quando se move com um ângulo de 60,0° em relação a um campo magnético com módulo igual a $3,50 \times 10^{-3}$. Calcule a velocidade do elétron.

27.6 Um elétron se move com velocidade igual a $2,50 \times 10^6$ m/s em uma região onde existe um campo magnético com uma direção especificada e com módulo igual a $7,40 \times 10^{-2}$ T. (a) Quais devem ser o maior e o menor módulo da aceleração de um elétron provocada por esse campo magnético? (b) Se a aceleração real do elétron for igual a um quarto do maior módulo encontrado no item (a), qual será o ângulo entre a velocidade do elétron e o campo magnético?

27.7 Uma partícula com carga de 7,80 μC está se movendo com velocidade $\vec{v} = -(3,80 \times 10^3 \text{ m/s})\hat{j}$. A força magnética que atua sobre a partícula é medida como $\vec{F} = +(7,60 \times 10^{-3}\text{N})\hat{i} - (5,20 \times 10^{-3}\text{N})\hat{k}$. (a) Calcule todos os componentes do campo magnético que puder, a partir dessa informação. (b) Há componentes do campo magnético que não são determinados pela medição da força? Explique. (c) Calcule o produto escalar $\vec{B} \cdot \vec{F}$. Qual é o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{F}$?

27.8 Uma partícula com carga de –5,60 nC está se movendo em um campo magnético uniforme $\vec{B} = -(1,25 \text{ T})\hat{k}$. A força magnética que atua sobre a partícula é medida como $\vec{F} = -(3,40 \times 10^{-7}\text{N})\hat{i} + (7,40 \times 10^{-7}\text{N})\hat{j}$. (a) Calcule todos os componentes do campo magnético que puder, a partir dessa informação. (b) Há componentes do campo magnético que não são determinados pela medição da força? Explique. (c) Calcule o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{F}$. Qual é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{F}$?

27.9 Um conjunto de partículas percorre um campo magnético de módulo, direção e sentido desconhecidos. Você observa que um próton se movendo a 1,50 km/s no sentido $+Ox$ sofre uma força igual a $2,25 \times 10^{-16}$N na direção $+Oy$, e um elétron que se move a 4,75 km/s na direção $-Oz$ sofre uma força de $8,50 \times 10^{-16}$N. (a) Quais são o módulo, a direção e o sentido do campo magnético? (b) Quais são o módulo, a direção e o sentido da força magnética sobre um elétron que se move no sentido $-Oy$ a 3,2 km/s?

Seção 27.3 Linhas do campo magnético e fluxo magnético

27.10 O fluxo magnético através de uma face de um cubo é igual a +0,120 Wb. (a) Qual deve ser o fluxo magnético total através das outras cinco faces do cubo? (b) Por que não é necessário saber as dimensões do cubo para responder o item (a)? (c) Suponha que o fluxo magnético seja produzido por um ímã permanente, tal como aquele indicado na Figura 27.11. Usando um desenho, mostre onde o cubo do item (b) deve estar localizado em relação ao ímã.

27.11 Uma área circular, com raio igual a 6,50 cm, está sobre o plano xy. Qual é o módulo do fluxo magnético através do círculo produzido por um campo magnético uniforme $B = 0,230$ T: (a) no sentido $+z$? (b) Formando um ângulo de 53,1° com rotação a partir do sentido $+z$? (c) No sentido $+y$?

27.12 O campo magnético $\vec{B}$ em uma certa região é de 0,128 T e seu sentido é o do eixo $+Oz$ na Figura 27.45. (a) Qual é o fluxo magnético através da superfície *abcd* indicada na figura? (b) Qual é o fluxo magnético através da superfície *befc*? (c) Qual é o fluxo magnético através da superfície *aefd*? (d) Qual é o fluxo magnético através das cinco superfícies externas do volume sombreado?

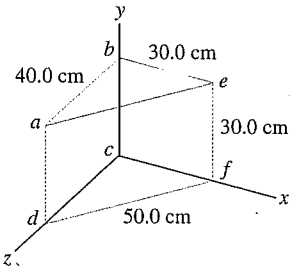


Figura 27.45 Exercício 27.12.

27.13 Uma garrafa plástica de refrigerante, com um diâmetro de boca de 2,5 cm, é colocada sobre uma mesa. Um campo magnético uniforme de 1,75 T orientado de baixo para cima, forma um ângulo de 25° a partir da vertical que engloba a garrafa. Qual é o fluxo magnético total que passa pela garrafa plástica de refrigerante?

Seção 27.4 Movimento de partículas carregadas em um campo magnético

27.14 Uma partícula com carga $6,40 \times 10^{-19}$C se desloca ao longo de uma órbita circular com raio igual a 4,68 mm, em virtude da força oriunda de um campo magnético de módulo 1,65 T, cuja direção é perpendicular ao plano da órbita. (a) Qual é o módulo do momento linear $\vec{p}$ da partícula? (b) Qual é o módulo do momento angular $\vec{L}$ da partícula?

27.15 Um elétron no ponto A da Figura 27.46 possui velocidade v_0 igual a $1,41 \times 10^6$ m/s. Determine: (a) o módulo, a direção e o sentido do campo magnético que obriga o elétron a descrever uma órbita semicircular de A até B; (b) o tempo necessário para que o elétron se desloque de A até B.

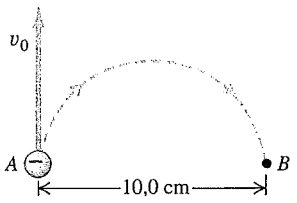


Figura 27.46 Exercício 27.15.

27.16 Repita o Exercício 27.15 para o caso no qual a partícula é um próton em vez de um elétron.

27.17 Uma bola de 150 g contendo $4,0 \times 10^8$ elétrons em excesso é enfiada em uma haste vertical de 125 m. No fundo da haste, a bola repentinamente entra em um campo magnético horizontal uniforme, que possui módulo igual a 0,250 T e sentido do leste para oeste. Considerando-se a resistência do ar desprezível, ache o módulo e o sentido da força que esse campo magnético exerce sobre a bola assim que ela penetra no campo.

27.18 Uma partícula alfa (um núcleo He contendo dois prótons e dois nêutrons e possuindo massa igual a $6,64 \times 10^{-27}$kg) se move horizontalmente a 35,6 km/s quando penetra um campo magnético vertical uniforme de 1,10 T. (a) Qual é o diâmetro da trajetória

percorrida por essa partícula alfa? (b) Qual é o efeito do campo magnético sobre a velocidade da partícula? (c) Quais são o módulo, a direção e o sentido da aceleração da partícula alfa enquanto ela está no campo magnético? (d) Explique por que a velocidade da partícula não se altera, mesmo que uma força externa não equilibrada atue sobre ela.

27.19 **Reator nuclear.** Quando dois núcleos de dêuteron (carga $+e$, massa $3{,}34 \times 10^{-27}$ kg) se aproximam o suficiente, a atração da força nuclear intensa vai fundi-las e produzir um isótopo de hélio, liberando grande quantidade de energia. A abrangência dessa força é de aproximadamente 10^{-15} m. Esse é o princípio que rege o reator de fusão nuclear. Os núcleos de dêuteron se movem rápido demais para serem confinados por paredes físicas, por isso são magneticamente confinados. (a) Com qual velocidade os dois núcleos teriam que se mover para que, no caso de uma colisão frontal, eles se aproximem o suficiente para se fundirem? (Trate os núcleos como cargas puntiformes e suponha que uma distância de $1{,}0 \times 10^{-15}$ é necessária para a fusão.) (b) Qual força do campo magnético é necessária para fazer os núcleos de dêuteron com essa velocidade percorrerem um círculo de 2,50 m de diâmetro?

27.20 (a) Um núcleo de ^{16}O (carga $+8e$) que se move horizontalmente do oeste para leste, com uma velocidade de 500 km/s, sofre uma força magnética de 0,00320 nN, orientada verticalmente de cima para baixo. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético mais fraco necessário para produzir essa força. Explique como essa mesma força pode ser causada por um campo magnético maior. (b) Um elétron se move em um campo magnético horizontal uniforme de 2,10 T, que está orientado para o oeste. Quais devem ser o módulo, a direção e o sentido da velocidade mínima do elétron, de modo que a força magnética sobre ele seja 4,60 pN, orientada verticalmente de baixo para cima? Explique como a velocidade poderia ser maior do que esse valor mínimo e a força ainda manter esses mesmos módulo, direção e sentido.

27.21 Um dêuteron (o núcleo de um isótopo do hidrogênio) possui massa igual a $3{,}34 \times 10^{-27}$ kg e carga $+e$. O dêuteron descreve uma trajetória circular com raio igual a 6,96 mm em um campo magnético com módulo 2,50 T. (a) Calcule a velocidade do dêuteron. (b) Determine o tempo necessário para ele fazer meia revolução. (c) Por meio de qual diferença de potencial o dêuteron deve ser acelerado para que ele adquira essa velocidade?

27.22 Em uma experiência com raios cósmicos, um feixe vertical de partículas que possuem carga com módulo $3e$ e massa 12 vezes maior que a massa do próton penetra um campo magnético horizontal uniforme de 0,250 T e está encurvado em um semicírculo com diâmetro igual a 95,0 cm, como indica a Figura 27.47. (a) Calcule a velocidade escalar das partículas e o sinal da sua carga. (b) É razoável ignorar a força da gravidade sobre essas partículas? (c) Como a velocidade escalar das partículas quando elas entram no campo se compara à sua velocidade ao saírem do campo?

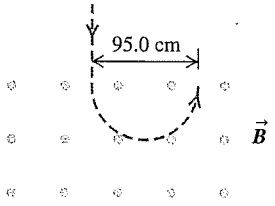


Figura 27.47 Exercício 27.22.

27.23 Um físico deseja produzir ondas eletromagnéticas com freqüência igual a 3,0 THz (1 THz = 1 terahertz = 10^{12} Hz) usando um magnétron (veja o Exemplo 27.3). (a) Qual é o campo magnético necessário? Compare o resultado com o campo magnético constante mais forte produzido em um laboratório terrestre, que é aproximadamente igual a 45 T. (b) Haveria alguma vantagem no uso de prótons em vez de elétrons no magnétron? Por quê?

27.24 Um feixe de prótons que se move a 1,20 km/s penetra um campo magnético uniforme, deslocando-se perpendicularmente ao campo. O feixe sai do campo magnético em um sentido perpendicular ao seu sentido original (Figura 27.48). O feixe percorre uma distância de 1,18 cm *enquanto está no campo*. Qual é o módulo do campo magnético?

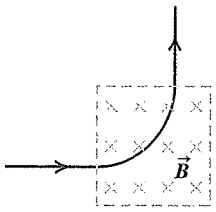


Figura 27.48 Exercício 27.24.

27.25 Um elétron do feixe de um cinescópio de TV é acelerado por uma diferença de potencial igual a 2,0 kV. A seguir, ele passa em uma região onde existe um campo magnético transversal descrevendo um círculo com raio igual a 0,180 m. Qual é o módulo do campo?

27.26 Um íon de ^7Li com uma única carga (um isótopo de lítio) possui massa igual a $1{,}16 \times 10^{-26}$ kg. Ele é acelerado por uma diferença de potencial igual a 220 V e, a seguir, entra em um campo magnético de módulo igual a 0,723 T perpendicular à trajetória do íon. Qual é o raio da trajetória do íon no campo magnético?

27.27 Um próton ($q = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$kg) se desloca em um campo magnético uniforme $\vec{B} = (0{,}500\ \text{T})\,\hat{\imath}$. Para $t = 0$, o próton possui componentes da velocidade $v_x = 1{,}50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ e $v_z = 2{,}0 \times 10^5$ m/s (Exemplo 27.4). (a) Quais são o módulo, a direção e o sentido da força que atua sobre o próton? Além do campo magnético, existe um campo elétrico no sentido $+x$, dado por $\vec{E} = (+2{,}0 \times 10^4\ \text{V/m})\hat{\imath}$. (b) O próton terá um componente de aceleração no sentido do campo elétrico? (c) Descreva a trajetória do próton. O campo elétrico altera o raio da hélice? Explique. (d) Para $t = T/2$, em que T é o período do movimento circular do próton, qual é o componente x do deslocamento do próton a partir de sua posição inicial $t = 0$?

Seção 27.5 Aplicações do movimento de partículas carregadas

27.28 (a) Calcule a velocidade de um feixe de elétrons que sofre, simultaneamente, a ação de um campo elétrico de $1{,}56 \times 10^4$ V/m e de um campo magnético igual a $4{,}62 \times 10^{-3}$ T, com ambos os campos ortogonais ao feixe e perpendiculares entre si e sabendo que o feixe não sofre nenhum desvio. (b) Faça um diagrama para mostrar as orientações relativas dos vetores $\vec{v}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$. (c) Quando o campo elétrico é removido, qual é o raio da órbita do elétron? Qual é o período dessa órbita?

27.29 Uma bateria de 150 V é conectada a duas placas metálicas paralelas, com área de 28,5 cm^2, e distantes 8,20 mm entre si. Um feixe de partículas alfa (carga $+2e$, massa $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg) é acelerado a partir do repouso através de uma diferença de potencial de 1,75 kV e penetra a região entre as placas no sentido perpendicular ao campo elétrico. Quais são o módulo, a direção e o sentido do

campo magnético necessários para que as partículas alfa saiam sem desvio da região entre as placas?

27.30 Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ perpendiculares. Uma partícula com velocidade inicial $\vec{v}_0 = (5{,}85 \times 10^3 \text{ m/s})\hat{j}$ entra em uma região com campos elétrico e magnético uniformes. O campo magnético na região é $\vec{B} = -(1{,}35 \text{ T})\hat{k}$. Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico na região, considerando que não haja desvio, para uma partícula de carga (a) + 0,640 nC e (b) – 0,320 nC. Despreze o peso da partícula.

27.31 Determinação da massa de um isótopo. O campo elétrico entre as placas do seletor de velocidades em um espectrômetro de massa Bainbridge (Figura 27.22) é igual a $1{,}12 \times 10^5$ V/m e o campo magnético em ambas as regiões é igual a 0,540 T. Um feixe de íons de selênio com uma única carga se move em uma trajetória circular com raio igual a 31,0 cm na região do campo magnético. Determine a massa do íon de selênio e o número de massa desse isótopo do selênio. (O número de massa é igual à massa do isótopo em unidades de massa atômica, arredondando para o inteiro mais próximo. Uma unidade de massa atômica = 1 u = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.)

27.32 No espectrômetro de massa Bainbridge (Figura 27.24), o módulo do campo magnético no seletor de velocidade é igual a 0,650 T e um íon com velocidade igual a $1{,}82 \times 10^6$ m/s não sofre nenhum desvio. (a) Qual é o módulo do campo elétrico do seletor de velocidades? (b) Sabendo que a distância entre as placas é igual a 5,20 mm, qual é a diferença de potencial entre as placas P e P'?

Seção 27.6 Força magnética sobre um condutor transportando uma corrente

27.33 Um fio retilíneo de 2,0 m e 150 g transporta uma corrente em uma região em que o campo magnético da Terra é horizontal com um módulo de 0,55 gauss. (a) Qual é o valor mínimo da corrente nesse fio para que seu peso seja totalmente sustentado pela força magnética em função do campo terrestre, supondo que nenhuma outra força, além da gravidade, atue sobre ele? É provável que um fio como esse seja capaz de suportar esse tamanho de corrente? (b) Mostre como o fio teria de ser orientado em relação ao campo magnético da Terra para ser sustentado dessa forma.

27.34 Um eletroímã produz um campo magnético igual a 0,550 T em uma região cilíndrica entre seus pólos com raio igual a 2,50 cm. Um fio retilíneo passa no centro dessa região conduzindo uma corrente igual a 10,8 A e possui uma direção perpendicular ao eixo do cilindro e ao campo magnético. Qual é o módulo da força que atua sobre o fio?

27.35 Um fio longo que transporta uma corrente de 4,50 A faz duas dobras de 90°, como indica a Figura 27.49. A parte dobrada do fio atravessa um campo magnético uniforme de 0,240 T, orientado como indica a figura e confinado a uma região limitada no espaço. Determine o módulo, a direção e o sentido da força que o campo magnético exerce sobre o fio.

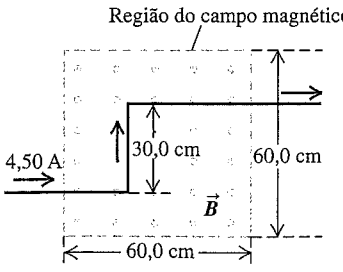


Figura 27.49 Exercício 27.35.

27.36 Um fio retilíneo vertical conduz uma corrente de 1,20 A de cima para baixo em uma região entre os pólos de um grande eletroímã supercondutor; e o módulo do campo magnético é dado por $B = 0{,}588$ T e possui direção horizontal. Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética que atua sobre uma seção de 1,0 cm do fio que está nesse campo magnético uniforme, sabendo que o sentido do campo magnético é orientado (a) de oeste para leste; (b) do norte para o sul; (c) formando um ângulo de 30° no sentido da rotação do oeste para o sul.

27.37 Uma barra horizontal com 0,200 m de comprimento é montada sobre uma balança e conduz uma corrente. No local da barra existe um campo magnético uniforme horizontal com módulo igual a 0,067 T e direção perpendicular à barra. A força magnética sobre a barra medida pela balança é igual a 0,13 N. Qual é o valor da corrente?

27.38 Na Figura 27.50, um fio que transporta corrente para dentro do plano da figura se situa entre os pólos norte e sul de duas barras imantadas. Qual é o sentido da força exercida pelas barras sobre o fio?

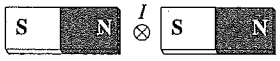


Figura 27.50 Exercício 27.38.

27.39 Uma barra metálica delgada, com 50,0 cm de comprimento e massa de 750 g, repousa sobre dois suportes metálicos (mas não está conectada a eles), em um campo magnético uniforme de 0,450 T, como indica a Figura 27.51. Uma bateria e um resistor de 25,0 Ω em série estão conectados aos suportes. (a) Qual voltagem máxima a bateria pode ter sem romper o circuito nos suportes? (b) A voltagem da bateria possui o valor máximo calculado no item (a). Supondo que o resistor repentinamente sofra um curto-circuito parcial, diminuindo sua resistência para 2,0 Ω, ache a aceleração inicial da barra.

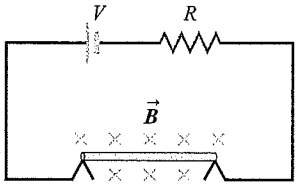


Figura 27.51 Exercício 27.39.

27.40 Balança magnética. O circuito indicado na Figura 27.52 é usado para produzir uma balança magnética para pesar objetos. A massa m a ser medida está suspensa a partir do centro da barra, que se situa em um campo magnético uniforme de 1,50 T, orientado para dentro do plano da figura. A voltagem da bateria pode ser ajustada de modo a variar a corrente no circuito. A barra horizontal tem 60,0 cm de comprimento e é feita de um material extremamente leve. Está conectada à bateria por fios verticais finos que não podem suportar nenhuma tensão considerável; todo o peso da massa suspensa m é sustentado pela força magnética na barra. Um resistor com $R = 5{,}0$ Ω está ligado em série com a barra; a resistência do restante do circuito é muito menor que isso. (a) Qual ponto, a ou b, deve ser o terminal positivo da bateria? (b) Se a voltagem máxima do terminal da bateria é igual a 175 V, qual é a maior massa m que esse instrumento pode medir?

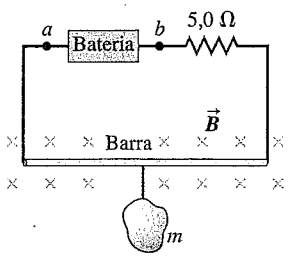


Figura 27.52 Exercício 27.40.

27.41 Considere o condutor e a corrente do Exemplo 27.8, mas neste caso suponha que o campo magnético seja paralelo ao eixo *Ox*. (a) Quais são o módulo, a direção e o sentido da força magnética total sobre o condutor? (b) No Exemplo 27.8, a força total será a mesma, se substituirmos o semicírculo por um segmento retilíneo ao longo do eixo *Ox*. Isso continua sendo verdadeiro, quando o campo magnético está nesse sentido diferente? Você pode explicar por quê?

Seção 27.7 Força e torque sobre uma espira de corrente

27.42 Uma espira retangular de 5,0 cm × 8,0 cm possui plano paralelo a um campo magnético de 0,19 T. A espira conduz uma corrente igual a 6,2 A. (a) Qual é o torque que atua sobre a espira? (b) Qual é o módulo do momento magnético da espira? (c) Qual é o torque máximo que pode ser obtido sobre um fio com o mesmo comprimento total da espira e conduzindo a mesma corrente nesse campo magnético?

27.43 Momento magnético do átomo de hidrogênio. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio (Seção 38.5), no seu estado mais inferior de energia, o elétron orbita o próton a uma velocidade escalar de $2{,}2 \times 10^6$ m/s em uma órbita circular com raio igual a $5{,}3 \times 10^{-11}$m. (a) Qual é o período orbital do elétron? (b) Se considerarmos o elétron em órbita como uma espira de corrente, qual será a corrente *I*? (c) Qual é o momento magnético do átomo em função do movimento do elétron?

27.44 Uma bobina retangular de fio, com dimensões de 22,0 cm por 35,0 cm e que transporta uma corrente de 1,40 A, está orientada de modo que o plano da sua espira é perpendicular a um campo magnético uniforme de 1,50 T, como indica a Figura 27.53. (a) Calcule a força resultante e o torque que o campo magnético exerce sobre a bobina. (b) A bobina é girada formando um ângulo de 30,0° em relação ao eixo indicado, com o lado esquerdo saindo do plano da figura e o lado direito entrando no plano. Calcule a força resultante e o torque que o campo magnético agora exerce sobre a bobina. (*Sugestão*: para ajudar a visualizar esse problema tridimensional, faça um desenho cuidadoso da bobina ao longo do eixo de rotação.)

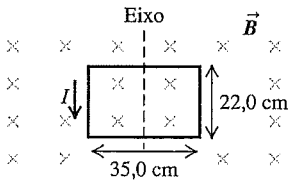


Figura 27.53 Exercício 27.44.

27.45 Uma bobina retangular uniforme com massa total igual a 210 g e dimensões de 0,500 m × 1,0 m está orientada no sentido perpendicular a um campo magnético uniforme de 3,0 T (Figura 27.54). Uma corrente de 2,0 A é repentinamente acionada na bobina. (a) Em torno de qual eixo (A_1 ou A_2) a bobina começará a girar? (b) Determine a aceleração angular inicial da bobina logo após a corrente ser acionada.

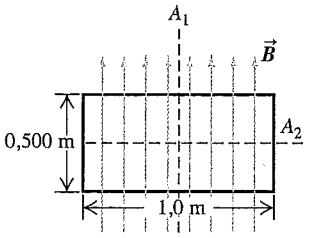


Figura 27.54 Exercício 27.45.

27.46 Uma bobina circular de área *A* possui *N* espiras e pode girar em torno de um diâmetro que coincide com o eixo *Ox*. Uma corrente *I* está circulando na bobina. Existe um campo magnético $\vec{B}$ no sentido positivo do eixo *Oy*. Determine o módulo, a direção e o sentido do torque $\vec{\tau}$ e o valor de energia potencial *U*, como indicado na Equação (27.27), quando a bobina estiver orientada nas posições indicadas de (a) até (d), na Figura 27.55.

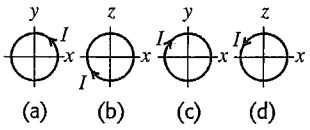


Figura 27.55 Exercício 27.46.

27.47 Uma bobina com momento magnético 1,45 A· m^2 está orientada, inicialmente, com seu momento magnético antiparalelo a um campo magnético com módulo igual a 0,835 T. Qual é a variação da energia potencial da bobina quando ela gira 180°, de modo que seu momento magnético fique paralelo ao campo?

*Seção 27.8 Motor de corrente contínua

***27.48** Um motor cc possui um rotor ligado em série a uma resistência de 3,2 Ω. Quando ele gira com sua carga total em uma linha de 120 V, a fem do rotor é igual a 105 V. (a) Qual é a corrente que o motor recebe da linha? (b) Qual é a potência fornecida ao motor? (c) Qual é a potência mecânica desenvolvida pelo motor?

***27.49** Na Figura 27.56, vemos um motor cc, no qual um rotor com resistência $R_r = 5{,}9\ \Omega$ está ligado em paralelo, formando um shunt com as bobinas de campo com resistência $R_c = 106\ \Omega$. Quando uma diferença de potencial igual a 120 V é aplicada nas escovas e o motor está realizando trabalho e girando com velocidade máxima, a corrente fornecida ao motor é igual a 4,82 A. (a) Qual é a corrente que passa nas bobinas de campo? (b) Qual é a corrente que passa no rotor? (c) Qual é a fem induzida desenvolvida pelo motor? (d) Qual é a potência mecânica desenvolvida pelo motor?

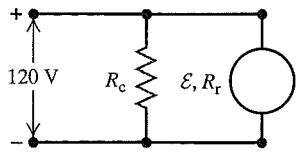


Figura 27.56 Exercícios 27.49 e 27.50.

*27.50 A Figura 27.56 mostra uma fonte de alimentação de 120 V ligada a um motor cc com shunt, no qual o rotor está ligado em paralelo às bobinas de campo. A resistência das bobinas de campo é $R_c = 218\ \Omega$. A resistência do rotor é $R_r = 5{,}9\ \Omega$. Quando o motor está funcionando, o rotor desenvolve uma fem $\mathcal{E}$. O motor consome uma corrente igual a 4,82 A da fonte. As perdas por atrito correspondem a 45,0 W. Calcule: (a) a corrente que passa nas bobinas de campo; (b) a corrente no rotor; (c) a fem $\mathcal{E}$; (d) a taxa de produção de energia térmica no rotor; (f) a potência fornecida ao motor; (g) a eficiência do motor.

*Seção 27.9 O efeito Hall

*27.51 A Figura 27.57 indica uma placa de prata com dimensões $y_1 = 0{,}23$ mm e $z_1 = 11{,}8$ mm e que conduz uma corrente igual a 120 A no sentido $+x$. A placa está em um campo magnético uniforme na direção y, cujo módulo é igual a 0,95 T. Aplique o modelo simplificado do efeito Hall, apresentado na Seção 27.9. Sabendo que existem $5{,}85 \times 10^{28}$ elétrons livres por metro cúbico, determine: (a) o módulo da velocidade de arraste dos elétrons na direção do eixo Ox; (b) o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no eixo Oz produzido pelo efeito Hall; (c) a fem Hall.

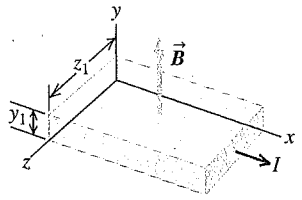


Figura 27.57 Exercícios 27.51 e 27.52.

*27.52 A Figura 27.57 representa a placa de um metal desconhecido com as mesmas dimensões da placa de prata do Exercício 27.51. Quando o campo magnético é de 2,29 T e a corrente é igual a 78,0 A, a fem Hall é de 131 μV. Usando o modelo simplificado do efeito Hall apresentado na Seção 27.9, calcule a densidade dos elétrons livres do metal desconhecido.

Problemas

27.53 Quando uma partícula com carga $q > 0$ se move com velocidade $\vec{v}_1$ formando um ângulo de 45° com o eixo $+Ox$ no plano xy, um campo magnético uniforme exerce uma força $\vec{F}_1$ ao longo do eixo $-Oz$ (Figura 27.58). Quando a mesma partícula se move com velocidade $\vec{v}_2$ com o mesmo módulo $\vec{v}_1$, porém ao longo do eixo $+Oz$, uma força $\vec{F}_2$ com módulo F_2 é exercida sobre ela ao longo do eixo $+Ox$. (a) Qual é o módulo, a direção e o sentido do campo magnético? (b) Qual é o módulo de $\vec{F}_1$ em termos de F_2?

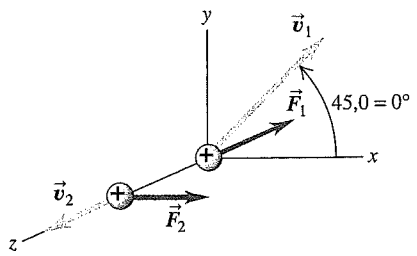


Figura 27.58 Problema 27.53.

27.54 Uma partícula com carga $9{,}45 \times 10^{-8}$ se move em uma região onde existe um campo magnético uniforme igual a 0,450 T no sentido do eixo $+Ox$. Em um dado instante, a velocidade da partícula possui componentes $v_x = -1{,}68 \times 10^4$ m/s, $v_y = -3{,}11 \times 10^4$ m/s e $v_z = 5{,}85 \times 10^4$ m/s. Quais são os componentes da força nesse instante?

27.55 Você deseja atingir um alvo que está a alguns metros de distância com uma moeda que possui massa de 5,0 g e carga de +2500 μC. A moeda é lançada a uma velocidade inicial de 12,8 m/s, e existe um campo elétrico uniforme de cima para baixo com força de campo igual a 27,5 N/C por toda a região. Se você mirar diretamente o alvo e lançar a moeda horizontalmente, quais são o módulo, a direção e o sentido do campo magnético uniforme necessários na região para a moeda atingir o alvo?

27.56 Um ciclotron deve acelerar prótons até uma energia de 5,4 MeV. O eletroímã supercondutor do ciclotron produz um campo magnético igual a 3,5 T com direção perpendicular à órbita do próton. (a) Quando o próton adquire uma energia cinética igual a 2,7 MeV, qual é o raio da órbita e qual é sua velocidade angular? (b) Repita o item (a) para quando o próton atingir sua energia cinética final de 5,4 MeV.

27.57 Os pólos magnéticos de um pequeno ciclotron produzem um campo magnético de módulo igual a 0,85 T. Os pólos possuem um raio de 0,40 m, que é o raio máximo que as órbitas das partículas podem atingir. (a) Qual é o valor máximo da energia adquirida por um próton ($q = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) acelerado por esse ciclotron? Forneça a resposta em joules e em elétron-volts. (b) Qual é o tempo de revolução para um próton girando com esse raio máximo? (c) Qual deve ser o módulo de um campo magnético necessário para acelerar um próton até ele atingir uma energia máxima igual ao dobro da calculada no item (a)? (d) Considerando $B = 0{,}85$ T, qual é a energia máxima atingida por uma partícula alfa ($q = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C, $m = 6{,}65 \times 10^{-27}$ kg) acelerada nesse ciclotron? Como se compara o resultado obtido à energia máxima do próton?

27.58 A força sobre uma partícula carregada que se move em um campo magnético pode ser calculada como a soma vetorial das forças devidas a cada componente do campo magnético. Como exemplo, uma partícula com carga q está se movendo com velocidade v no sentido $-y$. Ela se move em um campo magnético $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$. (a) Quais são os componentes da força $\vec{F}$ exercida pelo campo magnético sobre a partícula? (b) Se $q > 0$, quais devem ser os sinais dos componentes de $\vec{B}$ para que os componentes de $\vec{F}$ sejam todos não-negativos? (c) Se $q < 0$ e $B_x = B_y = B_z > 0$, determine a direção e o sentido de $\vec{F}$ e calcule o módulo da fem em termos de $|q|$, v e B_x.

27.59 Uma barra metálica uniforme, de 458 g e 75,0 cm de comprimento, transporta uma corrente I em um campo magnético horizontal uniforme de 1,55 T, como indica a Figura 27.59. A barra está presa por uma dobradiça no ponto b, mas repousa sem estar conectada ao ponto a. Qual é o valor máximo da corrente que pode fluir de a para b, sem romper o contato elétrico no ponto a?

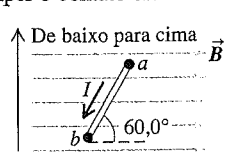


Figura 27.59 Problema 27.59.

27.60 No canhão de elétrons de um cinescópio de TV, os elétrons (carga $-e$ e massa m) são acelerados por uma voltagem V. Depois de abandonar o canhão de elétrons, o feixe de elétrons percorre uma distância D no sentido da tela; nessa região, existe um campo magnético

transversal de módulo B e não há nenhum campo elétrico. (a) Desenhe a trajetória do feixe de elétrons no tubo. (b) Mostre que o desvio aproximado do feixe produzido pelo campo magnético é dado por

$$d = \frac{BD^2}{2}\sqrt{\frac{e}{2mV}}$$

(*Sugestão*: posicione a origem no centro do arco do feixe de elétrons e compare uma trajetória do feixe sem desvio com outra trajetória com desvio.)
(c) Calcule o valor dessa expressão para $V = 750$ V, $D = 50$ cm e $B = 5{,}0 \times 10^{-5}$ T (valor comparável ao campo magnético da Terra). Esse desvio é significativo?

27.61 Uma partícula com carga q negativa e massa $m = 2{,}58 \times 10^{-15}$ kg se move através de uma região com um campo magnético uniforme $\vec{B} = -(0{,}120\ \text{T})\hat{k}$. Em um certo instante, a velocidade da partícula é dada por $\vec{v} = (1{,}05 \times 10^6\ \text{m/s})(-3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k})$ e a força $\vec{F}$ sobre a partícula possui módulo igual a 1,25 N. (a) Determine a carga q. (b) Calcule a aceleração $\vec{a}$ da partícula. (c) Explique por que a trajetória da partícula é uma hélice e calcule o raio de curvatura R do componente circular da trajetória helicoidal. (d) Determine a freqüência ciclotrônica da partícula. (e) Embora um movimento helicoidal não seja periódico, no sentido exato da palavra, as coordenadas x e y variam de modo periódico. Se as coordenadas da partícula para $t = 0$ forem $(x, y, z) = (R, 0, 0)$, quais serão as coordenadas para o instante $t = 2T$, em que T é o período do movimento no plano xy?

27.62 Um fio longo e retilíneo que contém uma região semicircular com raio de 0,95 m é colocado em um campo magnético uniforme de módulo igual a 2,20 T, como indica a Figura 27.60. Qual é a força magnética resultante que atua sobre o fio, quando ele transporta uma corrente de 3,40 A?

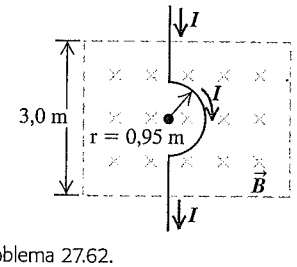


Figura 27.60 Problema 27.62.

27.63 Um campo magnético exerce um torque τ sobre uma espira circular de fio que transporta corrente. Qual será o torque sobre essa espira (em termos de τ), se o seu diâmetro for triplicado?

27.64 Uma partícula com carga $q > 0$ se move com velocidade v no sentido $+Oz$ através de uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$. A força magnética sobre a partícula é dada por $\vec{F} = F_0(3\hat{i} + 4\hat{j})$, em que F_0 é uma constante positiva. (a) Determine os componentes B_x, B_y e B_z ou pelo menos a maior quantidade dos três componentes que for possível encontrar com base nas informações fornecidas. (b) Se, além das informações dadas, soubermos que o campo magnético possui módulo igual a $6\ F_0/qv$, determine tudo o que você puder sobre os componentes de $\vec{B}$ restantes.

27.65 Suponha que o campo elétrico entre as placas P e P' na Figura 27.24 seja igual a $1{,}88 \times 10^4$ V/m e que o campo magnético em ambas as regiões seja igual a 0,701 T. Se a fonte contém os três isótopos do criptônio (^{82}Kr, ^{84}Kr e ^{86}Kr) e os íons possuem uma carga única, determine a distância entre as linhas formadas pelos três isótopos sobre a placa fotográfica. Suponha que as massas atômicas dos isótopos (em unidades de massa atômica) sejam dadas pelos respectivos números atômicos, 82, 84 e 86. (Uma unidade de massa atômica = 1 u = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.)

27.66 Espectrômetro de massa. Um espectrômetro de massa é usado para medir as massas dos íons ou para separar íons de massas diferentes (Seção 27.5). Em um projeto para tal instrumento, os íons com massa m e carga q são acelerados através de uma diferença de potencial V. A seguir, eles entram em um campo magnético uniforme que é perpendicular à sua velocidade e são desviados para uma trajetória semicircular de raio R. Um detector mede onde os íons completam o semicírculo e, a partir disso, é fácil calcular R. (a) Deduza a equação para calcular a massa do íon a partir das medidas de B, V, R e q. (b) Qual é a diferença de potencial necessária para que os átomos de ^{12}C com íon único tenham $R = 50{,}0$ cm em um campo magnético de 0,150 T? (c) Suponha que o feixe consista de uma combinação de íons ^{12}C e ^{14}C. Se V e B tiverem os mesmos valores que no item (b), calcule a separação desses dois isótopos no detector. Você acha que essa separação do feixe é suficiente para a distinção entre os dois íons? (Considere a suposição descrita no Problema 27.65 para as massas dos íons.)

27.67 Um fio retilíneo condutor de massa M e comprimento L é colocado sobre um plano inclinado sem atrito, formando um ângulo θ com a horizontal (Figura 27.61). Existe um campo magnético vertical uniforme $\vec{B}$ ao longo de todos os pontos (produzido por um conjunto de eletroímãs não indicados na figura). Para impedir que o fio escorregue para baixo do plano, uma fonte de tensão é aplicada nas extremidades do fio. Quando uma corrente com um valor preciso circula no fio, ele permanece em repouso. Determine o módulo e o sentido da corrente que circula para fazer o fio ficar em repouso. Copie a figura e desenhe o sentido da corrente no seu desenho. Além disso, faça um diagrama de corpo livre mostrando todas as forças que atuam sobre o fio.

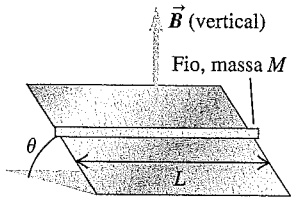


Figura 27.61 Problema 27.67.

27.68 Uma barra metálica de 3,0 N, com 1,50 m de comprimento e resistência de 10,0 Ω, repousa horizontalmente sobre fios condutores do circuito indicado na Figura 27.62. A barra está em um campo magnético horizontal uniforme de 1,60 T e não está conectada aos fios do circuito. Qual é a aceleração da barra, logo após a chave S ser fechada?

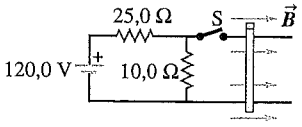


Figura 27.62 Problema 27.68.

27.69 Dois íons positivos, que possuem a mesma carga q, porém massas diferentes, m_1 e m_2, são acelerados horizontalmente a partir do repouso por uma diferença de potencial V. A seguir, eles entram em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular ao plano da trajetória. (a) Mostre que, se o feixe entrar no campo magnético ao longo do eixo Ox, o valor da coordenada y de cada íon em qualquer tempo t será aproximadamente dado por

$$y = Bx^2\left(\frac{q}{8mV}\right)^{1/2}$$

desde que y permaneça muito menor do que x. (b) É possível usar esse arranjo para a separação de isótopos? Por quê?

27.70 Uma espira plástica circular de raio R e carga positiva q está uniformemente distribuída em torno da circunferência da espira. A seguir, a espira é girada em torno do seu eixo central, perpendicular ao plano da espira, com velocidade angular ω. Supondo que a espira esteja em uma região onde há um campo magnético uniforme $\vec{B}$, orientado paralelamente ao plano da espira, calcule o módulo do torque magnético sobre a espira.

27.71 Determinação da dieta. Um método para determinar a quantidade de milho consumida na dieta dos aborígenes americanos primitivos é a técnica da análise de isótopos estáveis. Ao fazer a fotossíntese, o milho concentra o isótopo do carbono 13, ao passo que a maioria das outras plantas concentram o carbono 12. Assim, a alta dependência do consumo de milho pode ser relacionada a certas doenças, porque o milho carece do aminoácido essencial lisina. Os arqueólogos usam um espectrômetro de massa para separar os isótopos de ^{12}C e ^{13}C em amostras de fósseis humanos. Suponha que você use um seletor de velocidades para obter átomos de íon único (onde falta um elétron) com velocidade de 8,50 km/s, e você deseja encurvá-los no interior de um campo magnético em um semicírculo com diâmetro de 25,0 cm para o ^{12}C. As medidas das massas desses isótopos são $1,99 \times 10^{-26}$kg (^{12}C) e $2,16 \times 10^{-26}$ kg (^{13}C). (a) Qual é a força do campo magnético necessária? (b) Qual é o diâmetro do semicírculo do ^{13}C? (c) Qual é a separação dos íons de ^{12}C e ^{13}C no detector, ao final do semicírculo? A distância é suficiente para ser de fácil observação?

27.72 Propulsão eletromagnética em um trilho. Uma barra condutora de comprimento L e massa m desliza sobre trilhos horizontais conectados a uma fonte de voltagem. A fonte de voltagem mantém uma corrente constante I nos trilhos e na barra; e um campo magnético vertical uniforme $\vec{B}$ preenche o espaço entre os trilhos (Figura 27.63). (a) Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante sobre a barra. Despreze o atrito, a resistência do ar e a resistência elétrica. (b) Se a barra possui massa m, calcule a distância d que ela deve percorrer ao longo dos trilhos, partindo do repouso, até atingir uma velocidade v. (c) Existem teorias sobre a possibilidade de que a propulsão baseada nesse princípio possa ser usada para acelerar massas e colocá-las em órbita ao redor da Terra e, até mesmo, fazer o objeto sair da atração terrestre. Calcule a distância que a barra deve percorrer para atingir a velocidade de escape da Terra (11,2 km/s). Considere $B = 0,50$ T, $I = 2,0 \times 10^3$A, $m = 25$ kg e $L = 50$ cm. Para simplificar, suponha que a força resultante que atua sobre o objeto é igual à força magnética, como nos itens (a) e (b), embora a gravidade desempenhe um papel importante em um lançamento espacial real.

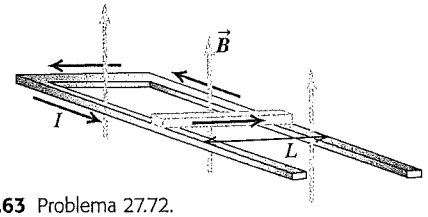


Figura 27.63 Problema 27.72.

27.73 Um fio longo que transporta uma corrente de 6,0 A inverte o seu sentido por meio de duas dobras em ângulo reto, como indica a Figura 27.64. A parte do fio onde a dobra ocorre está em um campo magnético de 0,666 T, confinado à região circular de diâmetro igual a 75 cm, como indicado. Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante que o campo magnético exerce sobre esse fio.

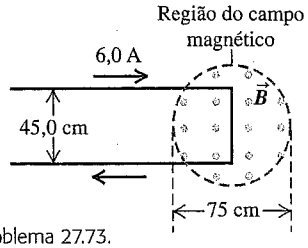


Figura 27.64 Problema 27.73.

27.74 Um fio de comprimento igual a 25,0 cm está apoiado ao longo do eixo Oz e conduz uma corrente de 9,0 A no sentido $+z$. O campo magnético é uniforme e possui componentes $B_x = -0,242$ T, $B_y = -0,985$ T e $B_z = -0,336$ T. (a) Calcule os componentes da força magnética sobre o fio. (b) Qual é o módulo da força magnética resultante que atua sobre o fio?

27.75 A espira retangular indicada na Figura 27.65 possui massa igual a 0,15 g por centímetro de comprimento e está articulada em torno do lado ab por meio de um eixo sem atrito. A corrente que circula no fio é igual a 8,2 A, no sentido indicado. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético paralelo ao eixo Oy que produzirá uma oscilação para cima na espira até que seu plano forme um ângulo de 30,0° com o plano yz.

27.76 A espira retangular indicada na Figura 27.66 possui articulação em torno do eixo Oy e conduz uma corrente igual a 15,0 A, no sentido indicado. (a) Se a espira está em um campo magnético uniforme com módulo de 0,48 T no sentido $+Ox$, calcule o módulo, a direção e o sentido do torque necessário para sustentar a espira na posição indicada. (b) Repita o item (a) para o caso no qual o campo aponta no sentido $-z$. (c) Para cada um dos campos magnéticos mencionados, qual seria o torque necessário se a espira estivesse articulada em um eixo de rotação que passasse em seu centro, paralelamente ao eixo Oy?

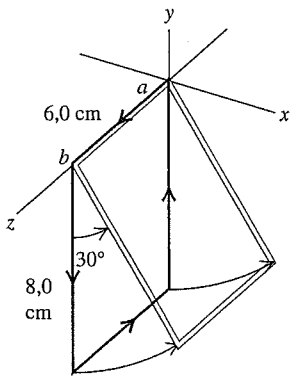


Figura 27.65 Problema 27.75.

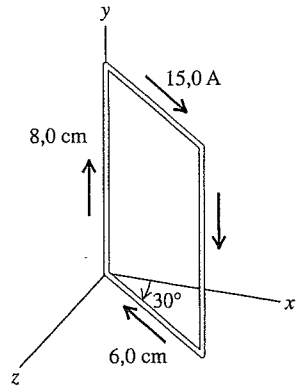


Figura 27.66 Problema 27.76.

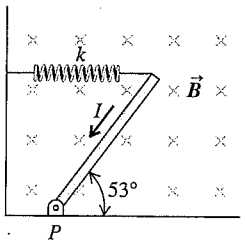


Figura 27.67 Problema 27.77.

27.77 Uma barra delgada uniforme, com massa desprezível e comprimento de 0,200 m, está fixa no solo por uma dobradiça de atrito desprezível no ponto P (Figura 27.67). Uma mola horizontal, com constante de força $k = 4{,}80$ N/m, conecta a outra extremidade do bastão a uma parede vertical. O bastão está em um campo magnético uniforme $B = 0{,}340$ T orientado para dentro do plano da figura. Uma corrente $I = 6{,}50$ A passa pelo bastão, no sentido indicado. (a) Calcule o torque em função da força magnética sobre o bastão, para um eixo x no ponto P. É correto tomar a força magnética total para atuar no centro de gravidade do bastão, ao calcularmos o torque? Explique. (b) Quando o bastão está em equilíbrio e forma um ângulo de 53° em relação ao solo, a mola está estendida ou comprimida? (c) Quanta energia é armazenada na mola, quando o bastão está em equilíbrio?

27.78 A espira triangular de fio indicada na Figura 27.68 transporta uma corrente $I = 5{,}0$ A no sentido indicado. A espira está em um campo magnético uniforme com módulo $B = 3{,}0$ T e o mesmo sentido da corrente que passa pelo lado PQ da espira. (a) Determine a força exercida pelo campo magnético em cada lado do triângulo. Se a força for diferente de zero, especifique a sua direção e sentido. (b) Qual é a força resultante que atua sobre a espira? (c) A espira revolve em torno de um eixo que fica ao longo do lado PR. Use as forças obtidas no item (a) para determinar o torque sobre cada lado da espira (veja Problema 27.77). (d) Qual é o módulo do torque resultante sobre a espira? Calcule o torque resultante a partir dos torques obtidos no item (c) e também de acordo com a Equação (27.28). Esses resultados se equivalem? (e) O torque resultante está orientado para girar o ponto Q para dentro do plano da figura ou para fora desse plano?

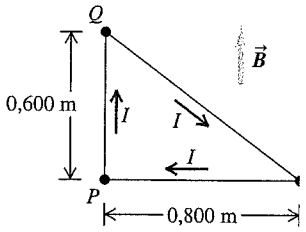


Figura 27.68 Problema 27.78.

27.79 Uma bobina de alto-falante. Na Seção 27.7, mostramos que era igual a zero a força resultante sobre uma espira de corrente em um campo magnético *uniforme*. A força magnética sobre uma bobina destinada a produzir o som de um alto-falante (Figura 27.28) não é igual a zero porque o campo magnético da bobina não é uniforme. Uma bobina de som de um alto-falante possui 50 espiras com diâmetro de 1,56 cm e a corrente que flui no fio é igual a 0,950 A. Suponha que o campo magnético em cada ponto da espira possua um módulo constante de 0,220 T e esteja dirigido formando um ângulo de 60° com a normal externa do plano da bobina (Figura 27.69). Suponha que o eixo da bobina seja o eixo Oy. A corrente que flui na bobina possui o sentido indicado (sentido anti-horário observado de um ponto acima da bobina sobre o eixo Oy). Calcule o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante sobre a bobina.

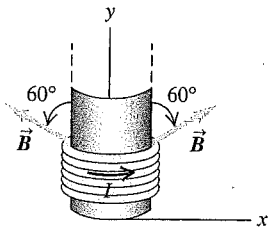


Figura 27.69 Problema 27.79.

27.80 Paleoclima. Climatologistas podem determinar a temperatura da Terra no passado comparando o isótopo do oxigênio 18 com o isótopo do oxigênio 16 no ar confinado em placas de gelo antigas, como as existentes em Greenland. Em um dos métodos para separar esses isótopos, uma amostra contendo ambos os isótopos é inicialmente convertida em íon único (um elétron é removido) e a seguir, acelerada a partir do repouso através de uma diferença de potencial V. Esse feixe penetra um campo magnético B em ângulo reto com o campo e é encurvado a um quarto de círculo. Um detector de partícula no final da trajetória mede a quantidade de cada isótopo. (a) Mostre que a separação Δr dos dois isótopos no detector é dada por

$$\Delta r = \frac{\sqrt{2eV}}{eB}\left(\sqrt{m_{18}} - \sqrt{m_{16}}\right)$$

em que m_{16} e m_{18} são as massas dos dois isótopos de oxigênio. (b) As medidas das massas dos dois isótopos são $2{,}66 \times 10^{-26}$ kg (^{16}O) e $2{,}99 \times 10^{-26}$ kg (^{18}O). Se o campo magnético for igual a 0,050 T, qual deve ser o potencial de aceleração V para que esses dois isótopos estejam separados em 4,0 cm no detector?

27.81 Força sobre uma espira de corrente em um campo magnético não uniforme. Mostramos na Seção 27.7 que é nula a força resultante sobre uma espira de corrente em um campo magnético *uniforme*. Porém, o que ocorre quando $\vec{B}$ não é uniforme? A Figura 27.70 mostra uma espira quadrada que está contida no plano xy. A espira possui vértices nos pontos (0, 0), (0, L), (L, 0) e (L, L), e conduz uma corrente I no sentido horário. O campo magnético não possui componente x, mas possui componentes em ambas as direções y e z: $\vec{B} = (B_0 z/L)\hat{j} + (B_0 y/L)\hat{k}$, em que B_0 é uma constante positiva. (a) Faça um desenho das linhas do campo magnético no plano yz. (b) Calcule o módulo, a direção e o sentido da força magnética exercida sobre cada um dos lados da espira, integrando a Equação (27.20). (c) Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante sobre a espira.

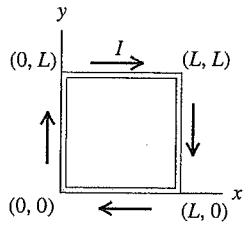


Figura 27.70 Problemas 27.81 e 27.82.

27.82 Torque sobre uma espira de corrente em um campo magnético não uniforme. Na Seção 27.7, a expressão do torque sobre uma espira de corrente foi deduzida supondo que o campo magnético $\vec{B}$ fosse uniforme. Porém, o que ocorre quando $\vec{B}$ *não* é uniforme? A Figura 27.70 mostra uma espira quadrada que está contida no plano xy. A espira possui vértices nos pontos (0, 0),

(0, L), (L, 0) e (L, L) e conduz uma corrente I constante no sentido horário. O campo magnético não possui componente z, porém possui componentes y e x: $\vec{B} = (B_0 y/L)\hat{\imath} + (B_0 x/L)\hat{\jmath}$, onde B_0 é uma constante positiva. (a) Faça um desenho das linhas do campo magnético no plano xy. (b) Calcule o módulo, a direção e o sentido da força magnética exercida sobre cada um dos lados da espira integrando a Equação (27.20). (c) Se a espira pode girar livremente em torno do eixo Ox, determine o módulo, a direção e o sentido do torque magnético sobre a espira. (d) Repita o item (c) para o caso no qual a espira pode girar livremente em torno do eixo Oy. (e) A Equação (27.26), $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, fornece uma descrição apropriada para o torque sobre a espira? Por quê?

27.83 Um fio de arame isolado com massa $m = 5{,}40 \times 10^{-5}$ kg é encurvado, formando um U invertido, de tal modo que a parte horizontal possui comprimento $l = 15{,}0$ cm. As extremidades encurvadas do fio são parcialmente imersas em dois recipientes cheios de mercúrio, e cada extremidade fica 2,5 cm abaixo da superfície do mercúrio. A estrutura inteira está em uma região onde existe um campo magnético uniforme de 0,00650 T direcionado para o interior da página (Figura 27.71). Uma ligação elétrica dos recipientes de mercúrio se dá através das extremidades dos fios. Os dois recipientes de mercúrio são conectados a uma bateria de 1,50 V e a uma chave S. Quando a chave S está fechada, o fio salta 35,0 cm para o ar, a partir de sua posição inicial. (a) Determine a velocidade v do fio quando ele deixa o mercúrio. (b) Supondo que a corrente I, que passa no fio, permaneça constante desde o momento em que a chave foi fechada até o instante em que o fio sai do mercúrio, determine o valor de I. (c) Desprezando as resistências dos fios do circuito e a resistência do mercúrio, determine a resistência do fio de arame.

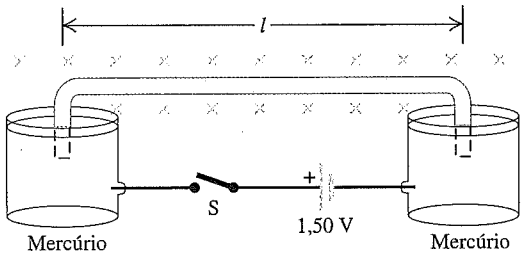


Figura 27.71 Problema 27.83.

27.84 Derivação da Equação (27.26) para uma espira circular. Uma espira de fio em forma de anel está sobre o plano xy com o centro na origem. No anel, circula uma corrente I no sentido anti-horário (Figura 27.72). Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ está sobre o eixo $+Ox$, sendo dado por $\vec{B} = B_x\hat{\imath}$. (Esse resultado poderá ser facilmente estendido para um campo $\vec{B}$ com direção arbitrária.) (a) Na Figura 27.72, mostre que o elemento de linha é dado por $d\vec{l} = R\,d\theta\,(-\text{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$ e calcule $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$. (b) Integre $d\vec{F}$ ao longo da espira para mostrar que a força resultante é igual a zero. (c) Do item (a) calcule $d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$, em que $\vec{r} = R(\cos\theta\hat{\imath} + \text{sen}\theta\hat{\jmath})$ é o vetor que liga o centro da espira ao elemento $d\vec{l}$. (Observe que $d\vec{l}$ é perpendicular a $\vec{r}$.) (d) Integre $d\vec{\tau}$ ao longo da espira para encontrar o torque total $\vec{\tau}$ que atua sobre a espira. Mostre que o resultado pode ser escrito na forma $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, em que $\mu = IA$. (*Nota*: $\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}2x$, $\int\text{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}2x$, e $\int\text{sen}x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}^2 x$.)

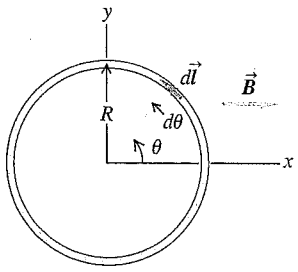


Figura 27.72 Problema 27.84.

27.85 Uma espira circular de área A está contida no plano xy. Vista ao longo do eixo Oz, olhando para a origem no sentido $-z$, uma corrente I circula no sentido horário em torno da espira. O torque produzido por um campo magnético externo $\vec{B}$ é dado por $\vec{\tau} = D(4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})$, em que D é uma constante positiva; e para essa orientação da espira a energia potencial magnética $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ é negativa. O módulo do campo magnético é $B_0 = 13D/IA$. (a) Determine o vetor momento magnético da espira. (b) Determine os componentes B_x, B_y e B_z do vetor $\vec{B}$.

27.86 Modelo de Quark para o nêutron. O nêutron é uma partícula com carga elétrica igual a zero. Contudo, ele possui um momento magnético diferente de zero, cujo componente z é igual a $9{,}66 \times 10^{-27}$ A · m^2. Esse momento pode ser explicado pela estrutura interna do nêutron. Diversas evidências indicam que o nêutron é composto de três partículas fundamentais, chamadas de *quarks*: um quark '*up*' (u), com carga $+2e/3$, e dois quarks '*down*' (d), cada um com uma carga $-e/3$. A combinação dessas três cargas produz uma carga total $+2e/3 - e/3 - e/3 = 0$. Caso os quarks estejam em movimento, eles produzem um movimento magnético diferente de zero. Com um modelo muito simples suponha que o quark (u) se mova em uma órbita circular em sentido anti-horário e que os dois quarks (d) se movam no sentido horário, todos os quarks se movendo com o mesmo módulo da velocidade v ao longo das circunferências de mesmo raio r (Figura 27.73). (a) Obtenha a corrente elétrica produzida pela circulação do quark (u). (b) Determine o módulo do momento magnético oriundo da circulação do quark (u). (c) Determine o módulo do momento magnético do sistema constituído pelos três quarks. (Tome cuidado e use os sentidos corretos para os momentos magnéticos.) (d) Com que velocidade v os quarks devem se mover para reproduzir o valor do momento magnético do nêutron? Use o valor $r = 1{,}20 \times 10^{-15}$m (o raio do nêutron) para o raio das órbitas.

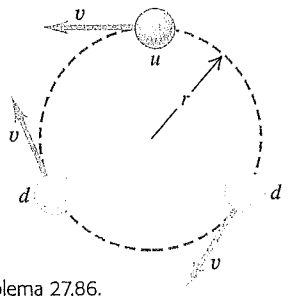


Figura 27.73 Problema 27.86.

27.87 Uso da lei de Gauss do magnetismo. Em uma certa região do espaço, o campo magnético $\vec{B}$ não é uniforme. O campo magnético possui um componente z e outro componente que aponta para fora ou para dentro do eixo Oz. O componente z é dado por $B_z(z) = \beta z$, em que β é uma constante positiva. O componente radial B_r depende

somente de r, a distância radial até o eixo Oz. (a) Use a lei de Gauss para o magnetismo, dada pela Equação (27.8), para determinar o componente B_r em função de r. (*Sugestão*: experimente uma superfície gaussiana cilíndrica de raio r concêntrica com o eixo Oz, com uma extremidade em $z = 0$ e a outra no ponto $z = L$). (b) Faça um desenho mostrando as linhas do campo magnético.

27.88 Uma espira circular com área igual a 4,45 cm^2 conduz uma corrente de 12,5 A. A espira pode girar livremente em torno de um diâmetro. A espira, inicialmente em repouso, está imersa em um campo magnético dado por $\vec{B} = (1{,}15 \times 10^{-2}\ \text{T})\,(12\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})$. A espira está posicionada inicialmente de tal modo que o momento magnético é dado por $\vec{\mu}_i = \mu\,(-0{,}800\hat{\imath} + 0{,}600\hat{\jmath})$, em que μ é o módulo (positivo) do momento magnético. A espira é libertada e gira em um ângulo de 90°, posição na qual seu momento magnético é dado por $\vec{\mu}_i = -\mu\hat{k}$. (a) Determine a diminuição da energia potencial. (b) Se o momento de inércia da espira em relação a um diâmetro é igual a $8{,}50 \times 10^{-7}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, determine a velocidade angular da espira no instante em que ela passa pela segunda posição.

Problemas desafiadores

27.89 Uma partícula com carga igual a 2,15 μC e massa de $3{,}20 \times 10^{-11}$ kg está, inicialmente, se deslocando no sentido $+y$, com velocidade igual a $v_0 = 1{,}45 \times 10^5$ m/s. Ela, a seguir, entra em uma região onde existe um campo magnético uniforme que entra perpendicularmente no plano da página, como indicado na Figura 27.74. O módulo do campo é igual a 0,420 T. A região se estende até uma distância igual a 25,0 cm ao longo da direção inicial do deslocamento; a 75,0 cm do ponto onde ela entrou no campo existe uma parede. O comprimento da região onde não existe campo é, portanto, igual a 50,0 cm. Quando a partícula carregada entra no campo magnético, ela segue uma trajetória curva com raio de curvatura R. Ela, a seguir, deixa o campo magnético depois de um tempo t_1, tendo sido desviada de uma distância Δx_1. A partícula então se desloca na região sem campo e atinge a parede depois de ser desviada de uma distância total Δx. (a) Determine o raio R da parte curva da trajetória. (b) Determine t_1, o tempo durante o qual a partícula permanece no campo magnético. (c) Determine Δx_1, o desvio horizontal no ponto onde a partícula sai do campo. (d) Determine Δx, o desvio horizontal total.

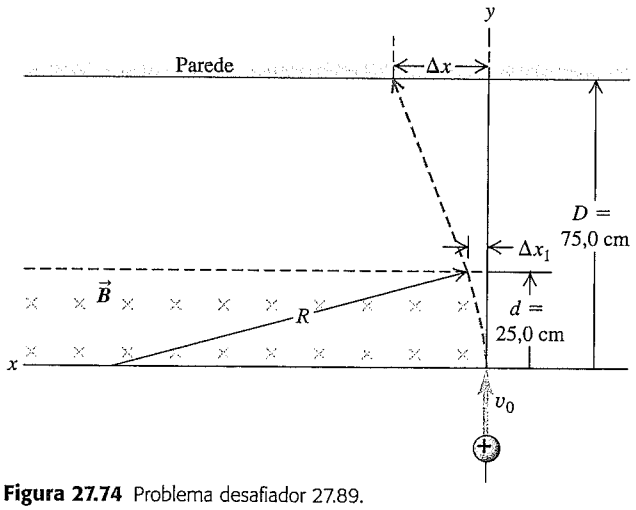


Figura 27.74 Problema desafiador 27.89.

27.90 A bomba eletromagnética. As forças magnéticas que atuam sobre fluidos condutores fornecem um modo conveniente para bombear esses fluidos. Por exemplo, esse método pode ser usado para bombear o sangue sem prejudicar células que poderiam ser danificadas por uma bomba mecânica. Um tubo horizontal com seção reta retangular (largura w e altura h) é colocado ortogonalmente a um campo magnético B, de tal modo que um comprimento l está imerso no campo (Figura 27.75). O tubo é preenchido com um fluido condutor e uma densidade de corrente J é mantida na terceira direção mutuamente perpendicular. (a) Mostre que a diferença de pressão entre um ponto do líquido sobre o plano vertical que passa em ab e um ponto do líquido sobre outro plano vertical que passa em cd, para impedir o escoamento do fluido, é dada por $\Delta p = JlB$. (b) Qual é a densidade de corrente necessária para fornecer uma diferença de pressão igual a 1,0 atm entre esses dois pontos, sabendo que $B = 2{,}20$ T e $l = 35{,}0$ mm?

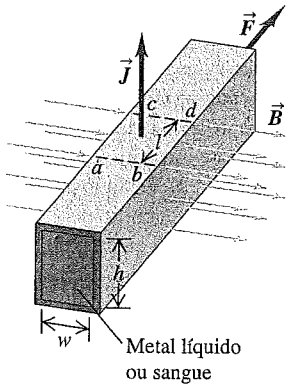


Figura 27.75 Problema desafiador 27.90.

27.91 Uma trajetória cicloidal. Uma partícula de massa m e carga positiva q parte do repouso na origem na Figura 27.76. Existe um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ no sentido $+y$ e um campo magnético uniforme $\vec{B}$ saindo da página. Demonstra-se em livros mais avançados que a trajetória descrita é uma *ciclóide*, cujo raio de curvatura nos pontos do topo da curva é igual ao dobro da coordenada y desses pontos. (a) Explique a razão desse tipo de trajetória e o motivo da repetição do movimento. (b) Prove que a velocidade em qualquer ponto é dada por $\sqrt{2qEy/m}$. (*Sugestão*: use a conservação da energia.) (c) Aplicando a segunda lei de Newton no ponto do topo da trajetória e levando em conta a informação de que nesse ponto o raio de curvatura é igual a $2y$, prove que a velocidade nesse ponto é igual a $2E/B$.

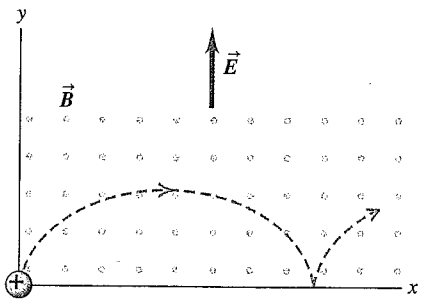
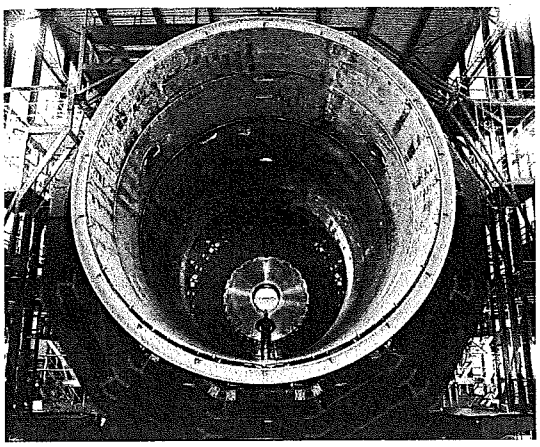


Figura 27.76 Problema desafiador 27.91.

FONTES DE CAMPO MAGNÉTICO

28



O imenso cilindro nesta fotografia é uma bobina condutora de carga, ou solenóide, que gera um campo magnético uniforme em seu interior e faz parte de uma experiência do CERN, um centro europeu de pesquisas voltado ao estudo das partículas. Se dois desses solenóides fossem unidos pelas extremidades, em quanto aumentaria o campo magnético?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Qual é a natureza do campo magnético produzido por uma única partícula carregada em movimento.
- Como descrever o campo magnético produzido por um elemento de um condutor que transporta uma corrente.
- Como calcular o campo magnético produzido por um fio longo e retilíneo, que transporta corrente.
- Por que fios que transportam correntes na mesma direção e sentido se atraem, enquanto fios que transportam correntes contrárias se repelem.
- Como calcular o campo magnético produzido por um fio que transporta corrente e é encurvado em círculo.
- O que é a lei de Ampère e o que ela revela sobre campos magnéticos.
- Como usar a lei de Ampère para calcular o campo magnético de distribuições simétricas de corrente.

No Capítulo 27, estudamos as forças sobre cargas que se movem e sobre fios que transportam uma corrente em um campo magnético. Não havíamos questionado como esses campos magnéticos eram produzidos; simplesmente consideramos esses campos como sendo fatos conhecidos. Mas como um campo magnético é *criado*? Sabemos que ele pode ser produzido tanto por um ímã permanente quanto por uma corrente elétrica em um eletroímã. Chegou o momento de estudarmos com mais detalhes essas fontes de campo magnético.

Aprendemos que uma carga cria um campo elétrico e que este exerce força sobre uma carga. Porém, um campo *magnético* exerce força sobre uma carga somente quando ela está em *movimento*. Será também verdade que uma carga elétrica *cria* um campo magnético somente quando ela está em movimento? A resposta é sim.

Nossa análise começará com o campo magnético gerado por uma única carga puntiforme que está em movimento. Poderemos usar essa análise para estudar o campo magnético criado por um pequeno segmento de um condutor que transporta uma corrente. Depois de fazer isso, seremos capazes de encontrar o campo magnético produzido por um condutor que possua *qualquer* forma.

A seguir, introduziremos a lei de Ampère, uma lei análoga à lei de Gauss da eletrostática. A lei de Ampère nos permitirá relacionar as propriedades de simetria do campo magnético às da fonte do campo.

As cargas que se movem no interior de um átomo respondem a campos magnéticos e podem também agir como fontes de campos magnéticos. Essas idéias ajudarão a entender como alguns materiais magnéticos podem ser usados para intensificar campos magnéticos, assim como compreender por que certos materiais, como o ferro, podem ser transformados em ímãs permanentes.

28.1 Campo magnético de uma carga em movimento

Vamos começar com um conceito básico, o campo magnético criado por uma única carga puntiforme q se deslocando com uma velocidade constante $\vec{v}$. Em aplicações práticas, tal como o solenóide mostrado na fotografia que abre este capítulo, os campos magnéticos são produzidos por um número extraordinário de partículas carregadas que se movem juntas

em uma corrente. Mas, quando entendemos como calcular o campo magnético em função de uma carga puntiforme única, falta pouco para calcular o campo em função de um fio que transporta uma corrente; ou um conjunto de fios.

Assim como fizemos para o campo elétrico, chamamos o local onde se encontra a carga de **ponto da fonte**, e o ponto P onde desejamos determinar o campo de **ponto do campo**. Na Seção 21.4, vimos que, para um ponto do campo situado a uma distância r de uma carga puntiforme q, o campo *elétrico* $\vec{E}$ é proporcional ao módulo da carga $|q|$ e a $1/r^2$, e que a direção de $\vec{E}$ (para uma carga positiva q) é dada pela reta que une os dois pontos, sendo que o sentido aponta da carga para o ponto do campo. A relação correspondente para o caso de um campo *magnético* $\vec{B}$, produzido por uma carga puntiforme q que se desloca com velocidade constante, possui algumas semelhanças e algumas diferenças interessantes.

A experiência mostra que o módulo do campo magnético $\vec{B}$ também é proporcional a $|q|$ e a $1/r^2$. Porém a *direção* de $\vec{B}$ *não* é dada pela direção da reta que une a carga ao ponto do campo. Ao contrário, a direção de $\vec{B}$ é perpendicular ao plano que contém essa reta e ao vetor velocidade $\vec{v}$ da partícula, como indicado na Figura 28.1. Além disso, o *módulo* B também é proporcional ao módulo v da velocidade da partícula e ao seno do ângulo ϕ. Portanto, o módulo do campo magnético no ponto P é dado por

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v\,\mathrm{sen}\phi}{r^2} \qquad (28.1)$$

em que $\mu_0/4\pi$ é uma constante de proporcionalidade. Ficará mais claro posteriormente por que a constante de proporcionalidade foi escrita dessa maneira. Fizemos algo semelhante com a constante da lei de Coulomb, escrita na Seção 21.3.

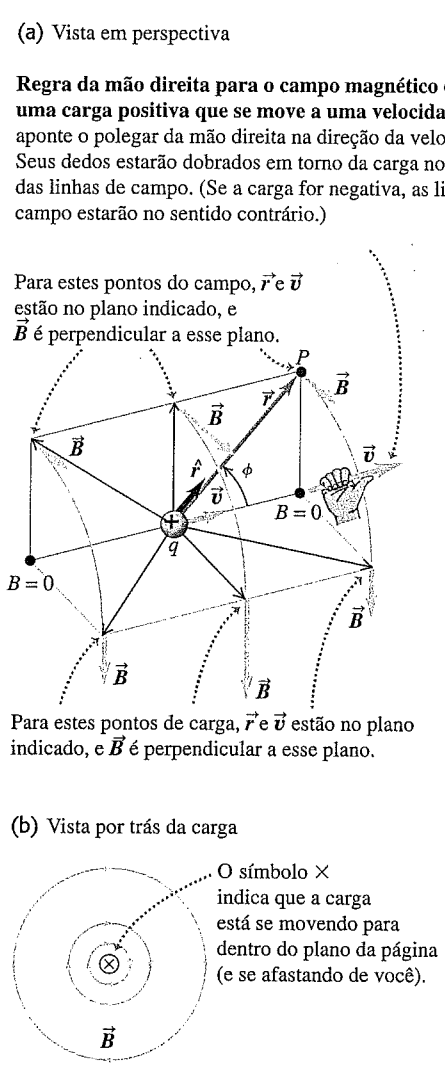


Figura 28.1 (a) Vetor do campo magnético produzido por uma carga puntiforme q em movimento. Em cada ponto, o vetor $\vec{B}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$, e seu módulo é proporcional ao seno do ângulo formado entre esses vetores. (b) Linhas do campo magnético em um plano que contém uma carga positiva. A carga se move para dentro do plano da página.

Carga em movimento: vetor do campo magnético

Podemos incorporar o módulo, a direção e o sentido de $\vec{B}$ em uma única equação vetorial usando a definição de produto vetorial. Para evitarmos a repetição da frase 'a direção da reta que une a carga q ao ponto do campo P', introduzimos o vetor *unitário* $\hat{r}$, que aponta da carga até o ponto do campo. (Já usamos $\hat{r}$ com o mesmo objetivo na Seção 21.4.) O vetor unitário $\hat{r}$ é igual ao vetor $\vec{r}$, que liga a carga ao ponto do campo dividido pelo módulo desse vetor: $\hat{r} = \vec{r}/r$. Portanto, o campo magnético $\vec{B}$ criado por uma carga puntiforme que se move é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.2)$$

(campo magnético de uma carga puntiforme com velocidade constante)

A Figura 28.1 indica como $\hat{r}$ aponta para P e mostra também o campo magnético $\vec{B}$ em diversos pontos nas vizinhanças da carga. Em todos os pontos ao longo de uma linha que passa pela carga paralela ao vetor velocidade $\vec{v}$, o campo magnético é igual a zero porque sen $\phi = 0$ em todos esses pontos. Para qualquer distância r da carga q, $\vec{B}$ possui seu módulo máximo em pontos situados sobre um plano perpendicular a $\vec{v}$, porque nesses pontos $\phi = 90°$ e sen $\phi = 1$. Quando a carga q é negativa, $\vec{B}$ possui um sentido contrário ao indicado na Figura 28.1.

Carga em movimento: linhas do campo magnético

Uma carga puntiforme em movimento também produz um campo *elétrico*, cujas linhas de campo emanam radialmente para fora de uma carga positiva. As linhas do campo *magnético* são completamente diferentes. A discus-

são precedente mostra que, para uma carga puntiforme q que se move com velocidade $\vec{v}$, as linhas do campo magnético são *circunferências* centralizadas na linha que contém $\vec{v}$ e contidas em planos perpendiculares a essa linha. O sentido do campo magnético para uma carga positiva é dado pela seguinte *regra da mão direita* — um exemplo das muitas regras que você encontrará neste capítulo para determinar o sentido do campo magnético produzido por diversas fontes. 'Segure' o vetor $\vec{v}$ com sua mão direita, de modo que o polegar direito aponte no sentido de $\vec{v}$; então, seus dedos fazem uma rotação em torno de $\vec{v}$ no mesmo sentido da rotação das linhas de campo magnético (supondo uma carga q positiva). A Figura 28.1a mostra partes de algumas linhas do campo magnético; a Figura 28.1b mostra algumas linhas do campo magnético em um plano perpendicular a $\vec{v}$, passando por q, vistas por um observador que olha no mesmo sentido de $\vec{v}$. Se a carga puntiforme for negativa, as direções e os sentidos do campo e das linhas do campo serão contrárias aos indicados na Figura 28.1.

As equações (28.1) e (28.2) descrevem o campo magnético $\vec{B}$ de uma carga puntiforme com velocidade *constante*. Quando a carga está *acelerada*, o campo geralmente é muito mais complicado. Para os nossos objetivos, não precisamos desses resultados mais complexos. (O movimento das partículas carregadas que constituem uma corrente em um fio sofre uma aceleração nos pontos onde o fio se encurva e a direção de $\vec{v}$ varia. Porém, como o módulo da velocidade v_a de arraste do elétron em um condutor é, em geral, muito pequeno, a aceleração v_a^2/r também é muito pequena e os efeitos da aceleração podem ser desprezados.)

Como discutimos na Seção 27.2, a unidade de B é um tesla (1 T):

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N\cdot s/C\cdot m} = 1\,\mathrm{N/A\cdot m}$$

Usando a relação anterior na Equação (28.1) ou (28.2), verificamos que as unidades da constante μ_0 são

$$1\,\mathrm{N\cdot s^2/C^2} = 1\,\mathrm{N/A^2} = 1\,\mathrm{Wb/A\cdot m} = 1\,\mathrm{T\cdot m/A}$$

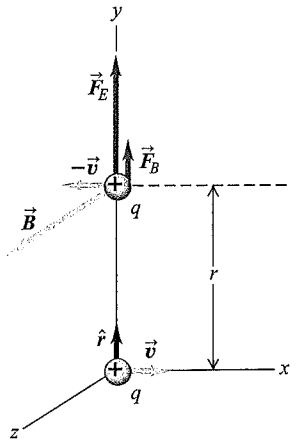


Figura 28.2 Força elétrica e força magnética produzidas sobre um próton por outro próton.

Em unidades SI, o valor numérico de μ_0 é exatamente igual a $4\pi \times 10^{-7}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N\cdot s^2/C^2} = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Wb/A\cdot m} \\ &= 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}\end{aligned} \tag{28.3}$$

Parece inacreditável que μ_0 tenha *exatamente* esse valor numérico! De fato, esse número é um valor *definido* que decorre da definição de ampère, conforme veremos na Seção 28.4.

Dissemos na Seção 21.3 que a constante $1/4\pi\epsilon_0$ na lei de Coulomb está relacionada do seguinte modo à velocidade da luz c:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = (10^{-7}\,\mathrm{N\cdot s^2/C^2})c^2$$

Quando estudarmos as ondas eletromagnéticas, no Capítulo 32, verificaremos que a velocidade de propagação dessas ondas no vácuo, que é igual à velocidade da luz c, é dada por

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \tag{28.4}$$

Explicitando ϵ_0 da expressão $k = 1/4\pi\epsilon_0$, substituindo o resultado na Equação (28.4) e explicitando μ_0, encontraremos efetivamente o valor de μ_0 escrito anteriormente. Essa discussão é um pouco prematura, porém ela dá uma idéia da teia unificadora que costura a teoria eletromagnética.

Exemplo 28.1

FORÇAS ENTRE DOIS PRÓTONS QUE SE MOVEM Dois prótons se deslocam paralelamente ao eixo Ox em sentidos opostos (Figura 28.2), com a mesma velocidade v (pequena em comparação à velocidade da luz c). No instante indicado, determine a força elétrica e a força magnética sobre o próton da parte superior e calcule a razão entre os módulos dessas forças.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a força elétrica é dada pela lei de Coulomb. Para determinar a força magnética, devemos, inicialmente, determinar o campo magnético que o próton inferior produz na posição do próton superior.

PREPARAR: usamos a Equação (21.2) para a lei de Coulomb. A Equação (28.2) nos fornece o campo magnético em função do próton inferior, e a lei da força magnética, Equação (27.2), nos fornece a força magnética resultante que atua sobre o próton superior.

EXECUTAR: a força elétrica é fácil; a lei de Coulomb fornece

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

As forças são repulsivas, de modo que a força sobre o próton superior é orientada verticalmente para cima (no sentido + y).

Usando a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{r}$ na Equação (28.2), verificamos que o vetor $\vec{B}$ está no sentido +z (Figura 28.2); pela Equação (28.2), o módulo do vetor é

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}$$

uma vez que $\phi = 90°$. Alternativamente, pela Equação (28.2),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{\imath}) \times \hat{\jmath}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k}$$

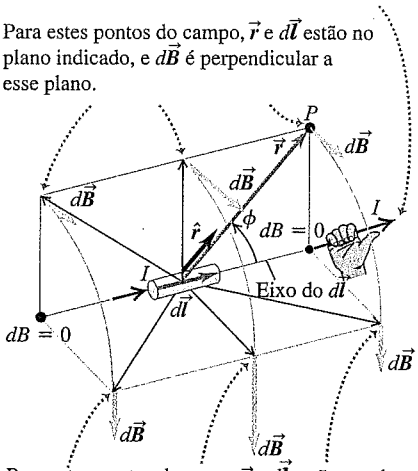
A velocidade do próton superior é $-\vec{v}$ e a força magnética sobre ele é dada por $\vec{F} = q(-\vec{v}) \times \vec{B}$. Combinando a força anterior com a expressão de $\vec{B}$, obtemos

$$F_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2} \quad \text{ou}$$

$$\vec{F}_B = q(-\vec{v}) \times \vec{B} = q(-v\hat{\imath}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2}\hat{\jmath}$$

(a) Vista em perspectiva

Regra da mão direita para o campo magnético em função de um elemento de corrente: aponte o polegar da mão direita na direção da corrente. Seus dedos estarão dobrados em torno do elemento de corrente, no sentido das linhas do campo.



(b) Vista ao longo do eixo do elemento de corrente

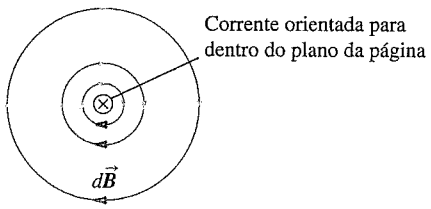


Figura 28.3 (a) Alguns vetores do campo magnético produzido por um elemento de corrente $d\vec{l}$. (b) Linhas do campo magnético em um plano que contém o elemento de corrente $d\vec{l}$. A corrente está entrando no plano da página. Compare esta figura à Figura 28.1 para o campo de uma carga puntiforme que se move.

A interação magnética para esse caso também é repulsiva. A razão entre o módulo da força magnética e o módulo da força elétrica é dada por

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0 q^2 v^2/4\pi r^2}{q^2/4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 v^2}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0\mu_0 v^2$$

Usando a Equação (28.4), $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, podemos escrever o resultado anterior de modo muito simples:

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$$

Quando a velocidade v for pequena em comparação à velocidade da luz c, a força magnética será muito menor do que a força elétrica.

AVALIAR: note que é essencial o uso do mesmo sistema de referência no cálculo todo. Descrevemos as velocidades e os campos em relação a um observador estacionário no sistema de coordenadas da Figura 28.2. Para um sistema de coordenadas que se move com uma das cargas, uma das velocidades seria zero; logo, não existiria *nenhuma* força magnética. A explicação desse paradoxo aparente forneceu um caminho para a elaboração da teoria especial da relatividade.

Teste sua compreensão da Seção 28.1 (a) Se dois prótons estão se deslocando paralelamente um ao outro e na *mesma* direção, sentido e velocidade, a força magnética entre eles é de (i) atração ou (ii) repulsão? (b) A força resultante entre eles é de (i) atração, (ii) repulsão ou (iii) nula? (Assuma que a velocidade do próton é muito menor do que a velocidade da luz.) ▮

28.2 Campo magnético de um elemento de corrente

Tal como no caso do campo elétrico, existe um **princípio de superposição dos campos magnéticos:**

O campo magnético total produzido por diversas cargas que se movem é a soma vetorial dos campos produzidos pelas cargas individuais.

Podemos usar esse princípio com os resultados da Seção 28.1 para determinarmos o campo magnético produzido por uma corrente que flui em um condutor.

Começamos calculando o campo magnético produzido por um pequeno segmento $d\vec{l}$ de um condutor que transporta uma corrente, como indicado na Figura 28.3a. O volume do segmento é $A\,dl$, em que A é a área da seção reta do condutor. Se existirem n partículas carregadas que se movem por unidade de volume, cada uma com carga q, a carga total dQ que se move no segmento será

$$dQ = nqA\,dl$$

As cargas que se movem nesse segmento são equivalentes a uma única carga dQ, que se desloca com a veloci-

dade de *arraste* $\vec{v}_a$. (Os campos magnéticos produzidos pelos movimentos *aleatórios* das cargas serão, geralmente, cancelados em todos os pontos.) De acordo com a Equação (28.1), o módulo do campo magnético resultante $d\vec{B}$ para qualquer ponto do campo P é dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|dQ|v_a \text{sen}\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n|q|v_a A\, dl \text{sen}\phi}{r^2}$$

Porém, pela Equação (25.2), $n|q|v_a A$ é igual à corrente I que flui no elemento. Logo,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, dl \text{sen}\phi}{r^2} \qquad (28.5)$$

Elemento de corrente: vetor do campo magnético

Sob forma vetorial, usando o vetor unitário $\hat{r}$, como na Seção 28.1, obtemos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.6)$$

(campo magnético de um elemento de corrente)

em que $d\vec{l}$ é um vetor de comprimento dl que possui o mesmo sentido da corrente que flui no condutor.

As equações (28.5) e (28.6) são formas equivalentes da **lei de Biot e Savart**. Podemos usar essa lei para determinar o campo magnético $\vec{B}$ produzido em qualquer ponto do espaço por uma corrente que flui em um circuito completo. Para isso, é suficiente integrar a Equação (28.6) em todos os segmentos $d\vec{l}$ que conduzem a corrente; simbolicamente,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.7)$$

Nas seções seguintes, realizaremos essa integração vetorial em diversos exemplos.

Elemento de corrente: linhas do campo magnético

Como indica na Figura 28.3, os vetores $d\vec{B}$ e as linhas do campo magnético de um elemento de corrente são exatamente iguais aos vetores produzidos por uma carga positiva dQ que se desloca no sentido da velocidade de arraste $\vec{v}_a$. As linhas do campo magnético são circunferências situadas em planos perpendiculares a $d\vec{l}$ e centralizadas na linha de $d\vec{l}$. As direções e os sentidos desses vetores obedecem à mesma regra da mão direita que aplicamos para cargas puntiformes na Seção 28.1.

Não há como verificar a Equação (28.5) ou (28.6) diretamente, porque nunca poderemos fazer uma experiência com um segmento de fio isolado. O que medimos, experimentalmente, é o campo magnético *total* $\vec{B}$ produzido por uma corrente que flui em um circuito completo. Contudo, podemos verificar essas equações indiretamente, calculando $\vec{B}$ para diversas configurações, usando a Equação (28.7) e comparando os resultados com as medidas experimentais.

Caso exista algum material no espaço que circunde um fio que conduz uma corrente, o campo magnético em um ponto P em suas vizinhanças terá uma contribuição adicional resultante da *magnetização* do material. Voltaremos a esse assunto na Seção 28.8. Contudo, exceto no caso de o material ser o ferro ou qualquer outro material ferromagnético, esse campo magnético adicional é muito pequeno e geralmente desprezível. Uma complicação adicional surge quando existem campos magnéticos e elétricos variáveis; ou quando o material é supercondutor. Discutiremos esses tópicos mais tarde.

Estratégia para a solução de problemas 28.1

CÁLCULOS ENVOLVENDO CAMPOS MAGNÉTICOS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a lei de Biot e Savart permite calcular o campo magnético em função de um fio de qualquer formato que transporta corrente. A idéia é calcular o campo em função de um elemento de corrente representativo no fio e, então, combinar as contribuições de todos esses elementos para determinar o campo total.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um diagrama de um elemento de corrente representativo e do ponto P, no qual o campo deve ser determinado (o ponto do campo).
2. Desenhe o elemento de corrente $d\vec{l}$, atentando que ele sempre aponta no mesmo sentido da corrente.
3. Desenhe o vetor unitário $\hat{r}$. Note que ele sempre aponta no sentido *do* elemento de corrente (o ponto da fonte) para o ponto P.
4. Identifique as incógnitas. Geralmente elas serão o módulo, a direção e o sentido do campo magnético $\vec{B}$.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Use a Equação (28.5) ou (28.6) para expressar o campo magnético $d\vec{B}$ no ponto P do elemento de corrente representativo.
2. Some todos os $d\vec{B}$ para calcular o campo total no ponto P. Em algumas situações, cada elemento $d\vec{B}$ para diversos elementos de corrente pode ter a mesma direção em um dado ponto P; então, o campo magnético resultante $\vec{B}$ é a soma dos módulos de cada elemento $d\vec{B}$. Contudo, geralmente, cada elemento $d\vec{B}$ possui uma direção diferente para cada elemento de corrente. Então, você deve escolher um sistema de coordenadas e decompor $d\vec{B}$ com base em seus componentes. A integral para o campo magnético resultante $\vec{B}$ é, então, expressa em termos de uma integral para cada componente.
3. Em alguns casos, você pode concluir por simetria que um dado componente se anula. Considere sempre a possibilidade do uso da simetria para simplificar problemas.
4. Procure meios para usar o princípio de superposição dos campos magnéticos. Mais adiante neste capítulo, determinaremos os campos produzidos por condutores que possuem uma forma simples. Quando você encontrar um condutor de forma complexa que possa ser decomposto em uma combinação desses condutores com forma simples, poderá usar o princípio de superposição para calcular o campo desse condutor de forma complexa. Como exemplos, cita-

mos uma espira retangular ou uma combinação com dois segmentos retilíneos ligados nas extremidades de um condutor que forma uma semicircunferência.

AVALIAR *sua resposta*: freqüentemente a sua resposta será uma expressão matemática para $\vec{B}$ em função da posição do ponto do campo. Confira a resposta examinando seu comportamento ao máximo de limites disponível.

Exemplo 28.2

CAMPO MAGNÉTICO DE UM SEGMENTO DE CORRENTE Um fio de cobre conduz uma corrente constante de 125 A para um tanque de eletrodeposição. Determine o campo magnético produzido por um segmento de fio de 1,0 cm de comprimento em um ponto situado a uma distância de 1,2 m do fio, considerando que o ponto seja (a) um ponto P_1 situado sobre a perpendicular superior do fio; (b) um ponto P_2 situado sobre uma linha que forma um ângulo de 30° com o fio, como indicado na Figura 28.4.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: embora as equações (28.5) e (28.6) só possam ser usadas estritamente para um segmento de fio infinitesimal, é possível aplicá-las nesse caso, porque o segmento de 1,0 cm é muito menor do que a distância de 1,2 m até o ponto do campo.

PREPARAR: o elemento de corrente está indicado na Figura 28.4 e aponta no sentido negativo de Ox (o sentido da corrente). O vetor unitário $\hat{r}$ para cada ponto do campo está orientado do elemento de corrente para esse ponto: $\hat{r}$ está no sentido positivo de Oy para P_1 e forma um ângulo de 30° acima do sentido negativo de Ox para o ponto P_2.

EXECUTAR: (a) De acordo com a regra da mão direita, $\vec{B}$ no ponto P_1 está *entrando* no plano xy, indicado na Figura 28.4. Ou, usando vetores unitários, notamos que $d\vec{l} = dl(-\hat{\imath})$. No ponto P_1, $\hat{r} = \hat{\jmath}$, de modo que, pela Equação (28.6),

$$d\vec{l} \times \hat{r} = dl(-\hat{\imath}) \times \hat{\jmath} = dl(-\hat{k})$$

O sentido negativo de z está *entrando* no plano da página.

Para calcularmos o módulo de $\vec{B}$, usamos a Equação (28.5). No ponto P_1, o ângulo entre $d\vec{l}$ e $\hat{r}$ é igual a 90°, portanto

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\text{sen}\phi}{r^2}$$

$$= (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(125\,\text{A})(1{,}0\times10^{-2}\,\text{m})(\text{sen}90°)}{(1{,}2\,\text{m})^2}$$

$$= 8{,}7\times10^{-8}\,\text{T}$$

(b) No ponto P_2, o vetor $\vec{B}$ está novamente entrando no plano xy. O ângulo entre $d\vec{l}$ e $\hat{r}$ é igual a 30° e

$$B = (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(125\,\text{A})(1{,}0\times10^{-2}\,\text{m})(\text{sen}30°)}{(1{,}2\,\text{m})^2}$$

$$= 4{,}3\times10^{-8}\,\text{T}$$

AVALIAR: você pode conferir os resultados obtidos para o sentido de $\vec{B}$ comparando-os à Figura 28.3. O plano xy na Figura 28.4 corresponde ao plano escurecido na Figura 28.3. Entretanto, neste exemplo, o sentido da corrente, e portanto de $d\vec{l}$, é o inverso do sentido indicado na Figura 28.3, de modo que o sentido do campo magnético é invertido também. Logo, o campo nos pontos no plano xy na Figura 28.4 deve apontar *para dentro*, não para fora, desse plano. É exatamente isso que concluímos anteriormente.

Note que os módulos desses campos magnéticos são muito pequenos. Para comparar, lembre-se de que o campo magnético da Terra é da ordem de 10^{-4} T. Note também que os valores encontrados não se referem ao campo magnético *total* nos pontos P_1 e P_2, mas são apenas campos magnéticos produzidos por um pequeno segmento do condutor, conforme descrito.

Teste sua compreensão da Seção 28.2 Um elemento de corrente infinitesimal localizado na origem ($x = y = z = 0$) transporta uma corrente I no sentido positivo de Oy. Classifique as seguintes localizações por ordem de intensidade do campo magnético que o elemento de corrente produz em cada ponto, do maior para o menor valor. (i) $x = L, y = 0, z = 0$; (ii) $x = 0, y = L, z = 0$; (iii) $x = 0, y = 0, z = L$; (iv) $x = L/\sqrt{2}, y = L/\sqrt{2}, z = 0$. ∎

28.3 Campo magnético de um condutor retilíneo transportando uma corrente

Uma aplicação importante da lei de Biot e Savart consiste em determinar o campo magnético de um condutor retilíneo que transporta uma corrente. Trata-se de um resultado importante porque, em quase todos os dispositivos elétricos e eletrônicos, existem fios retilíneos conduzindo correntes. A Figura 28.5 mostra um comprimento $2a$ de um fio retilíneo que conduz uma corrente I. Vamos calcular $\vec{B}$ em um ponto sobre a reta perpendicular que divide o condutor em duas metades, situado a uma distância x do seu centro.

Inicialmente, usamos a lei de Biot e Savart, Equação (28.5), para calcular o campo $d\vec{B}$ produzido pelo elemento do condutor de comprimento $dl = dy$ indicado na Figura 28.5. De acordo com a figura, notamos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\text{sen}\,\phi = \text{sen}(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$. A regra da mão direita para o produto vetorial $d\vec{l} \times \hat{r}$ mostra que $d\vec{B}$ possui direção perpendicular ao plano da figura e *sentido* para dentro da página; além disso, todos os vetores $d\vec{B}$ produzidos por *todos* os elementos do condutor são idênticos. Logo, ao integrarmos a Equação (28.7), podemos simplesmente somar os *módulos* de cada vetor $d\vec{B}$, uma significativa simplificação.

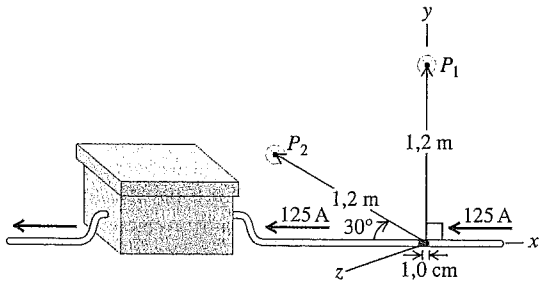


Figura 28.4 Cálculo do campo magnético produzido em dois pontos por um segmento de fio de 1,0 cm de comprimento, no qual passa uma corrente (não indicado em escala).

Substituindo os valores naquela integral, vemos que o módulo do campo total $\vec{B}$ é

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Podemos fazer a integral usando uma substituição trigonométrica ou então consultando uma tabela de integrais. O resultado é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2a}{x\sqrt{x^2+a^2}} \tag{28.8}$$

Quando o comprimento $2a$ do condutor é muito maior do que a distância x entre o ponto P e o condutor, podemos dizer que o condutor possui um comprimento infinito. Quando a é muito maior do que a distância x, $\sqrt{x^2+a^2}$ é aproximadamente igual a a; logo, no limite $a \to \infty$, a Equação (28.8) se reduz a

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

A presente situação física apresenta simetria axial em torno do eixo Oy. Portanto, $\vec{B}$ deve possuir o mesmo *módulo* em todos os pontos sobre uma circunferência centralizada no condutor e situada em um plano perpendicular a ele, e a *direção* de $\vec{B}$ é dada pela tangente em cada um dos pontos dessa circunferência. Logo, em qualquer ponto ao longo de uma circunferência de raio r, centralizada no condutor, o módulo B é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{28.9}$$

(próximo de um condutor longo e retilíneo que transporta corrente)

Indicamos na Figura 28.6 uma parte das linhas do campo magnético em torno de um fio retilíneo infinito conduzindo uma corrente.

A geometria do problema que estamos discutindo é semelhante à encontrada no Exemplo 21.11 (Seção 21.5), no qual resolvemos o problema de um campo *elétrico* produzido

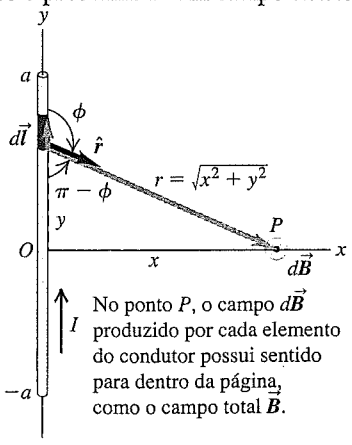


Figura 28.5 Campo magnético produzido por um fio retilíneo de comprimento $2a$ que conduz uma corrente.

Regra da mão direita para o campo magnético em torno de um fio que transporta corrente: aponte o polegar da mão direita na direção da corrente. Seus dedos estarão dobrados em torno do elemento de corrente no sentido das linhas de campo.

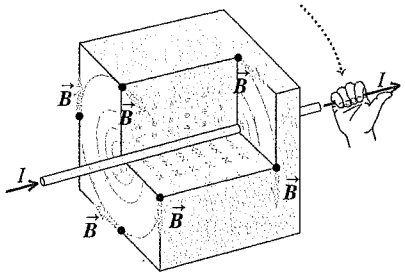


Figura 28.6 Campo magnético produzido por um fio retilíneo longo que transporta corrente. As linhas de campo magnético são circunferências e o sentido do campo é indicado pela regra da mão direita.

por um fio retilíneo infinito uniformemente carregado; e notamos que, em ambos os casos, os módulos dos campos são proporcionais a $1/r$. Porém, as linhas de $\vec{B}$ para o problema magnético possuem formas completamente diferentes das linhas de $\vec{E}$ do problema elétrico análogo. As linhas do campo elétrico emanam radialmente para fora de um fio retilíneo infinito, com uma distribuição de cargas positivas (e são orientadas para dentro do fio quando as cargas são negativas). Em contraste, as linhas do campo magnético são *circunferências* centralizadas sobre as correntes que constituem a fonte do campo. As linhas do campo elétrico começam e terminam nas cargas que produzem os campos, porém, as linhas do campo magnético sempre formam curvas fechadas e *nunca* possuem pontos finais, qualquer que seja a forma do condutor que conduz uma corrente geradora do campo magnético. Conforme discutimos na Seção 27.3, isso decorre da lei de Gauss do magnetismo, segundo a qual o fluxo magnético total através de *qualquer* superfície fechada é sempre igual a zero:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{28.10}$$

(fluxo magnético através de qualquer superfície fechada)

Da relação anterior, concluímos que não existe nenhuma carga magnética isolada ou qualquer monopolo magnético. Qualquer linha de campo magnético que penetra em uma superfície fechada deve emergir da mesma superfície.

Exemplo 28.3

CAMPO MAGNÉTICO DE UM FIO ÚNICO Um condutor retilíneo longo conduz uma corrente de 1,0 A. Para qual distância, a partir do eixo do condutor, o módulo do campo magnético produzido pela corrente é igual ao módulo aproximado do campo magnético médio na superfície da Terra? (Considere um valor aproximadamente igual a $0{,}5 \times 10^{-4}$ T.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o condutor retilíneo é descrito como longo, o que significa que seu comprimento é muito maior do que a distância a partir do condutor no qual medimos o campo. Logo, podemos aplicar os conceitos desta seção.

PREPARAR: a geometria é a mesma que a indicada na Figura 28.6, portanto usamos a Equação (28.8). Todas as grandezas nessa equação são conhecidas, exceto a incógnita, que é a distância r.

EXECUTAR: podemos usar a Equação (28.8) para explicitar r e, substituindo os valores numéricos, obtemos

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B}$$
$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(1{,}0\,\mathrm{A})}{(2\pi)(0{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{T})} = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{mm}$$

AVALIAR: as correntes de aproximadamente um ampère são as normais na fiação de eletrodomésticos. Este exemplo mostra que os campos magnéticos produzidos por esses aparelhos são muito fracos, mesmo nos pontos muito próximos ao fio. Para distâncias maiores, o campo produzido pela corrente torna-se muito menor; por exemplo, para uma distância cinco vezes maior, ($r = 20$ mm $= 2$ cm $= 2 \times 10^{-2}$ m), o campo se reduz a um quinto ($B = 0{,}1 \times 10^{-4}$ T).

Exemplo 28.4

CAMPO MAGNÉTICO DE DOIS FIOS A Figura 28.7a mostra um plano xy que corta perpendicularmente dois fios longos paralelos, cada um deles conduzindo uma corrente I de mesmo módulo, porém de sentidos contrários. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido de $\vec{B}$ nos pontos P_1, P_2 e P_3. (b) Calcule o módulo, a direção e o sentido de $\vec{B}$ nos pontos do eixo Ox à direita do fio 2, com base na coordenada x do ponto.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: podemos determinar os campos magnéticos $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ em função de cada fio usando os conceitos desta seção. De acordo com o princípio da superposição de campos magnéticos, o campo magnético total $\vec{B}$ é a soma vetorial de $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$.

PREPARAR: usamos a Equação (28.9) para determinar o módulo do campo magnético $\vec{B}_1$ (produzido pelo fio 1) e o campo magnético $\vec{B}_2$ (produzido pelo fio 2) em qualquer ponto. Determinamos o sentido desses campos usando a regra da mão direita. O campo magnético total nesse ponto é: $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

EXECUTAR: (a) O ponto P_1 está mais próximo do fio 1 (distância $2d$) do que do fio 2 (distância $4d$), de modo que o módulo do campo B_1 é maior do que o módulo do campo B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(4d)} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d}$$

A regra da mão direita mostra que o campo $\vec{B}_1$ está no sentido negativo do eixo Oy e $\vec{B}_2$ está no sentido positivo do eixo Oy. Como B_1 possui módulo maior, o campo total $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ está no sentido negativo do eixo Oy e possui módulo

$$B_{\text{total}} = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} - \frac{\mu_0 I}{8\pi d} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d} \qquad \text{(ponto } P_1\text{)}$$

No ponto P_2, situado à mesma distância d de ambos os fios, $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ estão no sentido positivo do eixo Oy e ambos possuem o mesmo módulo:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

portanto, $\vec{B}_{\text{total}}$ também está no sentido positivo de Oy e possui módulo

$$B_{\text{total}} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \qquad \text{(ponto } P_2\text{)}$$

Finalmente, no ponto P_3, a regra da mão direita mostra que $\vec{B}_1$ está no sentido positivo do eixo Oy e $\vec{B}_2$ está no sentido negativo do eixo Oy. Como ele está mais afastado do fio 1 (distância $3d$) do que do fio 2 (distância d), concluímos que o módulo B_1 é menor do que o módulo B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3d)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

O campo total está no sentido negativo do eixo Oy, o mesmo sentido de $\vec{B}_2$, e possui módulo

$$B_{\text{total}} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I}{6\pi d} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d} \qquad \text{(ponto } P_3\text{)}$$

Aplique a regra da mão direita e identifique as direções e os sentidos dos vetores $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ para cada ponto.

Os campos $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ e $\vec{B}_{\text{total}}$ para cada um dos três pontos estão indicados na Figura 28.7a. Você pode usar a mesma técnica para

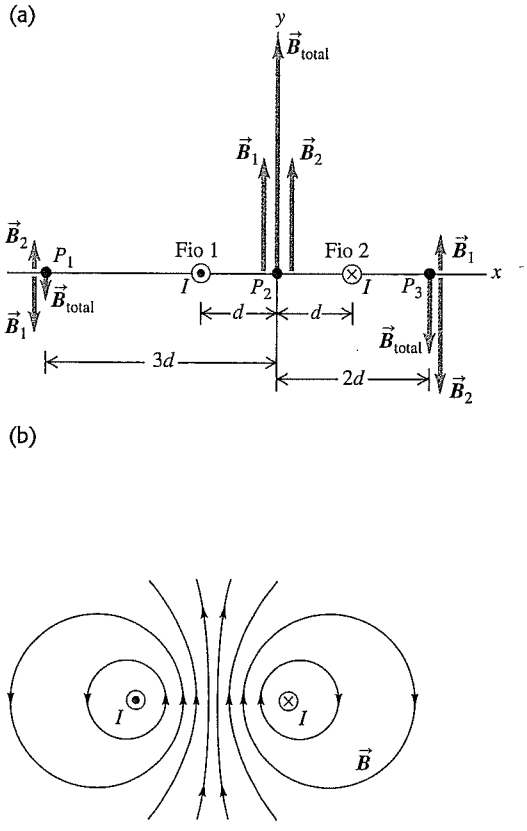


Figura 28.7 (a) Dois fios longos paralelos conduzindo correntes de mesmo módulo, porém de sentidos contrários. A seção reta dos condutores é indicada. (b) Mapa das linhas do campo magnético produzidas pelos dois condutores. As linhas do campo estão agrupadas de modo mais compacto entre os condutores, onde o campo magnético é mais intenso.

encontrar $\vec{B}_{total}$ em qualquer ponto; para os pontos situados fora do eixo Ox, você deve prestar atenção na soma vetorial, uma vez que agora $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ não são simplesmente paralelos ou antiparalelos (veja o Problema 28.60). A Figura 28.7b mostra algumas linhas de campo produzidas pela combinação dos dois fios.

(b) Para qualquer ponto à direita do fio 2 (ou seja, para $x > d$), $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ possuem as mesmas direções e os mesmos sentidos do ponto P_3. À medida que x aumenta, os módulos de $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ começam a diminuir; logo, $\vec{B}_{total}$ também diminui. Os módulos dos campos de cada fio são dados por

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)}$$

Para qualquer ponto do campo à direita do fio 2, o fio 2 está mais próximo do que o fio 1; logo, $B_2 > B_1$. Portanto, $\vec{B}_{total}$ está no sentido negativo do eixo Oy, o mesmo sentido de $\vec{B}_2$, e possui módulo

$$B_{total} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} = \frac{\mu_0 I d}{\pi(x^2-d^2)}$$

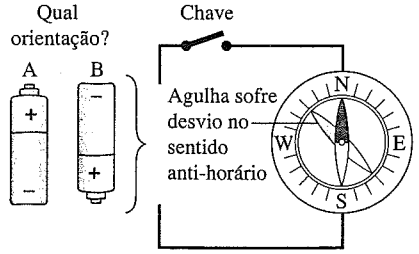
em que combinamos os dois termos usando um denominador comum.

AVALIAR: para pontos muito distantes dos fios, ou seja, para x muito maior do que d, o termo d^2 no denominador da relação anterior pode ser desprezado, obtendo

$$B_{total} = \frac{\mu_0 I d}{\pi x^2}$$

O módulo do campo magnético para um único fio diminui com a distância, proporcionalmente a $1/x$, como indicado na Equação (28.9); para dois fios conduzindo correntes em sentidos opostos, $\vec{B}_1$ cancela parcialmente $\vec{B}_2$, de modo que o módulo de $\vec{B}_{total}$ diminui mais rápido, proporcionalmente a $1/x^2$. Esse resultado é usado nos circuitos de computadores e em sistemas de comunicação, tal como na telefonia. A fiação é distribuída de modo que, para todo fio que conduz uma corrente em um sentido, existe outro que conduz a corrente de volta no sentido contrário, como indica a Figura 28.7a, ou então os fios são torcidos um com o outro (Figura 28.8). Portanto, o campo magnético produzido *fora* dos fios é fortemente reduzido e torna-se menos provável a ação indesejável desse campo, que poderia produzir forças ou interferências sobre as correntes que conduzem informações.

Teste sua compreensão da Seção 28.3 A figura abaixo mostra um circuito que repousa sobre uma mesa horizontal. Uma bússola é colocada no topo do circuito, conforme indicado. Uma pilha é conectada ao circuito de modo que, quando a chave é fechada, a agulha da bússola sofre desvio no sentido anti-horário. Qual é a orientação, A ou B, em que a pilha deve ser colocada no circuito?



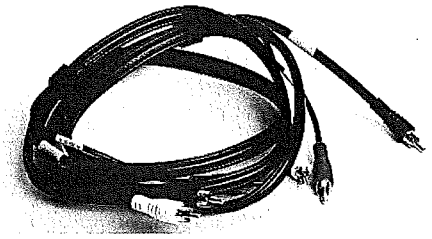


Figura 28.8 Cabos de computador ou cabos de equipamentos audiovisuais produzem pouco ou nenhum campo magnético. Isso ocorre porque, no interior de cada cabo, fios agrupados de forma compacta transportam corrente em ambos os sentidos ao longo do comprimento do cabo. Os campos magnéticos dessas correntes contrárias se anulam

28.4 Força entre condutores paralelos

No Exemplo 28.4 (Seção 28.3), mostramos como usar o princípio da superposição dos campos magnéticos para determinar o campo magnético total de dois fios longos que conduzem correntes. Outro aspecto importante dessa configuração é a *força de interação* entre os condutores. Essa força desempenha um papel fundamental em muitas situações práticas, nas quais fios que conduzem correntes estão muito próximos entre si, e também é fundamental na definição do ampère. A Figura 28.9 mostra segmentos de dois fios retilíneos, paralelos e longos, separados por uma distância r e que conduzem correntes I e I' no mesmo sentido. Cada condutor está sob a influência do campo magnético do outro e, portanto, sofre a ação de uma força. O diagrama mostra algumas linhas de campo produzidas pela corrente que flui no fio inferior.

De acordo com a Equação (28.9), o fio inferior produz um campo magnético $\vec{B}$ que, no local onde se encontra o fio superior, possui módulo dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

De acordo com a Equação (27.19), a força exercida sobre um comprimento L do fio superior é $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$, em que o vetor $\vec{L}$ possui o mesmo sentido da corrente I' e módulo igual a L. Como $\vec{B}$ é perpendicular ao comprimento do condutor e, portanto, a $\vec{L}$, o módulo da força é

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

e a força *por unidade de comprimento* F/L é

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \qquad (28.11)$$

(dois condutores longos e paralelos, que transportam corrente)

Aplicando a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$, vemos que a força sobre o fio superior é orientada *de cima para baixo*.

A corrente que passa no fio superior também produz um campo magnético no local onde está o fio inferior. Fazendo duas aplicações sucessivas da regra da mão direita para o produto vetorial (uma para determinar o campo magnético $\vec{B}$ produzido pelo fio superior, como na Seção 28.2, e outra para calcular a força que o campo magnético exerce sobre o fio inferior, como na Seção 27.6), podemos mostrar que a força sobre o fio inferior é orientada *de baixo para cima*. Portanto, conclui-se que *existe uma força de atração entre dois fios paralelos que conduzem correntes com o mesmo sentido*. Se o sentido de qualquer uma das duas correntes é invertido, o sentido de cada força também se inverte. *Existe uma força de repulsão entre dois fios paralelos que conduzem correntes com sentidos contrários.*

Forças magnéticas e a definição de ampère

A atração ou a repulsão entre dois fios retilíneos paralelos que conduzem correntes é a base para a definição oficial do **ampère** do sistema SI:

> ***Um ampère* é a corrente invariável que, quando percorre dois fios retilíneos infinitos paralelos separados no vácuo por uma distância de um metro, produz sobre cada metro do condutor uma força exatamente igual a 2×10^{-7} newtons por metro de comprimento.**

De acordo com a Equação (28.11), é possível verificar que essa definição de ampère conduz ao valor $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A}$ utilizado para μ_0. Ela também é a base para a definição do coulomb no sistema SI, que é a carga transferida em um segundo por uma corrente de um ampère.

Trata-se de uma *definição operacional*; ela fornece um procedimento experimental efetivo para definir uma unidade de corrente. Em princípio, poderíamos usar essa definição para calibrar um amperímetro, empregando apenas um metro padrão e uma balança. Para uma padronização mais precisa do ampère, utilizam-se bobinas em vez de fios retilíneos e a distância entre as bobinas é de apenas alguns centímetros. Medições até mais precisas do ampère padrão são possíveis usando-se uma versão do efeito Hall (veja a Seção 27.9).

Forças de atração mútuas podem existir não apenas entre *fios* que conduzem correntes com o mesmo sentido, mas também entre elementos longitudinais de um único condutor suficientemente largo. Quando o condutor é um líquido ou um gás ionizado (um plasma), essas forças produzem uma constrição no condutor, como se a superfície externa do condutor estivesse submetida a uma força externa comprimindo o condutor. Essa constrição do condutor é chamada de *efeito de compressão* (ou *pinch effect*). A elevada temperatura produzida pelo efeito de compressão sobre um plasma pode ser aplicada em pesquisas de fusão nuclear.

Exemplo 28.5

FORÇAS ENTRE FIOS PARALELOS Dois fios supercondutores retilíneos e paralelos, separados por uma distância de 4,5 mm, conduzem correntes iguais, porém em sentidos contrários, com módulo igual a 15000 A. Deveríamos nos preocupar com a resistência mecânica desses fios?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: se a força mecânica dos fios é preocupante ou não depende de quanta força magnética cada fio exerce sobre o outro.

PREPARAR: a Figura 28.10 indica a situação. A incógnita do problema é a força magnética por unidade de comprimento do fio, que é determinada pela Equação (28.11).

EXECUTAR: como as correntes estão em sentidos contrários, os dois fios se repelem. De acordo com a Equação (28.11), a força por unidade de comprimento é

O campo magnético do fio inferior exerce uma força de atração sobre o fio superior. Por decorrência, o fio superior atrai o inferior.

Se o fio tivesse correntes em sentidos contrários, elas deveriam se repelir.

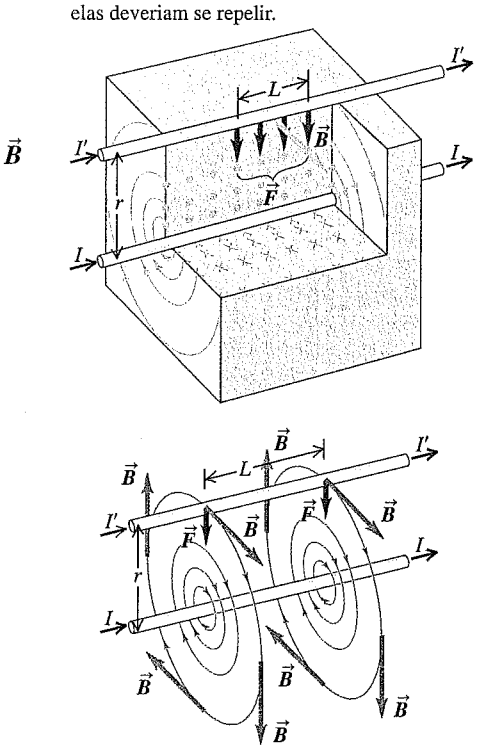


Figura 28.9 Existe uma força de atração entre dois fios paralelos que conduzem correntes de mesmo sentido. Os diagramas mostram a força $\vec{F}$ sobre o fio superior produzida pelo campo magnético $\vec{B}$, oriundo da corrente do fio inferior.

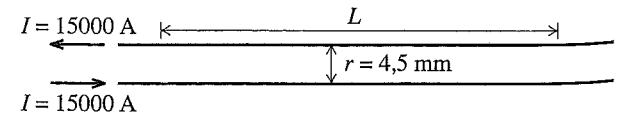
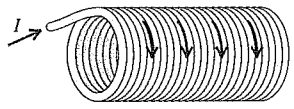


Figura 28.10 Nosso esquema para esse problema.

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(15000\,\mathrm{A})^2}{(2\pi)(4{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})}$$
$$= 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N/m}$$

AVALIAR: trata-se de uma força extremamente elevada, aproximadamente equivalente ao peso de uma tonelada por metro, de modo que os materiais usados no isolamento e a própria resistência mecânica do supercondutor são fatores importantes. Correntes e distâncias da ordem de grandeza indicadas neste exemplo ocorrem em eletroímãs supercondutores, usados em aceleradores de partículas, e a análise das tensões mecânicas é uma parte importante no projeto desses equipamentos.

Teste sua compreensão da Seção 28.4 Um solenóide é um fio enrolado em uma bobina helicoidal. A figura abaixo mostra um solenóide que transporta uma corrente I. (a) A força *magnética* que uma espira da bobina exerce sobre uma espira na vizinhança é (i) de atração, (ii) repulsão ou (iii) nula? (b) A força *elétrica* que uma espira da bobina exerce sobre uma espira na vizinhança é (i) de atração, (ii) repulsão ou (iii) nula? (c) A força *magnética* entre lados opostos da mesma espira da bobina é (i) de atração, (ii) repulsão ou (iii) nula? (d) A força *elétrica* entre lados opostos da mesma espira da bobina é (i) de atração, (ii) repulsão ou (iii) nula? ∎



28.5 Campo magnético de uma espira circular

Se você olhar o interior de uma campainha, de um transformador, de um motor elétrico ou de um eletroímã (Figura 28.11), observará diversas bobinas com um grande número de espiras agrupadas de modo tão compacto que cada volta do fio pode ser considerada uma espira circular plana. A corrente que passa na bobina é usada para gerar um campo magnético. Logo, é conveniente deduzir uma expressão para o campo magnético produzido por uma única espira circular e para uma bobina constituída por N espiras circulares agrupadas de modo compacto. Na Seção 27.7, discutimos a força e o torque sobre uma espira que conduz uma corrente na presença de um campo magnético produzido por outras correntes; agora mostraremos como determinar o campo magnético produzido pela própria espira.

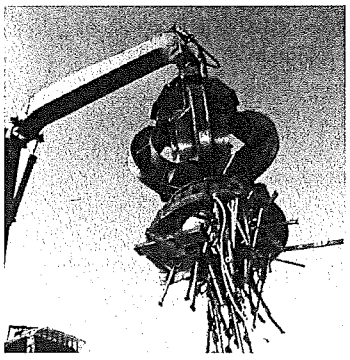


Figura 28.11 Este eletroímã contém uma bobina que transporta corrente e que consiste de vários giros de fio. O campo magnético resultante pode coletar grande quantidade de barras de aço e outros itens de ferro.

A Figura 28.12 mostra uma espira circular com raio a conduzindo uma corrente I. Na espira, a corrente entra e sai através de dois fios retilíneos longos, colocados um ao lado do outro; as correntes percorrem esses fios em sentidos contrários, de modo que o campo magnético resultante é aproximadamente igual a zero (veja o Exemplo 28.4 na Seção 28.3).

Podemos usar a lei de Biot e Savart, Equação (28.5) ou (28.6), para encontrar o campo magnético em um ponto P sobre o eixo da espira situado a uma distância x do seu centro. Como a figura mostra, $d\vec{l}$ e $\hat{r}$ são perpendiculares e a direção de $d\vec{B}$ produzida por esse elemento $d\vec{l}$ particular está sobre o plano xy. Como $r^2 = x^2 + a^2$, o módulo do campo magnético produzido pelo elemento $d\vec{l}$ é

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)} \tag{28.12}$$

Os componentes do vetor $d\vec{B}$ são dados por

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}\frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \tag{28.13}$$

$$dB_y = dB\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \tag{28.14}$$

A situação possui simetria rotacional em torno do eixo Ox, de modo que não pode existir componente do campo magnético total $\vec{B}$ perpendicular a esse eixo. Para cada elemento $d\vec{l}$, existe um elemento correspondente do lado oposto da espira, com sentido oposto. Esses dois elementos opostos fornecem contribuições iguais para o componente x de $\vec{B}$, fornecido pela Equação (28.13), porém os componentes perpendiculares ao eixo Ox possuem sentidos *opostos*. Portanto, todos os componentes perpendiculares se anulam e somente os componentes paralelos ao eixo Ox são diferentes de zero.

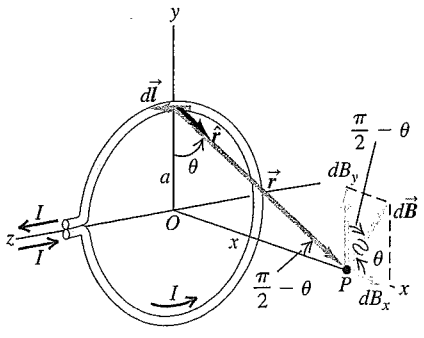


Figura 28.12 Campo magnético de uma espira circular. A corrente no segmento $d\vec{l}$ produz um campo magnético $d\vec{B}$ situado no plano xy. A corrente de outro segmento $d\vec{l}'$, oposto, produz um vetor $d\vec{B}'$ cujo componente perpendicular ao eixo Ox possui sentido contrário ao primeiro; logo, a resultante no eixo Oy é igual a zero. No eixo Ox, o campo $\vec{B}$ resultante no ponto P é dado pela soma de cada componente x de $d\vec{B}$.

Para obtermos o componente x do campo magnético total $\vec{B}$, integramos a Equação (28.13), incluindo todos os elementos $d\vec{l}$ em torno da espira. Exceto dl, todas as grandezas nessa expressão são constantes e podem ser colocadas para fora da integral, portanto obtemos

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\, dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

A integral de dl é dada pelo comprimento da circunferência, $\int dl = 2\pi a$, e finalmente obtemos

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \tag{28.15}$$

(sobre o eixo de uma espira circular)

O *sentido* do campo magnético sobre o eixo de uma espira que transporta corrente é dado pela regra da mão direita. Se você fechar os dedos da sua mão direita em torno da espira e no sentido da corrente, seu polegar direito apontará no sentido do campo (Figura 28.13).

Campo magnético sobre o eixo de uma bobina

Suponha agora que, em vez de uma única espira na Figura 28.12, exista uma bobina com N espiras, todas com o mesmo raio. As espiras são enroladas de modo tão compacto que a distância ao centro da bobina é aproximadamente igual à distância x entre o ponto do campo P e o plano da espira. Cada espira fornece a mesma contribuição para o campo magnético e o campo total é N vezes o campo de uma única espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \tag{28.16}$$

(sobre o eixo de N espiras circulares)

O fator N na Equação (28.16) é a razão pela qual se usa uma bobina, em vez de uma única espira, para obter um campo magnético forte; para uma intensidade de campo desejada, o uso de uma única espira exigiria uma corrente I tão elevada que superaria a corrente máxima especificada para o fio da espira.

A Figura 28.14 indica um gráfico de B_x em função de x. O valor máximo do campo para $x = 0$, o centro da espira ou da bobina, é dado por

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \tag{28.17}$$

(no centro de N espiras circulares)

À medida que nos afastamos do centro, o módulo do campo magnético diminui.

Na Seção 27.7, definimos o *momento de dipolo magnético* μ (ou *momento magnético*) de uma espira de corrente igual a IA, em que A é a área da seção reta da espira. Quando existem N espiras, o momento magnético total é NIA. A espira circular na Figura 28.12 possui área $A = \pi a^2$, logo, o momento magnético de uma única espira é $\mu = I\pi a^2$ e, para N espiras, $\mu = NI\pi a^2$. Substituindo esses resultados nas equações (28.15) e (28.16), vemos que essas equações podem ser escritas na forma

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \tag{28.18}$$

(sobre o eixo de qualquer número de espiras circulares)

Descrevemos um dipolo magnético na Seção 27.7 em termos de sua resposta a um campo magnético produzido por correntes fora do dipolo. Porém, um dipolo magnético também é uma *fonte* de campo magnético; a Equação (28.18) descreve o campo magnético *produzido* por um dipolo magnético para pontos ao longo do eixo do dipolo. Esse campo é diretamente proporcional ao momento de dipolo magnético μ. Note que o campo magnético ao longo do eixo Ox possui o mesmo sentido do vetor do momento magnético $\vec{\mu}$; isso é verdade tanto do lado negativo quanto do lado positivo do eixo Ox.

ATENÇÃO Campo magnético de uma bobina As equações (28.15), (28.16) e (28.18) valem somente para pontos sobre o *eixo* da espira ou da bobina. Não tente aplicar essas equações para outros pontos!

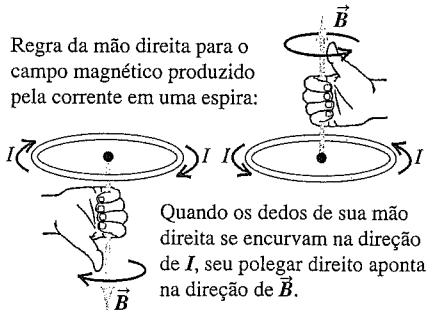


Figura 28.13 A regra da mão direita para o sentido do campo magnético produzido sobre o eixo de uma bobina que transporta corrente.

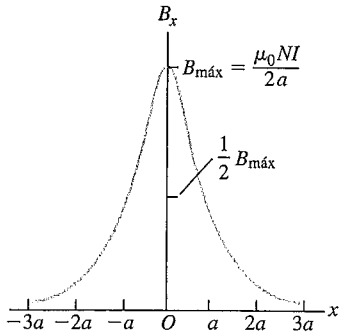


Figura 28.14 Gráfico do campo magnético ao longo do eixo de uma bobina com N espiras circulares. Quando x é muito maior do que a, o módulo do campo magnético diminui aproximadamente a $1/x^3$.

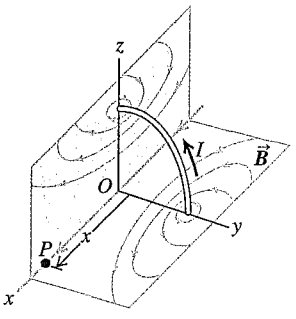


Figura 28.15 Linhas do campo magnético produzidas por uma corrente circulando em uma espira circular. Em todos os pontos do eixo, o campo $\vec{B}$ possui sentido igual ao do momento magnético da espira.

Na Figura 28.15, mostramos algumas linhas do campo magnético em torno de uma espira circular (dipolo magnético) sobre dois planos perpendiculares ao eixo. Os sentidos das linhas do campo magnético são dados aplicando-se a mesma regra da mão direita usada no caso de um fio retilíneo longo. Segure o fio com sua mão direita, colocando o dedo polegar no sentido da corrente; os seus dedos se dobram com o mesmo sentido da rotação das linhas do campo magnético. As linhas de campo de uma espira circular são curvas fechadas que circundam a espira, porém *não* são circunferências.

Exemplo 28.6

CAMPO MAGNÉTICO DE UMA BOBINA Uma bobina conduzindo uma corrente de 5,0 A é constituída por 100 espiras circulares com raio igual a 0,60 m. (a) Determine o campo magnético ao longo do eixo da bobina, situado a uma distância de 0,80 m do seu centro. (b) Em que ponto ao longo do eixo da bobina o campo magnético se reduz a $\frac{1}{8}$ do valor do campo no centro da bobina?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema pergunta sobre o campo magnético ao longo do eixo de uma bobina que transporta corrente, por isso podemos usar os conceitos desta seção.

PREPARAR: desejamos conhecer o campo sobre o eixo da bobina, não necessariamente no seu centro, portanto usamos a Equação (28.16). Temos que $N = 100$, $I = 5{,}0$ A e $a = 0{,}60$ m. No item (a) a incógnita é o campo magnético a um dado valor da coordenada x. No item (b) a incógnita é o valor de x, no qual o campo possui $\frac{1}{8}$ do módulo que possui em $x = 0$.

EXECUTAR: (a) Usando $x = 0{,}80$ m, pela Equação (28.16), temos

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(100)(5{,}0\,\text{A})(0{,}60\,\text{m})^2}{2[(0{,}80\,\text{m})^2 + (0{,}60\,\text{m})^2]^{3/2}} = 1{,}1 \times 10^{-4}\,\text{T}$$

(b) De acordo com a Equação (28.16), desejamos determinar um valor de x tal que

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{8}\frac{1}{(0^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para resolver a equação e explicitar o valor de x, inverta ambos os membros e, a seguir, eleve ambos os membros a uma potência 2/3; você obterá o resultado

$$x = \pm\sqrt{3}a = \pm 1{,}04\,\text{m}$$

Para uma distância ao centro da bobina aproximadamente igual a 1,7 vez o seu raio, o campo se reduz a $\frac{1}{8}$ do seu valor no centro da bobina.

AVALIAR: alternativamente, podemos primeiro determinar o momento magnético; a seguir substituímos o resultado na Equação (28.18):

$$\mu = NI\pi a^2 = (100)(5{,}0\,\text{A})\pi(0{,}60\,\text{m})^2 = 5{,}7 \times 10^2\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(5{,}7 \times 10^2\,\text{A}\cdot\text{m}^2)}{2\pi[(0{,}80\,\text{m})^2 + (0{,}60\,\text{m})^2]^{3/2}} = 1{,}1 \times 10^{-4}\,\text{T}$$

O momento magnético μ é relativamente grande, embora o campo magnético seja bastante pequeno, comparável ao módulo do campo magnético da Terra. O resultado deste exemplo dá a idéia da dificuldade de produzir um campo magnético maior ou igual a 1 T.

Teste sua compreensão da Seção 28.5 A Figura 28.12 mostra o campo magnético $d\vec{B}$ produzido no ponto P por um segmento $d\vec{l}$, que repousa sobre o eixo positivo Oy (no topo da espira). Esse campo possui componentes $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$. (a) Quais são os sinais dos componentes do campo $d\vec{B}$ produzido no ponto P por um segmento $d\vec{l}$ sobre o eixo negativo Oy (na parte inferior da espira)? (i) $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; (ii) $dB_x > 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; (iii) $dB_x < 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; (iv) $dB_x < 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; (v) nenhuma das alternativas anteriores. (b) Quais são os sinais dos componentes do campo $d\vec{B}$ produzido no ponto P por um segmento $d\vec{l}$ sobre o eixo negativo Oz (no lado direito da espira)? (i) $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; (ii) $dB_x > 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; (iii) $dB_x < 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; (iv) $dB_x < 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; (v) nenhuma das alternativas anteriores. ∎

28.6 Lei de Ampère

Até o momento, nossos cálculos do campo magnético produzido por uma corrente envolveram a determinação do campo infinitesimal $d\vec{B}$, produzido por um elemento de corrente; a seguir, somando-se todos os vetores $d\vec{B}$, obtínhamos o campo magnético total. Esse procedimento é diretamente análogo ao cálculo do campo *elétrico* estudado no Capítulo 21.

Para o problema da determinação do campo elétrico, verificamos que, em situações com elevada simetria, era mais fácil o uso da lei de Gauss para encontrar $\vec{E}$. Analogamente, existe um modo mais prático para determinar um campo *magnético* produzido por uma distribuição de *correntes* com simetria elevada. Porém, a lei que nos permite fazer isso, chamada de *lei de Ampère*, possui um caráter bastante diferente da lei de Gauss.

A lei de Gauss para campos elétricos envolve o fluxo de $\vec{E}$ através de uma superfície fechada; ela afirma que o fluxo é igual à carga total no interior da superfície, dividida pela constante ϵ_0. Portanto, essa lei relaciona campos elétricos com distribuições de cargas. Em contraste, a lei de Gauss para campos *magnéticos*, Equação (28.10), *não* é uma relação entre campos magnéticos e distribuições de correntes; ela afirma que o fluxo de $\vec{B}$ através de *qualquer* superfície fechada é sempre igual a zero, existindo ou não correntes no interior da superfície. Portanto, a lei de Gauss para $\vec{B}$ não pode ser usada para determinar o campo magnético produzido por uma particular distribuição de correntes.

A lei de Ampère não é formulada em termos de um fluxo magnético, mas definida com base em uma *integral de linha* de $\vec{B}$ em torno de uma trajetória fechada, designada por

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Já usamos integrais de linha na definição do trabalho, no Capítulo 6, e no cálculo do potencial elétrico, no Capítulo 23. Para calcularmos essa integral, dividimos a trajetória em segmentos infinitesimais $d\vec{l}$, calculamos o produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ para cada segmento e, a seguir, somamos esses produtos. Geralmente, $\vec{B}$ varia de um ponto para outro e devemos usar o valor de $\vec{B}$ no local onde está cada $d\vec{l}$. Uma notação alternativa é $\oint B_{\parallel}\, dl$, em que $B_{\parallel}$ é o componente de $\vec{B}$ paralelo a $d\vec{l}$ em cada ponto. A circunferência na integral indica que a integral deve ser sempre calculada em uma curva *fechada*, aquela para a qual o ponto final coincide com o ponto inicial.

A lei de Ampère para um condutor longo e retilíneo

Para introduzirmos a idéia básica da lei de Ampère, vamos considerar novamente o campo magnético produzido por um condutor retilíneo longo que transporta uma corrente I. Verificamos na Seção 28.3 que o campo a uma distância r do condutor possui módulo dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

e que as linhas de campo magnético são circunferências centralizadas sobre o condutor. Vamos calcular a integral de linha de $\vec{B}$ em torno de uma dessas circunferências com raio r, como indicado na Figura 28.16a. Em cada ponto sobre a circunferência, $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são paralelos, logo, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\,dl$; como r é constante ao longo da circunferência, B também é constante. Alternativamente, podemos dizer que $B_{\parallel}$ é constante e igual a B em todos os pontos ao longo da circunferência. Portanto, podemos passar B para fora da integral. A integral restante $\oint dl$ nada mais é do que o comprimento da circunferência. Logo,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

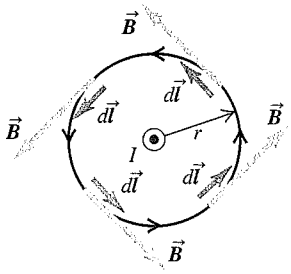
A partir disso, se conclui que a integral de linha não depende do raio da circunferência, sendo igual ao produto de μ_0 pela corrente que passa na área no interior do círculo.

Na Figura 28.16b, a situação é a mesma, porém a circunferência é percorrida em sentido contrário. Agora $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são antiparalelos, logo, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\vec{B} \cdot d\vec{l}$ e a integral de linha é igual a $-\mu_0 I$. Obtivemos o mesmo resultado quando o percurso da integração era o mesmo da Figura 28.16a, porém com a corrente em sentido contrário. Portanto, a integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ é igual a μ_0 multiplicado pela corrente que passa pela área limitada pelo percurso de integração, com um sinal positivo ou negativo que depende do sentido da corrente em relação ao sentido do percurso de integração.

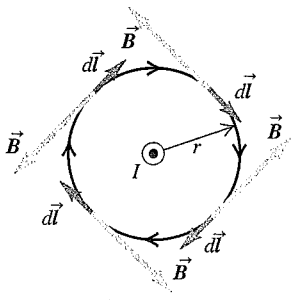
Existe uma regra simples para o sinal da corrente; não é novidade para você saber que essa regra usa sua mão direita. Dobre os dedos da sua mão direita em torno do sentido do percurso da integração (ou seja, o sentido que você usou para calcular $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$). Desse modo, seu dedo polegar indica o sentido positivo da corrente. As correntes que atravessam a área nesse sentido são positivas; aquelas que atravessam a área no sentido oposto são negativas. Usando essa regra você é capaz de observar que a corrente é positiva na Figura 28.16a e negativa na Figura 28.16b. Vejamos aqui outro modo de dizer a mesma coisa: olhando para a área delimitada pelo percurso da integração, integre no sentido anti-horário em torno do percurso, como indica a Figura 28.16a. As correntes que se aproximam de você através da superfície são positivas, e aquelas que se afastam são negativas.

Um percurso de integração que *não* circunda o condutor é indicado na Figura 28.16c. Ao longo do arco *ab*, de raio r_1, $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são paralelos e $B_{\parallel} = B_1 = \mu_0 I/2\pi r_1$; ao longo

(a) Percurso de integração ao longo de uma circunferência centralizada no condutor; a integração é feita ao longo do percurso no sentido anti-horário.
Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$



(b) Mesmo caso da parte (a), porém agora o sentido do percurso é horário.
Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$



(c) Um percurso de integração que não tem o condutor em seu interior.
Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

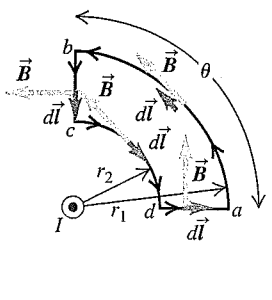


Figura 28.16 Três percursos para a integral de linha de $\vec{B}$ ao redor de um condutor retilíneo longo que transporta uma corrente *I para fora* do plano da página (indicada por um ponto no centro da seção circular do condutor). A figura mostra um corte perpendicular do condutor.

do arco *cd*, de raio r_2, $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são antiparalelos e $B_\parallel = -B_2 = -\mu_0 I/2\pi r_2$. O campo $\vec{B}$ é perpendicular a $d\vec{l}$ ao longo dos segmentos retilíneos *bc* e *da*, logo, $B_\parallel = 0$ e esses segmentos não contribuem para a integral de linha. Então, a integral de linha ao longo do percurso fechado total é dada por

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B_\parallel dl = B_1\int_a^b dl + (0)\int_b^c dl + (-B_2)\int_c^d dl + (0)\int_d^a dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(r_1\theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(r_2\theta) + 0 = 0$$

O módulo de $\vec{B}$ sobre o arco *cd* é maior do que sobre o arco *ab*, porém o comprimento do arco é menor, de modo que as contribuições desses dois arcos se cancelam. Embora exista um campo magnético em todos os pontos do percurso de integração, a integral de linha $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ é sempre zero quando não existe nenhuma corrente passando na área delimitada pelo percurso de integração.

Podemos também deduzir esses resultados para percursos de integração mais gerais, tal como o indicado na Figura 28.17. Na posição do elemento de linha $d\vec{l}$ o ângulo entre $d\vec{l}$ e $\vec{B}$ é ϕ e

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl\cos\phi$$

De acordo com a figura, $dl\cos\phi = r\,d\theta$, em que $d\theta$ é o ângulo subtendido por $d\vec{l}$ em relação ao fio; e r é a distância entre $d\vec{l}$ e o fio. Logo,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(r\,d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\theta$$

Porém, $\oint d\theta$ é igual a 2π, o ângulo varrido pela linha que liga o fio com $d\vec{l}$ durante uma volta completa através do percurso de integração. Portanto

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (28.19)$$

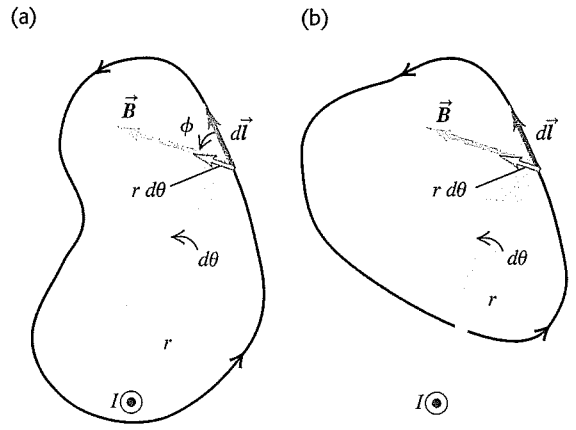


Figura 28.17 (a) Um percurso de integração mais geral que engloba o fio para a integral do campo $\vec{B}$ produzido por um fio retilíneo longo conduzindo uma corrente I *saindo* do plano da página. Mostramos a seção reta do fio. (b) Um percurso de integração mais geral que não engloba o fio.

O resultado obtido não depende da forma do percurso ou da posição do fio no interior do percurso escolhido. Quando a corrente no interior do percurso apresenta sentido contrário ao indicado, a integral possui sinal contrário. Contudo, quando o percurso escolhido não engloba o fio (Figura 28.17b), a variação total do ângulo θ durante uma volta completa através do percurso de integração é zero; $\oint d\theta$ é igual a zero em vez de 2π, e a integral de linha é zero.

Lei de Ampère: formulação geral

A Equação (28.19) é quase, mas não exatamente, uma formulação geral da lei de Ampère. Para generalizá-la ainda mais, considere *diversos* fios retilíneos longos que passam na área delimitada pelo percurso de integração. O campo magnético total $\vec{B}$ em qualquer ponto do percurso é dado pela soma vetorial dos campos individuais dos fios. Portanto, a integral de linha do campo magnético total $\vec{B}$ é igual a μ_0 vezes a *soma algébrica* das correntes. Para o cálculo dessa soma, usamos a regra sobre sinais descrita anteriormente. Quando o percurso de integração não inclui um fio particular, a integral de linha de $\vec{B}$ é igual a zero para o fio considerado, pois o ângulo θ para esse fio durante uma volta completa é igual a zero, em vez de 2π. O fio que não está dentro da área englobada pelo percurso de integração continua contribuindo para $\vec{B}$ em todos os pontos, porém a *integral de linha* durante uma volta completa é igual a zero.

Portanto, podemos substituir I na Equação (28.19) por I_{inte}, a corrente total dada pela soma algébrica das correntes no *interior* ou *englobadas* pelo percurso de integração, usando-se a regra sobre sinais descrita anteriormente (Figura 28.18). O enunciado geral da **lei de Ampère** é

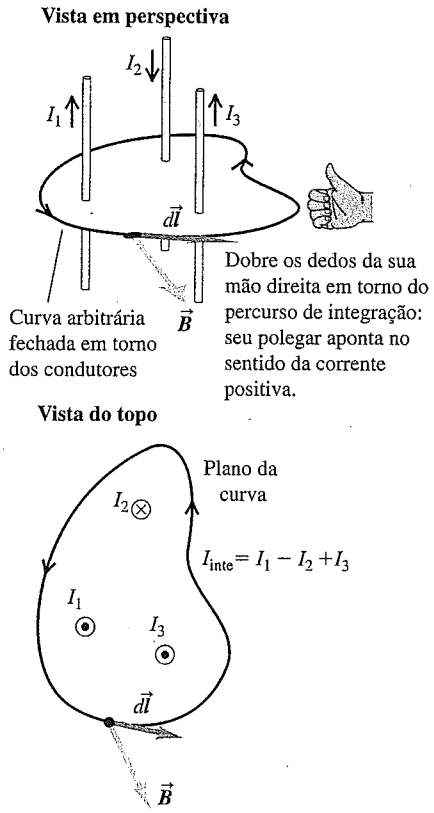
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{inte}} \qquad (28.20)$$

(lei de Ampère)

Embora a lei de Ampère tenha sido deduzida para o caso especial de fios retilíneos longos e paralelos, a Equação (28.20) vale para todos os percursos e condutores, *qualquer* que seja a forma do condutor e do percurso escolhido. A dedução geral aplica os mesmos princípios que utilizamos, contudo a geometria é mais complicada.

Quando $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$, isso *não* significa necessariamente que $\vec{B} = \mathbf{0}$ em todos os pontos do percurso, mas apenas que a soma algébrica das correntes no interior do percurso de integração é igual a zero. Nas figuras 28.16c e 28.17b não existe nenhuma corrente no interior do percurso de integração. Como indica a Figura 28.19, existem correntes de mesmo módulo, porém de sinais contrários no interior do percurso de integração. Em todos esses três exemplos, $I_{\text{inte}} = 0$ e a integral de linha é igual a zero.

Verificamos que a lei de Ampère, na forma em que foi enunciada, é válida apenas quando as correntes são estacionárias e na região não existem materiais magnéticos nem campo elétrico variável. No Capítulo 29, mostraremos a generalização da lei de Ampère para incluir campos elétricos variáveis.



Lei de Ampère: quando calculamos a integral de linha do campo magnético em torno de uma curva fechada, o resultado equivale a μ_0 vezes o total da corrente confinada: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{inte}}$

Figura 28.18 Lei de Ampère.

ATENÇÃO Integrais de linha dos campos elétricos e magnéticos No Capítulo 23, vimos que a integral do campo eletrostático $\vec{E}$ em torno de um percurso de integração fechado é igual a zero; isso significa dizer que a força eletrostática sobre uma carga puntiforme positiva $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre uma carga puntiforme q é conservativa, portanto essa força realiza um trabalho igual a zero sobre a carga em um percurso fechado quando a carga volta para a posição inicial. Poderíamos fazer uma analogia e pensar que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ está relacionada ao fato de a força *magnética* ser conservativa. Essa analogia é totalmente falsa. Lembre-se de que a força magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ é sempre *perpendicular* a $\vec{B}$, portanto $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ *não* está relacionada ao trabalho realizado pela força magnética; de acordo com a lei de Ampère, essa integral tem relação somente com a soma algébrica das correntes no interior do percurso de integração. Na verdade, a força magnética sobre uma partícula carregada *não* é conservativa. Uma força conservativa depende somente da posição do corpo sobre o qual a força atua, porém a força magnética sobre uma partícula carregada que se move também depende da *velocidade* da partícula.

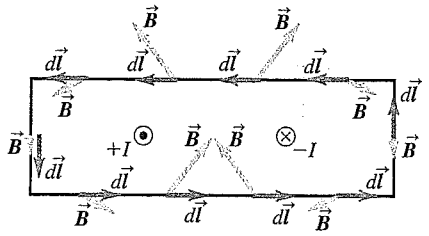
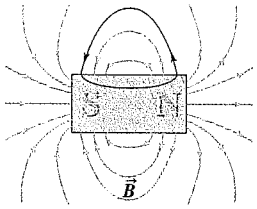


Figura 28.19 Dois fios retilíneos longos e paralelos conduzindo correntes de mesmo módulo, porém de sinais contrários. Mostramos a seção reta de cada fio, e o percurso de integração é feito no sentido anti-horário. A integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ obtém contribuição nula dos segmentos superior e inferior, uma contribuição positiva do segmento esquerdo e uma combinação negativa do segmento direito; portanto a integral total é igual a zero.

Teste sua compreensão da Seção 28.6 A figura abaixo indica linhas de campo magnético que passam pelo centro de um ímã permanente. O ímã não está conectado a uma fonte fem. Uma das linhas de campo é mais escura. O que se pode afirmar sobre as correntes no interior do ímã permanente, na região confinada por essa linha de campo? (i) Não há corrente no interior do ímã; (ii) Há correntes orientadas para fora do plano da página; (iii) Há correntes orientadas para dentro do plano da página; (iv) Não há informação suficiente para decidir.



28.7 Aplicações da lei de Ampère

A lei de Ampère é útil quando envolve situações com simetria que permitem o cálculo da integral de $\vec{B}$. A seguir, forneceremos diversos exemplos. A Estratégia para a Solução de Problemas 28.2 é semelhante à estratégia recomendada na Estratégia para a Solução de Problemas 22.1 (Seção 22.4) relacionada com as aplicações da lei de Gauss; sugerimos que você leia novamente aquela seção e compare os dois métodos.

Estratégia para a solução de problemas 28.2

LEI DE AMPÈRE

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* como a lei de Gauss para a eletricidade, a lei de Ampère é sempre válida, porém mais útil nas situações em que o padrão do campo magnético é altamente simétrico. Nessas situações, você pode usar a lei de Ampère para encontrar uma relação entre o campo magnético em função da posição e da corrente que produz o campo.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. A primeira etapa consiste em escolher o percurso de integração para aplicar a lei de Ampère. Se você deseja determinar $\vec{B}$ em um

dado ponto, então o percurso deve passar pelo ponto considerado. O percurso de integração não precisa ser nenhum contorno físico real. Geralmente, ele é uma curva puramente geométrica; ele pode estar no espaço vazio, no interior de um corpo ou parcialmente em ambos os casos. O percurso de integração deve possuir *simetria* suficiente para possibilitar a integração. Quando o problema apresentar uma simetria cilíndrica, o percurso de integração será uma circunferência concêntrica com o eixo do cilindro.

2. Determine a(s) incógnita(s). Geralmente ela será o módulo do campo $\vec{B}$ em função da posição.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Execute a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ao longo do percurso de integração escolhido. Quando $\vec{B}$ é tangente a todos ou a alguns pontos ao longo do percurso de integração e possui o mesmo módulo B em todos esses pontos, então a integral de linha é igual ao produto de B pelo comprimento do trecho do percurso considerado. Quando $\vec{B}$ é perpendicular a todos ou a alguns pontos ao longo do percurso de integração, a integral de linha é igual a zero nesses trechos.
2. Na integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, o vetor $\vec{B}$ é sempre o campo magnético *total* em cada ponto do percurso de integração. Esse campo pode ser produzido parcialmente por correntes fora e por correntes dentro da curva delimitada pelo percurso de integração. Quando a corrente total dentro da curva delimitada pelo percurso de integração é igual a *zero*, o campo magnético nos pontos da trajetória não precisam ser nulos, contudo a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ é sempre igual a zero.
3. Determine a corrente I_{inte} confinada no percurso de integração. O sinal da corrente no interior de um percurso de integração é dado pela regra da mão direita. Dobre os dedos da sua mão direita em torno do sentido do percurso de integração. Então, seu dedo polegar indica o sentido positivo da corrente. Quando $\vec{B}$ é tangente à integração em todos os pontos ao longo do percurso e o sentido de I_{inte} é positivo, então $\vec{B}$ possui o mesmo sentido que você escolheu para o percurso de integração; se, ao contrário, I_{inte} for negativo, então $\vec{B}$ terá sentido contrário ao que você escolheu para o percurso de integração.
4. Use a lei de Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0$ para explicitar a incógnita.

AVALIAR *sua resposta*: se o resultado obtido for uma expressão para o módulo do campo em função da posição, você poderá conferi-lo examinando como a equação se comporta dentro de diferentes limites.

Exemplo 28.7

CAMPO DE UM FIO RETILÍNEO CONDUZINDO UMA CORRENTE Na Seção 28.6, deduzimos a lei de Ampère usando a Equação (28.9) para o campo magnético de um fio retilíneo infinito conduzindo uma corrente. Inverta o processo e aplique a lei de Ampère para determinar o módulo, a direção *e* o sentido de $\vec{B}$ para essa situação.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta situação possui simetria cilíndrica, portanto podemos usar a lei de Ampère para determinar o campo magnético em todos os pontos situados a uma distância r do condutor.

PREPARAR: escolhemos como percurso de integração uma circunferência de raio r, centralizada no condutor e situada sobre um plano perpendicular a ele, como indica a Figura 28.16a (Seção 28.6). O vetor $\vec{B}$ é tangente à circunferência em cada um dos seus pontos.

EXECUTAR: pela escolha do percurso de integração, a lei de Ampère, Equação (28.20), fornece

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

A Equação (28.9), $B = \mu_0 I/2\pi r$, é obtida imediatamente da relação anterior.

A lei de Ampère serve para determinar o módulo, a direção e o sentido de $\vec{B}$. Como estamos percorrendo a curva fechada no sentido anti-horário, o sentido positivo da corrente é para fora do plano da página na Figura 28.16a; esse sentido é o mesmo sentido real da corrente na figura, de modo que I é positivo e a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ também é positiva. Visto que cada elemento $d\vec{l}$ está no sentido anti-horário, o sentido de $\vec{B}$ também deve ser anti-horário, como indica a Figura 28.16a.

AVALIAR: os resultados obtidos são consistentes com os da Seção 28.6, conforme as expectativas.

Exemplo 28.8

CAMPO NO INTERIOR DE UM CILINDRO CONDUTOR LONGO Um condutor cilíndrico longo, de raio R, conduz uma corrente I (Figura 28.20). A corrente está uniformemente distribuída na área da seção reta do cilindro. Calcule o campo magnético em função da distância r entre o ponto do campo e o eixo do cilindro para todos os pontos dentro ($r < R$) e fora do condutor ($r > R$).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: novamente temos uma distribuição de corrente com simetria cilíndrica. Como no caso de um condutor longo, retilíneo e delgado que transporta corrente, as linhas do campo magnético devem ser círculos concêntricos com o eixo do condutor.

PREPARAR: para determinarmos o campo magnético *dentro* do condutor, consideramos uma circunferência com raio $r < R$, como indicado na Figura 28.20. *Fora* do condutor, novamente usamos um círculo, mas com raio $r > R$. Em qualquer caso, o percurso de integração tira proveito da simetria circular do padrão do campo magnético.

EXECUTAR: no interior do condutor, $\vec{B}$ possui o mesmo módulo em todos os pontos do percurso de integração circular e é tangente à circunferência. Logo, o módulo da integral é simplesmente $B(2\pi r)$. Usando a regra da mão direita, concluímos que a corren-

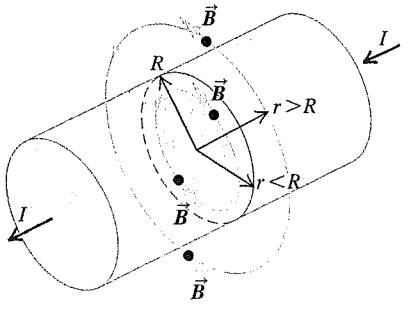


Figura 28.20 Para determinarmos o campo magnético para um raio $r < R$, aplicamos a lei de Ampère na periferia do círculo sombreado no interior do condutor. A corrente que flui através da área sombreada é $(r^2/R^2)I$. Para encontrar o campo magnético para os pontos $r > R$, aplicamos a lei de Ampère na circunferência indicada no exterior do condutor.

te que flui através da área sombreada dentro do círculo no interior do condutor é positiva, portanto $\vec{B}$ aponta no mesmo sentido do percurso da integral, como indicado. Para calcular a corrente I_{inte} no interior do percurso de integração, note que a densidade de corrente (corrente por unidade de área) é $J = I/\pi R^2$, de modo que $I_{inte} = J(\pi r^2) = Ir^2/R^2$. Finalmente, a lei de Ampère fornece

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (28.21)$$

(dentro do condutor, $r < R$)

Fora do condutor, consideramos uma circunferência para o percurso da integral, porém agora com raio $r > R$, os mesmos argumentos simétricos aplicados, e o módulo $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ é novamente $B(2\pi r)$. Usando a regra da mão direita, concluímos que o sentido de $\vec{B}$ é aquele indicado na Figura 28.20. Para esse percurso, $I_{inte} = I$, a corrente total que passa no condutor. Usando a lei de Ampère, encontramos para B o mesmo resultado obtido no Exemplo 28.7:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (28.22)$$

(fora do condutor, $r > R$)

Fora do condutor, o campo magnético é o mesmo que o produzido por um fio retilíneo longo conduzindo uma corrente I, independentemente do raio R, ao longo do qual a corrente é distribuída. Na verdade, o campo magnético de *qualquer* distribuição de corrente com simetria cilíndrica é o mesmo que o produzido por um fio longo situado no eixo da distribuição e que conduz a mesma corrente total da distribuição. Esse resultado é análogo aos resultados obtidos nos exemplos 22.5 e 22.9 (Seção 22.4), nos quais verificamos que o campo *elétrico* no exterior de um corpo com simetria esférica de *cargas* é o mesmo que o gerado quando toda a distribuição é substituída por uma única carga concentrada no centro e igual à carga total da distribuição.

AVALIAR: note que, na superfície do condutor ($r = R$), a Equação (28.21), obtida para $r < R$, confirma (como deveria) a Equação (28.22), obtida para $r > R$. A Figura 28.21 mostra um gráfico de B em função de r para os pontos no interior e no exterior do condutor.

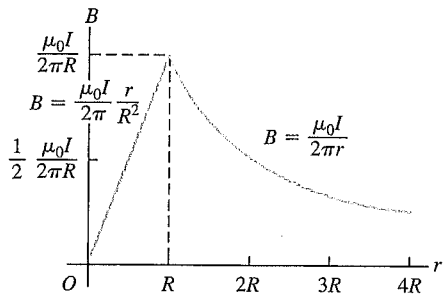


Figura 28.21 Módulo do campo magnético no interior e no exterior de um condutor cilíndrico longo de raio R que conduz uma corrente I.

Exemplo 28.9

CAMPO DE UM SOLENÓIDE Um solenóide é constituído por um enrolamento helicoidal de fio sobre um núcleo, em geral com seção reta circular. É possível haver centenas ou milhares de espiras enroladas de forma compacta, de modo que cada uma delas pode ser considerada uma espira circular. Podem existir diversas camadas de enrolamento. Para simplificar, a Figura 28.22 mostra um solenóide com apenas algumas espiras. Todas as espiras conduzem a mesma corrente I, e o campo magnético total $\vec{B}$ em cada ponto é a soma vetorial dos campos produzidos pelas espiras individuais. A figura mostra linhas do campo nos planos xy e xz. Desenhamos um conjunto de linhas do campo magnético uniformemente espaçadas no centro do solenóide. Cálculos precisos indicam que, para um solenóide longo e compacto, metade dessas linhas do campo emerge da extremidade e a outra metade 'escapa' através dos enrolamentos entre o centro e a extremidade.

As linhas de campo magnético próximas do centro do solenóide são aproximadamente paralelas, indicando um campo $\vec{B}$ quase uniforme; fora do solenóide, as linhas de campo são mais espaçadas e o campo magnético é fraco. Quando o solenóide possui comprimento muito maior do que o diâmetro de sua seção reta e as espiras são enroladas de forma compacta, o campo *interno* nas vizinhanças do centro do solenóide é paralelo ao seu eixo e quase uniforme, e o campo magnético *externo* é muito pequeno.

Use a lei de Ampère para determinar o campo magnético no centro ou nas proximidades do centro desse solenóide longo. O solenóide conduz uma corrente I e possui n espiras por unidade de comprimento.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se de uma situação altamente simétrica, com um campo uniforme $\vec{B}$ no interior do solenóide e um campo nulo fora dele. Logo, podemos usar a lei de Ampère para determinar o campo interno através de uma escolha apropriada do percurso de integração.

PREPARAR: escolhemos como percurso de integração o retângulo *abcd*, indicado na Figura 28.23. O lado *ab*, de comprimento L, é paralelo ao eixo do solenóide. Supomos que os lados *bc* e *da* sejam muito longos, de modo que o lado *cd* esteja tão afastado do solenóide que o campo magnético sobre ele seja desprezível.

EXECUTAR: por simetria, o campo $\vec{B}$ ao longo do lado *ab* é constante e paralelo a esse lado. Usando a lei de Ampère, fazemos o percurso ao longo do lado *ab* no mesmo sentido de $\vec{B}$. Logo, $B_\parallel = +B$ e então

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$

Ao longo dos lados *bc* e *da*, $B_\parallel = 0$, porque $\vec{B}$ é perpendicular a esses dois lados; ao longo do lado *cd*, $B_\parallel = 0$, porque $\vec{B} = \vec{0}$. Portanto, a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ao longo do percurso todo se reduz a BL.

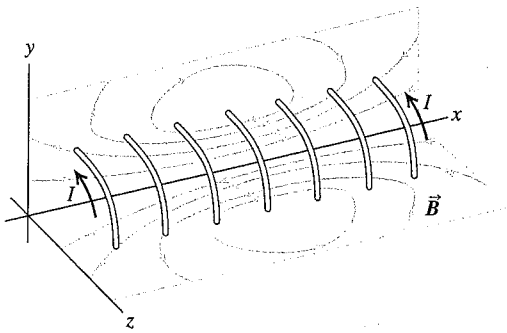


Figura 28.22 Linhas de campo magnético produzidas pela corrente de um solenóide. Para maior clareza, somente algumas linhas são indicadas.

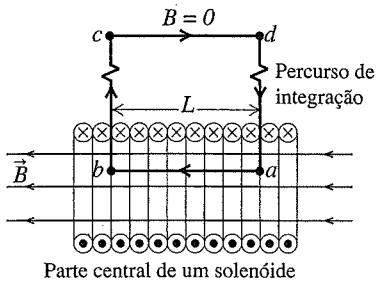


Figura 28.23 Nosso esquema para esse problema.

O número de espiras para um dado comprimento L é igual a nL. Cada uma dessas espiras passa uma vez através do retângulo *abcd* e conduz uma corrente I, em que I é a corrente que passa no enrolamento. Então, a corrente total no interior do retângulo é $I_{\text{inte}} = nLI$. De acordo com a lei de Ampère, como a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ é positiva, I_{inte} também deve ser positiva; logo, a corrente que passa através da área delimitada pelo percurso fechado deve possuir o sentido indicado na Figura 28.23. Usando a lei de Ampère, encontramos o módulo B:

$$BL = \mu_0 nLI$$
$$B = \mu_0 nI \quad \text{(solenóide)} \tag{28.23}$$

O lado *ab* não precisa estar localizado sobre o eixo do solenóide, e, portanto, o método anterior também serve para provar que o campo magnético é uniforme ao longo da seção reta inteira nas proximidades do centro do solenóide.

AVALIAR: note que o *sentido* de $\vec{B}$ é o mesmo do vetor momento magnético $\vec{\mu}$. Esse resultado é igual ao encontrado na Seção 28.5 para uma única espira circular que conduz uma corrente.

Para os pontos ao longo do eixo, o campo é mais forte nas vizinhanças do centro e diminui à medida que o ponto se aproxima das extremidades. Para um solenóide muito longo em comparação a seu diâmetro, o campo em cada extremidade é exatamente igual à metade do campo magnético em seu centro. Para um solenóide curto, a relação é mais complexa. A Figura 28.24 mostra um gráfico de B em função de x para pontos ao longo do eixo de um solenóide curto.

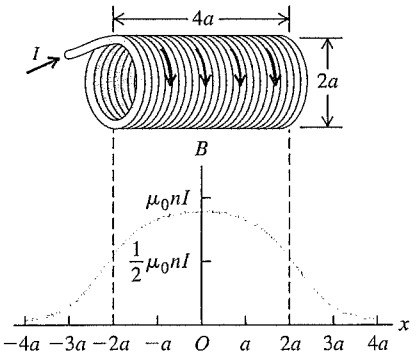


Figura 28.24 Módulo do campo magnético ao longo do eixo de um solenóide de comprimento $4a$, igual a quatro vezes seu raio a. O módulo em cada extremidade do solenóide é aproximadamente a metade do módulo em seu centro. (Compare com a Figura 28.14 para o caso de N espiras circulares.)

Exemplo 28.10

CAMPO DE UM SOLENÓIDE TOROIDAL O chamado **solenóide toroidal** ou *toróide* é um solenóide que conduz uma corrente I através de um enrolamento com N espiras em torno de um núcleo em forma de rosca, como indicado na Figura 28.25a. Na prática, as espiras estão muito mais próximas do que indicado na figura. Determine o campo magnético em todos os pontos.

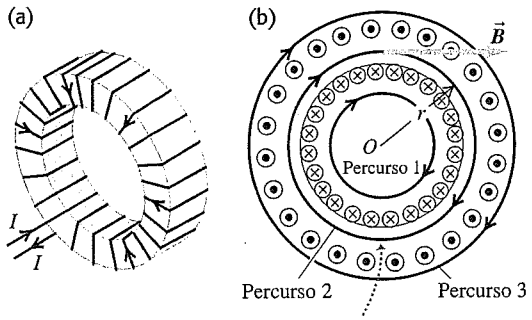
SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a corrente que flui através da periferia do toróide produz um componente do campo magnético perpendicular ao plano da figura, tal como no caso da espira circular discutida na Seção 28.5. Porém, quando as espiras estão muito próximas, podemos considerá-las espiras circulares que conduzem a corrente entre o raio interno e o raio externo do toróide; então, o fluxo da corrente através da periferia do toróide torna-se desprezível, e o componente perpendicular de $\vec{B}$ é igualmente desprezível. Com essa aproximação idealizada, a simetria circular da configuração nos leva a concluir que as linhas do campo magnético são circunferências concêntricas com o eixo do toróide.

PREPARAR: para tirar proveito dessa simetria na determinação do campo, escolhemos os percursos de integração circulares para aplicação da lei de Ampère. A Figura 28.25b mostra três desses percursos.

EXECUTAR: inicialmente, considere o percurso 1 na Figura 28.25b. Se o solenóide toroidal produzisse algum campo nessa região, ele seria *tangente* à circunferência em cada um de seus pontos e $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ seria igual ao produto de B pelo comprimento da circunferência $l = 2\pi r$. Porém, a corrente total que passa no interior do círculo delimitado pela circunferência é igual a zero; logo, de acordo com a lei de Ampère, o campo $\vec{B}$ é necessariamente igual a zero em todos os pontos ao longo do percurso.

Analogamente, se o solenóide toroidal produzisse algum campo ao longo do percurso 3, ele seria tangente à circunferência em cada um de seus pontos. Cada espira passa *duas vezes* através da área delimitada por essa circunferência, conduzindo correntes em sentidos contrários. Portanto, a corrente *total* I_{inte} que passa no interior da área delimitada por essa circunferência é igual a zero e $\vec{B} = \mathbf{0}$ em todos os pontos ao longo do percurso. Conclusão: *o campo magnético de um toróide está inteiramente confinado ao*



O campo magnético está quase completamente cofinado ao espaço no interior dos enrolamentos.

Figura 28.25 (a) Um solenóide toroidal. Para maior clareza, somente algumas espiras são indicadas. (b) Percursos de integração (circunferências) usados para determinar o campo magnético $\vec{B}$ produzido pela corrente (indicado por pontos e cruzes).

espaço no interior das espiras. Podemos imaginar um solenóide toroidal como um extenso solenóide que foi encurvado ao longo de uma circunferência.

Finalmente, consideramos o percurso 2, uma circunferência de raio r. Novamente, por simetria, esperamos que $\vec{B}$ seja tangente à circunferência e que a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ seja igual a $2\pi rB$. Cada espira do enrolamento passa *uma vez* através da área delimitada pelo percurso 2. A corrente total que passa no interior da área delimitada por essa circunferência é $I_{\text{inte}} = NI$, em que N é o número total de espiras do enrolamento; a corrente I_{inte} é positiva para o percurso de integração no sentido horário mostrado na Figura 28.25b, portanto $\vec{B}$ possui o sentido indicado. Então, de acordo com a lei de Ampère,

$$2\pi rB = \mu_0 NI$$
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad (28.24)$$

(solenóide toroidal)

AVALIAR: o campo magnético *não* é uniforme ao longo da seção reta do núcleo, porque o raio r do lado externo da seção é maior do que o raio do lado interno. Contudo, quando a espessura do núcleo é pequena em comparação com r, o campo magnético varia apenas ligeiramente ao longo da seção reta. Nesse caso, como $2\pi r$ é o comprimento da circunferência do toróide e $N/2\pi r$ é o número de espiras n por unidade de comprimento, podemos escrever o campo na forma

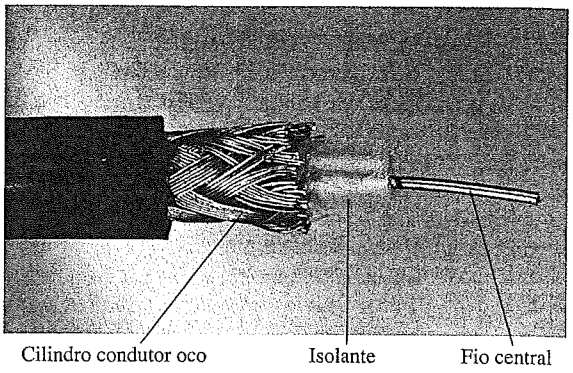
$$B = \mu_0 nI$$

resultado igual ao obtido no caso de um solenóide *reto* longo.

Em um toróide real, as espiras não são exatamente espiras circulares, mas segmentos de uma hélice encurvada. Portanto, o campo externo não é estritamente igual a zero. Para estimar seu módulo, podemos imaginar que a Figura 28.25a é equivalente de modo muito aproximado a uma única espira circular com raio r. Então, aplicamos a Equação (28.17) para mostrar que o campo magnético no *centro* do toróide é N/π menor que o campo magnético no espaço entre suas espiras.

As equações que deduzimos para o campo magnético de um solenóide reto ou de um solenóide toroidal são estritamente verdadeiras somente para o caso de solenóides no *vácuo*. Contudo, em muitas aplicações práticas, essas fórmulas também podem ser usadas para solenóides no ar ou quando o núcleo for feito de um material que não seja magnético nem supercondutor. Na próxima seção, mostraremos como essas fórmulas se modificam quando o núcleo é composto por um material magnético.

Teste sua compreensão da Seção 28.7 Considere um fio condutor que passa ao longo do eixo central de um cilindro condutor oco. Esse arranjo, chamado de *cabo co-axial*, possui muitas aplicações em telecomunicações. (O cabo co-axial é usado nas transmissões de TV a cabo.) Por esse cabo passa uma corrente I que é orientada no sentido ao longo do cilindro condutor oco e está uniformemente distribuída pela área de seção reta do cilindro. Uma corrente igual passa no sentido contrário ao longo do fio central. Como o módulo B do campo magnético fora desse tipo de cabo depende da distância r a partir do eixo central do cabo? (i) B é proporcional a $1/r$; (ii) B é proporcional a $1/r^2$; (iii) B é igual a zero em todos os pontos fora do cabo. ∎



28.8 Materiais magnéticos

Ao discutirmos como as correntes produzem campos magnéticos, consideramos os condutores circundados pelo vácuo. Porém, as bobinas existentes em transformadores, motores, geradores e eletroímãs quase sempre usam núcleos de ferro para aumentar o campo magnético e confiná-lo em determinadas regiões. Os ímãs permanentes, as fitas de gravação magnética e os discos dos computadores dependem diretamente das propriedades magnéticas dos materiais; quando você armazena informações no disco de um computador, na verdade você está criando uma rede de ímãs microscópicos no interior do disco. Logo, é importante examinar alguns aspectos das propriedades magnéticas dos materiais. Depois de descrever a origem atômica das propriedades magnéticas dos materiais, discutiremos como o *paramagnetismo*, o *diamagnetismo* e o *ferromagnetismo* são usados para classificar um material com base em seu comportamento magnético.

O magneton de Bohr

Conforme discutimos brevemente na Seção 27.7, os átomos que constituem todos os materiais possuem elétrons que se movem, e esses elétrons formam espiras de correntes microscópicas que se movem e produzem individualmente campos magnéticos. Em muitos materiais, esses campos magnéticos estão distribuídos aleatoriamente e não produzem nenhum campo magnético resultante. Contudo, em alguns materiais, um campo magnético externo (um campo produzido por correntes fora do material) pode fazer essas espiras se orientarem paralelamente ao campo e se *somarem* com o campo magnético externo. Dizemos então que esse material ficou *magnetizado*.

Vamos examinar como surgem essas correntes microscópicas. A Figura 28.26 mostra um modelo primitivo para um elétron em um átomo. Imaginamos o elétron (massa m e carga $-e$) se movendo com velocidade v em uma órbita circular de raio r. A carga que se move é equivalente a uma espira circular. Na Seção 27.7, vimos que uma espira de área A que conduz uma corrente I possui um momento de dipolo magnético μ, dado por $\mu = IA$. Para o elétron na órbita, a área da espira é $A = \pi r^2$. Para encontrarmos a corrente

associada ao movimento do elétron, notamos que o período orbital T (o tempo que o elétron gasta para completar uma órbita) é igual ao comprimento da circunferência dividido por sua velocidade: $T = 2\pi r/v$. A corrente equivalente é a carga total que passa em qualquer ponto da órbita por unidade de tempo, que é precisamente a carga e do elétron dividida pelo período orbital T:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

O momento magnético $\mu = IA$ é, então:

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \qquad (28.25)$$

É útil expressar o momento magnético μ a partir do *momento angular* L do elétron. Para uma partícula que se move ao longo de uma circunferência, o módulo do momento angular é igual ao módulo do momento linear mv multiplicado pelo raio r, ou seja, $L = mvr$ (Seção 10.5). Usando esse resultado na Equação (28.25), obtemos

$$\mu = \frac{e}{2m}L \qquad (28.26)$$

A Equação (28.26) é útil para a nossa discussão porque o momento angular atômico é *quantizado*; seu componente em uma dada direção é sempre um múltiplo inteiro de $h/2\pi$, em que h é uma constante física fundamental conhecida como *constante de Planck*. O valor numérico de h é dado por

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

Portanto, a grandeza $h/2\pi$ representa uma unidade fundamental de momento angular em um sistema atômico, tal como e representa uma unidade fundamental de carga. Associada à quantização de $\vec{L}$ existe uma incerteza fundamental na *direção* de $\vec{L}$ e, portanto, na direção de $\vec{\mu}$. Na discussão que faremos a seguir, ao falarmos do módulo de um momento magnético, seria mais preciso dizer 'componente máximo em uma dada direção'. Portanto, dizer que o momento magnético $\vec{\mu}$ está alinhado ao campo magnético $\vec{B}$ é o mesmo que dizer que $\vec{\mu}$ possui seu componente máximo possível na direção de $\vec{B}$; todos os componentes são sempre quantizados.

A Equação (28.26) mostra que, associada à unidade fundamental do momento angular, existe uma unidade fundamental correspondente ao momento magnético. Quando $L = h/2\pi$, então

$$\mu = \frac{e}{2m}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m} \qquad (28.27)$$

Esse momento magnético denomina-se **magneton de Bohr**, designado por μ_B, cujo valor numérico é

$$\mu_B = 9{,}274 \times 10^{-24}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 = 9{,}274 \times 10^{-24}\ \text{J/T}$$

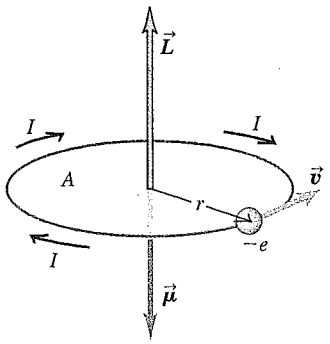


Figura 28.26 Um elétron se movendo com velocidade v em uma órbita circular de raio r possui um momento angular $\vec{l}$ e um momento de dipolo magnético orbital $\vec{\mu}$, orientado em sentido contrário. Ele também possui um momento angular de spin e um momento de dipolo magnético de spin orientado em sentido contrário.

Convidamos você a verificar que os dois conjuntos de unidades anteriores são consistentes. O segundo conjunto é útil quando calculamos a energia potencial $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ para o momento magnético de um dipolo em um campo magnético.

Os elétrons também possuem um momento angular intrínseco, conhecido como *spin*, que não é relacionado ao movimento orbital, mas que pode ser descrito classicamente como oriundo da rotação do elétron em torno de seu próprio eixo. Esse momento angular também tem um momento magnético associado e verifica-se que seu módulo é quase exatamente igual a um magneton de Bohr. (Efeitos relacionados à quantização do campo eletromagnético fazem com que o momento magnético de spin seja aproximadamente igual a 1,001 μ_B.)

Paramagnetismo

Em um átomo, muitos momentos magnéticos orbitais e de spin se somam, produzindo uma resultante igual a zero. Contudo, em alguns materiais, o átomo possui um momento magnético resultante da ordem de μ_B. Quando esse tipo de material é colocado em um campo magnético, o campo exerce um torque sobre cada momento magnético, dado pela Equação (27.26): $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Esses torques tendem a alinhar os momentos magnéticos ao campo, que é a posição correspondente a uma energia potencial mínima, conforme discutimos na Seção 27.7. Nessa posição, o sentido de cada espira de corrente é tal que ela fornece um campo que se *soma* ao campo magnético externo.

Vimos na Seção 28.5 que o campo magnético $\vec{B}$ produzido por uma espira é diretamente proporcional ao momento de dipolo magnético da espira. Analogamente, o campo $\vec{B}$ adicional produzido pelas espiras microscópicas dos elétrons é diretamente proporcional ao momento magnético total $\vec{\mu}_{\text{total}}$ por unidade de volume V do material. Chamamos essa grandeza vetorial de **magnetização** do material, designada por $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{\text{total}}}{V} \qquad (28.28)$$

Verifica-se que o campo magnético adicional, produzido pela magnetização do material, é simplesmente igual a $\mu_0\vec{M}$, em que μ_0 é a mesma constante que aparece na lei de Biot e Savart e na lei de Ampère. Quando tal material preenche por completo todas as vizinhanças de um condutor que transporta uma corrente, o campo magnético total $\vec{B}$ no seio do material é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} \tag{28.29}$$

em que $\vec{B}_0$ é o campo magnético produzido pela corrente que flui no condutor.

Para conferir a consistência das unidades na Equação (28.29), note que a magnetização $\vec{M}$ é o momento magnético por unidade de volume. As unidades do momento magnético são a corrente vezes a área (A · m^2), portanto as unidades de magnetização são (A · m^2)/m^3 = A/m. Pela Seção 28.1, as unidades da constante μ_0 são T · m/A. Então, as unidades de $\mu_0\vec{M}$ são as mesmas unidades de $\vec{B}$: (T · m/A) (A/m) = T.

Dizemos que é **paramagnético** todo material que possui um comportamento análogo ao que acabamos de descrever. O resultado é que o campo magnético no interior do material fica ampliado, em relação ao valor que existiria se ele fosse substituído pelo vácuo, por um fator adimensional, designado por K_m, conhecido como **permeabilidade relativa** do material. Os valores de K_m variam de um material para outro; para líquidos e sólidos paramagnéticos comuns na temperatura ambiente, os valores de K_m variam em geral de 1,00001 até 1,003.

Todas as equações deste capítulo que relacionam campos magnéticos com suas fontes podem ser adaptadas para situações envolvendo condutores no seio de materiais paramagnéticos. Basta substituir nessas relações μ_0 por $K_m\mu_0$. Esse produto denomina-se **permeabilidade** do material, designada por μ:

$$\mu = K_m\mu_0 \tag{28.30}$$

ATENÇÃO Dois significados do símbolo μ A Equação (28.30) envolve uma notação realmente perigosa, porque usamos anteriormente μ para designar o momento de dipolo magnético. É costume usar μ para ambas as grandezas, porém tome cuidado: daqui por diante, toda vez que encontrar μ, verifique se indica uma permeabilidade ou um momento magnético. Em geral, o contexto resolve a dúvida.

A diferença entre o valor da permeabilidade relativa e a unidade chama-se **suscetibilidade magnética**, designada por χ_m:

$$\chi_m = K_m - 1 \tag{28.31}$$

Tanto K_m quanto χ_m são grandezas adimensionais. Na Tabela 28.1, indicamos valores da suscetibilidade magnética de diversos materiais. Por exemplo, para o alumínio, $\chi_m = 2{,}2 \times 10^{-5}$ e $K_m = 1{,}000022$. O primeiro grupo da tabela indica materiais paramagnéticos; o segundo grupo indica materiais *diamagnéticos*, que serão estudados logo a seguir.

Tabela 28.1 Suscetibilidades magnéticas de materiais paramagnéticos e diamagnéticos para $T = 20$ °C

Material	$\chi_m = K_m - 1$ ($\times 10^{-5}$)
Paramagnético	
Alúmen de ferro e amônio	66
Urânio	40
Platina	26
Alumínio	2,2
Sódio	0,72
Gás oxigênio	0,19
Diamagnético	
Bismuto	–16,6
Mercúrio	–2,9
Prata	–2,6
Carbono (diamante)	–2,1
Chumbo	–1,8
Cloreto de sódio	–1,4
Cobre	–1,0

A tendência dos momentos magnéticos atômicos de se alinharem paralelamente ao campo magnético (posição com energia potencial mínima) é dificultada pelo movimento caótico oriundo da agitação térmica, que tende a desalinhar esses momentos magnéticos. Por essa razão, a suscetibilidade magnética sempre diminui quando a temperatura aumenta. Em muitos casos, ela é inversamente proporcional à temperatura absoluta T; e a magnetização M pode ser expressa pela fórmula

$$M = C\frac{B}{T} \tag{28.32}$$

A relação anterior é conhecida como *lei de Curie*, em homenagem a seu descobridor, Pierre Curie (1859-1906). A quantidade C denomina-se *constante de Curie* e possui valores diferentes para materiais diferentes.

Conforme descrevemos na Seção 27.7, um corpo que possui momentos de dipolo magnéticos atômicos é atraído pelo pólo de um ímã. Na maior parte dos materiais, essa atração é pequena em virtude do efeito térmico que produz um movimento caótico desses momentos de dipolo magnéticos atômicos. Por essa razão, não podemos usar um ímã para suspender um objeto de alumínio (que é paramagnético). Porém, quando a temperatura é suficientemente baixa, os efeitos térmicos são reduzidos, a magnetização aumenta em virtude da lei de Curie e a força de atração torna-se mais elevada.

Exemplo 28.11

DIPOLOS MAGNÉTICOS EM UM MATERIAL PARAMAGNÉTICO O óxido nítrico (NO) é um composto paramagnético. Cada molécula desse composto possui um momento magnético cujo componente máximo em qualquer direção é aproximadamente igual a um magneton de Bohr. Na presença de um campo magnético com módulo igual a B = 1,5 T, compare a energia de interação entre o campo e esse momento magnético à energia cinética média de translação dessas moléculas para uma temperatura de 300 K.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve tanto a energia de um momento magnético em um campo magnético (Capítulo 27) quanto a energia cinética média de translação em função da temperatura (Capítulo 18).

PREPARAR: na Seção 27.7, deduzimos a expressão $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ para a energia de interação de um dipolo magnético $\vec{\mu}$ com um campo $\vec{B}$. Pela Seção 18.3, a energia cinética média de translação de uma molécula a uma temperatura T é $K = \frac{3}{2}kT$, em que k é a constante de Boltzmann.

EXECUTAR: podemos escrever a energia de interação como $U = -(\mu\cos\phi)B$, em que $\mu\cos\phi$ é o componente do momento magnético $\vec{\mu}$ no sentido do campo $\vec{B}$. Em nosso caso, o valor do componente máximo $\mu\cos\phi$ é aproximadamente igual a μ_B; logo,

$$|U|_{\text{máx}} \approx \mu_B B = (9{,}27 \times 10^{-24}\,\text{J/T})(1{,}5\,\text{T})$$
$$= 1{,}4 \times 10^{-23}\,\text{J} = 8{,}7 \times 10^{-5}\,\text{eV}$$

A energia cinética média de translação é dada por:

$$K = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})$$
$$= 6{,}2 \times 10^{-21}\,\text{J} = 0{,}039\,\text{eV}$$

AVALIAR: para uma temperatura de 300 K, a energia da interação magnética é muito *menor* do que a energia cinética média de translação, portanto espera-se apenas um ligeiro alinhamento com o campo. Essa é a razão pela qual a suscetibilidade magnética de uma substância na temperatura ambiente é, em geral, muito pequena.

Diamagnetismo

Em alguns materiais, o momento magnético total de todas as espiras atômicas é igual a zero quando nenhum campo magnético é aplicado. Contudo, mesmo esses materiais possuem efeitos magnéticos, pois um campo magnético externo altera o movimento dos elétrons dos átomos, produzindo espiras de corrente adicionais e dipolos magnéticos induzidos comparáveis aos dipolos *elétricos* que estudamos na Seção 28.5. Nesse caso, o campo adicional produzido pelas espiras de corrente possui sentido sempre *oposto* ao do campo externo. (Esse comportamento é explicado pela lei da indução de Faraday, que estudaremos no Capítulo 29. Uma corrente induzida sempre tende a criar um campo contrário ao campo que a produz.)

Esse tipo de material denomina-se **diamagnético**. Ele sempre apresenta uma suscetibilidade magnética negativa, como indicado na Tabela 28.1, e uma permeabilidade relativa K_m ligeiramente *menor* do que um, em geral da ordem de 0,99990 até 0,99999 para sólidos e líquidos. As suscetibilidades diamagnéticas desses materiais são quase independentes da temperatura.

Ferromagnetismo

Uma terceira classe de materiais inclui o ferro, o cobalto, o níquel e muitos outros que contenham esses elementos; esse tipo de material denomina-se **ferromagnético**. Nesses materiais, fortes interações entre os momentos magnéticos atômicos produzem um alinhamento interno em certas regiões, chamadas **domínios magnéticos**, que existem mesmo na ausência de um campo magnético externo. A Figura 28.27 mostra um exemplo da estrutura do domínio magnético. No interior de cada domínio magnético, quase todos os momentos magnéticos atômicos são paralelos.

Quando não existe nenhum campo magnético aplicado, as magnetizações dos domínios são orientadas ao acaso. Porém, na presença de um campo magnético $\vec{B}_0$ (produzido por correntes externas), os domínios tendem a se orientar paralelamente ao campo. As fronteiras dos domínios também se deslocam; os domínios magnetizados no sentido do campo magnético aplicado aumentam de tamanho, e aqueles magnetizados em outras direções se encolhem. Como o momento magnético total no interior de um domínio pode ser da ordem de alguns milhares de magnetons de Bohr, os torques que tendem a alinhar os domínios ao campo magnético externo são muito maiores do que os existentes no caso de um material paramagnético. A permeabilidade relativa K_m é *muito* maior do que 1, em geral da ordem de 1000 até 100000. Por conseguinte, um objeto composto por um material ferromagnético, tal como ferro, é fortemente magnetizado pelo campo de um ímã permanente e atraído pelo ímã (veja a Figura 27.38). Um material paramagnético como o alumínio também é atraído por um ímã permanente, mas o valor de K_m para materiais paramagnéticos é muito menor do que para materiais ferromagnéticos, o que torna a atração muito mais fraca. Portanto, um ímã pode coletar pregos de ferro, mas não latas de alumínio.

À medida que o campo magnético aumenta, atinge-se um ponto para o qual quase *todos* os momentos magnéticos do material ferromagnético estão alinhados ao campo magnético externo. Essa condição é chamada de *magnetização de saturação*; depois de atingido esse ponto, um aumento posterior do campo magnético externo não produz mais nenhum aumento da magnetização.

A Figura 28.28 mostra uma 'curva de magnetização' — um gráfico da magnetização M em função do campo magnético externo B_0 — para o ferro doce. Uma descrição alternativa do comportamento ilustrado consiste em afirmar que K_m não é constante, porém diminui à medida que B_0

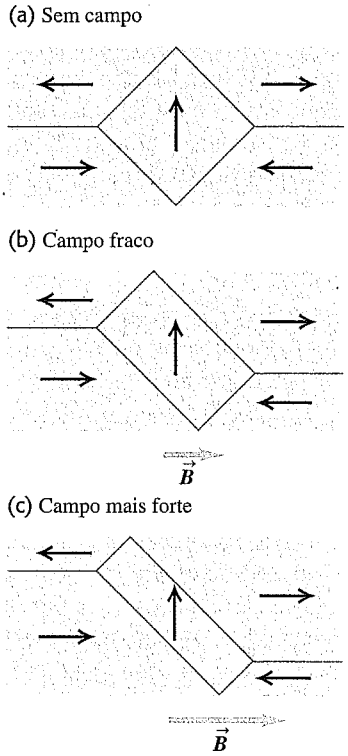


Figura 28.27 Neste desenho, adaptado de uma fotografia ampliada, as setas indicam os sentidos da magnetização nos domínios de um monocristal de níquel. Os domínios magnetizados no sentido do campo magnético aplicado aumentam de tamanho.

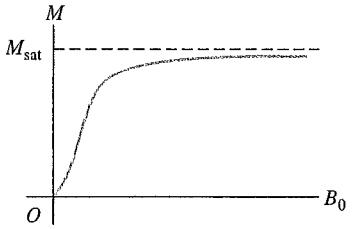


Figura 28.28 Uma curva de magnetização para um material ferromagnético. A magnetização M tende à saturação M_{sat} à medida que o campo magnético B_0 (produzido por correntes externas) se torna mais elevado.

aumenta. (Um material paramagnético também exibe saturação para campos suficientemente fortes. Porém, os campos magnéticos necessários são tão elevados que o desvio de uma relação linear entre M e B_0 nesses materiais só pode ser observado em temperaturas muito baixas, da ordem de 1 K.)

Para muitos materiais ferromagnéticos, a relação entre a magnetização e o campo magnético externo quando o campo magnético aumenta é diferente da relação obtida quando ele diminui. A Figura 28.29a mostra esse tipo de comportamento para tal material. Quando o material é magnetizado até atingir a saturação e, a seguir, o campo magnético é reduzido até zero, alguma magnetização persiste. Esse comportamento é característico de um ímã, que mantém a maior parte de sua magnetização de saturação quando o campo magnético é removido. Para reduzir a magnetização até zero, é necessário aplicar um campo magnético em sentido contrário.

Esse tipo de comportamento denomina-se **histerese**, e as curvas indicadas na Figura 28.29 são chamadas de *ciclos de histerese*. A magnetização e a desmagnetização de um material que possui histerese produz dissipação de energia e a temperatura do material aumenta durante o processo.

Os materiais ferromagnéticos são largamente empregados em eletroímãs, transformadores, motores e geradores, nos quais é desejável a obtenção do mais elevado campo magnético possível para uma dada corrente. Como a histerese produz dissipação de energia, os materiais usados nessas aplicações devem possuir um ciclo de histerese o mais estreito possível. Geralmente, se utiliza o ferro doce; ele possui elevada permeabilidade com uma pequena histerese. Para ímãs permanentes é desejável um ciclo de histerese amplo, com um alto valor de magnetização na ausência de campo externo e um campo inverso elevado para produzir sua desmagnetização. Vários tipos de aço e muitas ligas, tal como a Alnico, são geralmente usadas para a fabricação de ímãs. O campo remanescente nesses materiais, depois que são magnetizados até as vizinhanças da saturação, é normalmente da ordem de 1 T, o que corresponde a uma magnetização remanescente $M = B/\mu_0$ aproximadamente igual a 800000 A/m.

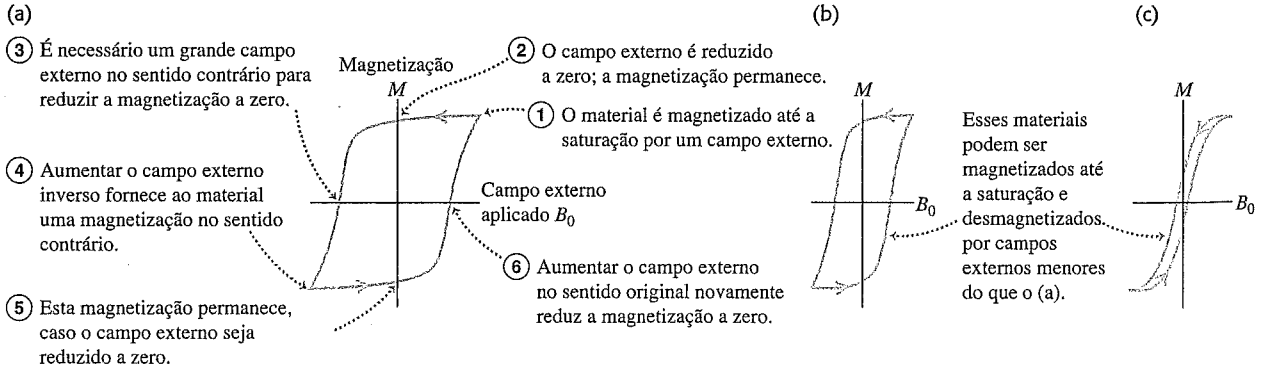


Figura 28.29 Ciclos de histerese. Os materiais (a) e (b) permanecem fortemente magnetizados quando B_0 se reduz a zero. Visto que o material (a) dificilmente se desmagnetiza, ele seria bom para a fabricação de um ímã permanente. Como o material (b) se magnetiza e se desmagnetiza com mais facilidade, ele seria indicado como material para a memória de um computador. O material do tipo (c) seria útil para ser empregado no núcleo de transformadores e de outros dispositivos que usam correntes alternadas, para os quais uma histerese zero seria ideal.

Exemplo 28.12

UM MATERIAL FERROMAGNÉTICO Um material ferromagnético com M aproximadamente igual a 8×10^5 A/m é usado para a fabricação de um ímã. O ímã possui a forma de um cubo com aresta igual a 2 cm. (a) Determine o momento de dipolo magnético do ímã. (b) Estime o campo magnético produzido pelo ímã em um ponto sobre seu eixo situado a uma distância de 10 cm do ímã.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa a relação entre a magnetização e o momento de dipolo magnético, bem como o conceito de que um dipolo magnético produz um campo magnético.

PREPARAR: determinamos o momento de dipolo a partir da magnetização, que equivale ao momento magnético por unidade de volume. Para estimar o campo magnético, aproximamos o ímã como uma espira de corrente com o mesmo momento magnético e usamos os resultados da Seção 28.5.

EXECUTAR: (a) A magnetização é igual ao momento de dipolo magnético por unidade de volume:

$$\mu_{\text{total}} = MV = (8 \times 10^5\ \text{A/m})(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^3 = 6\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

(b) Vimos na Seção 28.5 que o campo magnético sobre o eixo de uma espira circular com momento magnético μ_{total} é dado pela Equação (28.18),

$$B = \frac{\mu_0 \mu_{\text{total}}}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

em que x é a distância ao centro da espira e a é seu raio. Podemos usar essa mesma expressão aqui, exceto pelo fato de que a refere-se ao tamanho do ímã. Estritamente falando, existe uma complicação, porque o ímã não possui a forma de uma espira circular. Contudo, como $x = 10$ cm é uma distância muito maior do que a aresta de 2 cm do ímã, o termo a^2 é muito menor do que x^2 e pode ser desprezado. Portanto

$$B \approx \frac{\mu_0 \mu_{\text{total}}}{2\pi x^3} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(6\ \text{A} \cdot \text{m}^2)}{2\pi(0{,}1\ \text{m})^3}$$
$$= 1 \times 10^{-3}\ \text{T} = 10\ \text{G}$$

que é cerca de dez vezes maior do que o campo magnético da Terra. Esse campo magnético pode facilmente produzir deflexão da agulha de uma bússola.

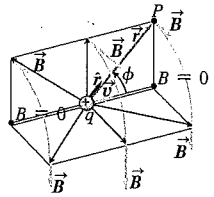
AVALIAR: note que, para calcularmos B, usamos μ_0, e não o valor μ da permeabilidade do material. A razão é que calculamos B em um ponto *fora* do material magnético. Você deve usar μ no lugar de μ_0 somente quando estiver calculando B em um ponto *dentro* do material com permeabilidade magnética K_m, para o qual $\mu = K_m \mu_0$.

Teste sua compreensão da Seção 28.8 Quais dos seguintes materiais são atraídos por um ímã? (i) sódio; (ii) bismuto; (iii) chumbo; (iv) urânio. ▮

Resumo

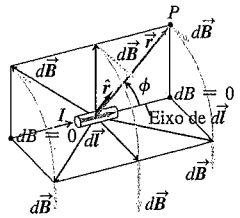
Campo magnético de uma carga em movimento: o campo magnético $\vec{B}$, produzido por uma carga q que se desloca com velocidade $\vec{v}$, depende da distância r da fonte puntiforme (local onde está a carga q) até o ponto do campo P (onde $\vec{B}$ é medido). O campo $\vec{B}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e a $\hat{r}$, que é um vetor unitário dessa direção. O princípio da superposição dos campos magnéticos afirma que o campo magnético total $\vec{B}$ produzido por cargas que se movem é a soma vetorial dos campos gerados pelas cargas individuais. (Veja o Exemplo 28.1.)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \tag{28.2}$$



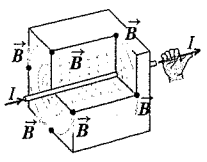
Campo magnético de um condutor que transporta corrente: a Lei de Biot e Savart fornece o campo magnético $d\vec{B}$, criado por um elemento $d\vec{l}$ de um condutor que transporta uma corrente I. O campo $d\vec{B}$ é perpendicular tanto a $d\vec{l}$ quanto a $\hat{r}$, a unidade vetorial do elemento para o ponto de campo. O campo magnético criado por um condutor finito que transporta uma corrente é dado pela integral de $d\vec{B}$ ao longo do comprimento do condutor. (Veja o Exemplo 28.2.)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \tag{28.6}$$



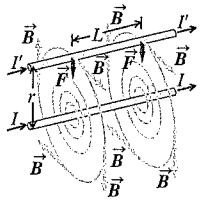
Campo magnético de um condutor longo e retilíneo que transporta corrente: o campo magnético $\vec{B}$ a uma distância r de um condutor cilíndrico longo que transporta uma corrente I possui módulo inversamente proporcional a r. As linhas do campo magnético são circunferências co-axiais com o fio, e o sentido é dado pela regra da mão direita. (Veja os exemplos 28.3 e 28.4.)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{28.9}$$



Força magnética entre condutores que transportam corrente: dois condutores cilíndricos longos e paralelos que transportam correntes se atraem, quando as correntes estão orientadas no mesmo sentido, e se repelem, quando as correntes estão orientadas em sentido contrário. A força magnética por unidade de comprimento entre os condutores depende das correntes I e I' e da distância r que as separa. A definição do ampère é baseada nessa relação. (Veja o Exemplo 28.5.)

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \tag{28.11}$$



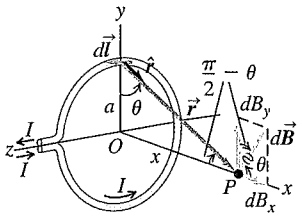
Campo magnético de uma espira de corrente: a lei de Biot e Savart permite calcular o campo magnético produzido por uma espira circular com raio a, que transporta uma corrente I, em um ponto situado a uma distância x ao longo de seu eixo de simetria central. Para N espiras, multiplicamos o campo por N. No centro das espiras, $x = 0$. (Veja o Exemplo 28.6.)

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \tag{28.15}$$

(espira circular)

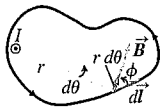
$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \tag{28.17}$$

(centro de N espiras circulares)



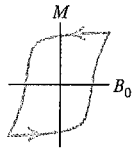
Lei de Ampère: a lei de Ampère afirma que a integral de linha de $\vec{B}$ em torno de qualquer percurso fechado é igual a μ_0 vezes a corrente total que flui através do interior da área delimitada pela curva fechada. O sentido positivo da corrente é dado pela regra da mão direita. (Veja os exemplos 28.7 a 28.10.)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{inte}} \tag{28.20}$$



Campos magnéticos produzidos por distribuições de correntes: na tabela a seguir, apresentamos o módulo do campo magnético produzido por diversas distribuições de correntes. Em cada caso, o condutor transporta uma corrente I.

Materiais magnéticos: na presença de materiais magnéticos, a magnetização do material produz uma contribuição adicional para $\vec{B}$, Para materiais diamagnéticos e paramagnéticos, substitua μ_0 nas expressões do campo magnético por $\mu = K_m\mu_0$, em que μ é a permeabilidade do material e K_m é a permeabilidade relativa. A suscetibilidade magnética χ_m é definida por $\chi_m = K_m - 1$. Na temperatura ambiente, as suscetibilidades magnéticas de materiais paramagnéticos são grandezas pequenas e positivas; para os materiais diamagnéticos, elas são grandezas pequenas e negativas. Para os materiais ferromagnéticos, K_m possui um valor muito grande e não é constante. Alguns materiais ferromagnéticos fornecem ímãs permanentes, retendo a magnetização mesmo depois que o campo magnético externo é removido. (Veja os exemplos 28.11 e 28.12.)



Distribuição de corrente	Ponto do campo magnético	Módulo de campo magnético
Condutor retilíneo infinito	A uma distância r do condutor	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular com raio a	Sobre o eixo da espira	$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	No centro da espira	$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ (para N espiras, multiplique essas equações por N)
Cilindro circular infinito com raio R	No interior do condutor, $r < R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$
	No exterior do condutor, $r > R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenóide longo, com n espiras por unidade de comprimento, enroladas de modo compacto, perto do centro	No interior do solenóide, perto do centro	$B = \mu_0 n I$
	No exterior do solenóide	$B \approx 0$
Solenóide toroidal (toróide) de N espiras com enrolamento compacto	No interior do espaço limitado pelos enrolamentos, a uma distância r ao longo de seu eixo de simetria central	$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	No exterior do espaço limitado pelos enrolamentos	$B \approx 0$

Principais termos

ampère, 252
diamagnético, 265
domínios magnéticos, 265
ferromagnético, 265
histerese, 266
lei de Ampère, 257
lei de Biot e Savart, 247
magnetização, 264
magneton de Bohr, 263
paramagnético, 264
permeabilidade, 264
permeabilidade relativa, 264
ponto da fonte, 244
ponto do campo, 244
princípio de superposição dos campos magnéticos, 246
solenóide toroidal, 261
suscetibilidade magnética, 264

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Não haverá variação no campo magnético. De acordo com o Exemplo 28.9 (Seção 28.7), o campo no interior de um solenóide possui módulo $B = \mu_0 nI$, em que n é o número de espiras do fio por unidade de comprimento. Unir os dois solenóides pelas extremidades duplica tanto o número de espiras quanto o comprimento, portanto o número de espiras por unidade de comprimento não varia.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

28.1 Resposta: (a) (i), (b) (ii) A situação é a mesma que a indicada na Figura 28.2, exceto que o próton superior possui velocidade $\vec{v}$ em vez de $-\vec{v}$. O campo magnético em função do próton inferior é o mesmo que o indicado na Figura 28.2, mas o sentido da força magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre o próton superior é contrário. Logo, a força magnética é de atração. Como a velocidade escalar v é pequena em comparação a c, a força magnética é muito menor em módulo do que a força elétrica de repulsão; e a força resultante continua sendo de repulsão.

28.2 Resposta: (i) e (iii) (empate), (iv), (ii) De acordo com a Equação (28.5), o módulo do campo dB em função de um elemento de corrente de comprimento dl que transporta uma corrente I é $dB = (\mu/4\pi)(I\,dl \text{ sen } \phi/r^2)$. Nessa expressão, r é a distância do elemento para o ponto de campo, e ϕ é o ângulo entre o sentido da corrente e um vetor do elemento de corrente para o ponto de campo. Os quatro pontos estão à mesma distância $r = L$ do elemento de corrente, portanto o valor de dB é proporcional ao valor de sen ϕ. Para os quatro pontos, o ângulo é (i) $\phi = 90°$, (ii) $\phi = 0$, (iii) $\phi = 90°$ e (iv) $\phi = 45°$, portanto, os valores de sen ϕ são (i) 1, (ii) 0, (iii) 1 e (iv) $1/\sqrt{2}$.

28.3 Resposta: A Esta orientação fará a corrente fluir no sentido horário em torno do circuito. Logo, a corrente fluirá para o sul pelo fio que fica abaixo da bússola. Pela regra da mão direita para o campo magnético produzido por um condutor longo e retilíneo que transporta corrente, isso produzirá um campo magnético que aponta para a esquerda na posição da bússola (que fica acima do fio). A combinação do campo magnético da Terra, orientado para o norte, e o campo orientado para oeste, produzido pela corrente, fornece um campo magnético resultante orientado para noroeste. Portanto, a agulha da bússola vai oscilar no sentido anti-horário para se alinhar a esse campo.

28.4 Respostas: (a) (i), (b) (iii), (c) (ii), (d) (iii) A corrente flui no mesmo sentido em espiras adjacentes da bobina, portanto, as forças magnéticas entre essas espiras são de atração. A corrente flui em sentidos contrários sobre lados opostos da mesma espira, portanto, as forças magnéticas entre esses lados são de repulsão. Assim, as forças magnéticas sobre as espiras do solenóide exercem compressão sobre elas no sentido ao longo do seu eixo, mas as afastam radialmente. As forças *elétricas* são nulas porque o fio é eletricamente neutro, tanto com carga positiva quanto negativa.

28.5 Respostas: (a) (ii), (b) (v) O vetor $d\vec{B}$ está no sentido de $d\vec{l} \times \vec{r}$. Para um segmento no eixo negativo Oy, $d\vec{l} = -\hat{k}\,dl$ aponta no sentido negativo de Oz e $\vec{r} = x\hat{\imath} + a\hat{\jmath}$. Portanto, $d\vec{l} \times \vec{r} = (a\,dl)\hat{\imath} - (x\,dl)\hat{\jmath}$, que possui um componente positivo de x, um componente negativo de y e um componente nulo de z. Para um segmento no eixo negativo Oz, $d\vec{l} = \hat{\jmath}\,dl$ aponta no sentido positivo de Oy e $\vec{r} = x\hat{\imath} + a\hat{k}$. Portanto, $d\vec{l} \times \vec{r} = (a\,dl)\hat{\imath} - (x\,dl)\hat{k}$, que possui um componente positivo de x, um componente nulo de y e um componente negativo de z.

28.6 Resposta: (ii) Imagine executar a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ao longo de um percurso de integração que segue no sentido horário, em torno da linha de campo magnético escura. Em cada ponto do percurso, o campo magnético $\vec{B}$ e o segmento infinitesimal $d\vec{l}$ são ambos tangentes ao percurso, portanto $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ é positivo em cada ponto e a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ também é positiva. De acordo com a lei de Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{inte}}$ e a regra da mão direita, o percurso de integração confina uma corrente orientada para fora do plano da página. Não há nenhuma corrente no espaço vazio fora do ímã, portanto, deve haver correntes dentro do ímã (veja Seção 28.8).

28.7 Resposta: (iii) Por simetria, qualquer campo $\vec{B}$ fora do cabo deve circular em torno do cabo, com linhas de campo circular, como aquelas que circundam o condutor cilíndrico maciço da Figura 28.20. Escolha um percurso de integração, como o indicado na Figura 28.20, com raio $r > R$, de modo que o percurso envolva completamente o cabo. Como no Exemplo 28.8, a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para esse percurso possui módulo $B(2\pi r)$. Pela lei de Ampère, isso é igual a $\mu_0 I_{\text{inte}}$. A corrente resultante confinada I_{inte} é igual a zero porque inclui duas correntes de mesmo módulo, mas com sentidos contrários: uma no fio central e a outra no cilindro oco. Assim, $B(2\pi r) = 0$ e, portanto, $B = 0$ para qualquer valor de r fora do cabo. (O campo é diferente de zero *dentro* do cabo; veja Exercício 28.37.)

28.8 Resposta: (i), (iv) Sódio e urânio são materiais paramagnéticos e, portanto, são atraídos por um ímã, ao passo que bismuto e chumbo são materiais diamagnéticos, que são repelidos por um ímã (veja a Tabela 28.1).

Questões para discussão

Q28.1 Um tópico de interesse nas pesquisas de física é a busca (por enquanto sem êxito) de um pólo magnético isolado, chamado de *monopolo* magnético. Se tal entidade fosse descoberta, como poderia ser reconhecida? Quais seriam suas propriedades?

Q28.2 Um feixe de partículas carregadas emitidas pelo Sol durante períodos de atividades solar criam uma perturbação no campo magnético da Terra. Como isso ocorre?

Q28.3 No texto, discutimos o campo magnético produzido por um fio retilíneo infinito que conduz uma corrente. Naturalmente, *nenhum* objeto pode possuir um comprimento infinito. Como saber se um dado fio possui comprimento suficiente para que possa ser considerado infinito?

Q28.4 Dois condutores paralelos que transportam correntes com o mesmo sentido se atraem mutuamente. Caso eles possam se aproximar um do outro, as forças de atração realizam trabalho. De onde provém a energia? No Capítulo 27, afirmamos que forças magnéticas sobre cargas que se movem não realizam trabalho; isso contraria essa afirmação? Explique.

Q28.5 Os pares de fios que transportam correntes para dentro ou para fora de equipamentos eletrônicos com fontes de tensão, algumas vezes, são torcidos um com o outro para ajudar a reduzir o efeito do campo magnético. Por quê?

Q28.6 Suponha que você possua três fios paralelos longos, dispostos de modo que cada seção reta ocupe os vértices de um triângulo equilátero. É possível distribuir as correntes de modo que os três fios se atraiam mutuamente? Eles podem se repelir mutuamente? Explique.

Q28.7 Ao deduzir a força que atua sobre um dos fios longos que conduzem correntes na Seção 28.4, por que usamos o campo magnético produzido por apenas um dos fios? Ou seja, por que não usamos o campo magnético *total* produzido por *ambos* os fios?

Q28.8 Duas espiras circulares coplanares concêntricas, com diâmetros diferentes, conduzem correntes no mesmo sentido. Descreva a natureza das forças sobre a espira interna e sobre a espira externa.

Q28.9 Produzimos uma corrente através das espiras helicoidais de uma mola. As espiras se aproximam como se a mola fosse comprimida. Por quê?

Q28.10 Quais são as vantagens e desvantagens relativas da lei de Biot e Savart e da lei de Ampère para os cálculos práticos de campo magnético?

Q28.11 As linhas de campo magnético nunca possuem um início nem um ponto final. Use essa observação para explicar por que é razoável aceitar que o campo magnético de um toróide fica confinado em seu interior, enquanto o campo magnético de um solenóide retilíneo *deve* possuir algum campo magnético em seu exterior.

Q28.12 Se o módulo do campo magnético situado a uma distância R de um fio longo, retilíneo e que carrega corrente é B, a que distância do fio o campo terá módulo equivalente a $3B$?

Q28.13 Dois fios muito longos e paralelos carregam correntes iguais em sentidos contrários. (a) Há algum lugar onde seus campos magnéticos se cancelam por completo? Se sim, onde? Se não, por que não? (b) Em que a resposta no item (a) mudaria, se as correntes tivessem o mesmo sentido?

Q28.14 No circuito indicado na Figura 28.30, quando a chave S é subitamente fechada, o fio L é puxado em direção ao fio inferior que transporta corrente I. Qual (a ou b) é o terminal positivo da pilha? Como você sabe?

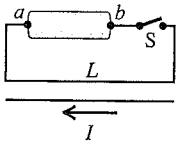


Figura 28.30 Questão Q28.14.

Q28.15 Um anel metálico carrega uma corrente que produz um campo magnético B_0 no centro do anel e um campo B no ponto P, situado a uma distância x do centro, ao longo do eixo do anel. Para o caso em que o raio do anel seja duplicado, determine o campo magnético no centro. O campo no ponto P mudará pelo mesmo fator? Por quê?

Q28.16 Por que a permeabilidade magnética de um material paramagnético deve diminuir quando sua temperatura aumenta?

Q28.17 Quando um ímã fica suspenso sobre um recipiente com ar líquido, algumas gotas são atraídas sobre seus pólos. As gotas contêm somente oxigênio líquido; embora o nitrogênio seja o principal constituinte do ar, ele não é atraído para os pólos do ímã. Explique o que isso pode informar sobre as suscetibilidades magnéticas do oxigênio e do nitrogênio; e por que um dos pólos de um ímã na temperatura ambiente não atrai moléculas do *gás* oxigênio.

Q28.18 Que características da estrutura atômica são relevantes para determinar se um elemento é diamagnético ou paramagnético? Explique.

Q28.19 A suscetibilidade magnética de um material paramagnético depende fortemente da temperatura, porém a de um material diamagnético quase não depende da temperatura. Qual é a causa dessa diferença? Explique.

Q28.20 Um cilindro de ferro é colocado de modo que possa girar livremente em torno do próprio eixo. Inicialmente, o cilindro está em repouso; a seguir, um campo magnético é aplicado ao cilindro, de modo que ele adquire uma magnetização paralela a seu eixo. Se o sentido do campo magnético externo for invertido, o sentido da magnetização também se inverterá, e o cilindro começará a girar em torno de seu eixo. (Esse fenômeno denomina-se *efeito Einstein-de Haas*.) Explique por que o cilindro começa a girar.

Q28.21 Na Seção 27.7 afirmamos que não existe nenhuma força resultante aplicada a uma espira de corrente imersa em um campo magnético uniforme, somente o torque é diferente de zero. Contudo, para um material magnético, as espiras de correntes atômicas certamente *sofrem* a ação de uma força resultante em tais campos magnéticos. Como você resolve essa discrepância?

Q28.22 Mostre que as unidades $A \cdot m^2$ e J/T para o magneton de Bohr são equivalentes.

Exercícios

Seção 28.1 Campo magnético de uma carga em movimento

28.1 Uma carga puntiforme de $+6{,}0\ \mu C$ se move com velocidade constante igual a $8{,}0 \times 10^6$ m/s ao longo do eixo $+Oy$ de um sistema de referência. No momento em que ela está na origem do sistema de referência, qual é o campo magnético $\vec{B}$ que ela produz nos seguintes pontos: (a) $x = 0{,}500$ m, $y = 0$, $z = 0$; (b) $x = 0$, $y = -0{,}500$ m, $z = 0$; (c) $x = 0$, $y = 0$, $z = +0{,}500$ m; (d) $x = 0$, $y = -0{,}500$ m, $z = +0{,}500$ m?

28.2 Campos no interior do átomo. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, o elétron se move em uma órbita circular de raio $5{,}3 \times 10^{-11}$ com uma velocidade escalar de $2{,}2 \times 10^6$ m/s. Supondo que observamos o átomo de um ponto de vista tal que a órbita do elétron se situe no plano do papel e o elétron se mova no sentido horário, determine o módulo, a direção e o sentido dos

campos elétrico e magnético que o elétron produz no local do núcleo (tratado como um ponto).

28.3 Um elétron se move a 0,100c, como indica a Figura 28.31. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético que esse elétron produz nos seguintes pontos, cada qual a 2,0 μm do elétron: (a) pontos A e B; (b) ponto C; (c) ponto D.

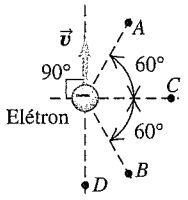


Figura 28.31 Exercício 28.3.

28.4 Uma partícula alfa (carga $+2e$) e um elétron se movem em sentidos contrários a partir de um mesmo ponto, cada qual com velocidade escalar de $2{,}50 \times 10^5$ m/s (Figura 28.32). Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético total que essas cargas produzem no ponto P, que está a 1,75 mm de cada carga.

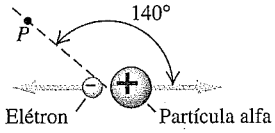


Figura 28.32 Exercício 28.4.

28.5 Uma carga $-4{,}80$ μC está se deslocando a uma velocidade escalar constante, de $6{,}80 \times 10^5$ m/s, no sentido positivo de Ox em relação a um plano de referência. No instante em que a carga puntiforme está na origem, qual é o vetor do campo magnético que ela produz nos seguintes pontos: (a) $x = 0{,}500$ m, $y = 0$, $z = 0$; (b) $x = 0$, $y = 0{,}500$ m, $z = 0$; (c) $x = 0{,}500$ m, $y = 0{,}500$ m, $z = 0$; (d) x = 0, $y = 0$, $z = 0{,}500$ m?

28.6 Duas cargas puntiformes positivas, $q = +8{,}0$ μC e $q' = +3{,}0$ μC, se movem em relação a um observador situado no ponto P, como indica a Figura 28.33. A distância d é igual a 0,120 m, $v = 4{,}50 \times 10^6$ m/s e $v' = 9{,}0 \times 10^6$ m/s. (a) Quando as cargas estão nos pontos indicados na figura, qual é o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante que elas produzem no ponto P? (b) Quais são o módulo, a direção e o sentido das forças elétricas e magnéticas que cada carga exerce sobre a outra, e qual é a razão entre o módulo da força elétrica e o módulo da força magnética? (c) Se o sentido de $\vec{v}'$ for invertido, de modo que ambas as cargas se desloquem no mesmo sentido, quais são o módulo, a direção e o sentido das forças magnéticas que as duas cargas exercem entre si?

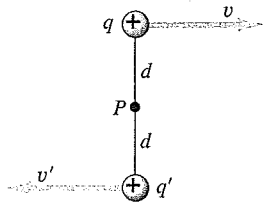


Figura 28.33 Exercícios 28.6 e 28.7.

28.7 A Figura 28.33 mostra duas cargas puntiformes, q e q', que se movem em relação a um observador situado no ponto P. Suponha que a carga inferior seja *negativa*, com $q' = -q$. (a) Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante que elas produzem no ponto P quando (i) $v' = v/2$; (ii) $v' = v$; (iii) $v' = 2v$. (b) Determine a direção e o sentido da força magnética que a carga q exerce sobre q' e a direção e o sentido da força magnética que q' exerce sobre q. (c) Para $3{,}0 \times 10^5$, qual é a razão entre o módulo da força magnética entre as cargas e o módulo da força de Coulomb que existe entre as cargas?

28.8 Um elétron e um próton se movem a 845 km/s cada um, em trajetórias perpendiculares, como indica a Figura 28.34. No instante em que eles estão nas posições indicadas na figura, determine o módulo, a direção e o sentido (a) do campo magnético total que eles produzem na origem; (b) o campo magnético que o elétron produz na localização do próton; (c) a força elétrica total e a força magnética total que o elétron exerce sobre o próton.

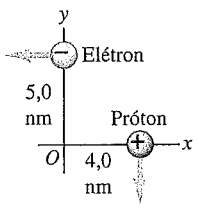


Figura 28.34 Exercício 28.8.

Seção 28.2 Campo magnético de um elemento de corrente

28.9 Um fio retilíneo transporta uma corrente de 10,0 A (Figura 28.35). $ABCD$ é um retângulo com um ponto D no meio de um segmento de 1,10 mm do fio e um ponto C no fio. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético produzido por esse segmento (a) no ponto A; (b) no ponto B; (c) no ponto C.

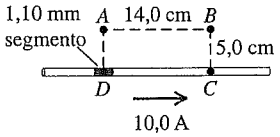


Figura 28.35 Exercício 28.9.

28.10 Um fio retilíneo longo, que transporta uma corrente de 200 A, atravessa uma caixa cúbica de madeira, entrando e saindo através de furos situados nos centros de duas faces opostas (Figura 28.36). A aresta da caixa é igual a 20,0 cm. Considere um comprimento dl do fio igual a 0,100 cm no centro da caixa. Calcule o módulo dB do campo magnético produzido por esse elemento nos pontos a, b, c, d, e, indicados na Figura 28.36. Os pontos a, c e d estão nos centros das faces do cubo; o ponto b está no meio de uma das arestas; e o ponto e está sobre um vértice. Copie a figura e mostre as direções e os módulos relativos de cada vetor do campo magnético. (*Nota*: suponha que dl seja pequeno em comparação às distâncias entre o elemento de corrente e o ponto onde o campo magnético é calculado.)

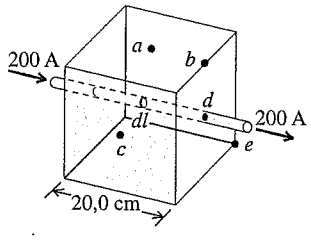


Figura 28.36 Exercício 28.10.

28.11 Um fio retilíneo longo está sobre o eixo Oz e transporta uma corrente de 4,0 A no sentido $+z$. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético produzido por um segmento do fio de 0,500 mm, centralizado na origem nos seguintes pontos: (a) $x = 2{,}0$ m, $y = 0$, $z = 0$; (b) $x = 0$, $y = 2{,}0$ m, $z = 0$; (c) $x = 2{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m, $z = 0$; (d) $x = 0$, $y = 0$, $z = 2{,}0$ m.

28.12 Dois fios paralelos estão separados por uma distância de 5,0 cm e transportam correntes em sentidos contrários, como indica a Figura 28.37. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético no ponto P produzido por dois segmentos de 1,50 mm do fio que se opõem entre si e estão a 8,0 cm do ponto P.

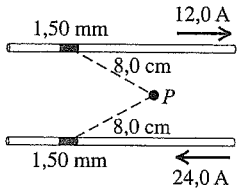


Figura 28.37 Exercício 28.12.

28.13 Um fio que transporta uma corrente de 28,0 A é dobrado até formar um ângulo reto. Considere dois segmentos de 2,0 mm de fio, cada qual a 3,0 cm da dobra (Figura 28.38). Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético que esses dois segmentos produzem no ponto P, eqüidistante de ambos.

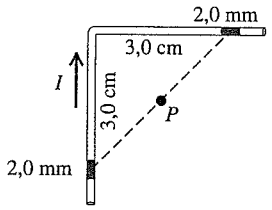


Figura 28.38 Exercício 28.13.

28.14 Uma espira de fio quadrada com 10,0 cm em cada lado transporta uma corrente de 15,0 A, no sentido horário. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético no seu centro em função dos quatro segmentos de 1,20 mm de fio no meio de cada lado.

Seção 28.3 Campo magnético de um condutor retilíneo transportando uma corrente

28.15 O campo magnético de um relâmpago. Os relâmpagos podem transportar correntes de até 20 kA, aproximadamente. Podemos modelar tal corrente como o equivalente de um fio muito longo e retilíneo. (a) Se você tiver o infortúnio de estar a 5,0 m de distância de um relâmpago, a que tamanho de campo magnético você ficaria exposto? (b) Como esse campo se compara a outro, em que você se expõe estando a 5,0 cm de distância de uma corrente doméstica longa e retilínea de 10 A?

28.16 Um fio muito longo, retilíneo e horizontal transporta uma corrente em que $3{,}50 \times 10^{18}$ elétrons por segundo passam por um dado ponto ao se deslocarem de oeste para leste. Qual o módulo, a direção e o sentido do campo magnético que esse fio produz em um ponto situado 4,0 cm diretamente acima dele?

28.17 (a) Quanta corrente um fio longo e retilíneo teria que transportar para que o campo magnético situado a 2,0 cm do fio seja igual a 1,0 G (comparável ao campo magnético da Terra, orientado para o norte)? (b) Considerando que o fio é horizontal, com a corrente se deslocando de leste para oeste, em que locais o campo magnético do fio aponta no mesmo sentido do componente horizontal do campo magnético da Terra? (c) Repita o item (b) considerando o fio vertical, com a corrente se deslocando de baixo para cima.

28.18 Dois fios retilíneos longos, um situado acima do outro, estão em uma direção paralela ao eixo Ox; e a distância entre eles é igual a $2a$. Considere um eixo $+Oy$ situado no plano dos fios e orientado do fio inferior para o fio superior. Cada fio conduz uma corrente I no sentido $+Ox$. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante produzido pelos fios nos seguintes pontos sobre o plano dos fios: (a) na metade da distância entre os fios; (b) a uma distância a acima do fio superior; (c) a uma distância a abaixo do fio inferior.

28.19 Um fio retilíneo longo está situado sobre o eixo Oy e conduz uma corrente $I = 8{,}0$ A no sentido $-Oy$ (Figura 28.39). Além do campo magnético produzido pelo fio, existe um campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ com módulo igual a $1{,}50 \times 10^{-6}$ T apontando no sentido $+Ox$. Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo magnético total nos seguintes pontos sobre o plano xz: (a) $x = 0$, $z = 1{,}0$ m; (b) $x = 1{,}0$ m, $z = 0$; (c) $x = 0$, $z = -0{,}25$ m.

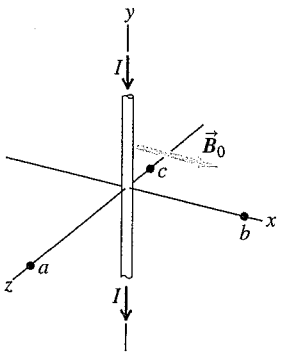


Figura 28.39 Exercício 28.19.

28.20 Efeito de uma linha de transmissão. Dois excursionistas estão fazendo a leitura de uma bússola, situada embaixo de um fio de uma linha de transmissão, que está a uma altura de 5,50 m acima do solo e conduz uma corrente igual a 800 A, em uma direção horizontal apontando do norte para o sul. (a) Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo magnético em um ponto do solo diretamente sob o condutor. (b) Um dos excursionistas sugere que se faça a leitura da bússola a uma distância de 50 m desse ponto, para evitar que a leitura seja afetada pela corrente do fio. Sabendo que o módulo do campo magnético da Terra é da ordem de $0{,}5 \times 10^{-4}$ T, essa corrente causa algum problema real na leitura?

28.21 Dois fios longos, retilíneos e paralelos estão separados por uma distância de 10,0 cm e transportam correntes iguais de 4,0 A no

mesmo sentido, como indica a Figura 28.40. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético (a) no ponto P_1, que é o ponto médio entre os fios; (b) no ponto P_2, 25,0 cm à esquerda de P_1; (c) no ponto P_3, 20,0 cm diretamente acima de P_1.

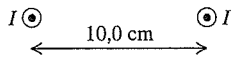


Figura 28.40 Exercício 28.21.

28.22 Duas linhas de transmissão longas e paralelas, separadas por uma distância de 40,0 cm, carregam correntes de 25,0 A e 75,0 A. Determine todos os locais em que o campo magnético líquido de ambos os fios é igual a zero, caso essas correntes estejam (a) no mesmo sentido e (b) em sentidos contrários.

28.23 Quatro linhas de força longas e paralelas transportam correntes de 100 A. Um diagrama de seção reta dessas linhas é um quadrado, com 20,0 cm de cada lado. Para cada um dos três casos indicados na Figura 28.41, calcule o campo magnético no centro do quadrado.

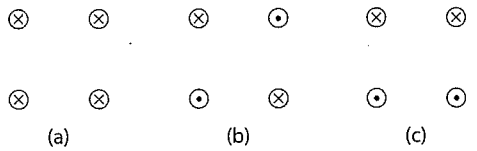


Figura 28.41 Exercício 28.23.

28.24 Quatro fios longos, que transportam corrente no mesmo plano, se cruzam para formar um quadrado com 40,0 cm de cada lado, como indica a Figura 28.42. Determine o módulo, a direção e o sentido da corrente I, de modo que o campo magnético no centro do quadrado seja igual a zero.

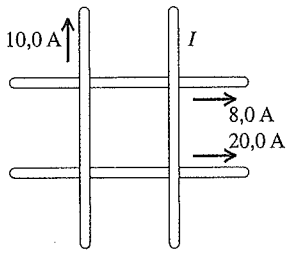


Figura 28.42 Exercício 28.24.

Seção 28.4 Força entre condutores paralelos

28.25 A distância entre dois fios longos paralelos é igual a 0,400 m (Figura 28.43). As correntes I_1 e I_2 possuem os sentidos indicados. (a) Calcule o módulo da força total que cada fio exerce sobre 1,20 m de comprimento do outro. A força é de atração ou de repulsão? (b) As correntes dobram, de modo que I_1 torna-se igual a 10,0 A e I_2 torna-se igual a 4,0 A. Qual é agora o módulo da força total que cada fio exerce sobre 1,20 m de comprimento do outro?

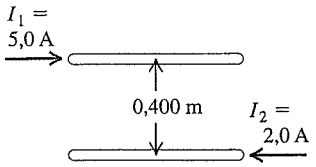


Figura 28.43 Exercício 28.25.

28.26 A distância entre dois fios longos paralelos é de 2,50 cm. A força por unidade de comprimento que cada fio exerce sobre o outro é igual a $4,0 \times 10^{-5}$ N/m e os fios se repelem mutuamente. A corrente em um dos fios é de 0,600 A. (a) Qual é a corrente no segundo fio? (b) As correntes possuem o mesmo sentido ou têm sentidos contrários?

28.27 **Cabos para uma lâmpada.** Os fios que compõem o cabo elétrico de uma lâmpada doméstica geralmente ficam a uma distância de 3,0 mm de um centro a outro; e transportam correntes iguais em sentidos contrários. Se o cabo transporta corrente para uma lâmpada de 100 W, conectada através de uma diferença de potencial de 120 V, qual força por metro cada fio no interior do cabo exerce sobre o outro? A força é de atração ou repulsão? Essa força é grande o suficiente para que deva ser considerada no projeto de cabos para uma lâmpada? (Modele o fio da lâmpada como se fosse um fio longo e retilíneo.)

28.28 Três fios paralelos conduzem correntes de módulo igual a I, com os sentidos indicados na Figura 28.44. Sabendo que a distância entre dois fios adjacentes é igual a d, calcule o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante por unidade de comprimento sobre cada fio.

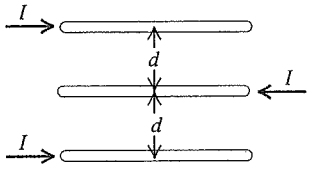


Figura 28.44 Exercício 28.28.

28.29 Um fio horizontal longo AB encontra-se apoiado sobre uma mesa e conduz uma corrente I. Um fio horizontal longo CD está verticalmente sobre o fio AB e pode deslizar para cima ou para baixo ao longo de duas guias metálicas verticais C e D (Figura 28.45). O fio CD está conectado por meio de contactos deslizantes a outro fio que também conduz uma corrente I, porém de sentido contrário à corrente do fio AB. A massa por unidade de comprimento do fio CD é igual a λ. Na posição de equilíbrio, qual é a altura h do fio CD, supondo que a força magnética sobre o fio CD seja inteiramente produzida pela corrente do fio AB?

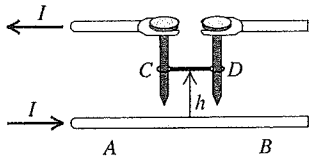


Figura 28.45 Exercício 28.29.

Seção 28.5 Campo magnético de uma espira circular

28.30 Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante produzido no ponto P pela corrente que passa na seção semicircular do fio indicado na Figura 28.46. (*Sugestão*: a corrente que passa na seção retilínea do fio produz algum campo magnético no ponto P?)

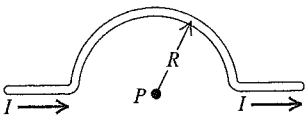


Figura 28.46 Exercício 28.30.

28.31 Calcule o módulo do campo magnético resultante produzido no ponto P da Figura 28.47 em função de R, I_1 e I_2. O que sua expressão fornece quando $I_1 = I_2$?

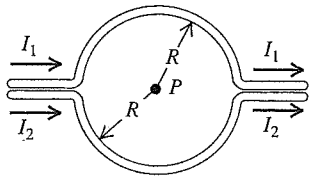


Figura 28.47 Exercício 28.31.

28.32 Uma bobina circular com 800 espiras enroladas de modo compacto possui raio de 2,40 cm. (a) Qual deve ser a corrente que passa pela bobina, supondo que o campo magnético no centro da bobina é igual a 0,0580 T? (b) A que distância x do centro da bobina, sobre o eixo da bobina, o campo magnético é igual à metade do seu valor no centro?

28.33 Uma bobina circular com 600 espiras enroladas de modo compacto possui diâmetro igual a 4,0 cm e conduz uma corrente de 0,500 A. Qual é o módulo do campo magnético (a) no centro da bobina? (b) em um ponto sobre o eixo da bobina afastado 8,0 cm de seu centro?

28.34 Uma bobina circular com espiras enroladas de modo compacto possui diâmetro igual a 6,0 cm e conduz uma corrente de 2,50 A. Quantas espiras ela deve ter para que o módulo do campo magnético seja de $6{,}39 \times 10^{-4}$ T em um ponto sobre o eixo da bobina afastado 6,0 cm de seu centro?

Seção 28.6 Lei de Ampère

28.35 No interior de uma curva fechada existem diversos condutores. A integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ em torno da curva é igual a $3{,}83 \times 10^{-4}$ T · m. (a) Qual é a corrente total que passa nos condutores? (b) Se você fizesse a integral percorrendo a curva em sentido contrário, qual seria o valor da integral? Explique.

28.36 A Figura 28.48 mostra a seção reta de diversos condutores que conduzem correntes que atravessam o plano da figura. Os sentidos das correntes são indicados na figura e os módulos são $I_1 = 4{,}0$ A, $I_2 = 6{,}0$ A e $I_3 = 2{,}0$ A. Quatro trajetórias indicadas pelas letras de a até d são mostradas na figura. Qual é o valor da integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para cada trajetória? Para cada integral, escolha um percurso no sentido anti-horário. Explique suas respostas.

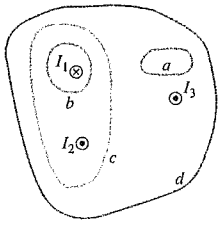


Figura 28.48 Exercício 28.36.

Seção 28.7 Aplicações da lei de Ampère

28.37 Cabo coaxial. Um condutor sólido com raio a é suportado por discos isolantes no centro de um tubo condutor com raio interno b e raio externo c (Figura 28.49). O condutor central e o tubo transportam correntes com o mesmo módulo I, porém com sentidos contrários. As correntes são distribuídas uniformemente ao longo da seção reta de cada condutor. Deduza uma expressão para o módulo do campo magnético (a) nos pontos no exterior do condutor sólido central, porém no interior do tubo ($a < r < b$); (b) nos pontos no exterior do tubo ($r > c$).

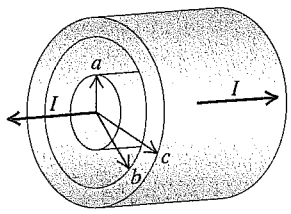


Figura 28.49 Exercício 28.37.

28.38 Repita o Exercício 28.37 para o caso no qual a corrente no condutor sólido central é I_1, a corrente no tubo é I_2 e as correntes possuem o mesmo sentido em vez de sentidos contrários.

28.39 Um fio cilíndrico longo e retilíneo, de raio R, transporta uma corrente uniformemente distribuída sobre sua seção reta. Em qual local o campo magnético produzido por essa corrente é igual à metade do seu valor máximo? Considere pontos no interior e no exterior do fio.

28.40 Um solenóide longo de comprimento 15,0 cm e raio 2,50 cm possui 600 espiras enroladas de modo compacto. A corrente que passa nas espiras é igual a 8,0 A. Determine o campo magnético em um ponto situado nas proximidades do centro do solenóide.

28.41 Um solenóide é projetado para produzir um campo magnético igual a 0,0270 T em seu centro. Ele possui raio de 1,40 cm, comprimento de 40,0 cm e o fio conduz uma corrente máxima de 12,0 A. (a) Qual é o número mínimo de espiras que o solenóide deve possuir? (b) Qual é o comprimento total do fio necessário?

28.42 Como um técnico em eletricidade, você está projetando um grande solenóide para produzir um campo magnético uniforme de 0,150 T próximo ao centro do solenóide. Você possui fio suficiente para 4000 espiras. Esse solenóide deve ter 1,40 m de comprimento e 20,0 cm de diâmetro. Qual é a corrente necessária para produzir o campo exigido?

28.43 Um campo magnético de 37,2 T foi obtido no Francis Bitter National Magnetic Laboratory, do MIT. Determine a corrente necessária para atingir esse campo (a) a 2,0 cm de um fio longo e retilíneo; (b) no centro de uma bobina circular de raio igual a 42,0 cm com 100 espiras; (c) próximo do centro de um solenóide com raio de 2,40 cm, comprimento de 32,0 cm e 40000 espiras.

28.44 Um solenóide toroidal (veja Exemplo 28.10) possui raio interno $r_1 = 15{,}0$ cm e raio externo $r_2 = 18{,}0$ cm. O solenóide possui 250 espiras e conduz uma corrente de 8,50 A. Qual é o módulo do campo magnético em um ponto cuja distância ao centro do toróide é (a) 12,0 cm? (b) 16,0 cm? (c) 20,0 cm?

28.45 Um anel de madeira com diâmetro médio igual a 14,0 cm é enrolado de modo compacto com 600 espiras, formando um enrolamento toroidal. Determine o campo magnético em um ponto situado no centro da seção reta das espiras quando a corrente que passa no enrolamento é de 0,650 A.

Seção 28.8 Materiais magnéticos

28.46 Um solenóide toroidal com 400 espiras possui um raio médio igual a 6,0 cm e conduz uma corrente de 0,25 A. A permeabilidade relativa do núcleo é igual a 80. (a) Qual é o campo magnético no núcleo? (b) Que parte do campo magnético resultante é produzido pelas correntes atômicas?

28.47 Um solenóide toroidal com 500 espiras é constituído por um enrolamento sobre um anel cujo raio médio é igual a 2,90 cm. Calcule qual deve ser a corrente no enrolamento necessária para

produzir um campo magnético de 0,350 T no anel, (a) supondo que o anel seja de ferro recozido ($K_m = 1400$); (b) supondo que o anel seja de aço com silício ($K_m = 5200$).

28.48 A corrente que passa nos enrolamentos de um solenóide toroidal é de 2,400 A. Existem 500 espiras e seu raio médio é igual a 25,0 cm. O toróide está preenchido com um material magnético. Verifica-se que o campo magnético no interior das espiras é igual a 1,940 T. Calcule (a) a permeabilidade relativa; (b) a suscetibilidade magnética do material que preenche o toróide.

28.49 Um solenóide longo, com 60 espiras por centímetro, conduz uma corrente igual a 0,15 A. O fio das espiras é enrolado em torno de um núcleo de aço com silício ($K_m = 5200$). (O fio do solenóide é envolvido por uma camada de isolante, de modo que não flua nenhuma corrente para o núcleo.) (a) Para um dado ponto no interior do núcleo, determine o módulo (i) do campo magnético $\vec{B}_0$ produzido pela corrente que passa no solenóide, (ii) da magnetização $\vec{M}$ e (iii) do campo magnético resultante $\vec{B}$. (b) Faça um esboço mostrando o solenóide e o núcleo e indique as direções e os sentidos dos vetores $\vec{B}_0$, $\vec{M}$ e $\vec{B}$ no interior do núcleo do solenóide.

28.50 Lei de Curie. Na tabela abaixo, mostramos resultados de medidas experimentais da suscetibilidade magnética de uma liga de alume de ferro e amônio. Faça um gráfico de $1/\chi_m$ contra a temperatura em Kelvin. O material obedece à lei de Curie? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o valor da constante de Curie?

T (°C)	χ_m
–258,15	129×10^{-4}
–173	$19{,}4 \times 10^{-4}$
–73	$9{,}7 \times 10^{-4}$
27	$6{,}5 \times 10^{-4}$

Problemas

28.51 Duas cargas puntiformes, $q = +8{,}0\ \mu C$ e $q' = -5{,}0\ \mu C$ se movem em relação a um sistema de referência como indicado na Figura 28.50 com velocidades $v = 9{,}0 \times 10^4$ m/s e $v' = 6{,}50 \times 10^4$ m/s. Quando as cargas puntiformes estão nos locais indicados na figura, qual é a força magnética (módulo, direção e sentido) que a carga q' exerce sobre q?

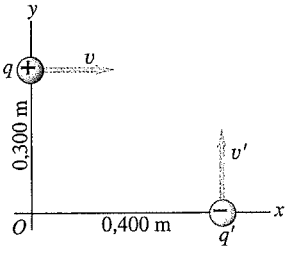


Figura 28.50 Problema 28.51.

28.52 Um fio retilíneo longo transporta uma corrente de 2,50 A. Um elétron se desloca nas vizinhanças do fio. No instante em que o elétron está a uma distância do fio igual a 4,50 cm e se desloca paralelamente ao fio, em sentido contrário ao da corrente, com velocidade igual a $6{,}0 \times 10^4$ m/s, qual é o módulo, a direção e o sentido da força magnética que o campo magnético da corrente exerce sobre o elétron?

28.53 Um fio longo e retilíneo transporta uma corrente de 25,0 A. Um elétron é disparado paralelamente a esse fio com uma velocidade de 250 km/s, no mesmo sentido da corrente, a 2,0 cm do fio. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração inicial do elétron. (b) Qual deve ser o módulo, a direção e o sentido de um campo elétrico uniforme que permitirá ao elétron continuar a se deslocar paralelamente ao fio? (c) É necessário incluir os efeitos da gravidade? Justifique sua resposta.

28.54 Na Figura 28.51, a ramificação da bateria no circuito está muito distante dos dois segmentos horizontais que contêm dois resistores. Esses segmentos horizontais estão separados por uma distância de 5,0 cm e são muito mais longos do que 5,0 cm. Um próton (carga $+e$) é disparado a 650 km/s de um ponto médio entre os dois segmentos horizontais superiores do circuito. A velocidade inicial do próton está no plano do circuito e orientado para o fio superior. Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética inicial que atua sobre o próton.

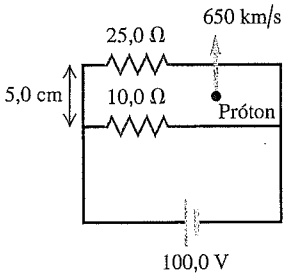


Figura 28.51 Problema 28.54.

28.55 Duas espiras circulares idênticas, com 40,0 cm de diâmetro cada uma, transportam uma corrente de 1,50 A no mesmo sentido. Essas espiras são paralelas entre si, e a distância entre elas é de 25,0 cm. A linha *ab* é normal ao plano das espiras e passa pelos seus centros. Um próton é disparado a 2400 km/s perpendicularmente à linha *ab* de um ponto médio entre os centros das espiras. Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética que essas espiras exercem sobre o próton logo após ele ser disparado.

28.56 Dois fios muitos longos e retilíneos transportam correntes, como indica a Figura 28.52. Para cada caso, determine todos os locais em que o campo magnético resultante é igual a zero.

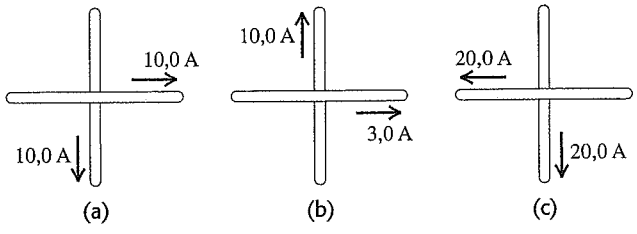


Figura 28.52 Problema 28.56.

28.57 Uma carga puntiforme negativa $q = -7{,}20$ mC se move em relação a um sistema de referência. Quando a carga puntiforme está na origem, o campo magnético que ela produz no ponto $x = 25{,}0$ cm, $y = 0$, $z = 0$ é dado por $\vec{B} = (6{,}0\ \mu T)\hat{j}$ e sua velocidade é igual a 800 km/s. (a) Quais são os componentes x, y e z da velocidade $\vec{v}_0$ da carga? (b) Para esse mesmo instante, qual é o campo magnético produzido pela carga no ponto $x = 0$, $y = 25{,}0$ cm, $z = 0$?

28.58 Um projetista de eletroímã neófito afirma ser capaz de projetar um eletroímã que produza um campo magnético $\vec{B}$ no vácuo, que aponte sempre no sentido do eixo Ox em todos os pontos da região e cujo módulo cresça com o aumento da distância x. Ou seja, $\vec{B} = B_0(x/a)\hat{\imath}$, em que B_0 e a são constantes com unidades de teslas e de metros, respectivamente. Aplique a lei de Gauss para o campo magnético para provar que esse projeto é *impossível*. (*Sugestão:* use uma superfície gaussiana em forma de caixa retangular com arestas paralelas aos eixos x, y e z.)

28.59 Dois fios longos paralelos estão separados por uma distância de 1,0 m (Figura 28.53). O fio superior conduz uma corrente I_1 de 6,0 A entrando no plano da página. (a) Qual deve ser o sentido e o módulo da corrente I_2 para que o campo magnético no ponto P seja igual a zero? (b) Qual deve ser, então, o módulo, a direção e o sentido do campo resultante no ponto Q? (c) Qual deve ser o módulo, a direção e o sentido do campo resultante no ponto S?

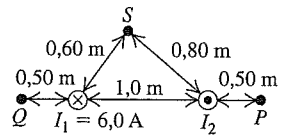


Figura 28.53 Problema 28.59.

28.60 A Figura 28.54 representa o plano xy que corta perpendicularmente dois fios longos e paralelos que conduzem uma corrente I, de mesmo módulo, porém de sentidos contrários. (a) Copie o diagrama e desenhe vetores para mostrar o campo $\vec{B}$ de cada fio e o campo resultante $\vec{B}$ no ponto P. (b) Deduza uma expressão para o módulo de $\vec{B}$ em qualquer ponto do eixo Ox em termos da coordenada x do ponto. Qual é a direção e o sentido de $\vec{B}$? (c) Faça um gráfico do módulo de $\vec{B}$ em função de x. (d) Para qual valor de x o módulo de $\vec{B}$ atinge seu valor máximo? (e) Qual é o módulo de $\vec{B}$ quando $x >> a$?

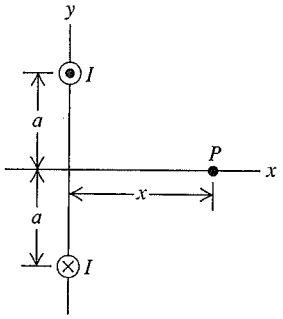


Figura 28.54 Problemas 28.60 e 28.61.

28.61 Tome como referência a situação descrita no Problema 28.60. Considere um terceiro fio longo paralelo aos outros dois primeiros passando pelo ponto P (Figura 28.54) e suponha que cada fio conduza uma corrente de 6,0 A. Considere a = 40,0 cm e x = 60,0 cm. Determine o módulo, a direção e o sentido da força por unidade de comprimento exercida sobre o terceiro fio, supondo que a corrente que ele conduz possui sentido (a) entrando no plano da página; (b) saindo do plano da página.

28.62 Um par de barras metálicas longas e rígidas, cada qual medindo L de comprimento, repousam paralelamente entre si sobre uma mesa perfeitamente lisa. Suas extremidades são conectadas a molas condutoras idênticas e muito leves, de força constante k (Figura 28.55) e comprimento não estendido desprezível. Quando uma corrente I passa por esse circuito, as molas se estendem. A que distância as barras permanecerão em repouso? Suponha que k é grande o suficiente para que a separação entre as barras seja menor que L.

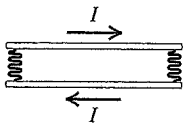


Figura 28.55 Problema 28.62.

28.63 Dois fios longos e paralelos estão suspensos por meio de cordas de 4,0 cm de comprimento, presas a um eixo comum (Figura 28.56). Os fios possuem massa por unidade de comprimento igual a 0,0125 kg/m e conduzem correntes de mesmo módulo, porém de sentidos contrários. Qual é a corrente em cada fio, sabendo que as cordas de sustentação formam um ângulo de 6,0° com a vertical?

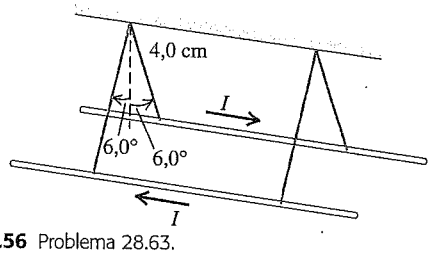


Figura 28.56 Problema 28.63.

28.64 O fio retilíneo longo AB, indicado na Figura 28.57, conduz uma corrente de 14,0 A. A espira retangular cuja aresta mais longa é paralela ao fio conduz uma corrente de 5,0 A. Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante produzida pelo campo do fio e exercida sobre a espira.

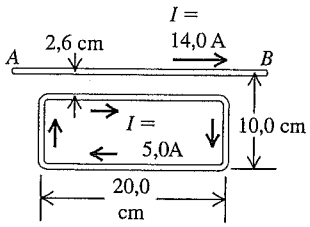


Figura 28.57 Problema 28.64.

28.65 Uma espira circular de raio a possui N espiras e conduz uma corrente I. Uma segunda espira circular de raio a' possui N' espiras e conduz uma corrente I' e seu centro está localizado sobre o eixo da primeira espira, a uma distância x do centro da primeira espira. A segunda espira é inclinada, de modo que seu eixo forme um ângulo θ com o eixo da primeira. A distância x é maior do que a e do que a'. (a) Determine o torque que a primeira espira exerce sobre a segunda. (b) Calcule a energia potencial para a segunda espira em virtude dessa interação. (c) Qual é a simplificação que obtemos considerando x muito maior do que a? E para x muito maior do que a'?

28.66 Os fios que formam as semicircunferências indicadas na figura 28.58 possuem raios a e b. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante produzido pelas correntes dos fios no ponto P.

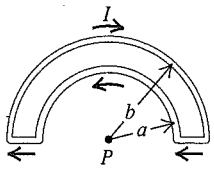


Figura 28.58 Problema 28.66.

28.67 Bobinas de Helmholtz. A Figura 28.59 mostra a seção reta de duas bobinas circulares com raio a, cada uma delas com N espiras que conduzem uma corrente I no mesmo sentido. A distância entre as bobinas é igual ao raio a das bobinas. As bobinas dessa configuração denominam-se bobinas de Helmholtz e produzem um campo magnético bastante uniforme na região entre elas. (a) Deduza uma expressão para o módulo do campo magnético B em um ponto situado a uma distância x à direita do ponto P, que está no centro de simetria das bobinas. (b) Faça um gráfico de B contra x desde $x = 0$ até $x = a/2$. Compare o gráfico obtido com o campo magnético produzido apenas pela bobina da direita. (c) Usando a expressão obtida no item (a), obtenha o módulo do campo magnético no ponto P. (d) Calcule o valor do módulo do campo magnético no ponto P, considerando $N = 300$ espiras, $I = 6{,}0$ A e $a = 8{,}0$ cm. (e) Calcule dB/dx e d^2B/dx^2 no ponto P ($x = 0$). Discuta como seus resultados podem mostrar que o campo é bem uniforme nas vizinhanças do ponto P.

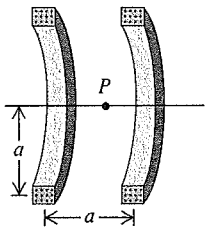


Figura 28.59 Problema 28.67.

28.68 Um fio circular com diâmetro D repousa sobre uma mesa horizontal e transporta uma corrente I. Na Figura 28.60, o ponto A marca o centro do círculo e o ponto C está na sua periferia. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético no ponto A. (b) Considere agora o fio desenrolado, ou seja, retilíneo, centralizado no ponto C e perpendicular à linha AC, mas com a mesma corrente. Determine o campo magnético no ponto A. (c) Qual campo é maior: o obtido no item (a) ou no item (b)? Por qual fator? Por que esse resultado é razoável pelas leis da física?

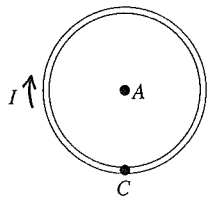


Figura 28.60 Problema 28.68.

28.69 O fio na Figura 28.61 conduz uma corrente I no sentido indicado. O fio é constituído por uma seção retilínea longa, uma seção correspondente a um quarto de circunferência e outra seção retilínea longa. Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante no centro de curvatura da seção correspondente a um quarto de circunferência (ponto P).

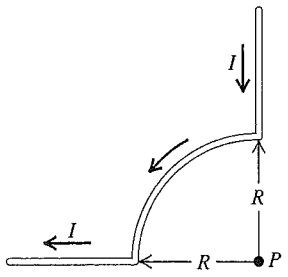


Figura 28.61 Problema 28.69.

28.70 O fio indicado na Figura 28.62 possui comprimento infinito e conduz uma corrente I. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante produzido pelo fio no ponto P.

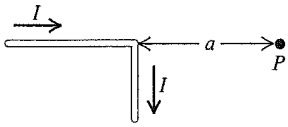


Figura 28.62 Problema 28.70.

28.71 Um fio retilíneo longo com seção reta circular de raio R conduz uma corrente I. Suponha que a densidade de corrente não seja constante ao longo da seção reta do fio, porém varie de acordo com a relação $J = \alpha r$, em que α é uma constante. (a) Sabendo que a integral de J ao longo da seção reta do fio fornece a corrente total I, determine a constante α em termos de I e de R. (b) Use a lei de Ampère para determinar o campo magnético $B(r)$ para (i) $r \leq R$; (ii) $r \geq R$. Forneça suas respostas em função de I.

28.72 (a) Para o cabo co-axial do Exercício 28.37, deduza uma expressão para o módulo do campo magnético para os pontos do interior do condutor central ($r < a$). Compare seu resultado para $r = a$ ao resultado obtido no item (a) do Exercício 28.37, no mesmo ponto. (b) Para esse cabo co-axial, deduza uma expressão para o campo nos pontos do interior do tubo ($b < r < c$). Compare seu resultado para $r = b$ ao resultado obtido no item (a) do Exercício 28.37, no mesmo ponto. Compare seu resultado para $r = c$ ao resultado obtido no item (b) do Exercício 28.37, no mesmo ponto.

28.73 O campo elétrico de um fio retilíneo infinito com cargas positivas é direcionado radialmente para fora do fio e pode ser calculado a partir da lei de Gauss para o campo elétrico (veja o Exemplo 22.6, na Seção 22.4). Aplique a lei de Gauss para o magnetismo para mostrar que o campo *magnético* de um *condutor* retilíneo infinito que conduz uma corrente não pode possuir um componente radial.

28.74 Um condutor possui forma de um cilindro oco, sendo a o raio interno e b o raio externo. Ele conduz uma corrente I uniformemente distribuída ao longo da sua seção reta. Deduza expressões para o módulo do campo magnético nas seguintes regiões: (a) $r < a$; (b) $a < r < b$; (c) $r > b$.

28.75 Campos magnéticos internos e externos. Você recebe um cilindro oco de cobre com raio interno a e raio externo $3a$. O comprimento do cilindro é de $200a$ e sua resistência elétrica para a corrente que desce pelo seu comprimento é R. Para testar sua adequação ao uso em um circuito, você conecta as extremidades do cilindro a uma fonte de voltagem, gerando uma corrente I que flui de cima para baixo ao longo do cilindro. A corrente é uniformemente distribuída pela seção reta do cilindro. Você tem interesse

em saber a força do campo magnético que a corrente produz no interior da parte maciça do cilindro, a um raio $2a$ do eixo do cilindro. Mas, como não é fácil inserir uma sonda de campo magnético no metal sólido, você decide medir o campo em um ponto no exterior do cilindro, onde o campo deve ser tão forte quanto no raio $2a$. A que distância do eixo do cilindro você deve colocar a sonda?

28.76 Uma espira circular possui raio R e transporta uma corrente I_2 no sentido horário (Figura 28.63). O centro da espira está a uma distância D acima de um fio longo, retilíneo. Quais são o módulo, a direção e o sentido da corrente I_1 no fio, quando o campo magnético no centro da espira é nulo?

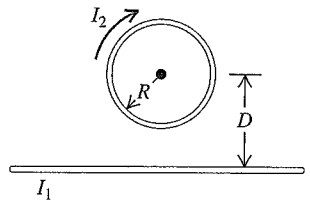


Figura 28.63 Problema 28.76.

28.77 Um cilindro comprido, com seu eixo orientado ao longo do eixo Oz, possui uma densidade de corrente $\vec{J}$. A densidade de corrente, embora seja simétrica em relação ao eixo do cilindro, não é constante e varia de acordo com a relação

$$\vec{J} = \frac{2I_0}{\pi a^2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\hat{k} \quad \text{para } r \le a$$
$$= \mathbf{0} \quad \text{para } r \ge a$$

em que a é o raio de cilindro, r é a distância radial entre o ponto considerado e o eixo do cilindro e I_0 é uma constante dada em ampères. (a) Mostre que I_0 é a corrente total que passa através da seção reta do fio. (b) Usando a lei de Ampère, deduza uma expressão para o módulo do campo magnético $\vec{B}$ na região $r \ge a$. (c) Obtenha uma expressão para a corrente I contida em uma seção reta circular de raio $r \le a$ e centralizada sobre o eixo do cilindro. (d) Aplicando a lei de Ampère, deduza uma expressão para o módulo do campo magnético $\vec{B}$ na região $r \le a$. Como se comparam os resultados dos itens (b) e (d) para $r = a$?

28.78 Um cilindro comprido, com seu eixo orientado ao longo do eixo Oz, possui uma densidade de corrente $\vec{J}$. A densidade de corrente, embora seja simétrica em relação ao eixo do cilindro, não é constante e varia de acordo com a relação

$$\vec{J} = \left(\frac{b}{r}\right)e^{(r-a)/\delta}\hat{k} \quad \text{para } r \le a$$
$$= \mathbf{0} \quad \text{para } r \ge a$$

em que o raio de cilindro é $a = 5{,}0$ cm, r é a distância radial entre o ponto considerado e o eixo do cilindro, b é uma constante igual a 600 A/m e δ é uma constante igual a 2,50 cm. (a) Suponha que I_0 seja a corrente total que passa através da seção reta do fio. Obtenha uma expressão para I_0 em termos de b, δ e a. Avalie sua expressão para obter um valor numérico para I_0. (b) Usando a lei de Ampère, deduza uma expressão para o módulo do campo magnético $\vec{B}$ na região $r \ge a$. Expresse sua resposta em termos de I_0 em vez de b. (c) Obtenha uma expressão para a corrente I contida em uma seção reta circular de raio $r \le a$ e centralizada sobre o eixo do cilindro. Expresse sua resposta em termos de I_0 em vez de b. (d) Aplicando a lei de Ampère, deduza uma expressão para o módulo do campo magnético $\vec{B}$ na região $r \le a$. (e) Avalie o módulo do campo magnético em $r = \delta$; $r = a$ e $r = 2a$.

28.79 Integre B_x dado pela Equação (28.15), desde $-\infty$ até $+\infty$. Ou seja, faça a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} B_x\,dx$. Explique o significado físico de seu resultado.

28.80 Em uma região do espaço onde não há nenhuma corrente de condução e nenhuma corrente de deslocamento, é impossível existir um campo magnético que caia repentinamente para zero. Para provar essa afirmação, use o método da contradição. Suponha que esse caso seja possível; a seguir, mostre que essa hipótese contradiz alguma lei da física. (a) Na metade inferior de uma folha de papel, desenhe linhas paralelas igualmente espaçadas para representar um campo magnético uniforme orientado da esquerda para a direita. Use linhas tracejadas para desenhar um retângulo *abcda* com o lado horizontal *ab* dentro do campo magnético e com o lado horizontal *cd* na parte superior da folha, em que $B = 0$. (b) Mostre que a integração ao longo desse retângulo entra em contradição com a lei de Ampère.

28.81 Um plano infinito que conduz uma corrente. Condutores retilíneos longos, com seções retas quadradas, cada um deles conduzindo uma corrente I, são colocados um ao lado do outro, formando uma placa fina que se estende até o infinito (Figura 28.64). Os condutores se distribuem sobre o plano xy paralelamente ao eixo Oy e conduzem uma corrente no sentido $+Oy$. Existem n condutores por unidade de comprimento ao longo do eixo Ox. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético a uma distância a abaixo do plano da corrente. (b) Encontre o módulo, a direção e o sentido do campo magnético a uma distância a acima do plano da corrente.

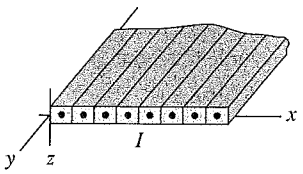


Figura 28.64 Problema 28.81.

28.82 Condutores retilíneos longos, com seções retas quadradas, cada um deles conduzindo uma corrente I, são colocados um ao lado do outro, formando uma placa fina que se estende até o infinito, sendo o sentido da corrente para fora do plano da página (Figura 28.65). Um segundo plano infinito é colocado sobre o primeiro, sendo o sentido da corrente para dentro do plano da página. Cada plano possui n condutores por unidade de comprimento. (Use como referência o Problema 28.81.) Calcule o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante (a) no ponto P acima do plano superior; (b) no ponto R entre os dois planos; (c) no ponto S abaixo do plano inferior.

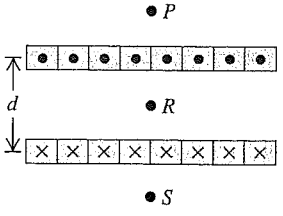


Figura 28.65 Problema 28.82.

28.83 Um pedaço de ferro possui magnetização $M = 6{,}50 \times 10^4$ A/m. Calcule o momento de dipolo magnético médio *por átomo* no interior do pedaço de ferro. Expresse sua resposta em $A \cdot m^2$ e em magnetons de Bohr. A densidade do ferro é dada na Tabela 14.1 e a massa atômica do ferro (em grama por mol) é dada no Apêndice D. O símbolo químico do ferro é Fe.

28.84 (a) Na Seção 27.7, discutimos como um dipolo magnético, tal como uma espira de corrente ou um objeto magnetizado, pode ser atraído ou repelido por um ímã. Use esse raciocínio para explicar por que *qualquer* um dos pólos de um ímã *atrai* tanto materiais paramagnéticos quanto materiais ferromagnéticos (inicialmente não-magnetizados), porém *repele* materiais diamagnéticos. (b) A força que um ímã exerce sobre um objeto é diretamente proporcional ao momento magnético do objeto. Um dado ímã é suficientemente forte para atrair um cubo de ferro recozido ($K_m = 1400$) com aresta de 2,0 cm, mantendo o ferro grudado em um dos seus pólos; ou seja, o ímã exerce sobre o cubo de ferro uma força de baixo para cima igual ao peso do cubo. Se, em vez disso, você tentasse sustentar um cubo de alumínio com aresta de 2,0 cm, qual seria a força de baixo para cima exercida pelo ímã sobre o cubo? Como essa força se compara ao peso do cubo? O cubo de alumínio ficaria grudado no ímã? (*Sugestão*: você precisa usar informações das tabelas 14.1 e 28.1.) (c) Se você tentar sustentar um cubo de prata com aresta de 2,0 cm, qual será o módulo, a direção e o sentido da força magnética exercida pelo ímã sobre o cubo? Como essa força se compara ao peso do cubo? O efeito dessa força magnética poderia ser notado?

Problemas desafiadores

28.85 Dois longos fios retilíneos condutores com massa específica linear λ estão suspensos por meio de cordas, de modo que eles ficam dispostos paralelamente sobre um plano horizontal e a distância entre eles é igual a d. As extremidades da direita dos fios são conectadas entre si por meio de um fio frouxo, de resistência desprezível. Um capacitor carregado (capacitância C) é ligado ao sistema; a placa positiva do capacitor (carga inicial $+Q_0$) está conectada à extremidade da esquerda de um dos fios e a placa negativa do capacitor (carga inicial $-Q_0$) está conectada à extremidade da esquerda do outro fio (Figura 28.66). Ambas as conexões são feitas mediante fios frouxos com resistências desprezíveis. Quando a conexão é estabelecida, os fios são repelidos lateralmente pela ação das forças magnéticas repulsivas das correntes de sentidos contrários, e cada fio adquire uma velocidade inicial v_0. Suponha que o tempo de descarga do capacitor seja desprezível em relação ao tempo do deslocamento dos fios. (a) Mostre que a velocidade inicial dos fios é dada por

$$v_0 = \frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\lambda RCd}$$

em que R é a resistência total do circuito. (b) Que altura h cada fio atingirá depois que a conexão for estabelecida?

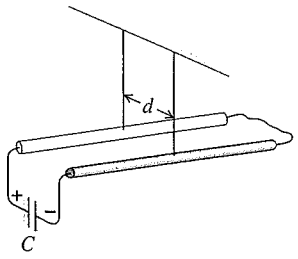


Figura 28.66 Problema desafiador 28.85.

28.86 Uma correia larga e longa possui uma carga positiva uniforme por unidade de área σ da sua superfície. Rolos instalados nas suas extremidades movem a correia com uma velocidade constante v. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético produzido pela correia que se move em um ponto imediatamente acima da sua superfície. (*Sugestão:* para pontos afastados das extremidades da correia, ela pode ser considerada um plano infinito de corrente, tal como no Problema 28.81.)

28.87 Um disco dielétrico carregado. Um disco dielétrico fino, com raio a, possui uma carga total $+Q$ distribuída uniformemente sobre sua superfície. Ele gira n vezes por segundo em torno de um eixo perpendicular à sua superfície, passando por seu centro. Calcule o campo magnético no centro do disco. (*Sugestão:* divida o disco em anéis concêntricos, com largura infinitesimal.)

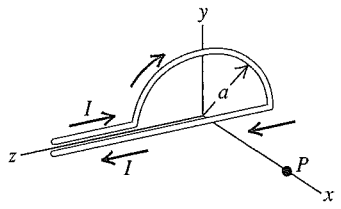


Figura 28.67 Problema desafiador 28.88.

28.88 Um fio contido no plano yz forma uma semicircunferência de raio a com centro de curvatura na origem (Figura 28.67). Sendo I a corrente que circula no fio, calcule os componentes do campo magnético produzido no ponto P, situado sobre o eixo Ox e a uma distância x para fora do centro. (*Nota:* não se esqueça de incluir a contribuição do fio retilíneo na parte inferior da semicircunferência que vai da extremidade $z = -a$ até $z = +a$. Você pode usar o fato de que é igual a zero o campo magnético produzido pelas correntes antiparalelas nos trechos retilíneos para $z > a$, porém você deve *explicar* esse fato.)

INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

29

Quando um cartão de crédito é 'passado' através do dispositivo de leitura, as informações contidas na tarja magnética no verso do cartão são transmitidas ao banco do titular do cartão. Por que é necessário 'passar' o cartão em vez de segurá-lo estaticamente na fenda do dispositivo de leitura?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.
- Como a lei de Faraday relaciona a fem induzida em uma espira à variação no fluxo magnético através da espira.
- Como determinar o sentido de uma fem induzida.
- Como calcular a fem induzida em um condutor que se move através de um campo magnético.
- Como uma variação no fluxo magnético gera um campo elétrico que é muito diferente daquele produzido por uma combinação de cargas.
- As quatro equações fundamentais que descrevem integralmente a eletricidade e o magnetismo.

Quase todos os aparelhos e dispositivos modernos, desde máquinas de lavar, furadeiras elétricas e até computadores, possuem circuitos elétricos em suas partes internas. Aprendemos no Capítulo 25 que uma força eletromotriz (fem) é necessária para produzir uma corrente em um circuito; nos capítulos 25 e 26, quase sempre tomamos uma bateria como a fonte de fem. Contudo, para a maior parte dos dispositivos elétricos usados na indústria e em nossas casas (incluindo qualquer dispositivo que você ligue a uma tomada de parede), a fonte de fem *não* é uma bateria, mas uma usina geradora de energia elétrica. Tal usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia: energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica, energia química em uma usina termoelétrica que queima carvão ou óleo e energia nuclear em uma usina nuclear. Mas como ocorre essa conversão de energia? Em outras palavras, qual é a física envolvida na produção de quase toda energia que consumimos?

A resposta é um fenômeno chamado *indução eletromagnética*: quando o fluxo magnético varia através de um circuito, ocorre a indução de uma fem e de uma corrente no circuito. Em uma usina geradora de energia elétrica, o movimento de um ímã em relação a uma bobina produz um fluxo magnético que varia através das bobinas e, portanto, surge uma fem. Outros componentes essenciais de sistemas elétricos também dependem dessa indução; por exemplo, um transformador funciona em virtude da ação de uma fem induzida. Na realidade, graças ao papel central desempenhado na geração da energia elétrica, ela é fundamentalmente responsável pela estrutura de nossa sociedade tecnológica.

O princípio central da indução eletromagnética e a chave deste capítulo é a *lei de Faraday*. Essa lei relaciona a fem ao fluxo magnético variável em qualquer tipo de espira, incluindo um circuito fechado. Discutiremos também a lei de Lenz, que ajuda a predizer o sentido de uma corrente induzida e de uma fem induzida. Este capítulo fornece os princípios de que precisamos para entender qualquer dispositivo em que ocorram conversões de energia, tais como motores, geradores e transformadores.

Segundo a indução eletromagnética, um campo magnético que varia em função do tempo pode atuar como uma fonte de campo elétrico. Também veremos como um campo *elétrico* que varia em função do tempo pode atuar como uma fonte de campo *magnético*. Esses notáveis resultados fazem parte de um conjunto de fórmulas, chamadas de *equações de Maxwell*, que descrevem o comportamento de um campo magnético e de um campo elétrico para *qualquer* situação. Essas equações de Maxwell abrirão o caminho para o estudo das ondas eletromagnéticas no Capítulo 32.

29.1 Experiências de indução

Durante a década de 1830, diversas experiências pioneiras sobre uma fem induzida magneticamente foram feitas por Michael Faraday, na Inglaterra, e por Joseph Henry (1797-1878), nos Estados Unidos — o qual, mais tarde, se tornou o primeiro diretor do Instituto Smithsonian. A Figura 29.1 mostra diversos exemplos dessas experiências. Na Figura 29.1a, uma bobina está conectada a um galvanômetro. Quando o ímã está em repouso, o galvanômetro não acusa nenhuma corrente. Esse resultado é previsível, pois nada está variando e não existe nenhuma fonte de fem conectada ao circuito. Porém, quando o ímã se *move* para cima ou para baixo, o galvanômetro acusa uma corrente no circuito, mas *somente* quando o ímã se move (Figura 29.1b). Mantendo o ímã em repouso, porém movendo a bobina, detectamos novamente a corrente durante o movimento. Essa corrente é chamada de **corrente induzida**, e a fem correspondente que seria necessária para produzir essa corrente denomina-se **fem induzida.**

Na Figura 29.1c, substituímos o ímã por uma segunda bobina ligada a uma bateria. Quando a segunda bobina permanece em repouso, não existe nenhuma corrente na primeira bobina. Contudo, quando a segunda bobina se aproxima ou se afasta da primeira, ou quando a primeira bobina se aproxima ou se afasta da segunda, surge uma corrente induzida na primeira bobina, porém isso ocorre *somente* quando existe movimento de uma bobina em relação à outra.

Finalmente, usando o arranjo das duas bobinas indicado na Figura 29.1d, mantemos as duas bobinas em repouso e, a seguir, produzimos uma corrente variável na segunda bobina, abrindo e fechando a chave ou mantendo a chave fechada, fazendo variar a resistência da segunda bobina (por exemplo, modificando a temperatura da segunda bobina). Verificamos que, quando abrimos ou fechamos a chave, ocorre um pulso instantâneo de corrente no primeiro circuito. Quando a resistência da segunda bobina varia (e, portanto, quando a corrente varia), surge uma corrente induzida na primeira bobina, porém somente enquanto a corrente estiver variando na segunda bobina.

Para aprofundarmos a explicação dos elementos comuns das observações anteriores, vamos considerar com mais detalhes uma série de experiências com a situação descrita na Figura 29.2. Conectamos uma bobina a um galvanômetro e, a seguir, colocamos a bobina entre os pólos de um eletroímã, cujo campo magnético pode variar. Observamos os seguintes fenômenos:

1. Quando não existe corrente no eletroímã, de modo que $\vec{B} = \mathbf{0}$, o galvanômetro não indica nenhuma corrente.
2. Quando ligamos o eletroímã, surge momentaneamente uma corrente induzida indicada no galvanômetro, à medida que $\vec{B}$ aumenta.
3. Quando $\vec{B}$ se mantém fixo em um dado nível, a corrente cai para zero, por mais elevado que seja o valor de $\vec{B}$.
4. Mantendo a bobina em um plano horizontal, comprimimos as espiras para diminuir a área da seção reta da bobina. O galvanômetro indica uma corrente somente *durante* a deformação, e não antes nem depois dela. Quando fazemos a área voltar ao tamanho original, surge uma corrente induzida em sentido contrário ao anterior, porém somente enquanto a área da bobina estiver variando.
5. Quando giramos a bobina alguns graus em torno de um eixo horizontal, o galvanômetro indica uma corrente durante a rotação, no mesmo sentido da corrente indicada durante a diminuição da área. Quando giramos a bobina de volta para a posição original, surge uma corrente induzida em sentido contrário ao da rotação anterior.
6. Quando retiramos subitamente a bobina de dentro do campo magnético, surge uma corrente induzida no mesmo sentido da corrente indicada durante a diminuição da área.

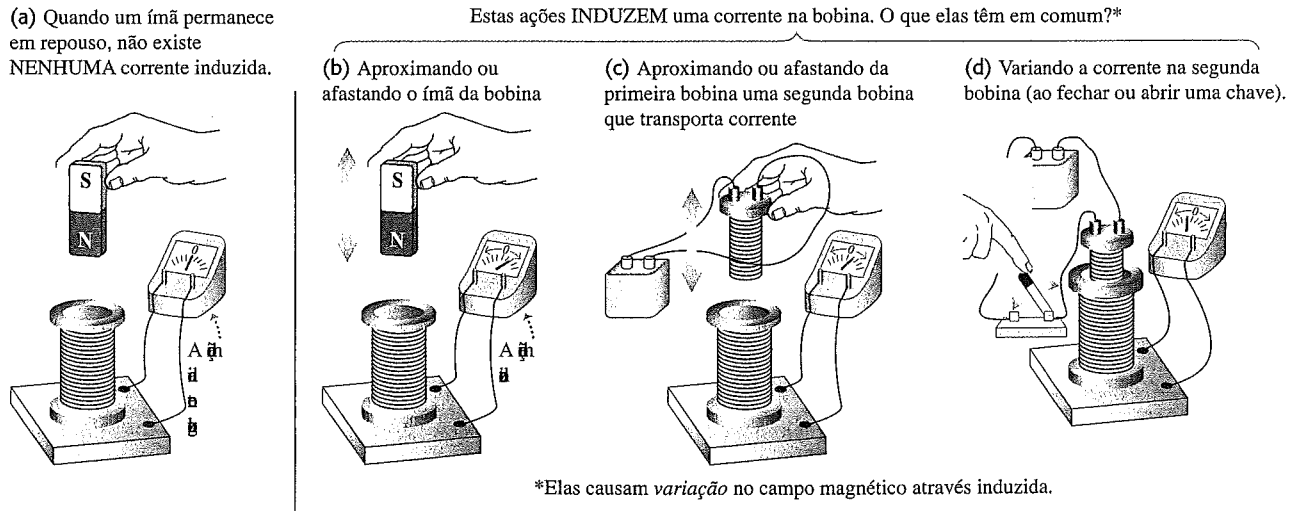


Figura 29.1 Demonstração do fenômeno da corrente induzida.

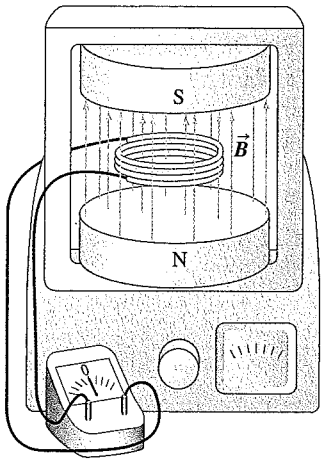
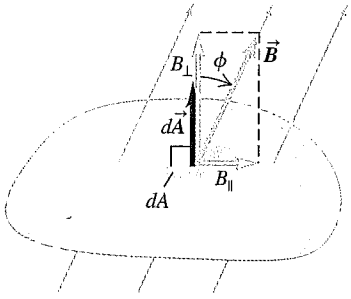


Figura 29.2 Uma bobina em um campo magnético. Quando o campo magnético $\vec{B}$ é constante, não existe nenhuma corrente induzida e permanecem constante a forma, a orientação e a posição da bobina. Quando alteramos qualquer um desses três fatores, surge uma corrente induzida.

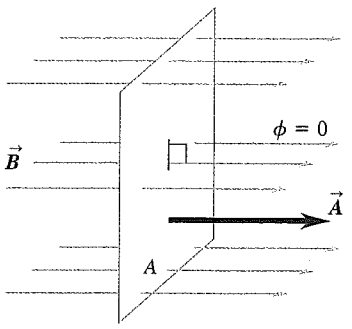


O fluxo magnético através de um elemento de área $d\vec{A}$:
$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp dA = B\, dA \cos\phi$

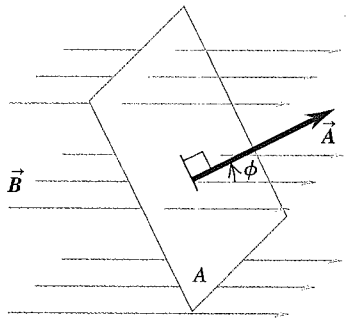
Figura 29.3 Cálculo do fluxo magnético através de um elemento de área.

7. Quando diminuímos o número de espiras da bobina, desenrolando uma ou mais espiras, surge uma corrente induzida no mesmo sentido da corrente indicada durante a diminuição da área. Quando enrolamos mais espiras na bobina, surge uma corrente induzida em sentido contrário ao da corrente obtida durante a diminuição do número de espiras.
8. Se desligarmos o eletroímã, surge momentaneamente uma corrente induzida em sentido contrário ao da corrente obtida quando ligamos o eletroímã.
9. Quanto mais rápido fazemos qualquer uma das ações descritas nos itens anteriores, maior é o módulo da corrente induzida.
10. Se repetirmos todas as experiências descritas nos itens anteriores com outra bobina, de outro material, com a mesma forma, porém com outra resistência, verificaremos que a corrente em cada caso será inversamente proporcional à resistência total do circuito. Isso mostra que a fem induzida não depende do material da bobina, mas apenas de sua forma e da variação do fluxo magnético.

Superfície diretamente frontal ao campo magnético:
- $\vec{B}$ e $\vec{A}$ são paralelos (o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{A}$ é $\phi = 0$).
- O fluxo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA$.



Superfície inclinada a partir de uma orientação diretamente frontal por um ângulo ϕ:
- O ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{A}$ é ϕ.
- O fluxo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos\phi$.



Superfície perpendicular ao campo magnético:
- $\vec{B}$ e $\vec{A}$ são perpendiculares (o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{A}$ é $\phi = 90°$).
- O fluxo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos 90° = 0$.

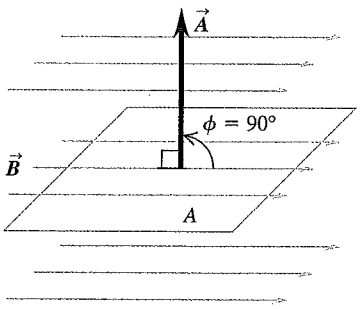


Figura 29.4 Cálculo do fluxo de um campo magnético uniforme através de uma área plana. (Compare com a Figura 22.6, que indica as regras para o cálculo do fluxo de um campo *elétrico* uniforme.)

O fenômeno comum a todas as experiências descritas anteriormente é a variação do *fluxo magnético* Φ_B através da bobina conectada ao galvanômetro. Em cada um dos casos analisados, o fluxo magnético varia, porque existe um campo magnético variável ou então porque a bobina se move através de um campo magnético não-uniforme.

Confira a lista anterior para verificar essa afirmação. A lei de Faraday, que será enunciada na próxima seção, afirma que em todas as situações anteriores a fem induzida é proporcional à *taxa de variação* do fluxo magnético Φ_B através da bobina. O *sentido* da fem induzida depende do aumento ou da diminuição do fluxo magnético. Se o fluxo for constante, não existe fem induzida.

As fems induzidas não são meras curiosidades de laboratório, mas possuem um grande número de aplicações práticas. Se você está lendo estas palavras em um ambiente fechado, você está usando as fems induzidas neste exato momento! Na estação de força que abastece o seu bairro, um gerador elétrico produz uma fem através do fluxo magnético que percorre as bobinas. (Na próxima seção, veremos em detalhes como isso ocorre.) Essa fem fornece a voltagem entre os terminais das tomadas na parede da sua casa, e essa voltagem fornece energia para a sua luminária. De fato, qualquer aparelho que você conecte a uma tomada utiliza fems induzidas.

A fem induzida magneticamente, assim como a fem discutida na Seção 25.4, resulta sempre da ação de forças *não-eletrostáticas*. Quando essas forças são o resultado dos campos elétricos adicionais induzidos pela variação nos campos magnéticos, devemos distinguir claramente um campo elétrico produzido por cargas (de acordo com a lei de Coulomb) de um campo elétrico produzido por um campo magnético variável. Para lembrar essa distinção, o campo elétrico de origem eletrostática será designado por $\vec{E}_c$ (em que o índice c refere-se a Coulomb ou conservativo) e o campo elétrico de origem magnética será designado por $\vec{E}_n$ (em que o índice n significa não-coulombiana ou não-conservativa). Voltaremos a comentar essa distinção mais adiante neste capítulo bem como no próximo.

29.2 Lei de Faraday

O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito. Antes de enunciar a lei física simples que sintetiza todas as experiências descritas na Seção 29.1, vamos inicialmente fazer uma revisão do conceito de fluxo magnético Φ_B (introduzido na Seção 27.3). Para um elemento de área infinitesimal $d\vec{A}$ em um campo magnético $\vec{B}$ (Figura 29.3), o fluxo magnético $d\Phi_B$ através da área é dado por

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp \, dA = B \, dA \cos\phi$$

em que $B_\perp$ é o componente de $\vec{B}$ perpendicular à superfície do elemento de área e ϕ é o ângulo entre $\vec{B}$ e $d\vec{A}$. (Como no Capítulo 27, tome cuidado para distinguir as duas grandezas que usam a letra grega 'fi', ϕ e Φ_B). O fluxo magnético total Φ_B através de uma área finita é a integral da expressão anterior sobre a área considerada:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B \, dA \cos\phi \qquad (29.1)$$

Quando $\vec{B}$ for uniforme ao longo de uma área plana $\vec{A}$, então

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\phi \qquad (29.2)$$

A Figura 29.4 revisa as regras para uso da Equação (29.2).

ATENÇÃO Escolha do sentido de $d\vec{A}$ ou $\vec{A}$ Nas equações (29.1) e (29.2), devemos tomar cuidado para definir os sentidos dos vetores $d\vec{A}$ e $\vec{A}$ de modo inequívoco. Existem sempre dois sentidos para a direção perpendicular de uma superfície; e o sinal do fluxo magnético dependerá do sentido positivo escolhido. Por exemplo, na Figura 29.3, escolhemos $d\vec{A}$ apontando no sentido de baixo para cima, de modo que ϕ é menor que 90° e $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ é positivo. Alternativamente, poderíamos ter escolhido para $d\vec{A}$ o sentido de cima para baixo; nesse caso, ϕ seria maior que 90° e $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ seria negativo. Ambas as escolhas são igualmente boas, mas, feita a escolha, devemos nos ater a ela.

Enunciado da **lei de Faraday da indução**:

A fem induzida em uma espira fechada é dada pela taxa de variação do fluxo magnético, com o sinal negativo, através da área delimitada pela espira.

Usando símbolos, a lei de Faraday é escrita na forma

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.3)$$

(lei de Faraday da indução)

Para entendermos o sinal negativo, precisamos introduzir uma convenção de sinais para a fem $\mathcal{E}$. Porém, vamos primeiro fornecer um exemplo para mostrar como se aplica essa lei.

Exemplo 29.1

CORRENTE INDUZIDA E FEM INDUZIDA EM UMA ESPIRA

Na Figura 29.5, o campo magnético entre os pólos do eletroímã permanece sempre uniforme, porém seu módulo aumenta com uma taxa crescente de 0,020 T/s. A área da espira condutora imersa no campo é igual a 120 cm^2 e a resistência total do circuito, incluindo o galvanômetro, é igual a 5,0 Ω. (a) Calcule a fem induzida e a corrente induzida no circuito. (b) O que ocorreria com a fem induzida e a corrente induzida no circuito se a espira condutora fosse substituída por uma espira isolante?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o fluxo magnético que passa pela espira varia em função da variação no campo magnético. Portanto, haverá uma fem induzida na espira, e podemos determinar seu valor (uma das incógnitas do problema) usando a lei de Faraday. Podemos determinar a corrente produzida na espira por essa fem (a outra incógnita) usando a mesma técnica do Capítulo 25.

PREPARAR: calculamos o fluxo magnético usando a Equação (29.2) e, a seguir, a lei de Faraday dada pela Equação (29.3), para determinar a fem $\mathcal{E}$ induzida resultante. Então calculamos a corrente induzida produzida por essa fem usando a relação $\mathcal{E} = IR$, em que R é a resistência total do circuito que inclui a espira.

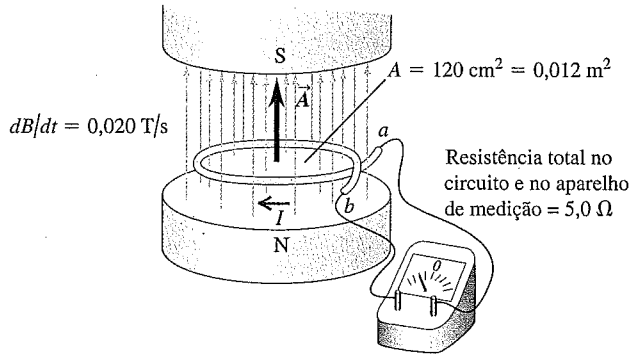


Figura 29.5 Uma espira condutora em repouso em um campo magnético crescente.

EXECUTAR: (a) O vetor da área da espira é perpendicular ao plano da espira; o sentido escolhido é vertical, de baixo para cima. Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos e $\vec{B}$ é uniforme; logo, $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$. A área $A = 0{,}012\ \text{m}^2$ é constante, portanto a taxa de variação do fluxo magnético é

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{dB}{dt}A = (0{,}020\ \text{T/s})(0{,}012\ \text{m}^2)$$
$$= 2{,}4 \times 10^{-4}\ \text{V} = 0{,}24\ \text{mV}$$

Esse resultado, desconsiderando um sinal que ainda não discutimos, é o valor da fem $\mathcal{E}$ induzida. A corrente induzida correspondente é:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2{,}4 \times 10^{-4}\ \text{V}}{5{,}0\ \Omega} = 4{,}8 \times 10^{-5}\ \text{A} = 0{,}048\ \text{mA}$$

(b) A lei de Faraday, Equação (29.3), não envolve de maneira alguma a resistência do circuito. Portanto, a *fem* não se altera quando a resistência aumenta ao substituirmos a espira condutora por uma espira isolante. Porém, a *corrente* diminuirá, visto que $I = \mathcal{E}/R$. Supondo que a espira seja feita com um isolante perfeito de resistência infinita, a corrente induzida será igual a zero, embora exista uma fem presente. Esta situação é semelhante a uma bateria isolada que não está ligada a nada. Existe uma fem presente, porém nenhuma corrente flui.

AVALIAR: é conveniente verificar a consistência das unidades nos cálculos realizados. Existem várias maneiras de fazer isso; uma delas consiste em lembrar que, como a força magnética é definida por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, as unidades do campo magnético são unidades de força divididas pelas unidades de (carga vezes velocidade): 1 T = (1 N)/(1C · m/s). As unidades de fluxo magnético podem ser expressas como (1 T) (1 m^2) = 1 N · s · m/C e a taxa de variação do fluxo magnético possui unidades 1 N · m/C = 1 J/C = 1 V. Portanto, a unidade de $d\Phi_B/dt$ é o volt, como exigido pela Equação (29.3). Lembre-se também de que a unidade de fluxo magnético é o weber (Wb): 1T · m^2 = 1Wb, portanto 1 V = 1 Wb/s.

Sentido da fem induzida

Podemos determinar o sentido de uma fem induzida ou uma corrente induzida aplicando a Equação (29.3) e algumas regras simples. Vejamos aqui o procedimento:

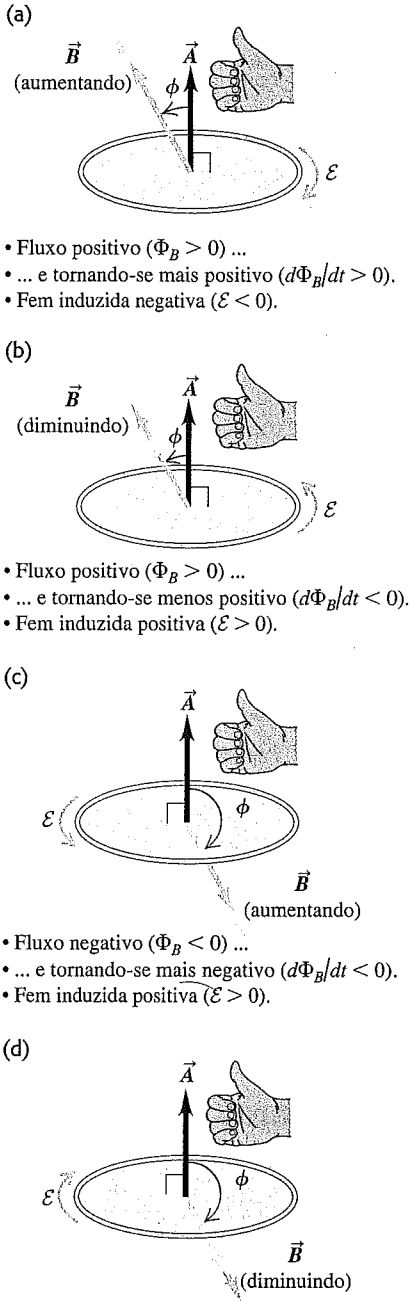


Figura 29.6 O fluxo magnético está se tornando (a) mais positivo, (b) menos positivo, (c) mais negativo e (d) menos negativo. Logo, Φ_B está crescendo em (a) e em (d); e está diminuindo em (b) e em (c). Em (a) e em (d) a fem é negativa (no sentido horário para um observador situado acima do vetor $\vec{A}$, olhando para baixo), e em (b) e (c) a fem é positiva (no sentido anti-horário para um observador situado acima do vetor $\vec{A}$, olhando para baixo).

1. Defina um sentido positivo para o vetor área $\vec{A}$.
2. A partir das direções e dos sentidos dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, determine o sinal do fluxo magnético de Φ_B e da taxa de variação $d\Phi_B/dt$. A Figura 29.6 mostra diversos exemplos.

3. Determine o sinal da fem induzida ou da corrente induzida. Quando o fluxo está aumentando, $d\Phi_B/dt$ é positivo, então a fem induzida ou a corrente é negativa; quando o fluxo está diminuindo, $d\Phi_B/dt$ é negativo e a fem induzida ou a corrente é positiva.
4. Finalmente, determine o sentido da fem induzida ou da corrente usando a regra da mão direita. Dobre os dedos de sua mão direita em torno do vetor $\vec{A}$, mantendo o dedo polegar apontando no sentido de $\vec{A}$. Se a fem induzida ou a corrente no circuito é *positiva*, ela possui o mesmo sentido da rotação de seus dedos; se a fem induzida ou a corrente no circuito é *negativa*, ela possui sentido contrário ao da rotação de seus dedos.

No Exemplo 29.1, no qual $\vec{A}$ está orientado para cima, uma fem positiva seria orientada no sentido anti-horário em torno da espira, observando-se a espira de cima para baixo. Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão orientados de baixo para cima neste exemplo, de modo que Φ_B é positivo; o módulo de B está aumentando, logo, $d\Phi_B/dt$ é positivo. Assim, pela Equação (29.3), $\mathcal{E}$ no Exemplo 29.1 possui sinal *negativo*. Seu sentido real é, portanto, *horário* em torno da espira, observando-se a espira de cima para baixo.

Se a espira indicada na Figura 29.5 é condutora, essa fem produz uma corrente; a corrente induzida também possui sentido horário. Essa corrente induzida gera um campo magnético através da espira, e a regra da mão direita descrita na Seção 28.6 mostra que o campo possui sentido *oposto* ao do campo magnético crescente externo produzido pelo eletroímã. Trata-se de um exemplo da *lei de Lenz*, segundo a qual todo efeito de indução possui sentido oposto à causa que o produziu; no caso presente, a causa é o aumento do fluxo produzido pelo eletroímã. (Estudaremos essa lei detalhadamente na próxima seção.)

Convidamos você a conferir os sinais de cada fem e de cada corrente induzida para a lista de experiências mencionadas no final da Seção 29.1. Por exemplo, em um campo magnético constante, quando inclinamos ou comprimimos a bobina indicada na Figura 29.2, fazendo o fluxo magnético *diminuir* através dela, a fem e a corrente induzida possuem sentidos anti-horários, observando-se a bobina de cima para baixo.

ATENÇÃO As fems induzidas são provocadas por variações no fluxo Visto que o fluxo magnético desempenha um papel crucial na lei de Faraday, você pode pensar que é o *fluxo* a causa da fem e que é possível surgir uma fem toda vez que um campo magnético estiver no interior de um circuito. Contudo, a Equação (29.3) mostra que somente a *variação* do fluxo através do circuito, e não o próprio fluxo, pode induzir uma fem no circuito. Quando o fluxo magnético através de um circuito for constante, com valor positivo, negativo ou nulo, não haverá nenhuma fem induzida.

No caso de uma bobina com N espiras idênticas, supondo que o fluxo magnético varie com a mesma taxa através de todas as espiras, a taxa de variação *total* através de todas as espiras é N vezes maior que a taxa através de uma única espira. Se Φ_B é o fluxo magnético através de cada espira, a fem induzida total em uma bobina com N espiras é dada por

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.4}$$

Conforme dissemos na introdução deste capítulo, a fem induzida desempenha um papel primordial na geração de energia elétrica para uso comercial. Nos exercícios seguintes, apresentaremos diversos métodos para a produção de fem mediante o movimento de um condutor em relação a um campo magnético, ocasionando um fluxo magnético variável através do circuito.

Estratégia para a solução de problemas 29.1

LEI DE FARADAY

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a lei de Faraday se aplica quando há variação no fluxo magnético. Para usar a lei, certifique-se de que é possível identificar uma área pela qual passa um fluxo de campo magnético. Em geral, essa área é aquela confinada a uma espira que geralmente é feita de material condutor (embora nem sempre – veja o item (b) do Exemplo 29.1). Como sempre, identifique as incógnitas.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. A lei de Faraday relaciona a fem induzida à taxa de variação do fluxo magnético. Para calcular essa taxa de variação, você deve, primeiramente, entender qual é a causa da variação do fluxo. A espira ou bobina está em movimento? O campo magnético está variando? Lembre-se de que o fluxo em si não é relevante, mas sim a sua *taxa de variação*.
2. Escolha um sentido para o vetor área $\vec{A}$ ou para $d\vec{A}$. O sentido deve ser sempre perpendicular ao plano da área. Note que há sempre duas opções de sentido. Por exemplo, se o plano da área é horizontal, $\vec{A}$ pode apontar diretamente para cima ou diretamente para baixo. É como escolher o sentido positivo em um problema referente ao movimento retilíneo; não importa qual sentido escolher, desde que se mantenha a consistência até o final do problema.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Calcule o fluxo magnético usando a Equação (29.2), se $\vec{B}$ for uniforme pela área da espira, ou a Equação (29.1), se ele não for uniforme, atentando para o sentido escolhido para o vetor área.
2. Calcule a fem induzida usando a Equação (29.3) ou (29.4). Caso o condutor seja uma bobina com N espiras, não se esqueça de multiplicar por N. Lembre-se da regra para os sinais positivos para cada fem e cada fluxo magnético envolvido e use essa regra consistentemente.
3. Se a resistência do circuito é conhecida, você pode calcular o módulo da corrente induzida I usando $\mathcal{E} = IR$.

AVALIAR *sua resposta*: verifique os resultados obtidos em relação à adequação das unidades e confira de novo se você aplicou corretamente a regra dos sinais ao calcular o fluxo magnético e a fem induzida.

Exemplo 29.2

MÓDULO E SENTIDO DE UMA FEM INDUZIDA Uma bobina com 500 espiras circulares com raio igual a 4,0 cm é colocada entre os pólos de um grande eletroímã, onde o campo magnético é uniforme e forma um ângulo de 60° com o plano da bobina. O campo magnético diminui com uma taxa igual a 0,200 T/s. Qual é o módulo e o sentido da fem induzida?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita do problema é a fem induzida pela variação do fluxo magnético através da bobina. O fluxo varia porque o campo magnético diminui em amplitude.

PREPARAR: escolhemos o sentido do vetor $\vec{A}$ como indicado na Figura 29.7. Essa opção fornece uma geometria muito similar à da Figura 29.6b. Essa figura ajudará a determinar o sentido da fem induzida.

EXECUTAR: o campo magnético é uniforme pela espira, por isso podemos calcular o fluxo usando a Equação (29.2): $\Phi_B = BA\cos\phi$, em que $\phi = 30°$. Nessa expressão, a única grandeza que varia em função do tempo é o módulo B do campo.

> **ATENÇÃO Lembre-se de como ϕ é definido** Você pode ficar tentado a afirmar que $\phi = 60°$ neste problema. Nesse caso, lembre-se que ϕ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, *não* o ângulo entre $\vec{B}$ e o plano da espira.

A taxa de variação do fluxo é $d\Phi_B/dt = (dB/dt)A\cos\phi$. Para o nosso problema, $dB/dt = -0{,}200$ T/s e $A = \pi(0{,}0400\text{ m})^2 = 0{,}00503\text{ m}^2$, logo,

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{dB}{dt}A\cos 30° \\ &= (-0{,}200\text{ T/s})(0{,}00503\text{ m}^2)(0{,}866) \\ &= -8{,}71\times10^{-4}\text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{s} = -8{,}71\times10^{-4}\text{ Wb/s}\end{aligned}$$

De acordo com a Equação (29.4), a fem induzida na bobina de $N = 500$ espiras é

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -N\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -(500)(-8{,}71\times10^{-4}\text{ Wb/s}) = 0{,}435\text{ V}\end{aligned}$$

Note que a resposta é positiva. Isso significa que, quando apontamos o polegar da mão direita no sentido do vetor área $\vec{A}$ (30° acima do vetor campo magnético $\vec{B}$), o valor positivo de $\mathcal{E}$ é dado pelo sentido horário, de acordo com a regra da mão direita. A fem no presente exemplo é de fato positiva e, portanto, possui sentido horário (compare com a Figura 29.6b). Se você visualizar a bobina pelo lado esquerdo na Figura 29.7a e olhar no sentido de $\vec{A}$, a fem terá sentido horário.

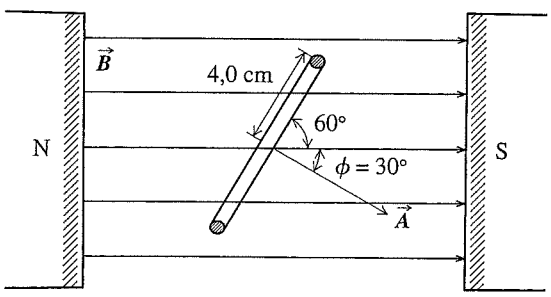


Figura 29.7 Nosso esquema para esse problema.

AVALIAR: se as extremidades do fio estiverem conectadas juntas, o sentido da corrente na bobina terá o mesmo sentido da fem – ou seja, sentido horário, olhando-se pelo lado esquerdo da bobina. Uma corrente induzida no sentido horário produz um campo magnético adicional através da bobina no mesmo sentido do campo magnético e, portanto, tende a se opor à diminuição do fluxo externo total. Veremos mais exemplos disso na Seção 29.3.

Exemplo conceitual 29.3

A BOBINA EXPLORADORA Uma maneira prática para a determinação do módulo de um campo magnético consiste no uso de uma *bobina exploradora*, uma pequena bobina com N espiras enroladas de modo compacto. A bobina, com área A, é posicionada, inicialmente, de modo que o vetor da área $\vec{A}$ esteja alinhado ao campo magnético de módulo B. A seguir, a bobina é rapidamente retirada do campo ou girada em torno de um diâmetro, até completar um quarto de volta. Explique como esse dispositivo pode servir para medir o valor de B.

SOLUÇÃO

Inicialmente, o fluxo magnético através da bobina é dado por $\Phi_B = NBA$. Quando você gira ou puxa a bobina para fora do campo, o fluxo varia rapidamente de NBA até zero. Enquanto o fluxo magnético está diminuindo, momentaneamente ocorre uma fem induzida e surge uma corrente induzida em um circuito externo ligado à bobina. A taxa de variação do fluxo magnético da bobina é proporcional à corrente ou à taxa de variação da carga, de modo que é fácil mostrar que a variação *total* do fluxo é proporcional à carga total que flui em torno do circuito. Podemos construir um instrumento capaz de medir essa carga total e, a partir daí, calcular o valor de B. Deixamos os detalhes como um problema (veja o Exercício 29.3). Estritamente falando, esse método fornece somente o campo *médio* existente sobre a área da bobina. Contudo, quando a área é pequena, o valor medido é aproximadamente igual ao campo no centro da bobina.

Exemplo 29.4

GERADOR I: UM ALTERNADOR SIMPLES A Figura 29.8a indica uma versão simples de um *alternador*, um dispositivo que gera uma fem. Fazemos uma espira retangular girar com velocidade angular ω em torno do eixo indicado. O campo magnético $\vec{B}$ é uniforme e constante. No instante $t = 0$, $\phi = 0$. Determine a fem induzida.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: novamente a fem (a incógnita do problema) é produzida por uma variação do fluxo magnético. Neste caso, porém, o campo magnético $\vec{B}$ é constante; o fluxo varia em função da variação do sentido de $\vec{A}$, enquanto a espira gira.

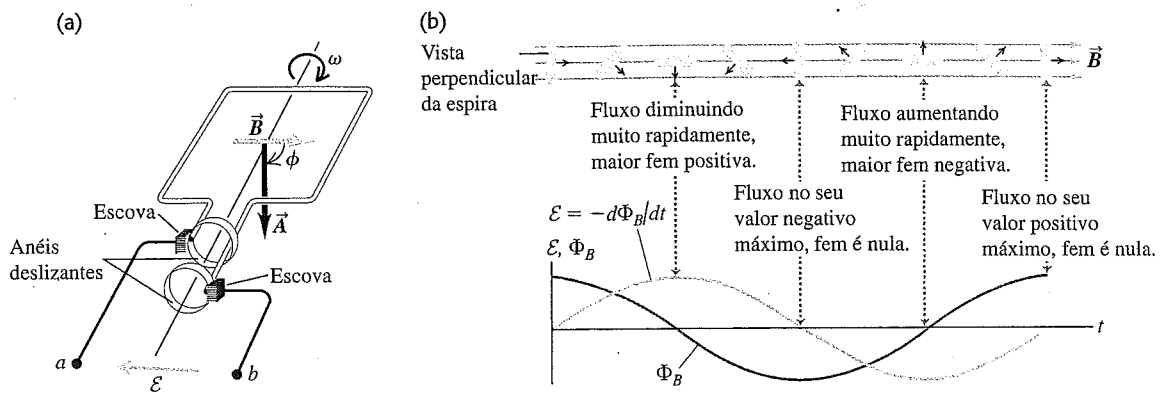


Figura 29.8 (a) Diagrama esquemático de um alternador simples, usando uma espira condutora girando em um campo magnético. As conexões das extremidades da espira com o circuito externo são feitas por meio de dois anéis deslizantes, colocados nessas extremidades. O sistema é indicado no instante para o qual o ângulo $\phi = \omega t = 90°$. (b) Gráfico do fluxo magnético através da espira e da fem resultante nos terminais *ab*, indicando também as posições correspondentes da espira durante uma rotação completa.

PREPARAR: a Figura 29.8a indica o sentido do vetor área $\vec{A}$. Note que, enquanto a espira gira, o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ aumenta a uma taxa constante.

EXECUTAR: novamente o campo magnético é uniforme pela espira, portanto o fluxo magnético é fácil de calcular. A taxa de variação do ângulo ϕ é igual a ω, a velocidade angular da espira, de modo que podemos escrever $\phi = \omega t$. Logo,

$$\Phi_B = BA\cos\phi = BA\cos\omega t$$

A derivada de cos ωt é $(d/dt)\cos\omega t = -\omega \operatorname{sen}\omega t$. Então, de acordo com a lei de Faraday, Equação (29.3), a fem induzida é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BA\operatorname{sen}\omega t$$

AVALIAR: a fem induzida varia senoidalmente com o tempo (Figura 29.8b). Quando o plano da espira é perpendicular a $\vec{B}$ ($\phi = 0$ ou 180°), Φ_B atinge seu valor máximo e seu valor mínimo. Para esses instantes, a taxa de variação instantânea do fluxo é igual a zero e $\mathcal{E}$ também. Note que $\mathcal{E}$ possui seu módulo máximo quando a espira está paralela a $\vec{B}$ (ϕ = 90° ou 270°) e Φ_B está variando mais rapidamente. Finalmente, verificamos que a fem induzida não depende da *forma* da espira, mas apenas de sua área. Como $\vec{B}$ é diretamente proporcional a ω e a B, alguns tacômetros usam a fem de uma bobina girando para medir a velocidade angular, e outros dispositivos empregam uma fem semelhante para medir o campo magnético.

Podemos aproveitar o alternador como uma fonte de fem para um circuito externo usando dois *anéis deslizantes*, que giram acoplados às extremidades da bobina, como indica a Figura 29.8a. Os anéis deslizam sobre dois contatos fixos, chamados de *escovas*, que estão conectados aos terminais *a* e *b*, ligados ao circuito externo. Como a fem induzida varia senoidalmente, a corrente no circuito é uma corrente *alternada* que também varia senoidalmente em módulo, direção e sentido. Por esse motivo, um alternador é também chamado de *gerador de corrente alternada* (ca). A amplitude da fem pode ser aumentada elevando-se a velocidade da rotação, o módulo do campo magnético, a área da espira ou então o número N de espiras, como indica a Equação (29.4).

Os alternadores são usados em automóveis para gerar correntes necessárias na ignição, nas lâmpadas e nos sistemas de entretenimento. O dispositivo é ligeiramente diferente do descrito neste exemplo; em vez de fazer uma espira girar no interior de um campo magnético, a espira permanece fixa e é um eletroímã que gira. (A rotação é produzida por uma correia que liga o alternador ao eixo do motor.) Contudo, o resultado é o mesmo: o fluxo magnético através da espira varia senoidalmente, produzindo uma fem que também varia senoidalmente. Alternadores maiores desse mesmo tipo são usados em usinas hidrelétricas (Figura 29.9).

Exemplo 29.5

GERADOR II: UM GERADOR CC E FEM INDUZIDA EM UM MOTOR O alternador do Exemplo 29.4 produz uma fem que varia senoidalmente e, portanto, a corrente induzida é alternada. Podemos usar um esquema semelhante para construir um *gerador de corrente contínua* (cc), que produz uma fem que sempre possui o mesmo sinal. Um protótipo de gerador cc é indicado na Figura 29.10a. O arranjo com um anel dividido em duas metades

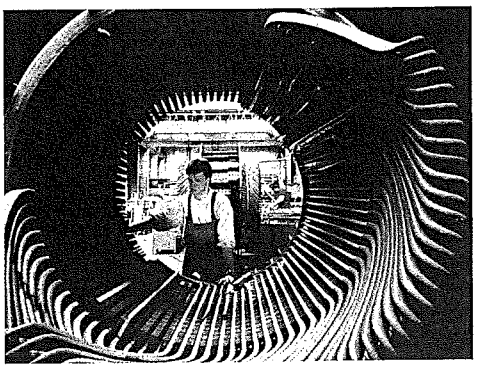


Figura 29.9 Um alternador comercial usa muitas espiras enroladas em uma estrutura com formato de barril, chamada rotor. O rotor e o fio da espira permanecem estacionários enquanto os eletroímãs giram em torno de um cabo (não mostrado) que passa pelo centro do rotor. A fem induzida resultante é muito maior do que seria possível com uma única espira.

denomina-se *comutador*; ele inverte as conexões do circuito externo quando a fem se inverte. A fem resultante é indicada na Figura 29.10b. Um gerador cc comercial possui um número grande de bobinas e de segmentos no comutador; esse dispositivo achata as protuberâncias na fem, de modo que a voltagem nos terminais do gerador, além de não mudar de sinal, é praticamente constante. O dispositivo escovas-comutador é semelhante ao do motor de corrente contínua discutido na Seção 27.8. A *fem induzida* no motor é exatamente a mesma fem induzida pelo fluxo magnético através da bobina que gira. Considere um motor com uma bobina quadrada com lado de 10,0 cm e 500 espiras. Se o campo magnético possui módulo de 0,200 T, qual deve ser a velocidade angular para que a fem induzida *média* do motor seja igual a 112 V?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no que se refere à espira giratória, esta situação é a mesma que a do Exemplo 29.4, exceto por agora termos N espiras. Sem o comutador, a fem teria sinais alternados, positivo e negativo, e um valor médio igual a zero (Figura 29.8b). Mas com o comutador, a fem nunca é negativa e seu valor médio é positivo (Figura 29.10b). Usando o resultado do Exemplo 29.4, determinaremos uma expressão para esse valor médio e explicitaremos essa expressão para a velocidade angular ω (a incógnita do problema).

PREPARAR: as etapas são as mesmas que as do Exemplo 29.4.

EXECUTAR: comparando a Figura 29.8b à Figura 29.10b, verificamos que a fem induzida no motor é precisamente igual ao módulo da fem encontrada no alternador do Exemplo 29.4, multiplicado pelo número N de espiras, conforme a Equação (29.4):

$$|\mathcal{E}| = N\omega BA|\text{sen}\,\omega t|$$

Para encontrarmos a fem induzida *média*, substituímos $|\text{sen}\,\omega t|$ pelo seu valor médio. O valor médio da função seno pode ser obtido integrando-se senωt na metade do ciclo, desde $t = 0$ até $t = T/2 = \pi/\omega$, e, a seguir, dividindo pelo intervalo de tempo π/ω. Na primeira metade do ciclo, a função seno é positiva, logo, $|\text{sen}\,\omega t| = \text{sen}\,\omega t$, portanto encontramos

$$(|\text{sen}\,\omega t|)_{\text{méd}} = \frac{\int_0^{\pi/\omega} \text{sen}\,\omega t\, dt}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi}$$

valor aproximadamente igual a 0,64. A fem induzida média é, portanto,

$$\mathcal{E}_{\text{méd}} = \frac{2N\omega BA}{\pi}$$

A fem induzida é proporcional à velocidade angular ω, como foi afirmado sem demonstração na Seção 27.8. Explicitando ω, obtemos

$$\omega = \frac{\pi\mathcal{E}_{\text{méd}}}{2NBA}$$

$$= \frac{\pi(112\text{ V})}{2(500)(0{,}20\text{ T})(0{,}10\text{ m})^2} = 176\text{ rad/s}$$

Utilizamos as relações obtidas no Exemplo 29.1: 1 V = 1 Wb/s = 1 T · m^2/s. Podemos acrescentar 'radianos' nas unidades da resposta, pois essa grandeza não possui dimensão, conforme vimos no Capítulo 9. A velocidade angular também pode ser escrita na forma

$$\omega = 176\text{ rad/s}\,\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\,\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 1680\text{ rev/min}$$

AVALIAR: a fem induzida média é diretamente proporcional a ω. Logo, quanto menor for a velocidade angular, menor será o valor da fem induzida e maior a probabilidade de queimar o motor, conforme vimos no Exemplo 27.11 (Seção 27.8).

Embora tenhamos usado um modelo muito simples de gerador neste exemplo e no anterior, os mesmos princípios se aplicam à operação de geradores comerciais.

Exemplo 29.6

GERADOR III: UM GERADOR COM HASTE DESLIZANTE Na Figura 29.11, indicamos um condutor em forma de U em um campo magnético $\vec{B}$ uniforme e perpendicular ao plano da figura, direcionado *para dentro* da página. Colocamos uma haste metálica de comprimento L entre os dois braços do condutor, formando um circuito; a seguir, fazemos a haste se deslocar para a direita com velocidade constante $\vec{v}$. Em virtude desse deslocamento, surge uma fem e uma corrente induzida, razão pela qual esse dispositivo é chamado de *gerador com haste deslizante*. Determine o módulo, a direção e o sentido da fem induzida resultante.

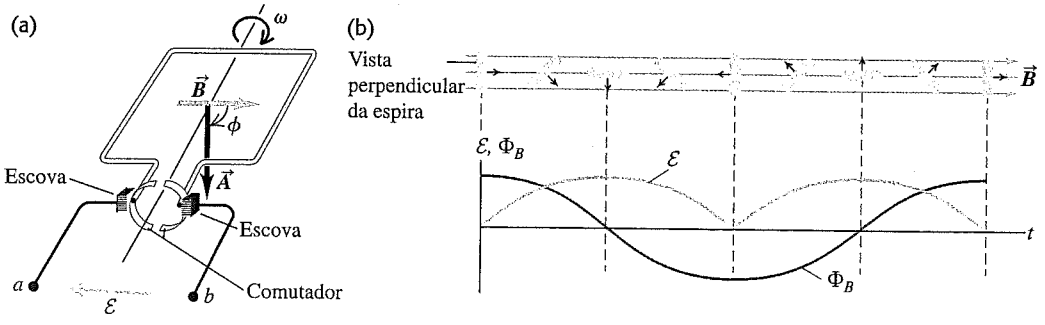


Figura 29.10 (a) Diagrama esquemático de um gerador cc usando um comutador feito com um anel dividido em duas metades. As duas metades do anel estão presas nas extremidades da espira e giram com ela. (b) Gráfico da fem resultante nos terminais *ab*. Compare com a Figura 29.8b.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o fluxo magnético através do circuito está variando porque a área da espira – delimitada à direita pela haste em movimento – está aumentando. A incógnita do problema é a fem induzida $\mathcal{E}$ nessa espira em expansão.

PREPARAR: o campo magnético é uniforme sobre a área da espira, por isso podemos novamente calcular o fluxo magnético usando $\Phi_B = BA\cos\phi$. Considere positivo o sentido da área entrando no plano da página, paralelamente ao vetor $\vec{B}$. Com isso, uma fem positiva será aquela orientada no sentido horário em torno da espira. (É possível verificar isso com a regra da mão direita. Usando a mão direita, aponte o polegar para dentro da página e dobre os dedos como na Figura 29.6.)

EXECUTAR: como $\vec{B}$ e $\vec{A}$ apontam no mesmo sentido, o ângulo $\phi = 0$ e $\Phi_B = BA$. O módulo do campo magnético B é constante, portanto a fem induzida é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

Para calcular dA/dt, note que, em um intervalo de tempo dt, a haste deslizante se desloca por uma distância $v\,dt$ (Figura 29.11) e a área da espira aumenta em $dA = Lv\,dt$. Logo, a fem induzida é

$$\mathcal{E} = -B\frac{Lv\,dt}{dt} = -BLv$$

O sinal negativo significa que o sentido da fem é *anti-horário* em torno da espira. A corrente induzida também é anti-horária, como indica a figura.

AVALIAR: note que a fem permanece constante enquanto a velocidade $\vec{v}$ é constante. Nessas circunstâncias, o gerador com haste deslizante funciona como um gerador de *corrente contínua*. Não é um dispositivo muito prático porque a haste eventualmente se move para além do condutor em formato de U e perde contato, fazendo com que a corrente pare de fluir.

Exemplo 29.7

TRABALHO E POTÊNCIA NO GERADOR COM HASTE DESLIZANTE No gerador com haste deslizante do Exemplo 29.6, ocorre uma dissipação de energia no circuito por causa de sua resistência. Seja R a resistência do circuito (formado pelo condutor em forma de U que está conectado às extremidades da haste deslizante) para uma dada posição da haste. Mostre que a taxa de energia dissipada no circuito é exatamente igual à taxa do trabalho realizado para deslocar a haste através do campo magnético.

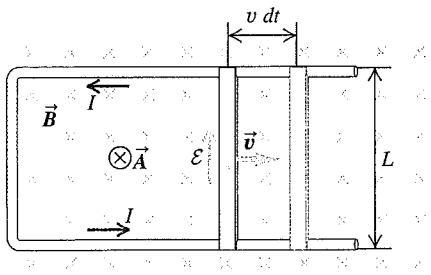


Figura 29.11 Um gerador com haste deslizante. Os vetores $\vec{B}$ e $\vec{A}$ estão entrando no plano da página. O aumento do fluxo magnético (devido ao aumento da área) produz uma fem e uma corrente induzida, cujo sentido é indicado na figura.

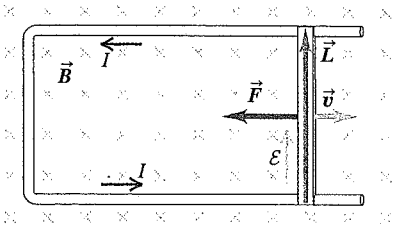


Figura 29.12 A força magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que atua sobre a haste em função da corrente induzida é orientada para a esquerda, ou seja, é contrária ao vetor $\vec{v}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas deste problema são as *taxas* de dissipação da energia e do trabalho realizado. Isso significa que vamos lidar com o conceito de potência (reveja a Seção 6.4). A energia se dissipa no circuito porque há resistência; para descrever isso, necessitaremos dos conceitos da Seção 25.5. É necessário realizar trabalho para mover a haste, porque há uma corrente induzida que flui através dela. O campo magnético exerce uma força sobre essa haste que transporta corrente; e quem estiver empurrando a haste precisará realizar trabalho contra essa força.

PREPARAR: no Exemplo 29.6, determinamos a fem induzida $\mathcal{E}$ nesse circuito. A corrente I no circuito é dada pelo módulo da fem $\mathcal{E}$ dividido pela resistência R, e a taxa com a qual a energia é dissipada no circuito é $P_{\text{dissipada}} = I^2R$. Existe uma força magnética atuando sobre a haste, dada por $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$; o vetor $\vec{L}$ aponta ao longo da haste no sentido da corrente. A Figura 29.12 indica que essa força possui sentido contrário ao da velocidade; para que o movimento seja mantido com velocidade constante, é necessário que uma força com módulo exatamente igual ao módulo da força magnética seja aplicada no sentido do movimento da haste (ou seja, no sentido de $\vec{v}$). A taxa do trabalho realizado é igual ao produto da força aplicada pela velocidade da haste: $P_{\text{aplicada}} = Fv$.

EXECUTAR: inicialmente, calcularemos $P_{\text{dissipada}}$. Pelo Exemplo 29.6, $\mathcal{E} = -BLv$. Logo, a corrente na haste é

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

e a taxa de dissipação de energia é

$$P_{\text{dissipada}} = I^2R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

Para calcular P_{aplicada}, primeiro calculamos o módulo de $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. Como $\vec{L}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, esse módulo é dado por

$$F = ILB = \frac{BLv}{R}LB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Logo, a taxa de trabalho realizado por essa força aplicada é

$$P_{\text{aplicada}} = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

AVALIAR: esse resultado é exatamente igual à taxa de dissipação de energia na resistência.

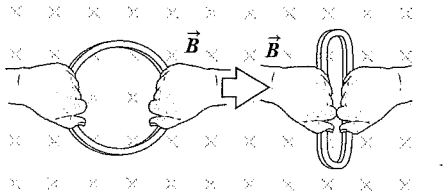
ATENÇÃO Não se pode violar a conservação de energia Você poderia pensar que, invertendo o sentido de $\vec{B}$ ou de $\vec{v}$, seria possível obter uma força magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ no *mesmo* sentido de $\vec{v}$. Isso seria um belo exemplo de um sofisma ilusório. Quando a haste começa a se mover, o fluxo magnético variável induz uma fem e uma corrente, e, se a força magnética tivesse o mesmo sentido da velocidade, ela produziria uma aceleração da haste, aumentando ainda mais a fem e a corrente; esse processo continuaria até que a velocidade da haste fosse tão elevada que produzisse energia elétrica com uma taxa prodigiosamente alta. Isso seria bom demais para ser verdade – basta dizer que isso violaria a lei da conservação da energia. Quando o sentido de $\vec{B}$ se inverte, o sinal da fem e da corrente induzida se invertem e, portanto, o sentido de $\vec{L}$ também se inverte; portanto, a força magnética continua com sentido contrário ao do vetor da velocidade; um raciocínio semelhante mostra que esse resultado continua válido quando você inverte o sentido de $\vec{v}$. Tal comportamento é previsto pela lei de Lenz, que será discutida na Seção 29.3.

Geradores como conversores de energia

O Exemplo 29.7 mostra que o gerador com haste deslizante não pode produzir energia elétrica a partir do nada; a energia é fornecida por uma força externa que mantém a haste se movendo com velocidade constante. O que o gerador faz é *converter* uma forma de energia em outra diferente. A igualdade entre a taxa de fornecimento de energia *mecânica* ao gerador e a taxa de dissipação da energia *elétrica* vale para todos os tipos de gerador. Isso é particularmente verdadeiro para o alternador descrito no Exemplo 29.4. (Estamos desprezando os efeitos do atrito nos mancais do alternador ou sobre os trilhos do condutor em forma de U no caso do gerador com haste deslizante. Caso esses efeitos sejam incluídos, a lei da conservação da energia exige que a energia dissipada pelo atrito não seja disponível para ser convertida em energia elétrica. Nos geradores reais, o projeto é feito de modo que minimize as perdas pelo atrito para que a eficiência do gerador seja a mais elevada possível.)

No Capítulo 27, afirmamos que a força magnética sobre uma carga que se move nunca pode realizar trabalho. Contudo, é possível pensar que a força magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ do Exemplo 29.7 *está* realizando um trabalho (negativo) sobre a corrente que circula na haste quando ela se desloca, em contradição à nossa afirmação anterior. Contudo, o trabalho realizado pela força magnética é de fato igual a zero. As cargas que dão origem à corrente na Figura 29.12 possuem um componente vertical da velocidade que produz um componente horizontal da força sobre essas cargas. Portanto, existe um deslocamento horizontal das cargas no interior da haste, visto que o lado esquerdo fica positivamente carregado e o lado direito negativamente carregado. O resultado é um componente horizontal do campo elétrico, perpendicular ao comprimento da haste (análogo ao efeito Hall descrito na Seção 27.9). É esse campo, no mesmo sentido do movimento da haste, que produz o trabalho realizado sobre as cargas móveis da haste e indiretamente sobre os átomos que constituem a haste.

Teste sua compreensão da Seção 29.2 A figura abaixo mostra uma bobina sendo comprimida em um campo magnético uniforme. (a) Enquanto a bobina é comprimida, a fem induzida na bobina tem sentido (i) horário, (ii) anti-horário ou (iii) nulo? (b) Quando a bobina atinge o máximo de compressão, a fem induzida na bobina tem sentido (i) horário, (ii) anti-horário ou (iii) nulo? ▮



Bobina circular — Bobina comprimida no formato oval

29.3 Lei de Lenz

A lei de Lenz é um método alternativo para determinar o sentido da fem ou da corrente induzida. A lei de Lenz não constitui um princípio independente, pois pode ser deduzida a partir da lei de Faraday. Ela sempre conduz ao mesmo resultado obtido quando usamos as regras de sinais introduzidas junto à lei de Faraday, contudo ela é mais fácil de aplicar. A lei de Lenz também nos ajuda a adquirir conhecimentos intuitivos dos diversos efeitos de indução e do papel desempenhado pela conservação da energia. H. F. E. Lenz (1804-1865) foi um cientista alemão que realizou de modo independente muitas das experiências feitas por Faraday e por Henry. A **lei de Lenz** afirma que:

O sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que ele se opõe à causa que produz esse efeito.

A 'causa' pode ser um fluxo que varia através de um circuito em repouso produzido pela variação de um campo magnético, um fluxo magnético variável gerado pelo movimento relativo de condutores que compõem o circuito ou qualquer outra combinação que produza variação de fluxo. Quando o fluxo magnético varia através de um circuito em repouso, como indicado nos exemplos 29.1 e 29.2, a própria corrente induzida produz um campo magnético. No interior da área delimitada pelo circuito, esse campo é *oposto* ao campo original quando o campo original está *crescendo*, porém possui o *mesmo* sentido do campo original quando ele está *diminuindo*. Ou seja, a corrente induzida se opõe à *variação do fluxo* magnético através do circuito (e *não* ao próprio fluxo).

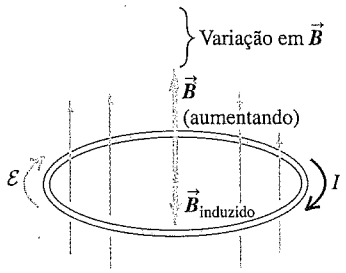


Figura 29.13 A corrente induzida produzida pela variação de $\vec{B}$ possui sentido horário, se observada de cima para baixo. O campo magnético adicional $\vec{B}_{\text{induzido}}$ criado por ela é orientado de cima para baixo, opondo-se à variação do campo $\vec{B}$ de baixo para cima.

Quando a variação do fluxo magnético é produzida pelo movimento do condutor, como indicam os exemplos 29.3 até 29.7, o sentido da corrente induzida no condutor que se move é tal que o sentido da força magnética que atua sobre o condutor é sempre oposto ao sentido de sua velocidade. Portanto, a força se opõe ao movimento do condutor, que causou a corrente induzida. Vimos isso explicitamente no Exemplo 29.7 para o gerador com haste deslizante. Em todos esses casos, a corrente induzida tende a manter o *status quo*, se opondo ao movimento ou contrariando a variação do fluxo magnético.

A lei de Lenz está relacionada diretamente à conservação da energia. Caso a corrente induzida no Exemplo 29.7 fosse no sentido oposto ao indicado pela lei de Lenz, a força magnética produziria uma aceleração da haste, aumentando indefinidamente sua velocidade sem nenhuma fonte de energia externa, embora haja dissipação de energia elétrica no circuito. Isso seria uma clara violação da conservação da energia e não pode ocorrer na natureza.

Exemplo conceitual 29.8

REVISÃO DO GERADOR COM HASTE DESLIZANTE Na Figura 29.11, a corrente induzida na espira produz um campo magnético adicional na área limitada pela espira. O sentido da corrente induzida é anti-horário. De acordo com a discussão feita na Seção 28.2, vimos que o sentido do campo magnético adicional é *para fora* do plano da figura. Tal sentido é oposto ao do campo magnético original, de modo que ele tende a cancelar o efeito do campo original. Essa conclusão é consistente com a previsão da lei de Lenz.

Exemplo conceitual 29.9

DETERMINAÇÃO DO SENTIDO DA CORRENTE INDUZIDA Na Figura 29.13, existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$ através da espira. O módulo do campo está aumentando, e a fem induzida produz uma corrente induzida. Use a lei de Lenz para determinar o sentido da corrente induzida.

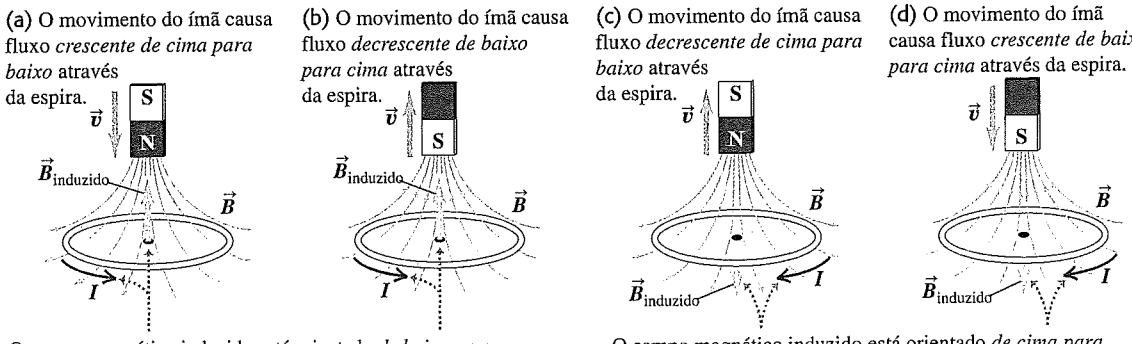
SOLUÇÃO

Essa situação é análoga à do Exemplo 29.1 (Seção 29.2). De acordo com a lei de Lenz, a corrente induzida deve produzir um campo magnético $\vec{B}_{\text{induzido}}$ no interior da espira, orientado de cima para baixo, opondo-se à variação do fluxo. Usando a regra da mão direita descrita na Seção 28.5 para o sentido do campo magnético gerado por uma espira circular, $\vec{B}_{\text{induzido}}$ terá o sentido desejado se a corrente induzida tiver o sentido indicado na Figura 29.13.

A Figura 29.14 mostra diversas aplicações da lei de Lenz para o caso semelhante de um ímã se movendo próximo de uma espira condutora circular. Em cada um dos quatro casos indicados, a corrente induzida produz um campo magnético adicional que se opõe à variação do fluxo através da espira produzida pelo movimento do ímã.

Lei de Lenz e resposta a uma variação de fluxo magnético

Visto que uma corrente induzida sempre se opõe a qualquer variação de fluxo magnético através de um circuito, então como pode ocorrer alguma variação do fluxo? A resposta é que a lei de Lenz fornece apenas o *sentido* da corrente induzida; o *módulo* da corrente induzida depende da resistência do circuito. Quanto maior a resistência do circuito, menor é a corrente induzida que se opõe a qualquer variação de fluxo e mais facilmente a variação do fluxo magnético pode ocorrer. Se a espira da Figura 29.14



O campo magnético induzido está orientado *de baixo para cima* para se opor à variação no fluxo. Para produzir esse campo induzido, a corrente induzida deve estar *no sentido anti-horário*, se observado de cima para baixo em relação à espira.

O campo magnético induzido está orientado *de cima para baixo* para se opor à variação no fluxo. Para produzir esse campo induzido, a corrente induzida deve estar *no sentido horário*, se observado de cima para baixo em relação à espira.

Figura 29.14 Sentidos das correntes induzidas quando um ímã se desloca ao longo do eixo de uma espira condutora. Quando o ímã está em repouso, não existe nenhuma corrente induzida.

fosse de madeira (um isolante), não existiria quase nenhuma corrente induzida em resposta à variação do fluxo através da espira.

Reciprocamente, quanto menor a resistência do circuito, maior é a corrente induzida e mais difícil se torna a variação do fluxo magnético através do circuito. Supondo que a espira da Figura 29.14 seja feita com um bom condutor, surge uma corrente induzida toda vez que ocorre um movimento relativo entre o ímã e a espira. Quando o movimento relativo termina, a corrente induzida diminui rapidamente até zero, em virtude da resistência da espira.

Um caso extremo ocorre quando a resistência do circuito é igual a *zero*. Então, a corrente induzida na Figura 29.14 continua a circular até mesmo depois que já não há mais fem induzida, ou seja, mesmo depois de cessado o movimento relativo. Graças a essa *corrente persistente*, verifica-se que o fluxo magnético através da espira é igual ao fluxo que existia antes do movimento relativo, o que nos permite concluir que o fluxo magnético através de uma espira com resistência nula não varia *jamais*. Um material exótico chamado de *supercondutor* possui resistência igual a zero; discutiremos as propriedades desse tipo de material na Seção 29.8.

Teste sua compreensão da Seção 29.3 (a) Suponha que o ímã na Figura 29.14a estivesse em repouso, e a espira se movesse de baixo para cima. A corrente induzida na espira estaria (i) no mesmo sentido indicado na Figura 29.14a, (ii) no sentido oposto ao indicado na Figura 29.14a ou (iii) no sentido nulo? (b) Suponha que o ímã e a espira na Figura 29.14a se movessem de cima para baixo, com a mesma velocidade. A corrente induzida na espira estaria (i) no mesmo sentido indicado na Figura 29.14a, (ii) no sentido oposto ao indicado na Figura 29.14a ou (iii) no sentido nulo? ▮

29.4 Força eletromotriz produzida pelo movimento

Vimos várias situações em que ocorre o movimento de um condutor em um campo magnético, tal como nos casos dos geradores discutidos nos Exemplo 29.4 até o 29.7. Podemos compreender melhor a origem da fem induzida nessas situações, examinando as forças magnéticas que atuam sobre as cargas do condutor. A Figura 29.15a mostra a mesma haste deslizante do Exemplo 29.6, destacada agora do condutor em forma de U. O campo magnético $\vec{B}$ é uniforme e está dirigido para dentro da página e deslocamos a haste para a direita com uma velocidade constante $\vec{v}$. Uma partícula com carga q no interior da haste sofre a ação de uma força magnética dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, cujo módulo é $F = |q|vB$. Na discussão que faremos a seguir, vamos supor q positivo; nesse caso, o sentido da força é *de baixo para cima*, ou seja, de b para a.

Essa força magnética produz movimento das cargas na haste, criando um excesso de cargas positivas na extremidade superior a e de cargas negativas na extremidade inferior b. Isso faz surgir um campo elétrico $\vec{E}$ no interior da haste no sentido de a para b (contrário ao da força magnética). As cargas continuam a se acumular nas extremidades da haste até que a força elétrica orientada de cima para baixo (de módulo igual a qE) seja exatamente igual à força magnética orientada de *baixo para cima* (de módulo igual a qvB). Então, $qE = qvB$ e as cargas permanecem em equilíbrio.

O módulo da diferença de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ é igual ao módulo do campo elétrico E multiplicado pelo comprimento L da haste. De acordo com a discussão precedente, $E = vB$, portanto

$$V_{ab} = EL = vBL \tag{29.5}$$

em que o ponto a possui um potencial maior que o do ponto b.

Suponha agora que a haste esteja deslizando sobre um condutor em forma de U, formando um circuito completo (Figura 29.15b). Sobre as cargas nos condutores em repouso em forma de U não existe nenhuma força *magnética*, porém as cargas nas vizinhanças de a e de b se redistribuem ao longo dos condutores em repouso, criando um campo *elétrico* no interior deles. Esse campo produz uma corrente no sentido indicado. A haste deslizante torna-se uma fonte de força eletromotriz; no interior dela as cargas

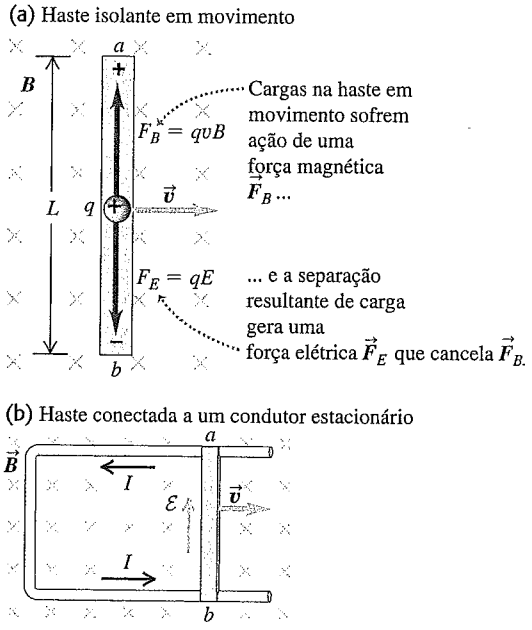


Figura 29.15 Uma haste condutora se movendo em um campo magnético uniforme. (a) A haste, a velocidade e o campo são mutuamente perpendiculares. (b) Sentido da corrente induzida no circuito.

se movem do potencial mais baixo para o potencial mais elevado; e no restante do circuito as cargas se deslocam do potencial mais elevado para o potencial mais baixo. Essa força eletromotriz produzida pelo movimento será designada por $\mathcal{E}$ e chamada de **força eletromotriz do movimento**. De acordo com a discussão precedente, o módulo dessa fem é dado por

$$\mathcal{E} = vBL \tag{29.6}$$

(fem do movimento; comprimento e velocidade perpendicular a $\vec{B}$ uniforme)

que corresponde a uma força por unidade de carga de módulo vB que atua sobre uma distância L ao longo da haste deslizante. Chamando de R a resistência total dos condutores em forma de U com a haste, a corrente induzida no circuito é dada por $vBL = IR$. Esse resultado é igual ao obtido na Seção 29.2 a partir da aplicação da lei de Faraday e, na realidade, a fem do movimento é um caso particular da lei de Faraday, um dos diversos exemplos analisados na Seção 29.2.

A fem associada à haste deslizante na Figura 29.15 é análoga à fem de uma bateria que tivesse seu terminal positivo no ponto a e seu terminal negativo no ponto b, embora a origem de cada fem seja bastante diferente. Em cada caso, uma força não-eletrostática atua no circuito, no sentido de b para a, e a fem é o trabalho realizado por essa força por unidade de carga quando as cargas se deslocam de b para a no interior do dispositivo. Quando o dispositivo é conectado a um circuito externo, o sentido da corrente é de b para a no interior do dispositivo e de a para b no circuito externo. Embora tenhamos discutido a fem do movimento para um circuito fechado, como aquele indicado na Figura 29.15b, uma fem do movimento também está presente na haste que se move na Figura 29.15a, do mesmo modo que uma bateria possui uma fem mesmo quando ela não faz parte de nenhum circuito.

O sentido da fem na Figura 29.15 pode ser obtido pela lei de Lenz, mesmo quando (como na Figura 29.15a) o condutor não forma um circuito completo. Nesse caso, podemos imaginar um circuito fechado e aplicar a lei de Lenz para determinar o sentido da corrente induzida. A partir daí é possível deduzir a polaridade das extremidades do condutor no circuito aberto. A localização do pólo – e do pólo + é determinada pela corrente que fluiria no circuito, caso ele estivesse fechado.

Expressando v em metros por segundo, B em teslas e L em metros, concluímos que $\mathcal{E}$ é dado em volts; convidamos você a verificar isso. (Lembre-se de que 1 V = 1 J/C.)

Fem do movimento: forma generalizada

Podemos generalizar o conceito de fem do movimento para um condutor que possui *qualquer* forma e que se desloca em qualquer campo magnético, uniforme ou não (supondo que o campo magnético em cada ponto não varie com o tempo). Para um elemento $d\vec{l}$ do condutor, a contribuição $d\mathcal{E}$ da fem é dada pelo módulo dl multiplicado pelo componente de $\vec{v} \times \vec{B}$ (a força magnética por unidade de carga) paralela a $d\vec{l}$; ou seja,

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Para qualquer espira condutora fechada, a fem é dada por

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{29.7}$$

(fem do movimento: espira condutora fechada)

A expressão anterior parece ser muito diferente da expressão original da lei de Faraday, dada pela Equação (29.3), segundo a qual $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$. Contudo, na realidade, essas duas expressões são equivalentes. É possível demonstrar que a taxa de variação do fluxo magnético através de uma espira que se move é sempre dada pela expressão, com sinal negativo, indicada na Equação (29.7). Portanto, essa expressão fornece uma forma alternativa para a lei de Faraday. Essa alternativa geralmente é mais conveniente que a forma original em problemas que envolvem condutores que se *movem*. Contudo, no caso de condutores em *repouso* no interior de um campo magnético variável, a Equação (29.7) *não pode* ser aplicada; nesse caso, $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ é a única forma correta para a expressão da lei de Faraday.

Exemplo 29.10

CÁLCULO DA FEM DO MOVIMENTO Considere o comprimento L na Figura 29.15b igual a 0,10 m, a velocidade v igual a 2,5 m/s, a resistência total da espira 0,030 Ω e B igual a 0,60 T. Calcule $\mathcal{E}$, a corrente induzida e a força que atua sobre a haste.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a primeira incógnita é a fem $\mathcal{E}$ *do movimento* para o movimento da haste. Determinaremos a corrente a partir dos valores de $\mathcal{E}$ e da resistência R. Na realidade, a força que atua sobre a haste é uma força magnética exercida por $\vec{B}$ sobre a corrente na haste.

PREPARAR: usaremos a expressão da fem do movimento deduzida nesta seção, a conhecida relação $\mathcal{E} = IR$, e a fórmula $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ para a força magnética que atua sobre a haste que transporta corrente e tem comprimento L = 0,10 m.

EXECUTAR: de acordo com a Equação (29.6), a fem é dada por

$$\mathcal{E} = vBL = (2{,}5\ \text{m/s})(0{,}60\ \text{T})(0{,}10\ \text{m}) = 0{,}15\ \text{V}$$

A corrente induzida resultante na espira é dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0{,}15\ \text{V}}{0{,}030\ \Omega} = 5{,}0\ \text{A}$$

Em virtude dessa corrente, uma força magnética $\vec{F}$ atua sobre a haste em sentido *oposto* ao seu movimento; isso pode ser verificado aplicando-se a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. O vetor $\vec{L}$ aponta de b para a na Figura 29.15, no

mesmo sentido da corrente induzida na haste. Como $\vec{L}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, o módulo da força é dado por

$$F = ILB = (5{,}0\ \text{A})(0{,}10\ \text{m})(0{,}60\ \text{T}) = 0{,}30\ \text{N}$$

AVALIAR: podemos conferir o resultado obtido para o sentido de $\vec{F}$ usando a lei de Lenz. Se tomarmos a área $\vec{A}$ apontando para dentro do plano da espira, o fluxo magnético será positivo e crescente, enquanto a haste se move para a direita e aumenta a área da espira. A lei de Lenz afirma que uma força surgirá para se opor a esse aumento no fluxo. Logo, a força que atua sobre a haste está orientada para a esquerda, no sentido contrário ao seu movimento.

Exemplo 29.11

UM DÍNAMO BASEADO NO DISCO DE FARADAY A Figura 29.16 mostra um disco condutor de raio R contido no plano xy e girando com velocidade angular ω constante em torno do eixo Oz. O disco está em um campo magnético uniforme $\vec{B}$ paralelo ao eixo Oz. Determine a fem induzida entre o centro e a periferia do disco.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: uma fem do movimento está presente porque o disco condutor se move em relação ao campo $\vec{B}$. A complicação é que diferentes partes do disco se movem com diferentes velocidades v, dependendo da sua distância do eixo de rotação. Vamos tratar essa questão considerando pequenos segmentos do disco e somando (de fato, integrando) suas contribuições para determinar a incógnita, que é a fem entre o centro e a periferia do disco.

PREPARAR: considere o pequeno segmento de disco designado pelo seu vetor da velocidade $\vec{v}$. A força magnética por unidade de carga nesse segmento é dada por $\vec{v} \times \vec{B}$, que aponta radialmente para fora do centro do disco. Logo, a fem induzida tende a fazer uma corrente fluir radialmente para fora, o que nos diz que o percurso da parte do condutor que se move a considerar aqui é uma linha reta, que vai do centro para a periferia. Podemos determinar a fem de cada pequeno segmento de disco ao longo dessa linha usando a expressão $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ e, a seguir, integrar, para encontrar a fem total.

ATENÇÃO Velocidade escalar em um disco em rotação
Você pode ficar tentado a usar a Equação (29.5) e simplesmente multiplicar vB pelo comprimento do percurso da parte do condutor que se move, que é precisamente igual ao raio R. Contudo, isso seria errado porque v possui diferentes valores em diferentes pontos ao longo do percurso.

EXECUTAR: vamos considerar a fem do movimento $d\mathcal{E}$ produzida por um pequeno segmento do condutor situado a uma distância r do eixo de rotação. O vetor associado de comprimento $d\vec{l}$ (com comprimento dr) aponta radialmente para fora, no mesmo sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, e o módulo de $\vec{v}$ é $v = \omega r$. A fem total entre o centro e a periferia do disco é dada pela integral das contribuições infinitesimais:

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega B r\, dr = \frac{1}{2}\omega B R^2$$

AVALIAR: podemos usar esse dispositivo como uma fonte de fem, completando-o com um circuito externo através de escovas estáticas (indicadas pela letra b na figura) que estabelecem um contato deslizante com o eixo do disco e sua periferia, como indica a figura. A fem em tal disco foi estudada por Faraday; esse dispositivo é conhecido como *dínamo com o disco de Faraday* ou *gerador homopolar*. Diferentemente do alternador discutido no Exemplo 29.4, o dínamo obtido com o disco de Faraday é um gerador de corrente contínua; ele produz uma fem constante no tempo. Você é capaz de usar a lei de Lenz para mostrar que o sentido da corrente induzida, considerando o sentido da rotação na Figura 29.16, deve ser de fato dado pelo sentido indicado?

Teste sua compreensão da Seção 29.4 O campo magnético da Terra aponta para o norte (magnético). Para simplificar, assumimos que o campo não possui componente vertical (como ocorre próximo ao Equador). (a) Se você segurar uma haste metálica e caminhar no sentido leste, como você deve orientar a haste para obter o valor máximo da fem do movimento entre as suas extremidades? (i) de leste para oeste; (ii) de norte para sul; (iii) de cima para baixo; (iv) obtém-se a mesma fem do movimento seja qual for a orientação. (b) Como você deve segurar a haste para obter fem igual a *zero*, enquanto caminha no sentido leste? (i) de leste para oeste; (ii) de norte para sul; (iii) de cima para baixo; (iv) nenhuma dessas alternativas. (c) Em qual sentido você deve seguir para que a fem do movimento através da haste seja igual a zero, seja qual for a orientação dada a ela? (i) oeste; (ii) norte; (iii) sul; (iv) em linha reta para cima; (v) em linha reta para baixo. ∎

29.5 Campos elétricos induzidos

Quando um condutor se move em um campo magnético, podemos entender a fem induzida com base nas forças magnéticas que atuam sobre o condutor, conforme descrito

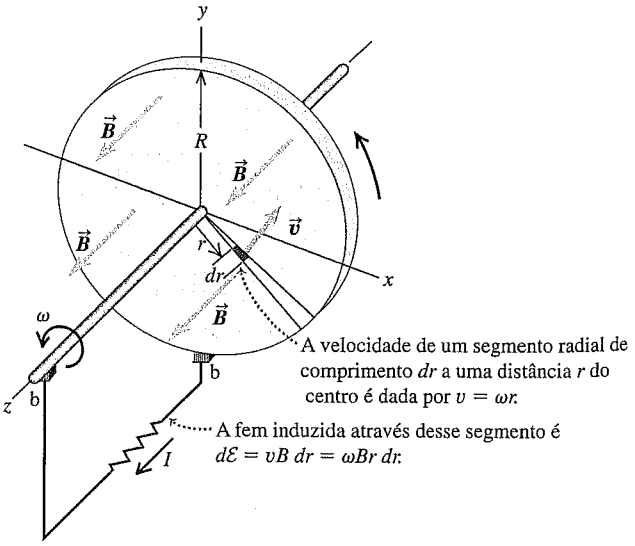


Figura 29.16 Um disco condutor de raio R girando com uma velocidade angular ω em um campo magnético $\vec{B}$. A fem é induzida em uma direção radial do disco e produz uma corrente no circuito externo através de contatos deslizantes designados pela letra b.

na Seção 29.4. Contudo, também existe uma fem quando ocorre um fluxo magnético variável através de um condutor em repouso. Qual é a força que atua sobre as cargas ao longo do circuito nesse tipo de situação?

Como exemplo, considere a situação ilustrada na Figura 29.17. Um solenóide longo e fino com seção reta de área A com n espiras por unidade de comprimento é circundado em seu centro por uma espira condutora circular. O galvanômetro G mede a corrente na espira. A corrente I no enrolamento do solenóide produz um campo magnético $\vec{B}$ ao longo do eixo do solenóide, cujo módulo B foi calculado no Exemplo 28.9 (Seção 28.7): $B = \mu_0 nI$, em que n é o número de espiras por unidade de comprimento. Desprezando o pequeno campo magnético fora do solenóide e tomando o vetor área $\vec{A}$ no mesmo sentido de $\vec{B}$, o fluxo magnético Φ_B através da espira é dado por

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

Quando a corrente I do solenóide varia com o tempo, o fluxo magnético Φ_B também varia e, de acordo com a lei de Faraday, a fem induzida na espira é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt} \qquad (29.8)$$

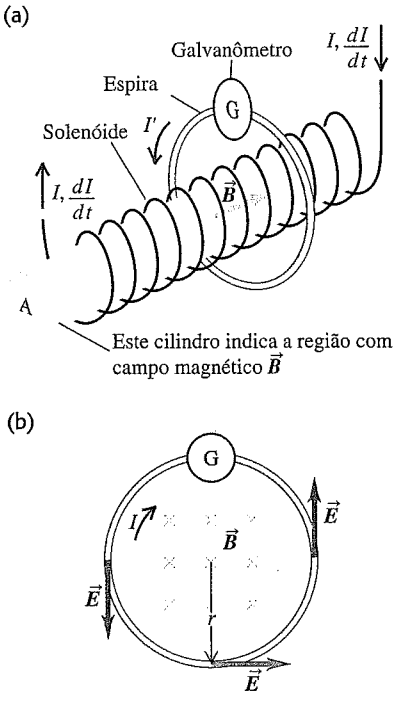


Figura 29.17 (a) As espiras de um solenóide longo que conduz uma corrente I que cresce com uma taxa dI/dt. O fluxo magnético no solenóide cresce com uma taxa $d\Phi_B/dt$ e esse fluxo variável passa através da espira. Uma fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ é induzida na espira produzindo uma corrente induzida I' medida pelo galvanômetro G. (b) Vista mostrando a seção reta.

Designando por R a resistência total da espira e por I' a corrente induzida na espira, temos $I' = \mathcal{E}/R$.

Porém, qual é a *força* que atua sobre as cargas, obrigando-as a se mover ao longo do circuito? Não pode ser uma força magnética porque a espira não está em movimento, nem mesmo está *dentro* de um campo magnético. Somos forçados a concluir que se trata de um **campo elétrico induzido** no condutor *produzido pela variação do fluxo magnético*. Isso pode parecer ligeiramente estranho, pois estamos acostumados a pensar em campos elétricos produzidos por cargas elétricas e agora observamos que um campo magnético variável pode ser uma fonte de campo elétrico. Além disso, trata-se de um tipo estranho de campo elétrico. Quando uma carga q completa uma volta em torno da espira, o trabalho total realizado pelo campo elétrico é igual ao produto da carga q pela fem $\mathcal{E}$. Ou seja, concluímos que o campo elétrico *não é conservativo*, conforme a discussão feita no Capítulo 23, porque a integral de linha de $\vec{E}$ ao longo de um percurso fechado não é igual a zero. Na verdade, essa integral de linha, que representa o trabalho realizado pelo campo elétrico induzido $\vec{E}$ por unidade de carga, fornece a fem $\mathcal{E}$ induzida:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \qquad (29.9)$$

De acordo com a lei de Faraday, a fem $\mathcal{E}$ é dada pela taxa de variação do fluxo magnético, com o sinal negativo, através de uma espira. Logo, para esse caso podemos escrever a lei de Faraday na seguinte forma

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.10)$$

(percurso de integração estático)

Note que a lei de Faraday é sempre verdadeira na forma $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$; a forma indicada na Equação (29.10) vale *somente* quando o percurso usado na integração permanecer *estático*.

Como exemplo de uma situação apropriada para o uso da Equação (29.10), considere a espira circular estática indicada na Figura 29.17b, que possui raio r. Como existe simetria cilíndrica, o campo elétrico $\vec{E}$ possui direção tangente à circunferência e o mesmo módulo em todos os seus pontos. (A simetria permitiria também imaginar um campo *radial*; nesse caso, a lei de Gauss exigiria a presença de uma carga no interior do círculo, porém não existe nenhuma.) A integral de linha na Equação (29.10) é simplesmente igual ao módulo E multiplicado pelo comprimento da circunferência $2\pi r$, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi rE$, e a Equação (29.10) fornece

$$E = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \qquad (29.11)$$

Na Figura 29.17b, mostramos a direção e o sentido de $\vec{E}$ em diversos pontos da espira. Sabemos que $\vec{E}$ deve possuir o sentido indicado quando o campo $\vec{B}$ no solenóide está

crescendo, porque $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ tem de ser negativo quando $d\Phi_B/dt$ é positivo. O mesmo raciocínio pode ser usado para determinar o campo elétrico induzido no *interior* do solenóide quando o campo magnético $\vec{B}$ está variando; deixamos os detalhes para você (veja o Exercício 29.29).

Campos elétricos não-eletrostáticos

Vamos agora resumir o que aprendemos. A lei de Faraday, Equação (29.3), é válida em duas situações bastante diferentes. Em uma delas, uma fem é induzida por forças magnéticas que atuam sobre cargas quando um condutor está em movimento através de um campo magnético. Na outra, um campo magnético variável com o tempo induz um campo elétrico em um condutor que está em repouso e induz uma fem — na realidade, o campo elétrico $\vec{E}$ é induzido mesmo quando não existe nenhum condutor na região. Esse campo elétrico $\vec{E}$ difere de um campo *eletrostático* em um aspecto importante: ele *não é conservativo*, ou seja, a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ao longo de um percurso fechado não é igual a zero; portanto, quando uma carga se desloca ao longo de um percurso fechado, o campo realiza um trabalho diferente de zero sobre a carga. A partir disso, se conclui que o conceito de *potencial* desse campo não faz sentido. Tal campo é chamado de **campo não-eletrostático**. Em contraste, um campo *eletrostático* é *sempre* conservativo, conforme discutimos na Seção 23.1, e possui sempre uma função potencial associada. Apesar dessa diferença, o efeito fundamental de *qualquer* campo elétrico é a força elétrica $\vec{F} = q\vec{E}$ que atua sobre qualquer carga q. Essa relação vale tanto para um campo conservativo oriundo de uma distribuição de cargas quanto para um campo não-conservativo oriundo de um fluxo magnético variável.

Portanto, um campo magnético variável age como uma fonte que produz um tipo de campo elétrico que *não podemos* gerar com uma distribuição de cargas estáticas. Isso pode parecer estranho, mas é dessa maneira que a natureza se comporta. Além disso, veremos na Seção 29.7 que um campo *elétrico* variável age como fonte geradora de um campo *magnético*. Vamos explorar com mais detalhes essa simetria entre os dois campos nos estudos das ondas eletromagnéticas, no Capítulo 32.

Caso você ainda tenha dúvida sobre a realidade de um campo elétrico induzido magneticamente, considere algumas das muitas aplicações práticas existentes (Figura 29.18). Na cabeça de leitura para reprodução do som de uma fita magnética, correntes induzidas são produzidas por uma bobina estática à medida que as regiões magnetizadas da fita passam através dela. Os discos dos computadores funcionam com base no mesmo princípio. Os captadores de som em guitarras elétricas usam correntes induzidas por bobinas captadoras estáticas mediante a vibração de componentes ferromagnéticos em suas vizinhanças. Os alternadores de muitos automóveis empregam ímãs ou eletroímãs girando para induzir correntes em bobinas estáticas. A lista de aplicações é interminável; campos elétricos induzidos magneticamente desempenham um importante papel em nossa vida cotidiana.

Exemplo 29.12

CAMPOS ELÉTRICOS INDUZIDOS Suponha que o longo solenóide da Figura 29.17a seja enrolado com 500 espiras por metro e que a corrente em seu enrolamento esteja crescendo com uma taxa igual a 100 A/s. A área da seção reta do solenóide é de 4,0 $cm^2 = 4{,}0 \times 10^{-4}\ m^2$. (a) Determine o módulo da fem induzida na espira fora do solenóide. (b) Calcule o módulo do campo elétrico induzido na espira, sabendo que seu raio é igual a 2,0 cm.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como na Figura 29.17b, o campo magnético crescente no interior do solenóide provoca uma variação no fluxo magnético que passa pela espira e, portanto, induz um campo elétrico $\vec{E}$ em torno da espira. As incógnitas são a fem induzida $\mathcal{E}$ e o módulo de $\vec{E}$.

PREPARAR: usamos a Equação (29.8) para determinar a fem. A determinação do módulo do campo E é simplificada porque a espira e o solenóide compartilham o mesmo eixo central. Portanto,

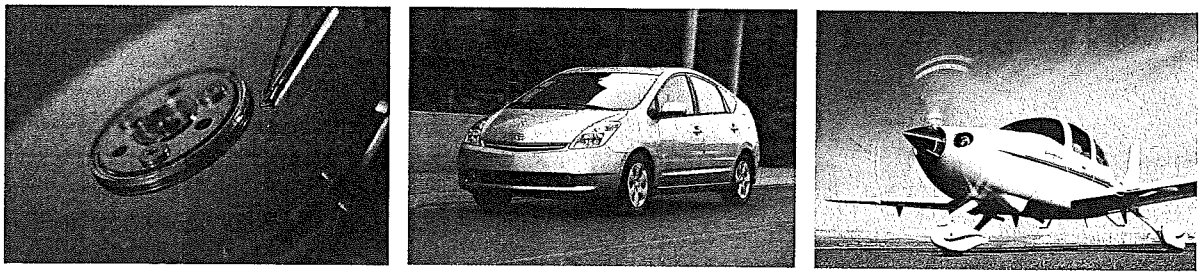


Figura 29.18 Aplicações de campos elétricos induzidos. (a) Dados são armazenados no disco rígido de um computador seguindo um padrão de áreas magnetizadas sobre a superfície do disco. Para possibilitar a leitura desses dados, uma bobina sobre um braço móvel é colocada próxima ao disco giratório. A bobina sofre variação no fluxo magnético, o que induz uma corrente, cujas características dependem do padrão gravado no disco. (b) Este automóvel híbrido possui tanto um motor a gasolina quanto um motor elétrico. Quando o carro pára, as rodas que giram fazem o motor se mover para trás, de modo a atuar como um gerador. A corrente induzida resultante é usada para recarregar as baterias do carro. (c) O virabrequim giratório de um avião monomotor faz girar um ímã, que induz uma fem em uma bobina adjacente, gerando a faísca que ativa o combustível nos cilindros do motor. Isso mantém o motor em funcionamento, mesmo em caso de falha no sistema elétrico do avião.

por simetria, o campo elétrico é tangente à espira e possui o mesmo módulo por toda a sua circunferência. Isso facilita o cálculo de E a partir da fem $\mathcal{E}$ usando a Equação (29.9).

EXECUTAR: (a) Pela Equação (29.8), a fem induzida é

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt}\\ &= -(4\pi \times 10^{-7}\,\text{Wb/A}\cdot\text{m})(500\,\text{espiras/m})\\ &\quad \times (4{,}0 \times 10^{-4}\,\text{m}^2)(100\,\text{A/s})\\ &= -25 \times 10^{-6}\,\text{Wb/s} = -25 \times 10^{-6}\,\text{V} = -25\,\mu\text{V}\end{aligned}$$

(b) Por simetria, a integral de linha $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ possui módulo igual a $2\pi rE$ (qualquer que seja o sentido do percurso da integração). Igualamos esse resultado com o valor absoluto da fem; logo,

$$E = \frac{|\mathcal{E}|}{2\pi r} = \frac{25 \times 10^{-6}\,\text{V}}{2\pi(2{,}0 \times 10^{-2}\,\text{m})} = 2{,}0 \times 10^{-4}\,\text{V/m}$$

AVALIAR: na Figura 29.17b, o fluxo magnético que *entra* no plano da figura está crescendo. De acordo com a regra da mão direita (ilustrada na Figura 29.6), o sinal positivo de $\mathcal{E}$ possui sentido horário em torno da espira; o sinal negativo de $\mathcal{E}$ mostra que a fem possui sentido anti-horário. Convidamos você a mostrar que a lei de Lenz também prediz esse sentido.

Teste sua compreensão da Seção 29.5 Ao sacudir um ímã para a frente e para trás com a mão, você gerará um campo elétrico? Em caso afirmativo, esse campo elétrico será conservativo? ▮

29.6 Correntes de Foucault

Nos exemplos de indução que estudamos, as correntes induzidas estavam confinadas em percursos bem definidos em condutores e outros componentes que formam um circuito. Contudo, diversas partes de equipamentos elétricos possuem massas metálicas que se deslocam no interior de campos magnéticos ou estão localizadas em campos magnéticos variáveis. Nessas circunstâncias, podem surgir correntes induzidas que circulam ao longo do volume do material. Como essas correntes volumétricas são semelhantes aos redemoinhos das águas de um rio, elas são chamadas de *correntes de redemoinho*, *correntes parasitas* ou **correntes de Foucault**.

Para exemplificar, considere um disco metálico girando em um campo magnético perpendicular ao plano do disco, porém confinado apenas a uma fração da área do disco, como indica a Figura 29.19a. O setor *Ob* se desloca através do campo magnético e possui uma fem induzida através dele. Os setores *Oa* e *Oc* não estão no campo magnético, mas permitem um caminho de retorno para que as cargas que se deslocaram no sentido de *Ob* possam retornar de *b* para *O*. O resultado é o surgimento de correntes de Foucault no disco, como esquematizado na Figura 29.19b.

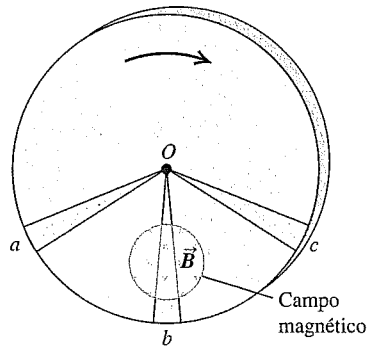
Podemos usar a lei de Lenz para definir o sentido da corrente induzida nas vizinhanças do setor *Ob*. Essa corrente deve sofrer a ação da força magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$, que se *opõe* à rotação do disco, portanto essa força deve ser orientada da esquerda para a direita na Figura 29.19b. Como $\vec{B}$ está orientado para dentro do plano do disco, a corrente e, portanto, $\vec{L}$ devem possuir um componente de cima para baixo. As correntes de retorno voltam-se para fora do campo, portanto elas não sofrem a ação de forças magnéticas. A interação entre as correntes de Foucault e o campo produz uma ação que tende a frear o disco. Esse efeito pode ser usado para fazer uma serra elétrica parar de girar rapidamente quando faltar energia elétrica. Algumas balanças sensíveis aproveitam esse efeito para amortecer vibrações. Freios que funcionam com correntes de Foucault são projetados para trens que se deslocam em alta velocidade. Eletroímãs fixos nos vagões induzem correntes de Foucault nos trilhos; essas correntes induzidas criam forças magnéticas opostas que freiam os eletroímãs e, assim, freiam o trem.

As correntes de Foucault apresentam muitas outras aplicações práticas. O disco metálico brilhante existente no relógio que registra o consumo de energia elétrica da sua casa gira em virtude das correntes de Foucault. Essas correntes são induzidas no disco pelos campos magnéticos produzidos por correntes que variam senoidalmente em uma bobina. Em fornos de indução, as correntes de Foucault são usadas para aquecer materiais no interior de recipientes completamente fechados, para processos nos quais é preciso evitar qualquer risco de contaminação dos materiais a serem aquecidos. Os detectores de metal nos pontos de segurança de embarque e desembarque de aeroportos (Figura 29.20a) funcionam porque as bobinas receptoras detectam as correntes de Foucault induzidas em objetos metálicos transportados nas bagagens de mão. Dispositivos semelhantes (Figura 29.20b) são usados para detectar tesouros enterrados em caixas metálicas ou moedas perdidas.

Um exemplo especialmente impressionante que ilustra a ação das correntes de Foucault é a lua Io de Júpiter, que é ligeiramente maior que a Lua da Terra (Figura 29.21a). Io se move rapidamente através do campo magnético intenso de Júpiter, e isso provoca fortes correntes de Foucault no interior de Io. Essas correntes dissipam energia a uma taxa de 10^{12} W, o equivalente a disparar uma arma nuclear de um quiloton em Io a cada quatro segundos! Essa energia dissipada ajuda a manter aquecido o interior de Io e, assim, ajuda a provocar erupções vulcânicas na sua superfície, como as indicadas na Figura 29.21b. (Efeitos da gravidade de Júpiter aumentam o aquecimento.)

As correntes de Foucault também acarretam efeitos não desejáveis. Em um transformador de corrente alternada, os enrolamentos feitos sobre um núcleo de ferro conduzem uma corrente que varia senoidalmente. As correntes de Foucault produzidas no núcleo de ferro dissipam energia térmica com uma taxa I^2R e também induzem uma fem não desejada contrária à fem das bobinas. Para minimizar esses efeitos, os percursos das correntes de Foucault devem ser os menores possíveis. Descreveremos como isso é feito quando estudarmos com detalhes os transformadores, na Seção 31.6.

(a) Um disco metálico girando em um campo magnético



(b) Correntes de Foucault resultantes e força de frenagem

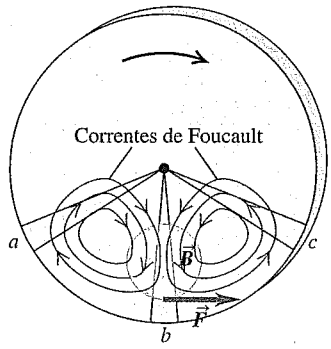


Figura 29.19 Correntes de Foucault induzidas em um disco metálico giratório.

Teste sua compreensão da Seção 29.6 Suponha que o campo magnético na Figura 29.19 esteja direcionado para fora do plano da figura e que o disco gire no sentido anti-horário. Comparadas às direções da força $\vec{F}$ e às correntes de Foucault mostradas na Figura 29.19b, quais seriam as novas direções? (i) A força $\vec{F}$ e as correntes de Foucault estariam, ambas, na mesma direção; (ii) a força $\vec{F}$ estaria na mesma direção, mas as correntes de Foucault estariam em direção oposta; (iii) a força $\vec{F}$ estaria na direção oposta, mas as correntes de Foucault estariam na mesma direção; (iv) a força $\vec{F}$ e as correntes de Foucault estariam em direções opostas. ∎

29.7 Corrente de deslocamento e equações de Maxwell

Vimos que a variação em um campo magnético produz um campo elétrico induzido. Em um dos mais notáveis exemplos da simetria da natureza, um campo *elétrico* variante gera um campo *magnético*. Esse efeito é de tremenda importância, porque explica a existência de ondas de rádio, raios gama e luz visível, bem como outras formas de ondas eletromagnéticas.

Generalização da lei de Ampère

Para estudar a origem da relação entre campos elétricos variantes e campos magnéticos, vamos retomar a lei de Ampère, conforme formulada na Seção 28.6, Equação (28.20):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{inte}}$$

O problema com essa formulação da lei de Ampère é que está *incompleta*. Para entendermos por que, vamos considerar o processo de carga de um capacitor (Figura 29.22). Fios condutores transportam corrente i_C de uma placa para outra; a carga Q aumenta, e o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas aumenta. A notação i_C indica a corrente de *condução* em distinção a outro tipo de corrente que estamos prestes a discutir, designada corrente de *deslocamento* i_D. Usamos as letras minúsculas i e v para denotar valores instantâneos de correntes e diferenças de potencial, respectivamente, que podem variar com o tempo.

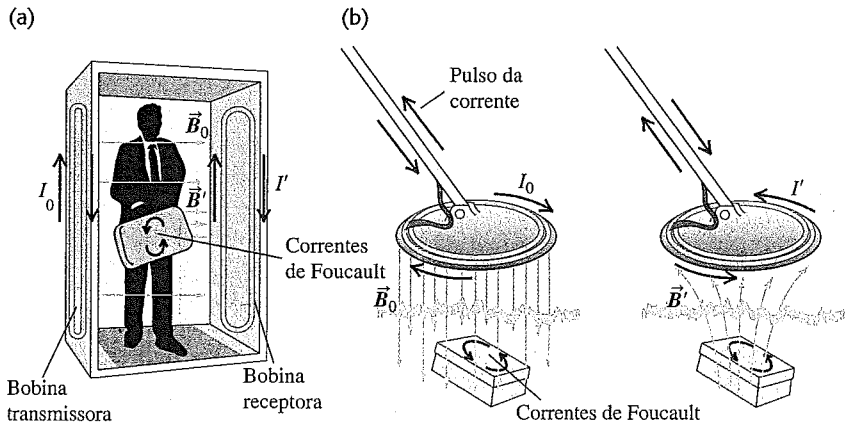


Figura 29.20 (a) Um detector de metais usado em aeroportos gera um campo magnético alternado $\vec{B}_0$. O campo induz correntes de Foucault no objeto condutor que passa através do detector. As correntes induzidas produzem um campo $\vec{B}'$, que induz uma corrente na bobina receptora do detector. (b) Um detector de metais portátil funciona com o mesmo princípio.

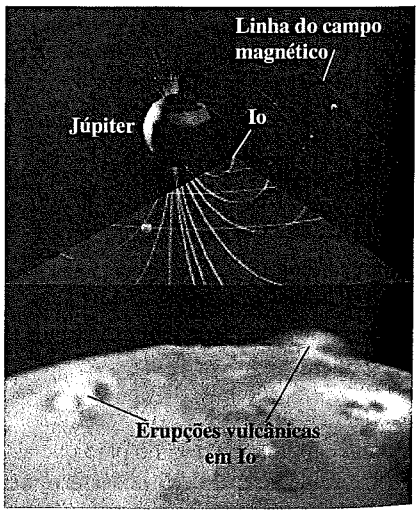


Figura 29.21 Enquanto a lua de Júpiter, Io, gira em torno da sua órbita, o forte campo magnético do planeta produz correntes de Foucault no interior de Io. Esta foto mostra duas erupções vulcânicas simultâneas em Io, em parte provocadas pelo aquecimento da corrente de Foucault.

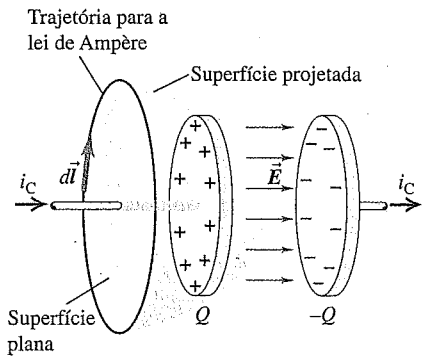


Figura 29.22 Capacitor de placas paralelas em carga. A corrente de condução que passa pela superfície da placa é i_C, mas não há corrente de condução através da superfície que se projeta para passar entre as placas. As duas superfícies possuem um limite em comum, portanto essa diferença em I_{inte} leva a uma aparente contradição na aplicação da lei de Ampère.

Vamos aplicar a lei de Ampère à trajetória circular indicada. A integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$, em torno dessa trajetória é igual a $\mu_0 I_{inte}$. Para a área circular plana delimitada pelo círculo, I_{inte} é a corrente i_C no condutor esquerdo. Mas a superfície que se projeta para a direita é delimitada pelo mesmo círculo, e a corrente que atravessa essa superfície é igual a zero. Portanto $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$, é igual a $\mu_0 i_C \lambda$ e, ao mesmo tempo, é igual a zero! Trata-se de uma evidente contradição.

Mas existe algo mais acontecendo na superfície projetada. À medida que o capacitor recebe carga, o campo elétrico $\vec{E}$ e o *fluxo* elétrico Φ_E que passa pela superfície aumentam. Podemos determinar suas taxas de variação em termos da carga e da corrente. A carga instantânea é $q = Cv$, em que C é a capacitância e v é a diferença de potencial instantânea. Para um capacitor com placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, em que A é a área da placa e d é a distância. A diferença de potencial v entre as placas é $v = Ed$, em que E é o módulo do campo elétrico entre as placas. (Desprezamos a borda e assumimos que $\vec{E}$ é uniforme na região entre as placas.) Se essa região estiver preenchida por material com permissividade ϵ, substituímos ϵ_0 por ϵ em toda parte; usaremos ϵ na discussão a seguir.

Substituindo essas expressões de C e v por $q = Cv$, podemos expressar a carga do capacitor q como

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E \qquad (29.12)$$

em que $\Phi_E = EA$ é o fluxo elétrico que atravessa a superfície.

Enquanto o capacitor recebe carga, a taxa de variação de q é a corrente de condução, $i_C = dq/dt$. Tomando a derivativa da Equação (29.12) em relação ao tempo, obtemos

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (29.13)$$

Agora, recorrendo um pouco à imaginação, inventamos uma **corrente de deslocamento** i_D na região entre as placas, definida como

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (29.14)$$

(corrente de deslocamento)

Ou seja, imaginamos que o fluxo variante através da superfície encurvada na Figura 29.22 é, de certa forma, equivalente, na lei de Ampère, a uma corrente de condução através dessa superfície. Incluímos essa corrente fictícia, junto à corrente de condução real i_C, na lei de Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{inte} \qquad (29.15)$$

(lei de Ampère generalizada)

A lei de Ampère nessa forma é aplicada seja qual for a superfície usada na Figura 29.22. Para a superfície plana, i_D é igual a zero; para a superfície encurvada, i_C é igual a zero; e i_C para a superfície plana equivale a i_D para a superfície curva. A Equação (29.15) permanece válida para um material magnético, contanto que a magnetização seja proporcional ao campo externo e μ_0 seja substituído por μ.

A corrente fictícia i_D foi inventada em 1865, pelo físico escocês James Clerk Maxwell (1831–1879), que a chamou de corrente de deslocamento. Existe uma *densidade de corrente de deslocamento* correspondente $j_D = i_D/A$; usando $\Phi_E = EA$ e dividindo a Equação (29.14) por A, encontramos

$$j_D = \epsilon \frac{dE}{dt} \qquad (29.16)$$

Aplicamos o conceito a partir do nada, como fez Maxwell, mas vemos que ele permite preservar a lei de Ampère em situações como a da Figura 29.22.

Outro benefício da corrente de deslocamento é que ela permite generalizar a lei dos nós de Kirchhoff, discutida na Seção 26.2. Considerando a placa esquerda do capacitor, temos corrente de condução que entra, mas não que sai. Entretanto, quando incluímos a corrente de deslocamento, existe corrente de condução que entra por um lado e uma corrente de deslocamento equivalente que sai pelo outro lado. Com esse significado generalizado do termo 'corrente', podemos dizer que a corrente passa *através* do capacitor.

A realidade da corrente de deslocamento

Você pode muito bem estar se perguntando se a corrente de deslocamento possui algum significado físico real ou se é somente um artifício para dar consistência à lei de Ampère e à lei dos nós de Kirchhoff. Apresentamos uma experiência fundamental que ajuda a responder essa pergunta. Tomamos uma área circular plana entre as placas do capacitor, como indica a Figura 29.23. Se a corrente de deslocamento realmente desempenha a função na lei de Ampère que afirmamos, então deve haver um campo magnético na região entre as placas, enquanto o capacitor é carregado. Podemos usar a lei de Ampère generalizada, incluindo a corrente de deslocamento, para prever qual deve ser esse campo.

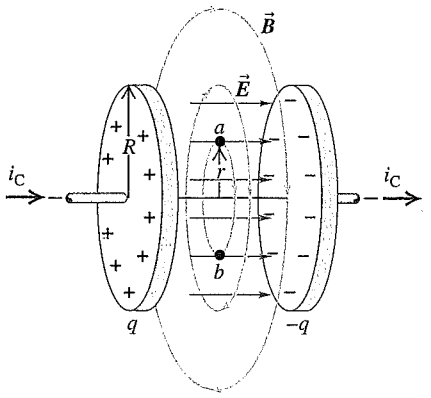


Figura 29.23 Um capacitor sendo carregado por uma corrente i_C possui uma corrente de deslocamento igual a i_C entre as placas, com densidade de corrente de deslocamento $j_D = \epsilon\, dE/dt$. Isso pode ser considerado como a fonte do campo magnético entre as placas.

Para sermos específicos, vamos considerar placas de capacitor com raio R. Para determinar o campo magnético em um ponto na região entre as placas, a uma distância r do eixo, aplicamos a lei de Ampère a um círculo com raio r que passa através desse ponto, com $r < R$. Esse círculo passa pelos pontos a e b na Figura 29.23. A corrente total no interior do círculo é j_D vezes a sua área, ou $(i_D/\pi R^2)$ (πr^2). A integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ na lei de Ampère é apenas B vezes a circunferência $2\pi r$ do círculo, e, como $i_C = i_D$ para o capacitor em carga, a lei de Ampère torna-se

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C \qquad \text{ou}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2} i_C \tag{29.17}$$

Esse resultado prevê que, na região entre as placas, $\vec{B}$ é igual a zero no eixo e aumenta linearmente à medida que se distancia do eixo. Um cálculo similar indica que, *fora* da região entre as placas (ou seja, para $r > R$), $\vec{B}$ é o mesmo caso o fio fosse contínuo e as placas não existissem.

Quando *medimos* o campo magnético nessa região, identificamos que ele realmente existe e que se comporta como prevê a Equação (29.17). Isso confirma o papel da corrente de deslocamento como fonte de campo magnético. Fica estabelecido, então, sem dúvida, que a corrente de deslocamento, longe de ser apenas um artifício, constitui um fato fundamental da natureza. A descoberta de Maxwell foi o passo ousado de um gênio extraordinário.

Equações de Maxwell para o eletromagnetismo

Estamos agora em condições de enunciar, de modo unificado, um conjunto completo, que reúne *todas* as equações estudadas anteriormente e que envolve todas as relações entre campos elétricos e campos magnéticos e suas respectivas fontes. Esse conjunto é constituído por quatro equações, conhecidas como **equações de Maxwell**. Maxwell não descobriu essas quatro equações, porém as reuniu e explicou o significado delas, particularmente ao prever a existência de ondas eletromagnéticas.

Por enquanto, formularemos as equações de Maxwell na forma mais simples, considerando cargas e correntes no vácuo. No Capítulo 32, discutiremos as modificações dessas equações quando um dielétrico ou um material magnético estiver presente.

Duas das equações de Maxwell envolvem integrais de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ sobre uma superfície fechada. A primeira é simplesmente a lei de Gauss para o campo elétrico, Equação (22.8), a qual afirma que a integral de superfície de $E_\perp$ sobre qualquer superfície fechada é igual a $1/\epsilon_0$ vezes a carga total Q_{inte} existente no interior da superfície fechada considerada:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0} \tag{29.18}$$

(lei de Gauss para $\vec{E}$)

A segunda é a relação análoga para o campo *magnético*, Equação (27.8), a qual afirma que a integral de superfície de $B_\perp$ sobre qualquer superfície fechada é igual a zero:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{29.19}$$

(lei de Gauss para $\vec{B}$)

O enunciado anterior equivale a dizer, entre outras coisas, que não existem monopolos magnéticos (cargas magnéticas isoladas) que funcionem como fontes de campos magnéticos.

A terceira equação é a lei de Ampère que inclui a corrente de deslocamento. Ela afirma que existem duas fontes de campos magnéticos, a corrente de condução i_C e a corrente de deslocamento $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$, em que Φ_E é o fluxo elétrico, que age como fonte de campo magnético:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i_C + \epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{\text{inte}} \tag{29.20}$$

(lei de Ampère)

A quarta e última equação é a lei de Faraday, estudada neste capítulo. Ela afirma que um fluxo magnético variável ou um campo magnético variável induz um campo elétrico:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.21}$$

(lei de Faraday)

Quando existe um fluxo magnético variável, a integral de linha da Equação (29.21) não é igual a zero, o que mostra que o campo $\vec{E}$ produzido por um fluxo magnético variável não é conservativo. Lembre-se de que essa integral de linha deve ser calculada sobre uma curva fechada *estática*.

É importante examinar com mais cuidado o campo elétrico $\vec{E}$ e o papel que ele desempenha nas equações de

Maxwell. Geralmente, o campo total $\vec{E}$ em um ponto do espaço pode ser produzido pela superposição de um campo eletrostático $\vec{E}_c$, produzido por uma distribuição de cargas em repouso, com um campo elétrico induzido magneticamente e que não é eletrostático, $\vec{E}_n$. (O índice inferior *c* refere-se a Coulomb ou conservativo, e o índice inferior *n* refere-se a não-eletrostático ou não-conservativo.) Ou seja,

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n$$

A parte eletrostática $\vec{E}_c$ é *sempre* conservativa, de modo que $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$. Essa parte conservativa do campo não contribui para a integral na lei de Faraday, de modo que $\vec{E}$ na Equação (29.21) pode ser considerado o campo elétrico total, incluindo o termo $\vec{E}_c$, produzido por uma distribuição de cargas, e o campo elétrico induzido magneticamente $\vec{E}_n$. Analogamente, o termo não-conservativo $\vec{E}_n$ do campo $\vec{E}$ não contribui na integral da lei de Gauss, porque esse termo não é produzido por cargas estáticas. Logo, a integral $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{A}$ é sempre igual a zero. Assim, concluímos que, em todas as equações de Maxwell, $\vec{E}$ é o campo elétrico total, ou seja, essas equações não distinguem entre um campo conservativo e um campo não-conservativo.

Simetria nas equações de Maxwell

Existe uma simetria marcante nas quatro equações de Maxwell. No espaço vazio, onde não há nenhuma carga, as duas primeiras equações, (29.18) e (29.19), possuem formas idênticas, uma com $\vec{E}$ e a outra com $\vec{B}$. Comparando as duas últimas equações, vemos que a Equação (29.20) afirma que um fluxo elétrico variável cria um campo magnético, e a Equação (29.21) mostra que um fluxo magnético variável cria um campo elétrico. No espaço vazio, como não existe nenhuma corrente de condução, $i_C = 0$ e as duas últimas equações possuem a mesma forma, exceto por um sinal negativo e pelos valores das constantes, com os papéis desempenhados por $\vec{E}$ e $\vec{B}$ trocados nas duas equações.

Podemos reescrever as equações (29.20) e (29.21) sob formas diferentes, porém equivalentes, introduzindo as definições de fluxo elétrico e fluxo magnético, $\Phi_E = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ e $\Phi_E = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, respectivamente. No espaço vazio, onde não existem cargas e nenhuma corrente de condução, $i_C = 0$ e $Q_{\text{inte}} = 0$, obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (29.22)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad (29.23)$$

Vemos novamente a simetria entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nas duas equações anteriores.

A característica mais marcante dessas equações é que a variação de *qualquer* um desses campos induz o outro campo no espaço das suas vizinhanças. Maxwell percebeu que essas relações podem servir para prever a existência de uma perturbação eletromagnética ocasionada pela variação do tempo de campos magnéticos e elétricos que se *propagam* de uma região do espaço para outra, mesmo quando não há nenhuma matéria presente entre as duas regiões. Tais perturbações, chamadas de *ondas eletromagnéticas*, constituem a base física para entender a luz, as ondas de rádio e de televisão, as ondas infravermelhas, as ondas ultravioletas, os raios X e o restante das ondas que constituem o espectro eletromagnético. Retornaremos a esse tópico essencialmente importante no Capítulo 32.

Embora possa não parecer óbvio, *todas* as relações entre os campos e suas fontes estão contidas nas equações de Maxwell. Podemos deduzir a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss, deduzir a lei de Biot e Savart a partir da lei de Ampère e assim por diante. Quando somamos os efeitos de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ com base nas forças exercidas sobre uma carga *q*, ou seja,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (29.24)$$

completamos *todas* as relações fundamentais do eletromagnetismo!

Finalmente, notamos que as equações de Maxwell teriam um grau de simetria entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ainda maior se existissem cargas magnéticas livres na natureza (monopolos magnéticos). O membro direito da Equação (29.19) seria proporcional à carga *magnética* total no interior da superfície fechada, e o membro direito da Equação (29.21) incluiria um termo proporcional à corrente de monopolos magnéticos. Talvez você já tenha percebido por que muitos físicos buscam provar a existência de monopolos magnéticos; essas partículas ajudariam a aperfeiçoar a beleza da estrutura matemática contida nas equações de Maxwell.

A descoberta de que o eletromagnetismo pode ser sintetizado de modo tão nítido é gratificante. Considerando a síntese e a generalidade, as equações de Maxwell podem ser colocadas no mesmo plano das leis de Newton da mecânica e das leis da termodinâmica. Na verdade, um dos objetivos da ciência consiste em expressar relações fundamentais de maneira simples e concisa. A síntese do eletromagnetismo feita por Maxwell é uma conquista intelectual admirável, comparável à síntese da mecânica, feita por Newton e descrita na Seção 12.5, e ao desenvolvimento da relatividade e da mecânica quântica, no século XX.

Teste sua compreensão da Seção 29.7 (a) Qual das equações de Maxwell explica como funciona o dispositivo de leitura de um cartão de crédito? (b) Qual das equações descreve como um fio que carrega uma corrente estável gera um campo magnético? ▮

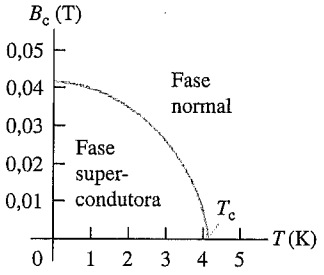


Figura 29.24 Diagrama de fase para o mercúrio puro, mostrando o campo magnético crítico B_c e sua dependência em relação à temperatura. A supercondutividade é impossível acima da temperatura crítica T_c. As curvas para outros materiais supercondutores são semelhantes, porém os valores numéricos são diferentes.

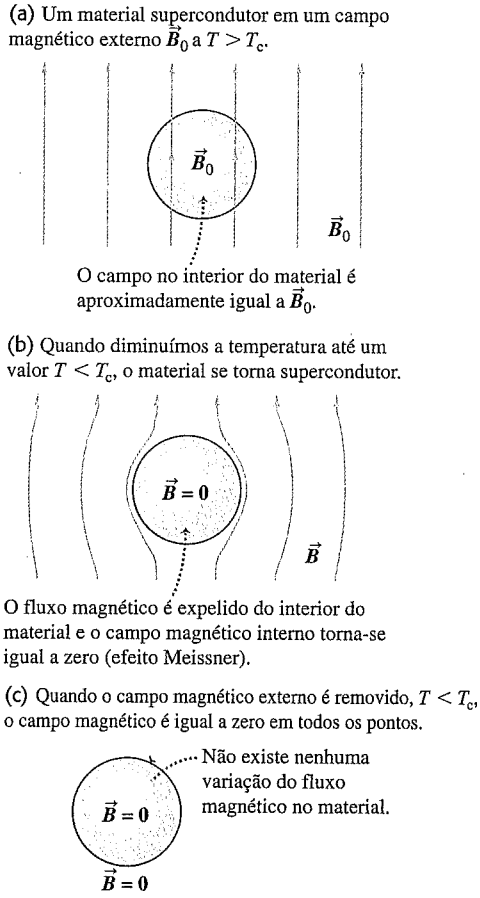


Figura 29.25 Um material supercondutor (a) acima da temperatura crítica e (b) e (c) abaixo da temperatura crítica.

29.8 Supercondutividade

A propriedade mais familiar de um supercondutor é o súbito desaparecimento completo da resistência, quando ele é resfriado abaixo de uma temperatura chamada de *temperatura crítica*, designada por T_c. Já discutimos esse comportamento e as circunstâncias de sua descoberta na Seção 25.2. Contudo, a supercondutividade é um fenômeno muito mais profundo do que a mera ausência de uma resistência mensurável. Os supercondutores também possuem extraordinárias propriedades *magnéticas*. Nesta seção, vamos analisar algumas delas.

O primeiro indício de propriedades magnéticas extraordinárias foi a descoberta de que, para qualquer material supercondutor, a temperatura crítica T_c varia quando o material é colocado em um campo magnético externo $\vec{B}_0$. A Figura 29.24 ilustra essa dependência para o caso do mercúrio, o primeiro elemento no qual foi observado o fenômeno da supercondutividade. À medida que o módulo B_0 do campo magnético externo aumenta, a transição para a fase supercondutora passa a ocorrer em temperaturas cada vez menores. Quando B_0 é maior que 0,0412 T, não se observa mais *nenhuma* supercondutividade. O campo magnético mínimo necessário para destruir a supercondutividade a uma temperatura menor que T_c denomina-se *campo magnético crítico*, designado por B_c.

O efeito Meissner

Vejamos agora outro aspecto do comportamento magnético de um supercondutor. Colocamos uma esfera homogênea de um material supercondutor em um campo magnético externo $\vec{B}_0$, para uma temperatura T maior que T_c. Ou seja, o material está em sua fase condutora normal, e não na fase supercondutora. O campo magnético é ilustrado na Figura 29.25a. Agora, diminuímos a temperatura até que ocorra a transição para a fase supercondutora. (Estamos supondo que $\vec{B}_0$ não impeça a transição de fase.) O que ocorre com o campo?

Medidas do campo magnético fora da esfera mostram que as linhas de campo tornam-se distorcidas, como ilustra a Figura 29.25b. Não existe mais nenhum campo no interior do material, exceto em uma fina película na superfície do material com espessura da ordem de alguns átomos. Se enrolarmos um fio condutor em torno da esfera, a fem induzida na bobina mostrará que o fluxo magnético diminui do seu valor inicial até zero durante a transição para a fase supercondutora; isso é consistente com o fato de o campo dentro do supercondutor ser igual a zero. Finalmente, quando o campo magnético externo é removido, mantendo o material na fase supercondutora, nenhuma

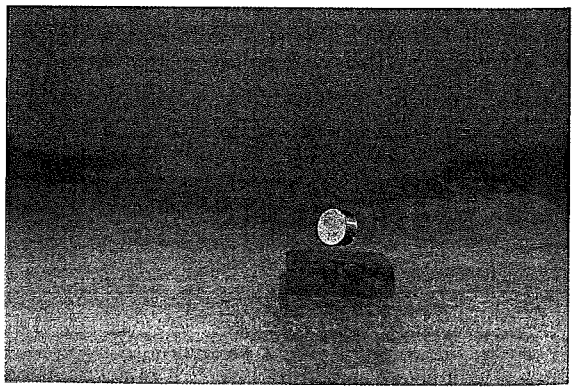


Figura 29.26 Um supercondutor (o bloco negro) exerce uma força magnética repulsiva sobre uma ímã (o cilindro metálico), sustentando-o em equilíbrio no ar.

fem é induzida na bobina e as medidas mostram que não existe nenhum campo fora do material (Figura 29.25c).

Concluímos que, durante a transição para a fase supercondutora na presença de $\vec{B}_0$, todo fluxo magnético é expelido do volume da esfera supercondutora, e o fluxo magnético Φ_B através da bobina é igual a zero. Essa expulsão do fluxo magnético denomina-se *efeito Meissner*. Conforme indica a Figura 29.25b, essa expulsão faz com que as linhas de campo fiquem mais próximas entre si em volta da esfera, fazendo aumentar $\vec{B}$ nessa região.

Levitação supercondutora e outras aplicações

A natureza diamagnética de um supercondutor possui algumas conseqüências *mecânicas* interessantes. Um material paramagnético ou ferromagnético é atraído por um ímã porque os dipolos magnéticos do material se alinham ao campo magnético não-uniforme do ímã (esse efeito foi discutido na Seção 27.7). Para um material diamagnético, a magnetização ocorre em sentido oposto, e o material é *repelido* pelo ímã. De acordo com a terceira lei de Newton, o ímã também é repelido pelo material diamagnético. A Figura 29.26 ilustra a repulsão entre um ímã e um bloco de supercondutor com temperatura crítica elevada; o ímã é sustentado no ar ('levita') pela força magnética repulsiva.

O comportamento que descrevemos anteriormente é característico dos materiais chamados de *supercondutores do tipo I*. Existe outra classe desses materiais, os *supercondutores do tipo II*. Quando esse tipo de material é colocado em um campo magnético, o volume do material permanece supercondutor; contudo, alguns filamentos do material, distribuídos paralelamente ao campo externo, podem voltar para a fase normal. Há correntes circulando na periferia desses filamentos, o que indica que *existe* um fluxo magnético no interior desses filamentos. Os supercondutores do tipo II são usados em eletroímãs por geralmente possuírem valores de B_c muito maiores que os referentes a materiais do tipo I, possibilitando a produção de campos magnéticos muito elevados sem destruir o estado supercondutor. Um supercondutor do tipo II possui *dois* campos magnéticos críticos; o primeiro, B_{c1}, é o campo para o qual o fluxo magnético começa a penetrar no supercondutor, passando a formar os filamentos mencionados; o segundo, B_{c2}, é o campo para o qual o supercondutor passa para a fase normal.

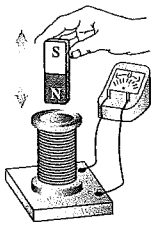
Importantes e interessantes aplicações da supercondutividade estão sendo desenvolvidas. Os eletroímãs com supercondutores já são empregados em diversos laboratórios há muitos anos. As vantagens desses dispositivos em comparação aos eletroímãs convencionais incluem o fato de que apresentam maior eficiência, ocupam volumes bem menores e atingem campos magnéticos superiores. Uma vez que uma corrente é estabelecida em uma bobina supercondutora, nenhuma potência adicional é exigida para manter essa corrente, porque o supercondutor possui resistência igual a zero. As bobinas podem ser mais compactadas, pois não é necessário deixar espaço entre as espiras para a circulação dos líquidos resfriantes usados nos eletroímãs normais. Os eletroímãs supercondutores podem atingir facilmente campos magnéticos estacionários da ordem de 10 T, muito maiores que os campos magnéticos estacionários geralmente obtidos com eletroímãs normais.

Os supercondutores também podem ser empregados na transmissão de energia elétrica para distâncias muito longas e na fabricação de dispositivos de conversão de energia, tais como geradores, motores e transformadores. Medidas extremamente sensíveis de campos magnéticos podem ser feitas com uso do SQUID, um magnetômetro cujo nome deriva das iniciais de *superconducting quantum interference device* (= dispositivo supercondutor com interferência quântica). Esses magnetômetros são capazes de detectar campos magnéticos da ordem de 10^{-14} Wb; com aplicações na medicina, na geologia e em outras áreas. O número das potenciais aplicações dos supercondutores aumentou com a descoberta, feita em 1987, dos supercondutores com temperaturas críticas elevadas. Esses materiais possuem temperaturas críticas superiores à temperatura do nitrogênio líquido (77 K) e, portanto, relativamente fáceis de manter. O desenvolvimento das aplicações práticas da ciência dos supercondutores promete fornecer uma importante base para as inovações tecnológicas do século XXI.

Resumo

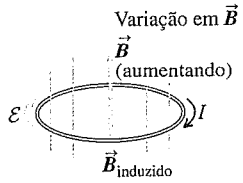
Lei de Faraday: a lei de Faraday afirma que a fem induzida em uma espira é dada pela taxa de variação, com sinal negativo, do fluxo magnético através da espira. Essa relação é válida quando a variação de fluxo é produzida por uma variação de campo magnético, pelo movimento de uma espira no campo ou quando ocorrem simultaneamente as duas coisas. (Veja os exemplos 29.1 a 29.7.)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.3}$$



O movimento do ímã provoca uma variação no campo magnético através da bobina, induzindo uma corrente na bobina.

Lei de Lenz: a lei de Lenz afirma que a corrente induzida ou a fem induzida possui sentido tal que seu efeito sempre tende a se opor à causa que a produziu. A lei de Lenz pode ser deduzida a partir da lei de Faraday e geralmente é mais fácil de ser aplicada. (Veja os exemplos 29.8 e 29.9.)



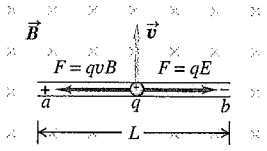
Fem do movimento: quando um condutor se move em um campo magnético, uma fem do movimento é induzida. (Veja os exemplos 29.10 e 29.11.)

$$\mathcal{E} = vBL \tag{29.6}$$

(um condutor com comprimento L se move com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético uniforme com módulo igual a $\vec{B}$, o comprimento $\vec{L}$ e a velocidade são ambos perpendiculares ao campo e entre si)

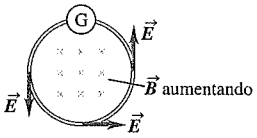
$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{29.7}$$

(a totalidade ou parte de uma espira fechada se move em um campo $\vec{B}$)



Campos elétricos induzidos: quando uma fem é induzida por um fluxo magnético que varia através de uma espira fixa, surge um campo elétrico induzido $\vec{E}$ de origem não-eletrostática. O campo induzido não é conservativo e não pode ser associado a um potencial. (Veja o Exemplo 29.12.)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.10}$$



Corrente de deslocamento e as equações de Maxwell: um campo elétrico que varia com o tempo gera uma corrente de deslocamento i_D, que atua como uma fonte de campo magnético exatamente da mesma forma que uma corrente de condução. As relações entre campos magnéticos e elétricos e suas fontes podem ser descritas de modo conciso a partir de quatro equações, conhecidas como equações de Maxwell. Esse conjunto forma uma base completa para relacionar o campo $\vec{E}$ e o campo $\vec{B}$ às fontes desses campos.

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{29.14}$$

(corrente de deslocamento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0} \tag{29.18}$$

(lei de Gauss para os campos $\vec{E}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{29.19}$$

(lei de Gauss para os campos $\vec{B}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{inte}} \tag{29.20}$$

(lei de Ampère incluindo a corrente de deslocamento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.21}$$

(lei de Faraday)

Principais termos

campo elétrico induzido, 295
campo não-eletrostático, 296
corrente de deslocamento, 299
corrente induzida, 281
correntes de Foucault, 297
equações de Maxwell, 300
fem induzida, 281
força eletromotriz do movimento, 293
lei de Faraday da indução, 283
lei de Lenz, 290

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

À medida que a tarja magnética se move através do dispositivo de leitura do cartão, o padrão codificado de magnetização na tarja provoca uma variação no fluxo magnético e, conseqüentemente, uma corrente induzida nos circuitos de leitura. Se o cartão não se mover, não haverá fem induzida nem corrente, e nenhuma informação do cartão de crédito será lida.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

29.2 Respostas: (a) (i), (b) (iii) (a) Inicialmente, há fluxo magnético orientado para o interior do plano da página, que designamos como positivo. À medida que a espira é comprimida, o fluxo se torna menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$) e assim a fem induzida é positiva, como na Figura 29.6b ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt > 0$). Ao apontar o polegar da sua mão direita para dentro da página, seus dedos se enrolam no sentido horário, portanto esse é o sentido da fem induzida positiva. (b) Como a forma da bobina não está mais variando, o fluxo magnético não está variando e não há fem induzida.

29.3 Respostas: (a) (i), (b) (iii) Em (a), como na situação original, o ímã e a espira se aproximam entre si e o fluxo de cima para baixo através da espira aumenta. Logo, a fem induzida e a corrente induzida são as mesmas. No item (b), como o ímã e a espira estão se movendo juntas, o fluxo através da espira não varia e nenhuma fem é induzida.

29.4 Respostas: (a) (iii); (b) (i) ou (ii); (c) (ii) ou (iii) Você obterá o valor máximo da fem do movimento ao segurar a haste verticalmente, de modo que seu comprimento esteja perpendicular tanto ao campo magnético quanto ao sentido do movimento. Com essa orientação, $\vec{L}$ é paralelo a $\vec{v} \times \vec{B}$. Ao segurar a haste em qualquer orientação horizontal, $\vec{L}$ será perpendicular a $\vec{v} \times \vec{B}$ e nenhuma fem será induzida. Ao caminhar rumo ao norte ou ao sul, $\vec{v} \times \vec{B} = 0$ e nenhuma fem será induzida para qualquer orientação da haste.

29.5 Respostas: sim, não O campo magnético em uma posição fixa varia ao se mover o ímã. Esses campos elétricos induzidos *não* são conservativos.

29.6 Resposta: (iii) Pela lei de Lenz, a força deve se opor ao movimento do disco através do campo magnético. Como o material do disco está agora se movendo para a direita através da

região do campo, a força $\vec{F}$ está à esquerda — ou seja, no sentido contrário ao indicado na Figura 29.19b. Para produzir uma força magnética para a esquerda $\vec{F} = I\vec{L} = \vec{B}$ sobre as correntes que atravessam um campo magnético $\vec{B}$ orientado para fora do plano da figura, as correntes de Foucault devem se mover de cima para baixo na figura — ou seja, no mesmo sentido indicado na Figura 29.19b.

29.7 Respostas: (a) lei de Faraday, (b) lei de Ampère Um dispositivo de leitura de cartão de crédito funciona induzindo correntes nas bobinas do leitor quando a tarja magnetizada do cartão é 'passada' (veja a resposta à pergunta inicial do capítulo). A lei de Ampère descreve como correntes de todos os tipos (tanto as correntes de condução quanto as correntes de deslocamento) produzem campos magnéticos.

Questões para discussão

Q29.1 Uma lâmina de cobre é colocada entre os pólos de um eletroímã com o campo magnético perpendicular ao plano da lâmina. Quando a lâmina é retirada, é necessário realizar uma força considerável e essa força aumenta com a velocidade. Explique.

Q29.2 Na Figura 29.8, quando a velocidade angular ω da espira dobra, então a freqüência com a qual a corrente induzida muda de sentido dobra e a fem máxima também dobra. Por quê? O torque necessário para fazer a espira girar muda? Explique.

Q29.3 Duas espiras circulares estão lado a lado, apoiadas sobre um mesmo plano. Uma delas está ligada a uma fonte que fornece uma corrente crescente; a outra é um anel simples. O sentido da corrente induzida no anel possui o mesmo sentido ou sentido oposto ao da corrente da espira ligada com a fonte? E se a corrente na primeira espira estivesse diminuindo? Explique.

Q29.4 Um fazendeiro afirmou que as linhas de transmissão de alta voltagem induziam voltagens perigosas muito elevadas em sua cerca, construída paralelamente à linha de transmissão. Isso é realmente possível? Explique. (As linhas de transmissão conduzem uma corrente alternada que muda de sentido 120 vezes a cada segundo.)

Q29.5 Um fio retilíneo longo passa através do centro de um anel metálico, perpendicularmente ao plano do anel. Sabendo que a corrente do anel está aumentando, surge uma corrente induzida nesse anel? Explique.

Q29.6 Um estudante afirma que, se um ímã cai ao longo do eixo de um tubo de cobre vertical, ele acaba atingindo uma velocidade terminal mesmo quando não existe resistência do ar. Por que isso ocorreria? Ou não ocorreria?

Q29.7 Um avião sobrevoa linearmente a Antártica, onde o campo magnético da Terra está principalmente orientado de baixo para cima, afastando-se do solo. Do ponto de vista de um passageiro que olha para a frente do avião, é a asa esquerda ou é a asa direita que possui potencial mais elevado? A sua resposta depende do sentido em que o avião está voando?

Q29.8 Considere a situação do Exercício 29.19. No item (a), determine o sentido da força que o circuito grande exerce sobre o pequeno. Explique como esse resultado é compatível com a lei de Lenz.

Q29.9 Um retângulo de metal está próximo de um fio longo e retilíneo, que transporta corrente, com dois dos seus lados paralelos ao fio. Quando a corrente no fio longo está diminuindo, o retângulo é repelido ou atraído pelo fio? Explique por que esse resultado é compatível com a lei de Lenz.

Q29.10 Uma espira condutora quadrada está em uma região de campo magnético uniforme e constante. A espira pode ser girada em torno de um eixo de um lado e nenhuma fem ser induzida nela? Discuta isso, em termos da orientação do eixo de rotação em relação ao sentido do campo magnético.

Q29.11 O Exemplo 29.7 discute a força externa que deve ser aplicada ao cabo deslizante para movê-lo a uma velocidade escalar constante. Caso haja uma ruptura na extremidade esquerda do condutor em forma de U, quanta força seria necessária para mover o fio deslizante a uma velocidade escalar constante? Como no exemplo, despreze o atrito.

Q29.12 Considere a situação indicada na Figura 29.16; seria apropriado perguntar qual é a quantidade de *energia* que o elétron ganha durante o percurso completo em torno da espira com corrente induzida I? Faria sentido perguntar qual é a *diferença de potencial* através da qual o elétron se move nesse percurso completo? Explique suas respostas.

Q29.13 Um anel metálico está com o plano da sua área orientada perpendicularmente a um campo magnético espacialmente uniforme, que aumenta a uma taxa estável. Se o raio do anel for duplicado, por qual fator variará (a) a fem induzida no anel e (b) o campo elétrico induzido no anel?

Q29.14 Para a Equação (29.6), mostre que, se v está em metros por segundo, B em teslas e L em metros, as unidades do lado direito da equação estão em joules por coulomb ou volts (as unidades SI corretas para $\mathcal{E}$).

Q29.15 Pode haver uma corrente de deslocamento e também uma corrente de condução no interior de um condutor? Explique.

Q29.16 Seu colega de física pede que você considere um capacitor com placas paralelas, que possui um dielétrico que preenche por completo o volume entre as placas. A seguir, ele afirma que as equações (29.13) e (29.14) indicam que a corrente de condução no dielétrico é igual à corrente de deslocamento no dielétrico. Você concorda? Explique.

Q29.17 Relacione os enunciados matemáticos das equações de Maxwell fornecidas na Seção 29.7 a estas afirmações verbais. (a) Linhas do campo elétrico fechado são claramente produzidas somente por uma variação no fluxo magnético. (b) Linhas do campo magnético fechado são produzidas tanto pelo movimento da carga elétrica quanto pela variação no fluxo elétrico. (c) As linhas do campo elétrico podem se iniciar sobre cargas positivas e terminar sobre cargas negativas. (d) Evidentemente não há monopolos magnéticos sobre os quais iniciar e terminar linhas do campo magnético.

Q29.18 Caso existissem monopolos magnéticos livres na natureza, o membro direito da Equação (29.21) deveria incluir um termo proporcional à corrente dos monopolos magnéticos. Suponha que uma corrente constante de monopolos magnéticos esteja percorrendo uma espira circular. Faça um esboço das linhas de campo *elétrico* que tal corrente produziria.

Q29.19 Caso existissem monopolos magnéticos livres na natureza, o membro direito da Equação (29.19) deveria ser proporcional à carga *magnética*. Suponha que uma linha infinita de monopolos magnéticos esteja se movendo sobre o eixo Ox no sentido positivo de x. Faça um esboço das linhas do campo magnético e do campo elétrico que tal linha de monopolos produziria.

Exercícios

Seção 29.2 Lei de Faraday

29.1 Uma bobina retangular plana com 50 espiras possui dimensões de 25,0 cm por 30,0 cm. Ela está em um campo magnético uniforme, de 1,20 T, com o seu plano no sentido paralelo em relação ao campo. Em 0,222 s, ela gira de modo que o seu plano fique perpendicular ao campo. (a) Qual é a variação no fluxo magnético através da bobina produzida por essa rotação? (b) Determine o módulo da fem induzida média na bobina durante essa rotação.

29.2 Em uma experiência de física feita em um laboratório, uma bobina com 200 espiras, com seção reta de área igual a 12 cm^2, gira em 0,040 s desde uma posição na qual seu plano é perpendicular ao campo magnético da Terra até uma posição na qual seu plano é paralelo ao campo. O campo magnético da Terra onde se situa o laboratório é igual a $6,0 \times 10^{-5}$ T. (a) Qual é o fluxo magnético total que passa pela bobina antes de ela ser girada? Após ela ser girada? (b) Qual é a fem induzida média na bobina?

29.3 **Bobinas de exploração e cartões de crédito.** (a) Deduza uma equação para relacionar a carga total Q que flui através de uma bobina de exploração (Exemplo Conceitual 29.3) com o módulo do campo magnético B. A bobina de exploração possui N espiras, cada uma delas com área A, e o fluxo diminui de seu valor máximo inicial até zero em um intervalo de tempo Δt. A resistência da bobina é igual a R e a carga total é dada por $Q = I\Delta t$, em que I é a corrente média induzida pela variação do fluxo. (b) Em um dispositivo para leitura de cartões de crédito, a tarja magnética no verso do cartão é 'passada' através do campo de uma bobina no interior do dispositivo de leitura. Explique, usando o mesmo raciocínio básico para explicar o funcionamento da bobina de exploração, como o dispositivo de leitura pode decodificar as informações armazenadas nas camadas magnetizadas existentes na tarja magnética. (c) É necessário que o cartão de crédito seja 'passado' no dispositivo de leitura com uma única velocidade exata? Por quê?

29.4 Uma bobina de exploração com enrolamento compacto (Exercício 29.3) possui área igual a 3,20 cm^2, contém 120 espiras e sua resistência é de 60,0 Ω. Ela é conectada com um instrumento de medida de carga cuja resistência interna é de 45,0 Ω. Quando a bobina gira rapidamente de uma posição paralela a um campo magnético uniforme até uma posição perpendicular ao campo, o instrumento indica uma carga igual a $3,56 \times 10^{-5}$ C. Qual é o módulo do campo?

29.5 Uma espira circular com raio de 12,0 cm e orientada no plano horizontal xy está localizada em uma região de campo magnético uniforme. Um campo de 1,5 T está orientado ao longo do sentido positivo de Oz, que é de baixo para cima. (a) Se a espira for removida da região do campo em um intervalo de tempo de 2,0 ms, determine a fem média que será induzida na espira durante o processo de remoção.

29.6 Uma bobina com raio de 4,0 cm, com 500 espiras, é colocada em um campo magnético uniforme que varia com o tempo de acordo com a relação $B = (0,0120 \text{ T/s})\, t + (3,0 \times 10^{-5} \text{ T/s}^4)\, t^4$. A bobina está conectada a um resistor de 600 Ω e seu plano é perpendicular ao campo magnético. A resistência da bobina pode ser desprezada. (a) Calcule o módulo da fem induzida na bobina em função do tempo. (b) Qual é o módulo da corrente que passa no resistor para $t = 5,0$ s?

29.7 A corrente no fio longo e retilíneo AB indicado na Figura 29.27 está orientada de baixo para cima e aumenta regularmente a uma taxa di/dt. (a) No instante em que a corrente é i, quais são o módulo, a direção e o sentido do campo $\vec{B}$ a uma distância r para a direita do fio? (b) Qual é o fluxo $d\Phi_B$ através da faixa estreita e sombreada? (c) Qual é o fluxo total através da espira? (d) Qual é a fem induzida na espira? (e) Avalie o valor numérico da fem induzida, se $a = 12,0$ cm, $b = 36,0$ cm, $L = 24,0$ cm e $di/dt = 9,60$ A/s.

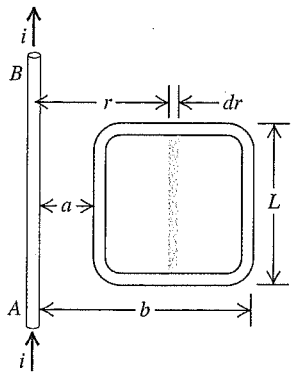


Figura 29.27 Exercício 29.7.

29.8 Uma espira plana e circular de aço, com raio de 75 cm, está em repouso em um campo magnético uniforme, como indica uma perspectiva perpendicular na Figura 29.28. O campo varia com o tempo, de acordo com $B(t) = (1,4 \text{ T})\, e^{-(0,057 \text{ s}^{-1})\, t}$. (a) Determine a fem induzida na espira em função do tempo. (b) Quando a fem induzida é igual a $\frac{1}{10}$ do seu valor inicial? (c) Determine o sentido da corrente induzida na espira, se observada por cima da espira.

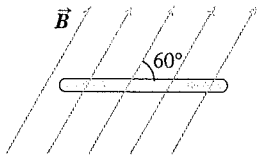


Figura 29.28 Exercício 29.8.

29.9 **Espira comprimida.** Uma espira circular de ferro flexível possui circunferência inicial de 165,0 cm, mas essa circunferência diminui a uma taxa constante de 12,0 cm/s devido a um puxão tangencial no fio. A espira está em um campo magnético uniforme e constante, orientado perpendicularmente ao plano da espira e com módulo igual a 0,500 T. (a) Determine a fem induzida na espira, no instante em que se passaram 9,0 s. (b) Determine o sentido da corrente induzida na espira, olhando-se ao longo do sentido do campo magnético.

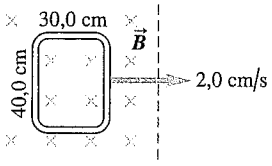


Figura 29.29 Exercício 29.10.

29.10 Um retângulo que mede 30,0 cm por 40,0 cm está localizado no interior de um campo magnético espacialmente uniforme de 1,25 T, com o campo perpendicular ao plano da bobina (Figura

29.29). A bobina é retirada a uma taxa regular de 2,0 cm/s, se movendo perpendicularmente às linhas de campo. A região do campo termina abruptamente, conforme indicado. Determine a fem induzida nessa bobina, quando ela está (a) inteiramente no interior do campo; (b) parcialmente no interior do campo; (c) inteiramente fora do campo.

29.11 Em uma região do espaço, um campo magnético aponta no sentido positivo de Ox (para a direita). Seu módulo varia de posição, de acordo com a fórmula $B_x = B_0 + bx$, em que B_0 e b são constantes positivas, para $x \geq 0$. Uma bobina plana de área A se move com velocidade escalar uniforme v da direita para a esquerda, com o plano da sua área sempre perpendicular a esse campo. (a) Qual é a fem induzida nessa bobina, enquanto ela está à direita da origem? (b) Olhando-se a partir da origem, qual é o sentido (horário ou anti-horário) da corrente induzida na bobina? (c) Caso a bobina se mova da esquerda para a direita, quais serão as respostas aos itens (a) e (b)?

29.12 Fem induzida. Um motor com um dispositivo escova-comutador, semelhante ao descrito no Exemplo 29.5, possui uma bobina circular com raio igual a 2,5 cm e 150 espiras. O campo magnético apresenta módulo igual a 0,060 T e a bobina gira com 440 rev/min. (a) Qual é a fem máxima induzida na bobina? (b) Qual é o valor médio da fem induzida?

29.13 O rotor de um pequeno gerador é constituído por uma bobina chata de seção reta quadrada de lado igual a 1,60 cm, com 120 espiras. A bobina gira em um campo magnético de 0,0750 T. Qual será a velocidade angular da bobina, se a fem máxima produzida for igual a 24,0 mV?

29.14 Uma bobina plana e retangular de dimensões l e w é puxada com velocidade escalar uniforme v através de um campo magnético B, com o plano da sua área perpendicular ao campo (Figura 29.30). (a) Determine a fem induzida nessa bobina. (b) Se a velocidade escalar e o campo magnético forem ambos triplicados, qual será a fem induzida?

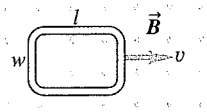


Figura 29.30 Exercício 29.14.

Seção 29.3 Lei de Lenz

29.15 Um anel circular está em uma região do espaço onde existe um campo magnético uniforme, como indica a Figura 29.31. O campo magnético está entrando no plano da figura. Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente induzida no anel quando (a) B está aumentando; (b) B está diminuindo; (c) B permanece constante com um valor igual a B_0. Explique seu raciocínio.

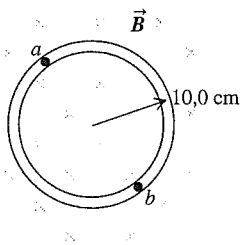


Figura 29.31 Exercícios 29.15 e 29.30.

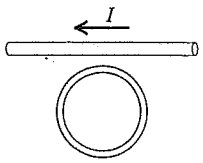


Figura 29.32 Exercício 29.16.

29.16 A corrente na Figura 29.32 obedece a equação $I(t) = I_0 e^{-bt}$, em que $b > 0$. Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente induzida na bobina redonda para $t > 0$.

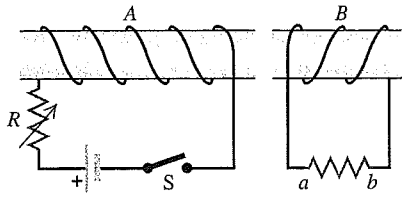


Figura 29.33 Exercício 29.17.

29.17 Use a lei de Lenz para determinar o sentido da corrente induzida que passa no resistor ab indicado na Figura 29.33, quando (a) a chave S é aberta depois de ficar fechada durante alguns minutos; (b) quando a bobina B se aproxima da bobina A enquanto a chave permanece fechada; (c) quando o valor da resistência R diminui enquanto a chave permanece fechada.

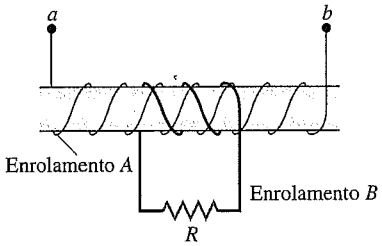


Figura 29.34 Exercício 29.18.

29.18 Um tubo de papelão é circundado por dois enrolamentos feitos com fios isolados, formando espirais em sentidos contrários, como indica a Figura 29.34. Os terminais a e b do enrolamento A podem ser conectados a uma bateria por meio de uma chave inversora. Determine se a corrente que passa no resistor R é da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita nos seguintes casos: (a) a corrente flui no enrolamento A de a para b e está aumentando; (b) a corrente flui no enrolamento A de b para a e está diminuindo; (c) a corrente flui no enrolamento A de b para a e está aumentando.

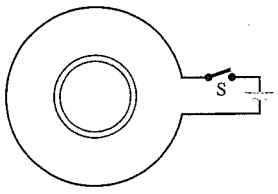


Figura 29.35 Exercício 29.19.

29.19 Um pequeno anel circular está no interior de uma espira maior, que está conectada a uma bateria e a uma chave, como indica a Figura 29.35. Use a lei de Lenz para determinar o sentido da corrente induzida no pequeno anel (a) logo após a chave S ser fechada; (b) após S ter sido fechada há muito tempo; (c) logo após S ter sido reaberta, depois de estar fechada por um longo tempo.

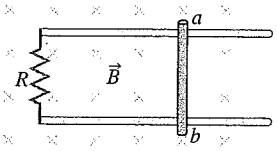


Figura 29.36 Exercício 29.20 e Problema 29.64.

29.20 Uma barra metálica com 1,50 m de comprimento é puxada para a direita a 5,0 m/s regulares e perpendicularmente a um campo magnético uniforme de 0,750 T. A barra desliza sobre trilhos metálicos paralelos, conectados através de um resistor de 25,0 Ω, como indica a Figura 29.36, de modo que o aparato faz um círculo completo. A resistência da barra e dos trilhos pode ser desprezada. (a) Calcule o módulo da fem induzida no circuito. (b) Determine o sentido da corrente induzida no circuito (i) usando a força magnética sobre as cargas na barra que se move; (ii) usando a lei de Faraday; (iii) usando a lei de Lenz. (c) Calcule a corrente através do resistor.

Seção 29.4 Força eletromotriz produzida pelo movimento

29.21 Na Figura 29.37, uma barra condutora de comprimento L = 30,0 cm se move através de um campo magnético $\vec{B}$, de módulo igual a 0,450 T, orientado para dentro do plano da figura. A barra se desloca com velocidade v = 5,0 m/s no sentido indicado. (a) Qual é a diferença de potencial entre as extremidades da barra? (b) Qual dos dois pontos, *a* ou *b*, possui potencial mais elevado? (c) Quando as cargas na barra estão em equilíbrio, quais são o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no interior da barra? (d) Quando as cargas na barra estão em equilíbrio, qual dos dois pontos, *a* ou *b*, possui excesso de carga positiva? (e) Qual é a diferença de potencial através da barra, caso ela se mova (i) paralelamente a *ab* e (ii) diretamente para fora da página?

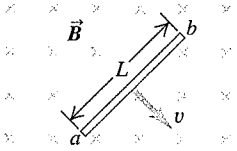


Figura 29.37 Exercício 29.21.

29.22 Para a situação no Exercício 29.20, determine (a) a fem do movimento na barra e (b) a corrente através do resistor.

29.23 As fems do movimento são uma fonte prática de eletricidade? Com que velocidade (em m/s) uma barra de cobre com 5,0 cm teria de se mover formando ângulos retos com um campo magnético de 0,650 T, para gerar 1,50 V (similar a uma pilha AA) através de suas extremidades? Esta parece ser uma forma prática de gerar eletricidade?

29.24 Fems do movimento nos transportes. Aviões e trens se movem através do campo magnético da Terra a velocidades escalares relativamente altas, portanto é razoável imaginar se esse campo pode exercer substancial efeito sobre eles. Devemos usar um valor típico de 0,50 G para o campo da Terra. (a) O trem francês TGV e o 'trem bala' japonês atingem velocidade de até 180 mph, deslocando-se sobre trilhos separados por uma distância aproximada de 1,5 m. Na velocidade máxima, no sentido perpendicular ao campo magnético da Terra, qual é a diferença de potencial induzida através dos trilhos enquanto as rodas giram? Esse valor é grande o suficiente para produzir efeitos notáveis? (b) O avião Boeing 747-400 possui envergadura de asa de 64,4 m e uma velocidade de cruzeiro de 565 mph. Quando não há vento soprando (de modo que essa é também sua velocidade em relação ao solo), qual é a diferença de potencial máxima que poderia ser induzida entre as pontas opostas das asas? Esse valor é grande o suficiente para causar problemas ao avião?

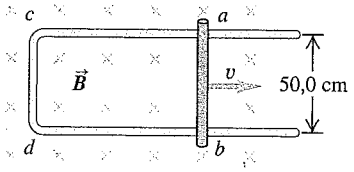


Figura 29.38 Exercício 29.25.

29.25 Na Figura 29.38, uma barra condutora *ab* está em contato com os trilhos *ca* e *db*. O dispositivo encontra-se em um campo magnético uniforme de 0,800 T perpendicular ao plano da figura. (a) Calcule o módulo da fem induzida na barra quando ela se desloca da esquerda para a direita com velocidade igual a 7,50 m/s. (b) Em que sentido a corrente flui na barra? (c) Sabendo que a resistência do circuito *abcd* é igual a 1,50 Ω (supostamente constante), determine o módulo, a direção e o sentido da força necessária para manter a barra se deslocando da esquerda para a direita com velocidade de 7,50 m/s. Despreze o atrito. (d) Compare a taxa do trabalho mecânico realizado pela força magnética (Fv) à taxa da energia térmica dissipada no circuito (I^2R).

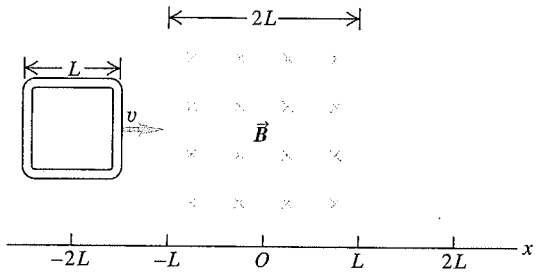


Figura 29.39 Exercício 29.26.

29.26 Uma espira quadrada, com resistência R, se move com velocidade constante v através de um campo magnético uniforme que está confinado em uma região delimitada por um quadrado de lado igual ao dobro do lado da espira quadrada (Figura 29.39). (a) Faça um gráfico da força externa F necessária para fazer a espira se deslocar com velocidade constante em função da coordenada x desde $x = -2L$ até $x = +2L$. (A coordenada x é medida do centro da região onde existe o campo magnético até o centro da espira quadrada. Ela é negativa enquanto o centro da espira está do lado esquerdo do centro da região onde existe o campo magnético. Considere positivo o sentido da força orientada para a direita.) (b) Faça um gráfico da corrente induzida na espira em função da coordenada x. Considere positivo o sentido anti-horário da corrente.

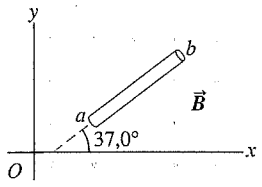


Figura 29.40 Exercício 29.27.

29.27 Uma barra de 1,41 m se move através de um campo magnético uniforme de 1,20 T, com velocidade escalar de 2,50 m/s (Figura 29.40). Em cada caso, determine a fem induzida entre as extremidades dessa barra e identifique qual, se alguma, extremidade (*a* ou *b*) possui o potencial mais elevado. A barra se move no sentido do (a) eixo $+Ox$; (b) eixo $-Oy$; (c) eixo $+Oz$. (d) Como essa barra deve se mover para que a fem através das suas extremidades tenha o valor máximo, com *b* apresentando um potencial mais elevado do que *a*, e qual é essa fem máxima?

Seção 29.5 Campos elétricos induzidos

29.28 Um solenóide fino possui 900 espiras por metro e raio igual a 2,50 cm. A corrente no solenóide cresce com uma taxa uniforme de 60,0 A/s. Qual é o módulo do campo elétrico induzido em um ponto próximo do centro do solenóide e situado a uma distância do eixo do solenóide (a) igual a 0,500 cm? (b) igual a 1,0 cm?

29.29 O campo magnético no interior de um solenóide retilíneo longo, com seção reta circular de raio R, está crescendo com uma taxa dB/dt. (a) Qual é a taxa de variação do fluxo magnético através de um círculo de raio r_1 no interior do solenóide, perpendicular ao eixo do solenóide e centralizado sobre seu eixo? (b) Calcule o módulo do campo elétrico induzido no interior do solenóide, a uma distância r_1 de seu eixo. Mostre a direção e o sentido desse campo em um diagrama. (c) Qual é o módulo do campo elétrico induzido *fora* do solenóide, a uma distância r_2 de seu eixo? (d) Faça um gráfico do campo elétrico induzido em função da distância r de seu eixo, desde $r = 0$ até $r = 2R$. (e) Qual é o módulo da fem induzida em uma espira circular de raio igual a $R/2$ que possui centro sobre o eixo do solenóide? (f) Qual será o módulo da fem induzida, se o raio da espira do item (e) for igual a R? (g) E se o raio da espira do item (e) for igual a $2R$?

29.30 O campo magnético $\vec{B}$ em todos os pontos do círculo no interior do anel indicado na Figura 29.31 possui um módulo inicial igual a 0,750 T. (O círculo poderia representar aproximadamente o espaço no interior de um solenóide longo.) O campo magnético está direcionado para o interior da figura e diminui com uma taxa igual a –0,0350 T/s. (a) Qual é a forma das linhas do campo elétrico induzido, indicado na Figura 29.31, no interior desse círculo? (b) Qual é o módulo, a direção e o sentido desse campo em qualquer ponto do anel condutor com raio igual a 0,100 m? (c) Qual é a corrente que circula no anel, sabendo que sua resistência é de 4,0 Ω? (d) Qual é a fem entre os pontos *a* e *b* do anel? (e) Se o anel for cortado em um certo ponto e as extremidades forem separadas ligeiramente, qual será a fem entre essas extremidades?

29.31 Um solenóide fino possui 400 espiras por metro e raio igual a 1,10 cm. A corrente no solenóide cresce com uma taxa uniforme di/dt. O campo elétrico induzido em um ponto próximo do centro do solenóide e a uma distância de 3,50 cm de seu eixo é igual a $8,0 \times 10^{-6}$ V/m. Calcule di/dt.

29.32 Um anel metálico de 4,50 cm é colocado entre os pólos norte e sul de grandes ímãs, cujos planos da área são perpendiculares ao campo magnético. Esses ímãs produzem um campo inicial uniforme de 1,12 T entre eles, mas são gradualmente separados, fazendo com que esse campo permaneça uniforme, mas diminua regularmente em 0,250 T/s. (a) Qual é o módulo do campo elétrico induzido no anel? (b) Em qual sentido (horário ou anti-horário) a corrente flui, do ponto de vista de alguém no pólo sul do ímã?

29.33 Um solenóide reto longo, com seção reta de área igual a 8,0 cm^2, contém 90 espiras por metro e conduz uma corrente igual a 0,350 A. Um segundo enrolamento com 12 espiras circunda o centro do solenóide. A corrente do solenóide é desligada, de modo que o campo magnético do solenóide se anula em 0,0400 s. Qual é a fem média induzida no segundo enrolamento?

Seção 29.7 Corrente de deslocamento e equações de Maxwell

29.34 Um dielétrico de permissividade $3,5 \times 10^{-11}$ F/m preenche completamente o volume entre duas placas capacitoras. Para $t > 0$, o fluxo elétrico através do dielétrico é $(8,0 \times 10^3\ \text{V} \cdot \text{m/s}^3)t^3$. O dielétrico é ideal e não-magnético; a corrente de condução no dielétrico é igual a zero. Em qual instante a corrente de deslocamento no dielétrico é igual a 21 μA?

29.35 O fluxo elétrico através de certa área de um dielétrico é $(8,76 \times 10^3\ \text{V} \cdot \text{m/s}^4)t^4$. A corrente de deslocamento através dessa área é igual a 12,9 pA no instante $t = 26,1$ ms. Calcule a constante dielétrica para o dielétrico.

29.36 Um capacitor de placas paralelas e cheio de ar está sendo carregado, como indica a Figura 29.23. As placas circulares possuem raio de 4,0 cm e, em um dado instante, a corrente de condução nos fios é de 0,280 A. (a) Qual é a densidade de corrente de deslocamento j_D no espaço entre as placas? (b) Qual é a taxa de variação do campo elétrico entre as placas? (c) Qual é o campo magnético induzido entre as placas a uma distância de 2,0 cm do eixo? (d) E a 1,0 cm do eixo?

29.37 **Corrente de deslocamento em um dielétrico.** Suponha que as placas paralelas na Figura 29.23 possuam área de 3,0 cm^2 e estejam separadas por uma lâmina de dielétrico com 2,50 mm de espessura, que preenche completamente o volume entre as placas. O dielétrico possui constante dielétrica de 4,70. (Os efeitos das bordas podem ser desprezados.) Em determinado instante, a diferença de potencial entre as placas é igual a 120 V e a corrente de condução i_C é igual a 6,0 mA. Nesse instante, quais são (a) a carga q em cada placa; (b) a taxa de variação da carga sobre as placas; (c) a corrente de deslocamento no dielétrico?

29.38 Na Figura 29.23, as placas do capacitor possuem área de 5,0 cm^2 e separação de 2,0 mm. As placas estão em um vácuo. A corrente de carga possui um valor *constante* de 1,80 mA. No instante $t = 0$, a carga nas placas é igual a zero. (a) Calcule a carga sobre as placas, o campo elétrico entre as placas e a diferença de potencial entre elas quando $t = 0,500$ μs. (b) Calcule dE/dt, a taxa de variação com o tempo do campo elétrico entre as placas. dE/dt varia com o tempo? (c) Calcule a densidade de corrente de deslocamento j_D entre as placas e, partir desse valor, a corrente de deslocamento total i_D. Como i_C e i_D se comparam?

29.39 **Corrente de Deslocamento em um Fio.** Um fio de cobre longo e retilíneo, com área de seção reta circular 2,1 mm^2, transporta uma corrente de 16 A. A resistividade do material é de $2,0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. (a) Qual é o campo elétrico uniforme no material? (b) Quando a corrente varia a uma taxa de 4000 A/s, qual é a taxa de variação do campo elétrico no material? (c) Qual é a

densidade da corrente de deslocamento no material do item (b)? (*Sugestão*: como K para o cobre é muito próximo de 1, use $\epsilon = \epsilon_0$.) (d) Quando a corrente varia como no item (b), qual é o módulo do campo magnético a 6,0 cm do centro do fio? Note que tanto a corrente de condução quanto a corrente de deslocamento devem ser incluídas no cálculo de B. A contribuição dada pela corrente de deslocamento é significativa?

Seção 29.8 Supercondutividade

29.40 Um fio retilíneo longo, feito com um supercondutor do tipo I, conduz uma corrente I ao longo de seu comprimento. Mostre que a corrente não pode estar uniformemente espalhada ao longo da seção reta do fio, mas deve estar toda ao longo da superfície.

29.41 Um supercondutor do tipo II em um campo magnético externo entre B_{c1} e B_{c2} possui regiões supercondutoras e regiões com resistência na qual existe campo magnético. Qual é a resistência de um cilindro longo e fino desse tipo de material?

29.42 Nas vizinhanças do zero absoluto, B_c tende a 0,142 T para o vanádio, que é um supercondutor do tipo I. A fase normal do vanádio possui uma suscetibilidade magnética próxima de zero. Considere um cilindro de vanádio longo e fino com seu eixo paralelo a um campo magnético $\vec{B}_0$ no sentido $+x$. Para pontos muito afastados das extremidades do cilindro, por simetria, todos os vetores magnéticos são paralelos ao eixo Ox. Próximo do zero absoluto, qual deve ser o campo magnético $\vec{B}$ e a magnetização $\vec{M}$ no interior e no exterior do cilindro (longe das extremidades) para (a) $\vec{B}_0 = (0{,}130\ \text{T})\,\hat{i}$? e (b) $\vec{B}_0 = (0{,}260\ \text{T})\,\hat{i}$?

29.43 O composto SiV_3 é um supercondutor do tipo II. Nas vizinhanças do zero absoluto, os dois campos magnéticos críticos são $B_{c1} = 55{,}0$ mT e $B_{c2} = 15{,}0$ T. A fase normal do SiV_3 possui uma suscetibilidade magnética próxima de zero. Considere um cilindro de SiV_3 longo e fino com seu eixo paralelo a um campo magnético $\vec{B}_0$ no sentido $+x$. Para pontos muito afastados das extremidades do cilindro, por simetria, todos os vetores magnéticos são paralelos ao eixo Ox. Próximo do zero absoluto, um campo magnético externo é lentamente aumentado, a partir de zero. Qual deve ser o campo magnético $\vec{B}$ e a magnetização $\vec{M}$ no interior do cilindro em pontos afastados das extremidades (a) imediatamente antes de o fluxo magnético começar a penetrar no material? (b) Imediatamente depois que o material se torna completamente normal?

Problemas

29.44 Variação no campo magnético. Você está testando um novo sistema de captura de dados. Esse sistema permite registrar um gráfico da corrente em um circuito em função do tempo. Como parte do teste, você usa um circuito composto por um raio de 4,0 cm e uma bobina com 500 espiras de fio de cobre conectada em série a um resistor de 600 Ω. O cobre possui resistividade de $1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, e o fio usado para a bobina tem diâmetro de 0,0300 mm. Você coloca a bobina sobre uma mesa que está inclinada a um ângulo de 30,0° em relação ao plano horizontal e que fica entre os pólos de um eletroímã. O eletroímã gera um campo magnético verticalmente de baixo para cima que é igual a zero para $t < 0$, igual a $(0{,}120\ \text{T}) \times (1 - \cos \pi t)$ para $0 \leq t \leq 1{,}0$ s e igual a 0,240 T para $t > 1{,}0$ s. (a) Desenhe o gráfico que deve ser produzido pelo seu sistema de captura de dados. (Trata-se de um sistema completo, portanto o gráfico incluirá classificações e valores numéricos nos seus eixos.) (b) Para quem olha verticalmente de cima para baixo para a bobina, a corrente fluirá no sentido horário ou anti-horário?

29.45 No circuito indicado na Figura 29.41, o capacitor possui capacitância $C = 20\mu\text{F}$ e carga inicial de 100 V, com a polaridade indicada. O resistor R_0 possui resistência de 10 Ω. No instante $t = 0$, a chave é fechada. O pequeno circuito não está conectado de forma alguma ao maior. O fio do circuito pequeno possui uma resistência de 1,0 Ω/m e contém 25 espiras. O circuito maior é um retângulo de 2,0 m por 4,0 m, enquanto o menor possui dimensões de $a = 10{,}0$ cm e $b = 20{,}0$ cm. A distância c é igual a 5,0 cm. (A figura não está em escala.) Ambos os circuitos são mantidos estáticos. Suponha que somente o fio mais próximo do circuito pequeno produza um campo magnético considerável através dele. (a) Determine a corrente no circuito maior 200 μs após S ser fechada. (b) Determine a corrente no circuito pequeno 200 μs após S ser fechada. (*Sugestão:* veja o Problema 29.7.) (c) Ache o sentido da corrente no circuito pequeno. (d) Justifique por que podemos ignorar o campo magnético de todos os fios do circuito maior, exceto o do fio mais próximo do circuito pequeno.

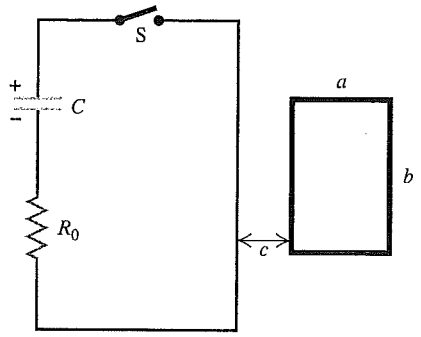


Figura 29.41 Problema 29.45.

29.46 Uma bobina plana está orientada com o plano da sua área formando ângulos retos com um campo magnético espacialmente uniforme. O módulo desse campo varia com o tempo, de acordo com o gráfico na Figura 29.42. Desenhe um gráfico qualitativo (porém exato!) da fem induzida na bobina em função do tempo. Certifique-se de identificar os instantes t_1, t_2 e t_3 em seu gráfico.

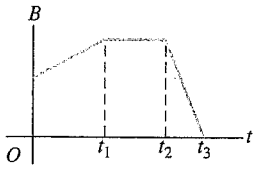


Figura 29.42 Problema 29.46.

29.47 Uma espira circular de raio a e resistência R é submetida, inicialmente, a um campo magnético externo que produz um fluxo magnético. A seguir, o campo magnético diminui até zero. Uma corrente é induzida na espira enquanto o campo magnético diminui; contudo, a corrente não é igual a zero no momento em que o campo magnético externo se anula. A razão disso é que a própria corrente gera um campo magnético que dá origem a um fluxo magnético através da espira. Quando a corrente varia, o fluxo magnético também varia e uma fem induzida surge na espira com sentido oposto a essa variação. (a) O campo magnético no centro de uma espira de raio a produzido pela corrente i da espira é dado por $B = \mu_0 i/2a$. Se você considerar para o campo magnético em todos pontos do interior da espira um valor aproximadamente igual a

esse, qual será o fluxo magnético através da espira? (b) Usando a lei de Faraday, Equação (29.3), e a relação $\mathcal{E} = iR$, mostre que, quando o campo magnético externo pára de variar, a corrente na espira é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{di}{dt} = -\left(\frac{2R}{\pi\mu_0 a}\right)i$$

(c) Se a corrente possui um valor i_0 para $t = 0$, o instante em que o campo magnético externo pára de variar, resolva a equação diferencial do item (b) para calcular i em função de t para $t > 0$. (*Sugestão*: na Seção 26.4, encontramos uma equação diferencial semelhante, a Equação (26.15), para a grandeza q. Você poderá resolver a equação para a grandeza i de modo análogo.) (d) Se a espira possui raio $a = 50$ cm e resistência $R = 0{,}10\ \Omega$, quanto tempo depois que o campo magnético externo parou de variar a corrente na espira será igual a $0{,}010\ i_0$ (ou seja, se reduzirá a $\frac{1}{100}$ de seu valor inicial)? (e) Ao resolver os exemplos deste capítulo, desprezamos os efeitos descritos neste problema. Explique por que a aproximação usada é boa.

29.48 Uma bobina está estática em um campo magnético uniforme e externo que varia com o tempo. A fem induzida nessa bobina em função do tempo é indicada na Figura 29.43. Desenhe um gráfico qualitativo do campo magnético externo em função do tempo, considerando que ele partiu de zero. Inclua os pontos t_1, t_2, t_3 e t_4 no seu gráfico.

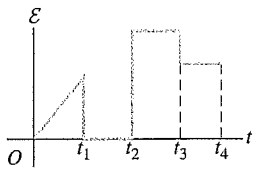


Figura 29.43 Problema 29.48.

29.49 Na Figura 29.44, a espira está sendo puxada para a direita a uma velocidade escalar constante v. Uma corrente constante I flui pelo fio longo, no sentido indicado. (a) Calcule o módulo da fem induzida resultante $\mathcal{E}$ na espira. Faça isso de duas formas: (i) usando a lei de Faraday da indução (*Sugestão*: veja o Problema 29.7) e (ii) analisando a fem induzida em cada segmento da espira em função do seu movimento. (b) Determine o sentido (horário e anti-horário) da corrente induzida na espira. Faça isso de duas formas: (i) usando a lei de Lenz e (ii) usando a força magnética sobre as cargas na espira. (c) Confira sua resposta para a fem no item (a) nos seguintes casos especiais, para verificar se é razoável em termos físicos: (i) a espira está estática; (ii) a espira é muito delgada, portanto $a \to 0$; (iii) a espira fica muito distante do fio.

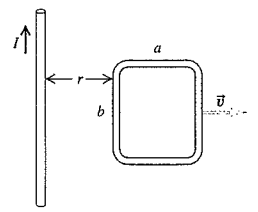


Figura 29.44 Problema 29.49.

29.50 Suponha que a espira da Figura 29.45 seja (a) girada em torno do eixo Oy; (b) girada em torno do eixo Ox; (c) girada em torno de um lado da espira paralelo ao eixo Oz. Qual é a fem induzida máxima em cada um desses casos, considerando $A = 600\ \text{cm}^2$, $\omega = 35{,}0$ rad/s e $B = 0{,}450$ T?

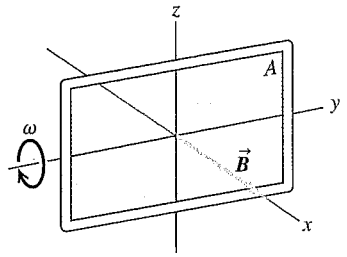


Figura 29.45 Problema 29.50.

29.51 Como novo engenheiro elétrico da companhia elétrica local, você é designado para projetar um gerador de voltagem senoidal ca com voltagem máxima de 120 V. Além de muito fio, você recebe dois ímãs potentes, capazes de produzir um campo magnético uniforme constante de 1,5 T por uma área quadrada de 10,0 cm de aresta, quando estão separados por uma distância de 12,0 cm. O projeto básico deve consistir de uma bobina quadrada que gira no campo magnético uniforme. Para obter uma resistência aceitável, a bobina pode ter, no máximo, 400 espiras. Qual é a taxa mínima de rotação (em rpm) da bobina para que ela produza a voltagem exigida?

29.52 Montar um gerador? Você é um náufrago em uma ilha tropical deserta. Há alguns instrumentos elétricos disponíveis que podem ser operados através de um gerador, mas você não possui nenhum ímã. O campo magnético da Terra na sua localização é horizontal e possui módulo $8{,}0 \times 10^{-5}$ T, e você decide tentar usar esse campo para montar um gerador, girando uma grande bobina circular a uma taxa elevada. Você precisa produzir um pico de fem de 9,0 V e estimar que pode girar a bobina a 30 rpm, virando uma manivela. Você também decide que, para ter a resistência aceitável na bobina, o número máximo de espiras é 2000. (a) Qual área deve ter a bobina? (b) Se a bobina for circular, qual será a velocidade máxima de um ponto na bobina enquanto ela gira? Você acha que esse dispositivo é viável? Explique.

29.53 Uma espira circular flexível, com diâmetro igual a 6,50 cm, está no interior de um campo magnético de módulo igual a 0,950 T direcionado para o interior da página na Figura 29.46. A espira é esticada nos pontos indicados pelas setas, reduzindo a área da espira até zero em 0,250 s. (a) Calcule a fem média induzida no circuito. (b) Qual é o sentido da corrente que flui em R, de a para b ou de b para a? Explique seu raciocínio.

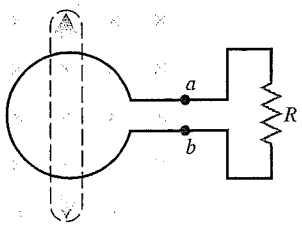


Figura 29.46 Problema 29.53.

29.54 Um circuito dentro de um circuito. A Figura 29.47 indica um pequeno circuito dentro de outro maior, ambos repousando

sobre a superfície de uma mesa. A chave está fechada no instante $t = 0$ com o capacitor inicialmente descarregado. Suponha que o pequeno circuito não exerça nenhum efeito significativo sobre o circuito maior. (a) Qual é o sentido (*a* para *b* ou para *a*) da corrente no resistor *r* (i) no instante após a chave ser fechada e (ii) em uma constante de tempo após a chave ser fechada? (b) Desenhe um gráfico da corrente no circuito pequeno em função do tempo, tomando o sentido horário como positivo.

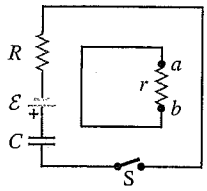


Figura 29.47 Problema 29.54.

29.55 Velocidade terminal. Uma barra condutora de comprimento *L*, massa *m* e resistência *R* se move sem atrito sobre trilhos metálicos, como indica a Figura 29.11. Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ está entrando no plano da figura. A barra parte do repouso e sofre a ação de uma força $\vec{F}$ orientada para a direita. Os trilhos possuem comprimento infinito e resistência desprezível. (a) Faça um gráfico da velocidade da barra em função do tempo. (b) Determine uma expressão para a velocidade terminal da barra (a velocidade atingida quando a aceleração é igual a zero).

29.56 Velocidade terminal. Uma barra com comprimento $L = 0{,}8$ m está livre para deslizar sem atrito sobre trilhos horizontais, como indica a Figura 29.48. Há um campo magnético uniforme $B = 1{,}5$ T, orientado para dentro do plano da figura. Em uma das extremidades dos trilhos há uma bateria com fem $\mathcal{E} = 12$ V e uma chave. A barra possui massa de 0,90 kg e resistência de 5,0 Ω, e todas as demais resistências no circuito podem ser ignoradas. A chave é fechada no instante $t = 0$. (a) Faça um desenho da velocidade escalar da barra em função do tempo. (b) Logo após a chave ser fechada, qual é a aceleração da barra? (c) Qual é a aceleração da barra quando sua velocidade escalar é igual a 2,0 m/s? (d) Qual é a velocidade terminal da barra?

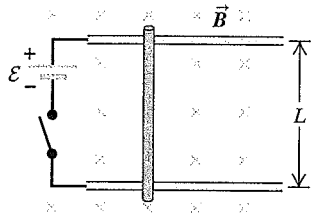


Figura 29.48 Problema 29.56.

29.57 Fem de uma antena. Um satélite orbita a Terra na linha do Equador a uma altitude de 400 km e possui uma antena que pode ser modelada, cuja haste tem 2,0 m de comprimento. A antena está orientada perpendicularmente à superfície da Terra. No Equador, o campo magnético da Terra é essencialmente horizontal e possui um valor de $8{,}0 \times 10^{-5}$ T; despreze quaisquer variações em *B* em função da altitude. Assumindo que a órbita seja circular, determine a fem induzida entre as pontas da antena.

29.58 Fem de um projétil. Na linha do Equador, o campo magnético da Terra é aproximadamente horizontal, está orientado para o norte e possui um valor de $8{,}0 \times 10^{-5}$ T. (a) Estime a fem induzida entre a ponta e a base do projétil disparado horizontalmente contra um alvo no Equador, se o projétil for disparado no sentido leste. Suponha que o projétil tenha comprimento de 1 cm e diâmetro de 0,4 cm e que se desloque a 300 m/s. Qual possui potencial mais elevado: a ponta ou a base do projétil? (b) Qual é a fem, se o projétil se desloca para o sul? (c) Qual é a fem induzida entre a parte frontal e a traseira da bala, para qualquer velocidade horizontal?

29.59 Um fio muito longo e cilíndrico, de raio *R*, transporta uma corrente I_0 uniformemente distribuída através da seção reta do fio. Calcule o fluxo magnético através de um retângulo que possui um lado com comprimento *W* descendo pelo centro do fio e outro lado de comprimento *R*, como indica a Figura 29.49 (veja o Problema 29.7).

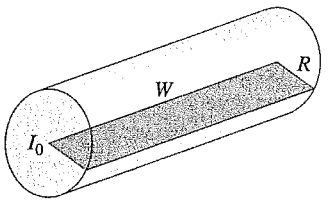


Figura 29.49 Problema 29.59.

29.60 Um anel condutor circular, com raio $r_0 = 0{,}0420$ m, está sobre o plano *xy* em uma região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0[1 - 3\,(t/t_0)^2 + 2\,(t/t_0)^3]\,\hat{k}$, em que $t_0 = 0{,}0100$ s e permanece constante, *t* é o tempo, $\hat{k}$ é um vetor unitário orientado no sentido +*z* e $B_0 = 0{,}0800$ T e permanece constante. Nos pontos *a* e *b* (Figura 29.50), existe uma pequena abertura do anel, cujas extremidades são conectadas a fios que conduzem a corrente para um circuito externo com resistência $R = 12{,}0$ Ω. Não há nenhum campo magnético no local onde está o circuito externo. (a) Deduza uma relação, em função do tempo, para o fluxo magnético total Φ_B através do anel. (b) Calcule a fem induzida no anel para $t = 5{,}0 \times 10^{-3}$ s. Qual é a polaridade da fem? (c) Como o anel possui uma resistência interna, a corrente que flui através de *R* no instante calculado no item (b) é apenas de 3,0 mA. Determine a resistência interna do anel. (d) Calcule a fem induzida no anel para $t = 1{,}21 \times 10^{-2}$ s. Qual é a polaridade da fem? (e) Determine o instante em que a corrente que flui através de *R* inverte seu sentido.

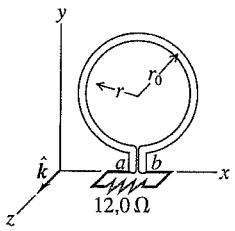


Figura 29.50 Problema 29.60.

29.61 O fio retilíneo longo indicado na Figura 29.51a conduz uma corrente constante *I*. Uma barra metálica de comprimento *L* se move com velocidade constante $\vec{v}$, como indica a figura. O ponto *a* está a uma distância *d* do fio. (a) Calcule a fem induzida na barra. (b) Qual dos dois pontos, *a* ou *b*, possui potencial mais elevado? (c) Se a barra for substituída por uma espira retangular de resistência *R* (Figura 29.51b), qual será o módulo da corrente induzida na espira?

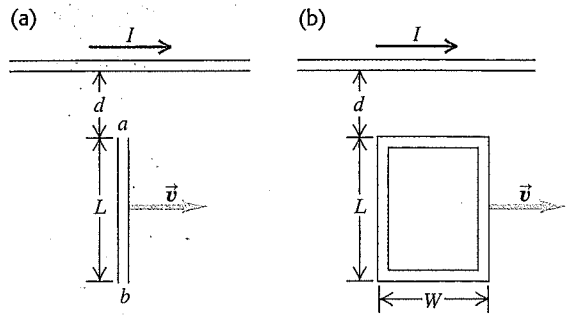


Figura 29.51 Problema 29.61.

29.62 O cubo indicado na Figura 29.52, com aresta igual a 50,0 cm, está em um campo magnético uniforme de 0,120 T, apontando no sentido positivo do eixo *Oy*. Os fios *A*, *C* e *D* se movem nos sentidos indicados, com a mesma velocidade, de 0,350 m/s. (O fio *A* se move paralelamente ao plano *xy*, o fio *C* se move formando um ângulo de 45,0° abaixo do plano *xy* e o fio *D* se move paralelamente ao plano *xz*.) Qual é a diferença de potencial entre as extremidades de cada fio?

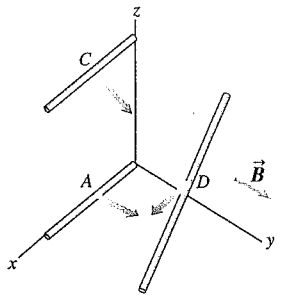


Figura 29.52 Problema 29.62.

29.63 Uma haste fina, de comprimento igual a 0,240 m, gira com velocidade angular de 8,80 rad/s em torno de um eixo perpendicular à haste e passando em uma de suas extremidades. O plano da rotação da haste é perpendicular a um campo magnético uniforme, com módulo igual a 0,650 T. (a) Qual é a fem induzida na haste? (b) Qual é a diferença de potencial entre as suas extremidades? (c) Suponha que, em vez da rotação anterior, a haste gire com 8,80 rad/s em torno de um eixo perpendicular à haste, passando em seu centro. Qual é agora a diferença de potencial entre suas extremidades? E entre o centro e uma de suas extremidades?

29.64 Um aparelho de ginástica magnético. Você projetou um novo tipo de aparelho de ginástica com um mecanismo extremamente simples (Figura 29.36). Uma barra vertical de prata (material escolhido pela sua baixa resistividade e porque ele faz o aparelho parecer frio) com comprimento $L = 3{,}0$ m está livre para se mover para a esquerda ou para a direita, sem atrito sobre os trilhos de prata. Todo o aparelho é colocado em um campo magnético uniforme e horizontal de intensidade 0,25 T. Ao empurrar a barra para a esquerda ou para a direita, o movimento da barra aciona uma corrente no circuito que inclui a barra. A resistência da barra e dos trilhos pode ser desprezada. O campo magnético exerce uma força sobre a barra que transporta corrente, e essa força se opõe ao movimento da barra. O benefício para a saúde advém do exercício que você faz ao trabalhar contra essa força. (a) O objetivo do seu projeto é que o praticante do exercício deve realizar trabalho à taxa de 25 watts ao mover a barra a uma velocidade regular de 2,0 m/s. Qual deve ser a resistência *R*? (b) Você decide variar a potência exigida da pessoa, para adaptar o aparelho à sua força e condição física. Se a potência for aumentada para 50 W, alterando-se *R* enquanto se mantêm os demais parâmetros do projeto constantes, *R* deve ser aumentado ou diminuído? Calcule o valor de *R* para 50 W. (c) Ao começar a construir um protótipo, você descobre que é difícil produzir um campo magnético de 0,25 T sobre uma área tão grande. Se você diminuir o comprimento da barra para 0,20 m, enquanto mantém *B*, *v* e *R* como no item (a), qual será a potência exigida da pessoa?

29.65 Uma espira retangular com largura *L* e um fio deslizante com massa *m* estão como indica a Figura 29.53. Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ está orientado perpendicularmente ao plano da espira para dentro do plano da figura. O fio deslizante recebe uma velocidade escalar inicial v_0 e, a seguir, é libertado. Não há atrito entre o fio deslizante e a espira, e a resistência da espira é desprezível em comparação à resistência *R* do fio. (a) Obtenha uma expressão para *F*, o módulo da força exercida sobre o fio enquanto ele se move a uma velocidade escalar *v*. (b) Mostre que a distância *x* que o fio percorre antes de atingir o repouso é $x = mv_0R/a^2B^2$.

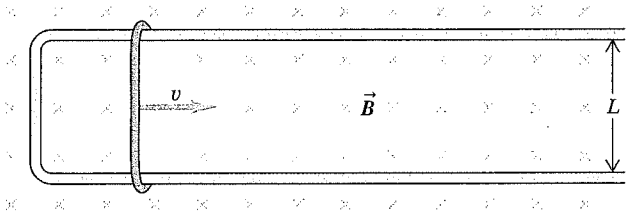


Figura 29.53 Problema 29.65.

29.66 Uma haste metálica de 25,0 cm de comprimento está sobre o plano *xy*, formando um ângulo de 36,9° com o sentido positivo do eixo *Ox* e um ângulo de 53,1° com o sentido positivo do eixo *Oy*. A haste se move no sentido +*x* com velocidade igual a 4,20 m/s e está em um campo magnético uniforme $\vec{B} = (0{,}120\ \text{T})\hat{i} - (0{,}220\ \text{T})\hat{j} - (0{,}0900\ \text{T})\hat{k}$. (a) Qual é o módulo da fem induzida na haste? (b) Faça um desenho para indicar qual extremidade da haste possui o potencial mais elevado.

29.67 O campo magnético $\vec{B}$ em todos os pontos de uma região circular de raio *R* é uniforme e está direcionado para o interior do plano da página, como indicado na Figura 29.54. (Essa região poderia ser a seção reta de um solenóide reto longo.) Sabendo que o campo magnético está crescendo com uma taxa *dB/dt*, determine o módulo, a direção e o sentido das forças magnéticas que atuam sobre uma carga *q* nos pontos *a*, *b* e *c*, indicados na figura. (O ponto *a* está a uma distância *r* acima do centro da região, o ponto *b* está a uma distância *r* do lado direito do centro da região e o ponto *c* está no centro da região.)

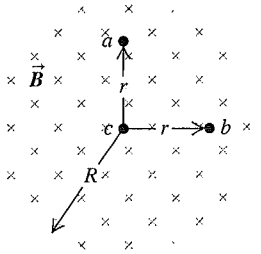


Figura 29.54 Problema 29.67.

29.68 O propulsor de um avião com comprimento total L gira em torno do seu centro com velocidade angular ω em um campo magnético que é perpendicular ao plano da rotação. Modelando o propulsor como uma barra delgada e uniforme, determine a diferença de potencial entre (a) o centro e qualquer extremidade do propulsor e (b) as duas extremidades. (c) Se o campo é o campo da Terra de 0,50 G e o propulsor gira a 220 rpm e tem 2,0 m de comprimento, qual é a diferença de potencial entre o meio e qualquer das extremidades? Esse valor chega a ser preocupante?

29.69 É impossível existir um campo elétrico uniforme que caia repentinamente até zero em uma região do espaço onde o campo magnético é uniforme e constante. Para provar essa afirmação, use o método da contradição. Suponha que essa hipótese seja *verdadeira*, a seguir mostre que ela contradiz uma lei da natureza. (a) Na metade inferior de uma folha de papel, desenhe retas paralelas igualmente espaçadas para representar um campo elétrico uniforme, orientado da esquerda para a direita. Use linhas tracejadas para representar um retângulo *abcda* com um lado *ab* paralelo ao campo elétrico e o outro lado paralelo do retângulo fora do campo elétrico, em que $E = 0$. (b) Mostre que a integração ao longo do retângulo contradiz a lei de Faraday, Equação (29.21).

29.70 Espira quadrada em queda. Uma espira quadrada de fio de cobre com orientação vertical cai de uma região onde o campo $\vec{B}$ é horizontal, uniforme e perpendicular ao plano da espira, para uma região onde o campo é igual a zero. A espira é libertada do repouso e, inicialmente, está toda dentro da região do campo magnético. Seja s o comprimento da aresta da espira e d o diâmetro do fio. A resistividade do cobre é ρ_R e sua densidade é ρ_m. Se a espira atinge sua velocidade terminal enquanto seu segmento superior ainda está na região do campo magnético, ache uma expressão para a velocidade terminal.

29.71 Em uma região do espaço onde não há corrente de condução nem de deslocamento, é impossível existir um campo elétrico uniforme que caia repentinamente até zero. Para comprovar essa afirmação, use o método da contradição. Suponha que essa hipótese seja *verdadeira*, a seguir mostre que ela contradiz uma lei da natureza. (a) Na metade inferior de uma folha de papel, desenhe retas paralelas igualmente espaçadas para representar um campo magnético uniforme orientado da esquerda para a direita. Use linhas tracejadas para representar um retângulo *abcda* com o lado horizontal *ab* na região do campo magnético e o lado *cd* na metade superior da folha, em que $B = 0$. (b) Mostre que a integração ao longo do retângulo contradiz a lei de Ampère, Equação (29.15).

29.72 Um capacitor possui duas placas paralelas com área A separadas por uma distância d. O espaço entre as placas está preenchido com um material que possui constante dielétrica K. O material não é um isolante perfeito, mas possui resistividade ρ. O capacitor tem carga inicial de módulo Q_0 em cada placa que gradualmente se descarrega devido à condução através do dielétrico. (a) Calcule a densidade da corrente de condução $j_C(t)$ no dielétrico. (b) Mostre que em qualquer instante a densidade d corrente de deslocamento no dielétrico é igual em módulo à densidade da corrente de condução, mas com sentido contrário, de modo que a densidade de corrente *total* é igual a zero em todo instante.

29.73 Um bastão de silício puro (resistividade $\rho = 2300\ \Omega \cdot \text{m}$) transporta uma corrente. O campo elétrico varia senoidalmente com o tempo, de acordo com $E = E_0$, em que $E_0 = 0{,}450$ V/m, $\omega = 2\pi f$ e a freqüência $f = 120$ Hz. (a) Determine o módulo da densidade máxima da corrente de condução no fio. (b) Supondo $\epsilon = \epsilon_0$, ache a densidade máxima da corrente de deslocamento no fio e compare com o resultado do item (a). (c) Em qual freqüência f as densidades máximas de condução e de deslocamento se igualam, se $\epsilon = \epsilon_0$ (o que não é o caso)? (d) Na freqüência obtida no item (c), qual é a *fase* relativa das correntes de condução e de deslocamento?

Problemas desafiadores

29.74 Uma espira condutora quadrada de lado L, massa m e resistência total R está, inicialmente, sobre um plano horizontal xy, com os vértices nos pontos $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(0, L, 0)$, $(L, 0, 0)$ e $(L, L, 0)$. Na região onde a espira está existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{k}$. O lado da espira que se estende de (0, 0, 0) até $(L, 0, 0)$ é mantido fixo sobre o eixo Ox; o restante da espira pode girar livremente em torno desse eixo. Quando a espira é libertada do repouso, ela começa a girar em virtude do torque produzido pela força da gravidade. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do torque *resultante* sobre a espira no momento em que ela está girando para baixo com velocidade angular ω e já girou um ângulo ϕ em relação à posição inicial. (b) Calcule a aceleração angular da espira no instante descrito no item (a). (c) Comparando com o tempo que ela levaria para girar na ausência de campo magnético, a espira leva um tempo maior ou menor para girar um ângulo de 90°? Explique. (d) A energia mecânica é conservada quando a espira gira para baixo? Explique.

29.75 Uma espira condutora quadrada, de lado igual a 20,0 cm, é colocada no mesmo campo magnético descrito no Exercício 29.30. (Veja a Figura 29.55; o centro da espira quadrada está no centro da região onde existe o campo magnético.) (a) Copie a Figura 29.55 e desenhe vetores para mostrar o módulo relativo, a direção e o sentido do campo elétrico induzido $\vec{E}$ nos pontos *a*, *b* e *c*. (b) Prove que o componente de $\vec{E}$ ao longo da espira possui o mesmo valor em todos os pontos da espira, sendo igual ao valor encontrado para o anel da Figura 29.31 (Exercício 29.30). (c) Qual é a corrente induzida na espira quando sua resistência é de 1,90 Ω? (d) Qual é a diferença de potencial entre os pontos *a* e *b*?

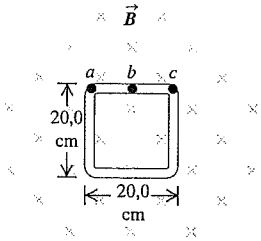


Figura 29.55 Problema desafiador 29.75.

29.76 Uma espira uniforme, condutora e quadrada, com lado igual a 20,0 cm, é colocada no mesmo campo magnético descrito no Exercício 29.30, com o lado *ac* ao longo de um diâmetro e com o ponto *b* no centro do campo (Figura 29.56). (a) Copie a Figura 29.56 e desenhe vetores para mostrar o módulo relativo, a direção e o sentido do campo elétrico induzido $\vec{E}$ em todos os pontos assinalados pelas letras indicadas. (b) Qual é a fem induzida no lado *ac*? (c) Qual é a fem induzida na espira? (d) Qual será a corrente induzida na espira quando sua resistência for igual a 1,90 Ω? (e) Qual é a diferença de potencial entre os pontos *a* e *c*? Qual dos dois pontos está a um potencial mais elevado?

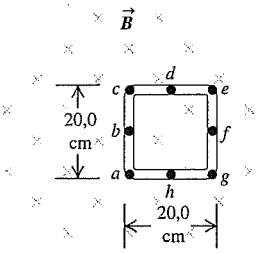


Figura 29.56 Problema desafiador 29.76.

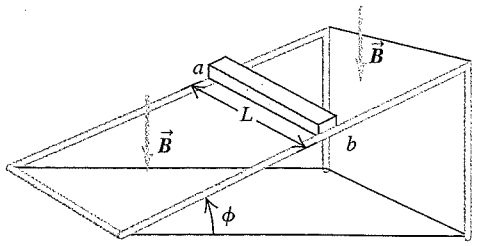
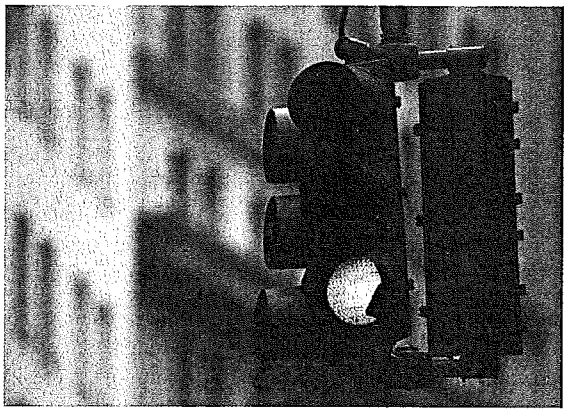


Figura 29.57 Problema desafiador 29.77.

29.77 Uma barra metálica de comprimento L, massa m e resistência total R está sobre trilhos metálicos sem atrito, inclinados em um ângulo ϕ em relação à horizontal. Os trilhos possuem resistência desprezível. Um campo magnético uniforme de módulo B está orientado para baixo, como indicado na Figura 29.57. A barra é libertada a partir do repouso e desliza para baixo sobre os trilhos. (a) O sentido da corrente induzida é de a para b ou de b para a? (b) Qual é a velocidade terminal da barra? (c) Qual será a corrente induzida na barra quando a velocidade terminal for atingida? (d) Depois que a velocidade terminal é atingida, qual é a taxa da conversão de energia elétrica em energia térmica na barra? (e) Depois que a velocidade terminal é atingida, qual é a taxa do trabalho realizado pela força da gravidade? Compare sua resposta à taxa encontrada no item (d).

29.78 Considere um disco metálico uniforme que gira através de um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao seu plano, como indicado na Figura 29.19a. O disco possui massa m, raio R e espessura t, é feito de um material com resistividade r e gira no sentido horário da Figura 29.19a com velocidade angular ω. O campo magnético está entrando no plano do disco. Suponha que a região na qual o campo magnético esteja confinado, em vez de circular como indicado na Figura 29.19a, seja delimitada por um quadrado de lado igual a L ($L << R$), centralizado em uma distância d do ponto O (o centro do disco). Os lados desse quadrado são verticais e horizontais na Figura 29.19a. (a) Mostre que a corrente induzida no interior do quadrado é dada por $I = \omega dBLt/\rho$. Em que sentido essa corrente flui? (*Sugestão*: suponha que a resistência oferecida ao fluxo da corrente esteja confinada na região do quadrado. A corrente também encontra resistência fora da região na qual o campo magnético está confinado, como indicado na Figura 29.19b; contudo, essa resistência é relativamente pequena porque ela pode fluir com facilidade através dessa área tão grande. Lembre-se da Equação (25.10) para a resistência dada na Seção 25.3.) (b) Mostre que a corrente induzida dá origem a um torque aproximado dado por $\tau = \omega d^2B^2L^2t/\rho$ que se opõe à rotação do disco (ou seja, o torque possui sentido anti-horário). (c) Quais devem ser os módulos e os sentidos do torque e da corrente induzida se o sentido de $\vec{B}$ continuar para dentro do plano, mas o disco passar a girar no sentido anti-horário? O que ocorreria se o sentido de $\vec{B}$ fosse orientado para fora do plano e se o disco passasse a girar no sentido anti-horário?

INDUTÂNCIA 30



Alguns semáforos mudam quando um carro se aproxima de um cruzamento. Como o semáforo sente a presença do carro?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como a corrente variável de uma bobina pode induzir uma fem em outra bobina desconectada.
- Como relacionar a fem induzida em um circuito à taxa de variação de corrente no mesmo circuito.
- Como calcular a energia armazenada em um campo magnético.
- Como analisar circuitos que incluem tanto um resistor quanto um indutor (bobina).
- Por que ocorrem oscilações elétricas em circuitos que possuem tanto um indutor quanto um capacitor.
- Por que as oscilações diminuem em circuitos com um indutor, um resistor e um capacitor.

Enrole um pedaço de fio de cobre em volta de um lápis para formar uma bobina. Se você colocar essa bobina em um circuito, ela se comportará de forma diferente de um pedaço retilíneo de fio? A resposta é sim. Em um carro comum movido à gasolina, esse tipo de bobina torna possível que a bateria de 12 V produza os milhares de volts necessários para gerar a centelha no espaço entre os eletrodos da vela de ignição do motor e colocá-lo em funcionamento. Outras bobinas desse tipo são usadas para manter as lâmpadas fluorescentes acesas. Bobinas maiores, instaladas sob as ruas da cidade, são usadas para controlar o funcionamento dos semáforos. Todas essas aplicações, entre muitas outras, envolvem os efeitos de *indução* que estudamos no Capítulo 29.

Uma corrente variável em uma bobina induz uma fem em outra bobina adjacente. O acoplamento entre as duas bobinas é descrito pela *indutância mútua*. Uma corrente variável em uma bobina também induz uma fem na própria bobina. Essa bobina denomina-se *indutor*; a relação entre a fem e a corrente depende da *indutância* (também chamada de *auto-indutância*) da bobina. Quando existe, inicialmente, uma corrente em uma bobina, a energia é libertada quando a corrente diminui; esse princípio é usado nos sistemas de ignição dos automóveis. Verificaremos que a energia libertada estava armazenada no campo magnético produzido pela corrente que circulava inicialmente na bobina e examinaremos algumas aplicações práticas da energia do campo magnético.

Faremos também um estudo inicial do fenômeno que ocorre quando um indutor é parte de um circuito. No Capítulo 31, estudaremos como um indutor se comporta em circuitos de corrente alternada; nesse capítulo, aprenderemos que os indutores desempenham um papel essencial na eletrônica moderna, incluindo sistemas de comunicação, fontes de alimentação, lâmpadas fluorescentes e muitos outros dispositivos.

30.1 Indutância mútua

Na Seção 28.4, consideramos a interação magnética entre dois fios que conduziam correntes *estacionárias*; a corrente de um dos fios produzia um campo magnético que exercia uma força sobre a corrente do outro fio. Contudo, quando existe uma corrente *variável* em um dos circuitos, ocorre uma interação adicional entre eles. Considere duas bobinas vizinhas, como ilustradas na Figura 30.1. Uma

corrente circulando na bobina 1 produz um campo magnético $\vec{B}$ e, portanto, um fluxo magnético através da bobina 2. Quando a corrente na bobina 1 varia, o fluxo magnético através da bobina 2 também varia; de acordo com a lei de Faraday, isso produz uma fem na bobina 2. Sendo assim, a variação da corrente em um dos circuitos produz uma corrente induzida no outro circuito.

Vamos analisar a situação ilustrada na Figura 30.1 com mais detalhes. Empregaremos letras minúsculas para designar grandezas que variam com o tempo; por exemplo, uma corrente variável será designada por i, geralmente com um índice inferior para identificar o circuito. Na Figura 30.1, uma corrente i_1 na bobina 1 induz um campo magnético (indicado pelas linhas de campo) e algumas das linhas de campo passam através da bobina 2. Designamos por Φ_{B2} o fluxo magnético através de *cada* espira da bobina 2 produzido pela corrente i_1 na bobina 1. (Quando o fluxo magnético for diferente para as diversas espiras, designaremos por Φ_{B2} o fluxo magnético *médio*.) O campo magnético é proporcional a i_1, de modo que Φ_{B2} também é proporcional a i_1. Quando i_1 varia, Φ_{B2} varia; esse fluxo magnético variável induz uma fem $\mathcal{E}_2$ na bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \tag{30.1}$$

Poderíamos representar a proporcionalidade entre Φ_{B2} e i_1 na forma Φ_{B2} = (constante)i_1; contudo, é mais conveniente incluir o número de espiras N_2 na relação. Introduzindo uma constante de proporcionalidade M_{21}, chamada de **indutância mútua** das duas bobinas, escrevemos

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21}i_1 \tag{30.2}$$

em que Φ_{B2} é o fluxo magnético através de uma *única* espira da bobina 2. Portanto,

$$N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

Indutância mútua:
quando i_1 varia, uma
fem é induzida na bobina 2.

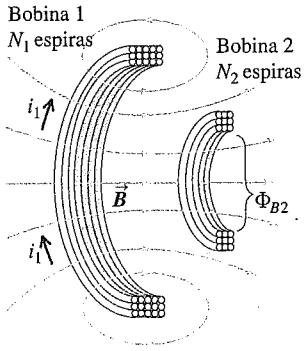


Figura 30.1 Uma corrente i_1 na bobina 1 produz um fluxo magnético através da bobina 2.

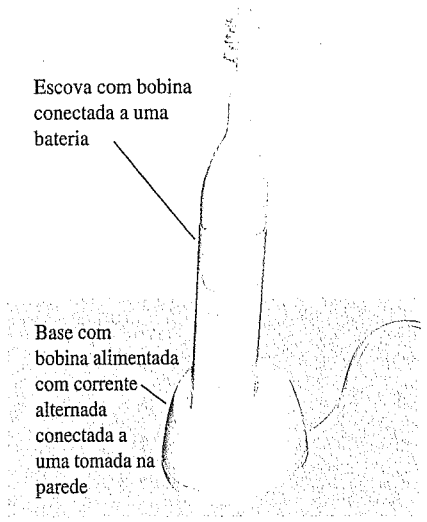


Figura 30.2 Essa escova de dentes elétrica utiliza a indutância mútua. A base contém uma bobina que é alimentada com corrente alternada por uma tomada na parede. Essa corrente variável induz uma fem em uma bobina no interior da própria escova, que é usada para recarregar a bateria da escova.

e podemos escrever a Equação (30.1) na forma

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt} \tag{30.3}$$

Ou seja, a variação da corrente i_1 na bobina 1 induz uma fem na bobina 2 diretamente proporcional à taxa de variação da corrente i_1 (Figura 30.2).

A indutância mútua definida pela Equação (30.2) pode ser escrita na forma

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1}$$

Quando as bobinas estão no vácuo, o fluxo magnético Φ_{B2} através de cada espira da bobina 2 é diretamente proporcional à corrente i_1. Então, a indutância mútua M_{21} é uma constante que depende apenas da geometria das duas bobinas (tamanho, forma, número de espiras, orientação de cada bobina e distância entre as bobinas). Na presença de material magnético, a indutância mútua também depende das propriedades magnéticas do material. Quando o material possui propriedades magnéticas não-lineares, ou seja, quando a permeabilidade relativa K_m (definida na Seção 28.8) não é constante e a magnetização não é proporcional ao campo magnético, então Φ_{B2} deixa de ser diretamente proporcional à corrente i_1. Nesse caso, a indutância mútua também depende da corrente i_1. Na presente discussão, vamos supor que qualquer material magnético que esteja presente possua um valor de K_m constante, de modo que o fluxo magnético *seja* diretamente proporcional à corrente e M_{21} dependa apenas da geometria.

Podemos repetir o raciocínio anterior para o caso oposto, no qual uma corrente variável i_2 na bobina 2 produza um fluxo magnético variável Φ_{B1} e induza uma fem $\mathcal{E}_1$ na bobina 1. Poderíamos pensar que a constante correspondente M_{12} fosse diferente de M_{21} porque, em geral, as duas bobinas não são idênticas e os fluxos magnéticos através delas são diferentes. Contudo, verificamos que M_{12} é *sempre* igual a M_{21}, mesmo quando as duas bobinas não são simétricas. Chamaremos esse valor comum simplesmente de indutância mútua, designada pelo símbolo M sem nenhum índice inferior; essa grandeza caracteriza completamente a fem induzida pela interação entre as duas bobinas. Logo, podemos escrever

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \tag{30.4}$$

(fems mutuamente induzidas)

em que a indutância mútua M é

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \tag{30.5}$$

(indutância mútua)

Os sinais negativos na Equação (30.4) decorrem da lei de Lenz. A primeira equação afirma que a variação da corrente na bobina 1 produz uma variação do fluxo magnético na bobina 2, induzindo uma fem na bobina 2 que se opõe à variação desse fluxo magnético; na segunda equação, os papéis desempenhados pelas bobinas são invertidos.

ATENÇÃO Somente uma corrente variável induz uma fem Observe que somente uma corrente *que varia com o tempo* em uma bobina pode induzir uma fem e, portanto, uma corrente em uma segunda bobina. As Equações (30.4) mostram que a fem induzida em cada bobina é diretamente proporcional à *taxa de variação* da corrente em outra bobina, não ao valor da corrente. Uma corrente estacionária em uma bobina, por mais potente que seja, não é capaz de produzir uma corrente em uma bobina vizinha.

A unidade SI de indutância mútua denomina-se **henry** (1 H), em homenagem ao físico norte-americano Joseph Henry (1797-1878), um dos descobridores da indução eletromagnética. De acordo com a Equação (30.5), vemos que um henry é igual a *um weber por ampère*. Outras unidades equivalentes, obtidas pela aplicação da Equação (30.4), são *um volt por segundo por ampère*, *um ohm por segundo* ou *um joule por ampère ao quadrado*:

$$1\,\text{H} = 1\,\text{Wb/A} = 1\,\text{V}\cdot\text{s/A} = 1\,\Omega\cdot\text{s} = 1\,\text{J/A}^2$$

Assim como o farad é uma unidade relativamente grande de capacitância (ver Seção 24.1), o henry também é uma unidade relativamente grande de indutância mútua. Como mostra o Exemplo 30.1, valores usuais de indutância mútua podem ser expressos na faixa de milihenry (mH) ou microhenry (μH).

Dificuldades e aplicações de indutância mútua

A indutância mútua pode ocasionar perturbações em circuitos elétricos, visto que a variação da corrente em um circuito é capaz de gerar uma fem indesejável em outro circuito. Para amenizar esse efeito, os sistemas compostos por muitos circuitos devem ser projetados procurando-se minimizar os valores de M; por exemplo, duas bobinas devem ser montadas com distâncias grandes entre elas ou em planos perpendiculares entre si.

Felizmente, a indutância mútua também possui muitas aplicações úteis. Um *transformador*, empregado em circuitos de corrente alternada para aumentar ou diminuir uma voltagem, é fundamentalmente um dispositivo semelhante ao arranjo das duas bobinas indicadas na Figura 30.1. Uma corrente variável alternada em uma bobina do transformador produz uma fem alternada na outra bobina; o valor de M, que depende da geometria das bobinas, determina a amplitude da fem induzida na outra bobina e, portanto, a amplitude da voltagem na saída do transformador. (Vamos estudar os transformadores com mais detalhes no Capítulo 31, depois de analisar mais aprofundadamente a corrente alternada.)

Exemplo 30.1

CÁLCULO DE INDUTÂNCIA MÚTUA Em uma das versões da bobina de Tesla (um gerador de alta voltagem que talvez você já tenha visto em algum museu de ciência), um solenóide longo, de comprimento l e seção reta com área A, possui N_1 espiras enroladas de modo compacto. Uma bobina com N_2 espiras é enrolada em seu centro (Figura 30.3). Determine a indutância mútua.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a indutância mútua ocorre nessa situação porque uma corrente em uma das bobinas produz um campo magnético que gera um fluxo através de outra bobina.

PREPARAR: usamos a Equação (30.5) para determinar a indutância mútua M. De acordo com essa equação, necessitamos conhecer (a) o fluxo Φ_{B2} que percorre cada espira da bobina externa em função de uma corrente i_1 no solenóide ou (b) o fluxo Φ_{B1} que percorre cada espira do solenóide em função de uma corrente i_2 na bobina externa. Escolhemos a opção (a) porque, pelo Exemplo 28.9 (Seção 28.7), temos uma expressão simples para o campo no centro de um longo solenóide que transporta corrente, dada pela Equação (28.23). Note que não estamos fornecendo o valor da corrente i_1 no solenóide. Essa omissão não é, contudo, motivo de alarme. O valor da indutância mútua não depende do valor da corrente, portanto a grandeza i_1 deve se anular quando calculamos M.

EXECUTAR: pelo Exemplo 28.9, uma corrente i_1 no solenóide produz um campo magnético $\vec{B}_1$ em seu centro. O módulo de $\vec{B}_1$ é proporcional a i_1 e a n_1, que é o número de espiras por unidade de comprimento:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

O fluxo magnético através da seção reta do solenóide é igual a B_1A. Como um solenóide muito longo não produz nenhum campo magnético em seu exterior, esse valor também é igual ao fluxo Φ_{B2} através de cada espira da bobina externa, qualquer que seja a área da seção reta da bobina externa. De acordo com a Equação (30.5), a indutância mútua M é dada por

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2B_1A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0N_1i_1}{l}A = \frac{\mu_0AN_1N_2}{l}$$

AVALIAR: a indutância mútua de duas bobinas é sempre proporcional ao produto N_1N_2 de seus números de espiras. Note que a indutância mútua M depende apenas da geometria das bobinas, não da corrente que passa através delas.

Vejamos aqui um exemplo numérico para que você tenha idéia das ordens de grandeza. Considere $l = 0{,}50$ m, $A = 10$ cm^2 $= 1{,}0 \times 10^{-3}$ m^2, $N_1 = 1000$ espiras e $N_2 = 10$ espiras. Portanto

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0{,}50\ \text{m}}$$
$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}$$

Exemplo 30.2

FEM PRODUZIDA POR INDUTÂNCIA MÚTUA No Exemplo 30.1, suponha que a corrente i_2 na bobina externa seja dada pela expressão $i_2 = (2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s})t$ (correntes em fios podem, na verdade, crescer com essa taxa elevada durante breves períodos). (a) No instante $t = 3{,}0\ \mu$s, qual é o fluxo magnético médio através de cada espira do solenóide produzido pela corrente que circula na bobina externa? (b) Qual é a fem induzida no solenóide?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no Exemplo 30.1, determinamos a indutância mútua relacionando a corrente no solenóide ao fluxo produzido na bobina externa. Neste exemplo, temos a corrente na bobina externa e queremos determinar o fluxo resultante no solenóide. O ponto principal é que a indutância mútua é a *mesma* em qualquer dos casos.

PREPARAR: dado o valor da indutância mútua $M = 25\ \mu$H do Exemplo 30.1, usamos a Equação (30.5) para determinar o fluxo Φ_{B1} que passa por cada espira do solenóide gerado por uma dada corrente i_2 na bobina externa. A seguir, usamos a Equação (30.4) para determinar a fem induzida no solenóide pela variação no tempo da corrente na bobina externa.

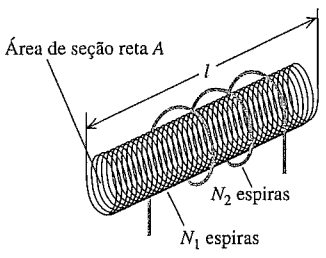


Figura 30.3 Um solenóide longo com N_1 espiras e seção reta de área A, que contém em seu centro uma bobina com N_2 espiras.

Auto-indutância: quando a corrente i do circuito varia, o fluxo também varia, produzindo uma fem auto-induzida no circuito.

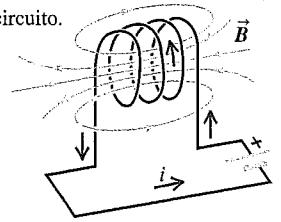


Figura 30.4 A corrente i do circuito produz um campo magnético $\vec{B}$ na bobina e, portanto, um fluxo magnético através da bobina.

EXECUTAR: (a) No instante $t = 3{,}0\ \mu$s $= 3{,}0 \times 10^{-6}$ s, a corrente na espira externa (bobina 2) é $i_2 = (2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s})(3{,}0 \times 10^{-6}$ s) $= 6{,}0$ A. Para calcularmos o fluxo magnético médio através de cada espira do solenóide (bobina 1), explicitamos Φ_{B1} na Equação (30.5):

$$\Phi_{B1} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(6{,}0\ \text{A})}{1000} = 1{,}5 \times 10^{-7}\ \text{Wb}$$

Note que se trata de um valor *médio*; o fluxo magnético pode variar consideravelmente entre o centro e a periferia do solenóide.

(b) A fem induzida $\mathcal{E}_1$ é dada pela Equação (30.4):

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} = -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})\frac{d}{dt}[(2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s})t]$$
$$= -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s}) = -50\ \text{V}$$

AVALIAR: essa fem elevada foi obtida como resposta a uma variação muito rápida da corrente. As bobinas de Tesla reais operam com correntes alternadas em vez da corrente continuamente crescente citada neste exemplo; tanto $\mathcal{E}_1$ quanto di_2/dt são grandezas cujas amplitudes podem atingir valores milhares de vezes maiores que os indicados nesse exemplo.

Teste sua compreensão da Seção 30.1 Considere a bobina de Tesla descrita no Exemplo 30.1. Se você montar um solenóide com o dobro de fio, de modo que ele tenha o dobro de espiras e o dobro do comprimento, quantas vezes maior será a indutância mútua? (i) M será quatro vezes maior; (ii) M será o dobro; (iii) M não varia; (iv) M será a metade; (v) M será $\frac{1}{4}$ do valor inicial. ∎

30.2 Indutores e auto-indutância

Em nossa discussão sobre a indutância mútua, consideramos dois circuitos separados e independentes; uma corrente em um dos circuitos cria um campo magnético que produz um fluxo magnético sobre o outro circuito. Quando a corrente no primeiro circuito varia, o fluxo através do segundo varia, induzindo uma fem no segundo circuito.

Um efeito relacionado importante ocorre até mesmo quando consideramos um *único* circuito isolado. Quando

existe uma corrente em um circuito, ela produz um campo magnético que gera um fluxo magnético através do *próprio* circuito; quando a corrente varia, esse fluxo também varia. Portanto, qualquer circuito percorrido por uma corrente variável possui uma fem induzida nele mesmo pela variação de *seu próprio* fluxo magnético. Tal fem denomina-se **fem auto-induzida**. De acordo com a lei de Lenz, uma fem auto-induzida sempre se opõe à variação da corrente que produz a fem e, portanto, tende a tornar mais difícil qualquer variação da corrente. Por essa razão, a fem auto-induzida é muito importante quando existe uma corrente variável.

Uma fem auto-induzida pode ocorrer em *qualquer* circuito, visto que sempre existirá algum fluxo magnético através de espiras fechadas em um circuito que conduz uma corrente. Porém, o efeito é bastante ampliado quando o circuito contém uma bobina com N espiras (Figura 30.4). Em virtude da corrente i, existe um fluxo magnético médio Φ_B através de cada espira da bobina. Por analogia à Equação (30.5), definimos a **auto-indutância** L do circuito do seguinte modo:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad (30.6)$$

(auto-indutância)

Quando não existir nenhuma possibilidade de confusão com a indutância mútua, a auto-indutância pode ser simplesmente chamada de **indutância**. Comparando a Equação (30.5) com a Equação (30.6), vemos que as unidades de auto-indutância são as mesmas que as unidades de indutância mútua; a unidade SI de auto-indutância é o henry.

Quando a corrente i no circuito varia, Φ_B também varia; reagrupando a Equação (30.6) e tomando a derivada em relação ao tempo, as taxas de variação são relacionadas por

$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

De acordo com a lei de Faraday para uma bobina com N espiras, Equação (29.4), a fem auto-induzida é dada por $\mathcal{E} = -Nd\Phi_B/dt$, portanto concluímos que

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad (30.7)$$

(fem auto-induzida)

O sinal negativo na Equação (30.7) decorre da lei de Lenz; ele mostra que a fem auto-induzida em um circuito se opõe a qualquer variação de corrente que ocorra no circuito. (Mais adiante, nesta seção, exploraremos com mais detalhes o significado do sinal negativo.)

A Equação (30.7) também afirma que a auto-indutância de um circuito é o módulo da fem auto-induzida por unidade de taxa de variação da corrente. Essa relação torna possível medir uma auto-indutância desconhecida de uma forma relativamente simples: altere a corrente no circuito a uma taxa conhecida di/dt, meça a fem induzida e calcule a razão para determinar L.

Indutores como elementos do circuito

O dispositivo de um circuito projetado para possuir um valor particular de auto-indutância denomina-se **indutor** ou *reator*. O símbolo geralmente usado para designar um indutor em um circuito é

Assim como os resistores e os capacitores, os indutores são elementos indispensáveis na moderna tecnologia eletrônica. O objetivo de um indutor é criar uma corrente que se oponha à variação da corrente no circuito. Um indutor colocado em um circuito de corrente contínua ajuda a manter a corrente constante, apesar de eventuais flutuações da fem aplicada; em um circuito de corrente alternada, o indutor pode ser usado para suprimir variações da corrente que sejam mais rápidas que as desejadas. Neste capítulo e no próximo, estudaremos com detalhes o comportamento dos indutores e suas aplicações.

Para entendermos o comportamento de circuitos contendo indutores, precisamos desenvolver um princípio geral semelhante à lei das malhas de Kirchhoff, discutida na Seção 26.2. Para aplicarmos aquela lei, percorríamos o circuito calculando sucessivamente a diferença de potencial através de cada elemento do circuito. A soma algébrica de todas essas diferenças de potencial através do circuito fechado deve ser igual a zero, porque o campo elétrico produzido pelas cargas distribuídas ao longo do circuito é *conservativo*. Na Seção 29.7, designamos esse campo conservativo pelo vetor $\vec{E}_c$.

Mas, se existe um indutor no circuito, a situação muda. O campo elétrico induzido magneticamente nas bobinas do indutor *não* é conservativo; designamos esse campo por $\vec{E}_n$. Precisamos raciocinar com cuidado sobre os papéis desempenhados pelos diferentes campos. Vamos supor que a bobina possua uma resistência desprezível. Então, basta um campo elétrico muito pequeno para que

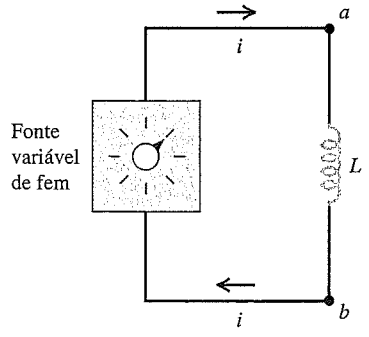


Figura 30.5 Um circuito contendo uma fonte de energia e um indutor. A fonte é variável, de modo que a corrente i e sua taxa de variação di/dt podem variar.

uma carga se desloque através da bobina, daí o campo elétrico *total* $\vec{E}_c + \vec{E}_n$ nas espiras da bobina deve ser igual a zero, embora nenhum dos dois campos seja individualmente igual a zero. Como $\vec{E}_c$ não é zero, sabemos que, para produzir esse campo, deve existir um acúmulo de cargas nas extremidades do indutor e sobre as superfícies de seus condutores.

Considere o circuito indicado na Figura 30.5; a caixa contém algumas combinações de baterias de resistores que permitem o controle da corrente i no circuito. De acordo com a lei de Faraday, Equação (29.10), a integral de linha de $\vec{E}_n$ em torno do circuito é a taxa da variação do fluxo, com sinal negativo, que passa através do circuito e que, por sua vez, é dada pela Equação (30.7). Combinando essas duas relações, obtemos

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

em que realizamos a integral no sentido horário (o sentido escolhido para a corrente). Porém, $\vec{E}_n$ só é diferente de zero dentro do indutor. Portanto, a integral de linha de $\vec{E}_n$ em torno do circuito todo pode ser substituída por uma integral somente de a até b através do indutor, ou seja,

$$\int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

A seguir, como $\vec{E}_c + \vec{E}_n = \mathbf{0}$ em cada ponto do interior das bobinas do indutor, podemos escrever o resultado anterior na forma

$$\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = L\frac{di}{dt}$$

Porém, a integral anterior é precisamente o potencial V_{ab} do ponto b em relação ao ponto a, de modo que obtemos finalmente

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt} \qquad (30.8)$$

Concluímos que existe uma genuína diferença de potencial entre os terminais do indutor associada às forças eletrostáticas conservativas, apesar de o campo elétrico associado à indução magnética não ser conservativo. Assim, justificamos o uso da Equação (30.8) na lei das malhas de Kirchhoff para a análise de circuitos.

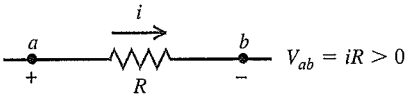
ATENÇÃO A fem auto-induzida se opõe às variações na corrente Note que a fem auto-induzida não se opõe à própria corrente i; em vez disso, ela se opõe a qualquer *variação* da corrente (di/dt). Portanto, o comportamento de um indutor em um circuito é completamente diferente do comportamento de um resistor. Na Figura 30.6, comparamos o comportamento de um indutor com o do resistor e resumimos as relações dos sinais.

Aplicações de indutores

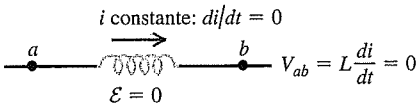
Por se opor a variações na corrente, um indutor desempenha um papel importante nas instalações de lâmpadas fluorescentes (Figura 30.7). Nesse tipo de instalação, a corrente flui da fiação para o gás que preenche o tubo, ionizando o gás e fazendo-o incandescer. Entretanto, um gás ionizado ou *plasma* é um condutor altamente não ôhmico. Quanto maior a corrente, mais altamente ionizado o plasma e mais baixa a sua resistência. Se uma voltagem suficientemente alta for aplicada ao plasma, a corrente poderá crescer a ponto de danificar o circuito fora do tubo fluorescente. Para prevenir esse problema, um indutor ou *compensador magnético* é colocado em série com o tubo fluorescente, de modo a impedir que a corrente ultrapasse os limites.

O compensador também permite ao tubo fluorescente operar com a voltagem alternada fornecida pela fiação doméstica. Essa voltagem oscila senoidalmente com uma freqüência de 60 Hz, de modo que cai momentaneamente a zero 120 vezes por segundo. Se não houvesse compensador, o plasma no tubo fluorescente sofreria rápida desionização, quando a voltagem caísse para zero, e o tubo se desligaria. Com a presença de compensador, uma fem auto-induzida sustenta a corrente e mantém o tubo aceso. Compensadores magnéticos são também usados para essa finalidade na iluminação de ruas (caso em que se obtém luminosidade a partir de um vapor incandescente de mercúrio ou átomos de sódio) e nas lâmpadas de néon. (Em lâmpadas fluorescentes compactas, o compensador magnético é substituído por um esquema mais complicado de corrente regulada. Esse esquema utiliza transistores, discutidos no Capítulo 42.)

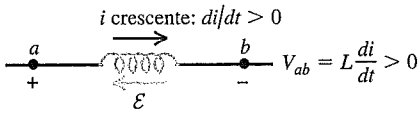
(a) Resistor com corrente i fluindo de a para b: o potencial diminui de a para b.



(b) Indutor com corrente constante i fluindo de a para b: não há diferença de potencial.



(c) Indutor com a corrente crescente i fluindo de a para b: o potencial cai de a para b.



(d) Indutor com corrente decrescente i fluindo de a para b: o potencial aumenta de a para b.

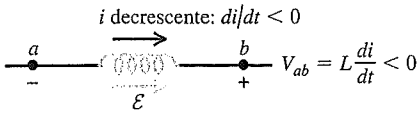


Figura 30.6 (a) A diferença de potencial através de um resistor depende da corrente. (b), (c) e (d) A diferença de potencial através de um indutor depende da taxa de variação da corrente.

A auto-indutância de um circuito depende de seu volume, da forma e do número de espiras. Quando as N espiras estão muito compactadas, ela é sempre proporcional a N^2. Ela depende também das propriedades magnéticas do material existente no interior do circuito. Nos exemplos que serão apresentados a seguir, vamos supor que no interior do circuito haja somente o vácuo (ou o ar, que, do ponto de vista das propriedades magnéticas, é essencialmente igual ao vácuo). Porém, se o fluxo magnético está concentrado em uma região que contém um material magnético com permeabilidade μ, então devemos substituir na expressão de B a permeabilidade do vácuo μ_0 por $\mu = K_m\mu_0$, conforme vimos na Seção 28.8. Quando o material é paramagnético ou diamagnético, essa substituição produz uma diferença desprezível, visto que K_m é aproximadamente igual a 1. Contudo, quando o material é *ferromagnético*, a diferença possui importância crucial. Um solenóide enrolado sobre um núcleo de ferro doce com $K_m = 5000$ pode possuir uma indutância aproximadamente 5000 vezes maior que a indutância do mesmo indutor com ar em seu interior. Indutores com núcleo de ferro ou de ferrita são muito empregados na eletrotécnica e na eletrônica.

Uma complicação adicional é que, nos materiais ferromagnéticos, a magnetização geralmente não é uma função linear da corrente que produz a magnetização; isso é particularmente verdade nas vizinhanças da saturação. Por isso, concluímos que a indutância não é constante, porém depende da corrente de modo complexo. Em nossas discussões, vamos desprezar esse efeito e supor que a indutância seja sempre constante. Essa hipótese é bastante razoável mesmo no caso de materiais ferromagnéticos, quando a magnetização permanece com valores muito menores que na saturação.

Como os automóveis possuem partes em aço, que é um material ferromagnético, dirigir um automóvel sobre uma bobina provoca um aumento considerável na indutância da bobina. Esse efeito é usado nos sensores de semáforos, que usam uma grande bobina que transporta corrente embutida sob a superfície do pavimento, próximo a um cruzamento. O circuito conectado à bobina detecta a variação na indutância quando o carro passa. Assim que um número pré-programado de veículos passa sobre a bobina, o semáforo muda para verde e permite a passagem dos carros pelo cruzamento.

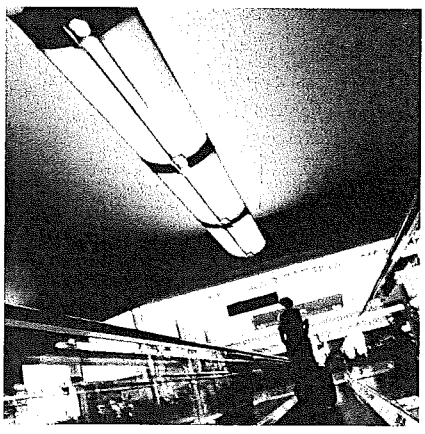


Figura 30.7 Essas lâmpadas fluorescentes estão conectadas em série a um indutor, ou compensador, que ajuda a sustentar a corrente que flui pela tubulação.

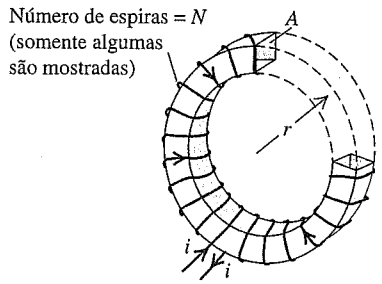


Figura 30.8 Determinação da auto-indutância de um solenóide toroidal com espiras enroladas de modo compacto. Para maior clareza, somente algumas espiras do enrolamento são mostradas. Parte do toróide foi cortada para mostrar a área de seção reta A e o raio r.

Exemplo 30.3

CÁLCULO DE AUTO-INDUTÂNCIA Um solenóide toroidal com seção reta de área A e um raio médio r contém N espiras bastante compactadas (Figura 30.8). Esse toróide está enrolado em torno de um núcleo não-magnético. Determine sua auto-indutância L. Suponha que B seja uniforme através da área da seção reta (ou seja, despreze a variação de B com a distância ao eixo do toróide).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita é a auto-indutância L do solenóide toroidal.

PREPARAR: podemos determinar L de duas formas: com a Equação (30.6), que requer o conhecimento do fluxo Φ_B através de cada espira e a corrente i na bobina; ou pela Equação (30.7), que requer o conhecimento da fem auto-induzida $\mathcal{E}$ em função de uma dada taxa de variação de corrente di/dt. Não temos nenhuma informação sobre a fem, portanto devemos aplicar o primeiro método. Usamos os resultados do Exemplo 28.10 (Seção 28.7), em que determinamos o campo magnético no interior de um solenóide toroidal.

EXECUTAR: pela definição de auto-indutância fornecida pela Equação (30.6), temos $L = N\Phi_B/i$. De acordo com o Exemplo 28.10, o campo magnético a uma distância r do eixo de um toróide é $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Supondo que o campo magnético possua esse valor através da área A da seção reta, o fluxo magnético através dela é

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}$$

O fluxo magnético Φ_B é o mesmo através de cada espira e a auto-indutância L é

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

(auto-indutância de um solenóide toroidal)

AVALIAR: considere $N = 200$ espiras, $A = 5{,}0\ \text{cm}^2 = 5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ e $r = 0{,}10$ m; então,

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A} \cdot \text{m})(200)^2(5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{2\pi(0{,}10\ \text{m})}$$
$$= 40 \times 10^{-6}\ \text{H} = 40\ \mu\text{H}$$

Mais adiante, neste capítulo, aplicaremos a expressão $L = \mu_0 N^2 A/2\pi r$ da indutância de um solenóide toroidal, para desenvolver uma expressão para a energia armazenada em um campo magnético.

Exemplo 30.4

CÁLCULO DE FEM AUTO-INDUZIDA Sabendo que a corrente no solenóide toroidal do Exemplo 30.3 cresce uniformemente de zero até 6,0 A em 3,0 μs, determine o módulo e o sentido da fem auto-induzida.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos L, a auto-indutância, e di/dt, a taxa de variação da corrente. A incógnita é a fem auto-induzida.

PREPARAR: calculamos a fem usando a Equação (30.7).

EXECUTAR: a taxa de variação da corrente no solenóide toroidal é $di/dt = (6{,}0\ \text{A})/(3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s}$. De acordo com a Equação (30.7), o módulo da fem induzida é

$$|\mathcal{E}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\ \text{H})(2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s}) = 80\ \text{V}$$

A corrente está crescendo; logo, pela lei de Lenz, o sentido da fem deve ser oposto ao sentido da corrente. Isso corresponde à situação indicada na Figura 30.6c; a fem possui sentido de b para a, como se fosse uma bateria com o terminal a com sinal + e o terminal b com sinal −, tendendo a se opor ao crescimento da corrente no circuito externo.

AVALIAR: este exemplo demonstra que mesmo uma pequena indutância L pode produzir uma substancial fem induzida, quando a corrente varia rapidamente.

Teste sua compreensão da Seção 30.2 Classifique os seguintes indutores por ordem de diferença de potencial V_{ab}, do mais positivo para o mais negativo. Em todos os casos, o indutor possui resistência igual a zero e a corrente flui do ponto a passando pelo indutor até o ponto b. (i) A corrente que percorre um indutor de 2,0 μH aumenta de 1,0 A para 2,0 A em 0,50 s; (ii) a corrente que passa por um indutor de 4,0 μH diminui de 3,0 A para 0 em 2,0 s; (iii) a corrente que passa por um indutor de 1,0 μH permanece constante a 4,0 A; (iv) a corrente que passa por um indutor de 1,0 μH aumenta de 0 para 4,0 μH em 0,25 s. ∎

30.3 Energia do campo magnético

Para fazer uma corrente circular em um circuito é necessário fornecer uma dada quantidade de energia; e um indutor que conduz corrente possui energia armazenada nele. Vamos ver como isso ocorre. Na Figura 30.5, uma corrente i crescendo no indutor induz uma fem $\mathcal{E}$ entre os terminais e uma correspondente diferença de potencial V_{ab} nos terminais da fonte, e o ponto a possui um potencial mais elevado que o ponto b. Portanto, a fonte deve fornecer energia para o indutor e a potência instantânea P (taxa de transferência de energia para o indutor) é dada por $P = V_{ab}i$.

Energia armazenada em um indutor

Podemos calcular a energia total U necessária para estabelecer uma corrente final I em um indutor com indutância L, supondo que a corrente inicial seja igual a zero. Admitindo que a resistência do indutor seja igual a zero, nenhuma corrente é dissipada no interior do indutor. Supondo que a corrente em determinado instante seja i e sua taxa de variação, igual a di/dt, a corrente está aumentando, de modo que $di/dt > 0$. A voltagem entre os terminais a e b do indutor nesse instante é $V_{ab} = L\,di/dt$, e a taxa P com a qual a energia está sendo fornecida ao indutor (igual à potência instantânea fornecida pela fonte externa) é dada por

$$P = V_{ab}i = Li\frac{di}{dt}$$

A energia dU fornecida ao indutor durante um intervalo de tempo infinitesimal dt é dada por $dU = P\,dt$, portanto

$$dU = Li\,di$$

A energia total U fornecida enquanto a corrente está aumentando de zero até um valor final I é dada por

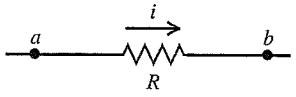
$$U = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (30.9)$$

(energia armazenada em um indutor)

Depois que a corrente atinge seu valor estacionário final I, obtemos $di/dt = 0$ e nenhuma energia adicional é fornecida ao indutor. Quando não existe nenhuma corrente, a energia é igual a zero, e quando existe uma corrente, a energia é igual a $\frac{1}{2}LI^2$.

Quando a corrente diminui de I até zero, o indutor atua como uma fonte que fornece a energia total $\frac{1}{2}LI^2$ para o circuito externo. Se interrompemos repentinamente o circuito, abrindo uma chave ou puxando rapidamente o plugue da tomada da parede, a corrente diminui rapidamente, a fem induzida fica muito grande e a energia pode ser descarregada por meio de um arco voltaico entre os contatos da chave. Essa fem muito grande é o análogo elétrico da enorme força mecânica que surge quando um carro colide com uma parede de tijolos e pára repentinamente. A voltagem elevada que é desenvolvida em uma das velas de ignição de um carro resulta da repentina interrupção da corrente em outro enrolamento.

Resistor com corrente i: a energia é *dissipada*.



Indutor com corrente i: a energia é *armazenada*

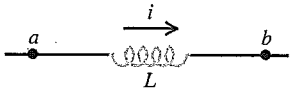


Figura 30.9 Um resistor é um dispositivo em que a energia é irrevogavelmente dissipada. Em contraste, a energia armazenada em um indutor que transporta corrente pode ser recuperada quando a corrente cai para zero.

ATENÇÃO Energia, resistores e indutores É importante não confundir o comportamento de indutores e de resistores no que se refere à energia (Figura 30.9). A energia é sempre fornecida ao resistor, quer a corrente seja estacionária ou variável com o tempo; essa energia é sempre dissipada sob forma de calor. Em contraste, a energia flui para o interior de um indutor ideal, sem resistência interna, somente quando a corrente no indutor *cresce*. Essa energia não é dissipada; ela fica armazenada no indutor e é libertada quando a corrente *diminui*. Quando a corrente permanece estacionária através de um indutor, não existe nenhuma energia que entra no indutor ou sai dele.

Densidade de energia magnética

A energia em um indutor é, na realidade, armazenada no campo magnético no interior da bobina, assim como a energia elétrica é armazenada no interior de um capacitor. Podemos desenvolver relações para a energia do campo magnético análogas àquelas que obtivemos para a energia elétrica na Seção 24.3 [veja as equações (24.9) e (24.11)]. Vamos considerar um caso simples: o solenóide toroidal ideal. Esse sistema possui a vantagem de seu campo magnético ficar confinado completamente no interior de seu núcleo. Como no Exemplo 30.3, vamos supor que a área A de sua seção reta seja suficientemente pequena para que possamos considerar o campo magnético constante ao longo dessa área. O volume V de um solenóide toroidal é aproximadamente igual ao comprimento da circunferência $2\pi r$ multiplicado pela área A: $V = 2\pi rA$. De acordo com o Exemplo 30.3, a auto-indutância de um solenóide toroidal com vácuo no interior das suas espiras é

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

De acordo com a Equação (30.9), a energia U armazenada no solenóide toroidal quando passa uma corrente I por meio dele é dada por

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}I^2$$

O campo magnético e, conseqüentemente, essa energia estão em um volume $V = 2\pi rA$ no interior das espiras. A energia *por unidade de volume*, ou *densidade de energia magnética*, é dada por $u = U/V$:

$$u = \frac{U}{2\pi rA} = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2I^2}{(2\pi r)^2}$$

Podemos expressar esse resultado em termos do módulo B do campo magnético dentro do solenóide toroidal. De acordo com a Equação (28.24) do Exemplo 28.10 (Seção 28.7), temos

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

e, portanto,

$$\frac{N^2I^2}{(2\pi r)^2} = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

Quando substituímos esse resultado na expressão de u obtida antes, finalmente encontramos a expressão da **densidade de energia magnética** no vácuo:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (30.10)$$

(densidade de energia magnética no vácuo)

Essa expressão é análoga à energia por unidade de volume em um campo *elétrico* no vácuo, $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, que deduzimos na Seção 24.3.

Se o material existente dentro do toróide não é o vácuo, porém um material com permeabilidade magnética (constante) $\mu = K_m\mu_0$, então devemos substituir na Equação (30.10) μ_0 por μ. Portanto, a energia por unidade de volume no campo magnético é dada por

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (30.11)$$

(densidade de energia magnética em um material)

Embora tenhamos deduzido a Equação (30.11) para a situação especial descrita anteriormente, verifica-se que ela é a expressão correta para a energia por unidade de volume em *qualquer* configuração de campo magnético com permeabilidade magnética constante. A Equação (30.11) fornece como caso particular no vácuo a Equação (30.10). Usaremos as expressões da energia do campo magnético e do campo elétrico quando estudarmos ondas eletromagnéticas, no Capítulo 32.

A energia do campo magnético desempenha um papel importante nos sistemas de ignição de automóveis movidos a gasolina. Uma bobina primária com cerca de 250 espiras é conectada à bateria do veículo e produz um forte campo magnético. Essa bobina é cercada por uma bobina secundária com aproximadamente 25000 espiras compostas de um fio muito fino. Quando surge a necessidade de se produzir uma centelha (veja a Figura 20.5 na Seção 20.3),

a corrente da bobina primária é interrompida, o campo magnético rapidamente cai a zero e uma fem de dezenas de centenas de volts é induzida na bobina secundária. Dessa forma, a energia armazenada no campo magnético penetra uma forte pulsação de corrente que percorre a bobina secundária até à vela, gerando a centelha que produz a ignição da mistura combustível–ar nos cilindros do motor (Figura 30.10).

Exemplo 30.5

COMO ARMAZENAR ENERGIA EM UM INDUTOR A indústria de produção de energia elétrica gostaria de encontrar um modo eficiente de armazenar a energia gerada a mais nas horas em que o consumo diminui, para poder atender à demanda dos consumidores nas horas de pico. Talvez um grande indutor pudesse ser usado. Qual seria a indutância necessária para armazenar 1,0 kW · h de energia em uma bobina conduzindo uma corrente de 200 A?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos a quantidade necessária de energia armazenada U e a corrente I. A incógnita é a auto-indutância L.

PREPARAR: explicitamos L usando a Equação (30.9).

EXECUTAR: temos $I = 200$ A e $U = 1{,}0$ kW · h = $(1{,}0 \times 10^3$ W) (3600 s) = $3{,}60 \times 10^6$ J. Explicitando L da Equação (30.9), obtemos

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2(3{,}60 \times 10^6\,\text{J})}{(200\,\text{A})^2} = 180\,\text{H}$$

Esse valor é mais do que um *milhão* de vezes maior do que a auto-indutância do solenóide toroidal do Exemplo 30.3 (Seção 30.2).

AVALIAR: fios convencionais que conduzem 200 A precisam ter um diâmetro muito grande para manter uma resistência pequena, a fim de evitar perdas de energia inaceitáveis devidas ao termo i^2R estar aquecido. Por isso, um indutor de 180 H usando fios convencionais deveria possuir um volume bastante elevado (do tamanho de uma sala). Um indutor com material supercondutor poderia ser muito menor, visto que a resistência de um supercondutor é igual a zero e fios muito mais finos poderiam ser usados; uma dificuldade é que os fios deveriam ser mantidos em baixas temperaturas e seria necessário usar energia para manter essa baixa temperatura. Conseqüentemente, o projeto não é muito prático com a tecnologia existente.

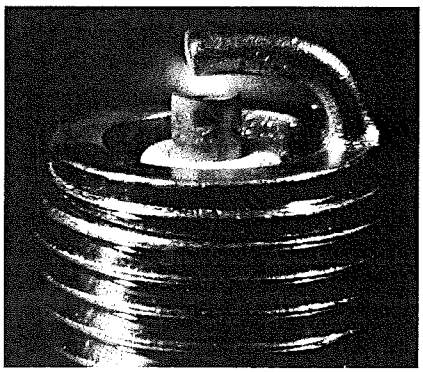


Figura 30.10 A energia necessária para produzir a ignição de um automóvel é proveniente da energia do campo magnético armazenada na bobina de ignição.

Exemplo 30.6

DENSIDADE DE ENERGIA MAGNÉTICA Em um acelerador de prótons usado em experiências de física com partículas elementares, as trajetórias dos prótons são controladas por eletroímãs defletores que produzem campos magnéticos da ordem de 6,6 T. Qual é a densidade de energia do campo no vácuo entre os pólos desse tipo de eletroímã?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita é a densidade de energia magnética u. Temos o módulo B do campo magnético.

PREPARAR: no vácuo, $\mu = \mu_0$, e a densidade da energia é dada pela Equação (30.10).

EXECUTAR: a densidade da energia no campo magnético é

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(6{,}6\,\text{T})^2}{2(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T} \cdot \text{m/A})} = 1{,}73 \times 10^7\,\text{J/m}^3$$

AVALIAR: uma comparação interessante: o calor de combustão do gás natural, expresso em energia por unidade de volume, é aproximadamente igual a $3{,}8 \times 10^7$ J/m^3.

Teste sua compreensão da Seção 30.3 A corrente em um solenóide tem o sentido invertido, porém é mantido o mesmo módulo. (a) Isso causa variação no campo magnético no interior do solenóide? (b) Isso causa variação na densidade de energia magnética no solenóide? ■

30.4 O circuito *R-L*

Vamos examinar alguns exemplos do comportamento de indutores em circuitos. Um efeito já está claro: um indutor inserido em um circuito torna difícil a ocorrência de variações bruscas de corrente em virtude dos efeitos associados à fem auto-induzida. A Equação (30.7) mostra que, quanto maior a taxa de variação da corrente di/dt, maior é a fem auto-induzida e maior a diferença de potencial nos terminais do indutor. Essa equação, com a lei das malhas de Kirchhoff (Seção 26.2), fornece os princípios de que precisamos para analisar circuitos com indutores.

Estratégia para a solução de problemas 30.1

INDUTORES EM CIRCUITOS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: um indutor é simplesmente outro elemento do circuito, como uma fonte de fem, um resistor ou um capacitor. A principal diferença é que, quando um indutor é usado como um dispositivo em um *circuito*, todas as voltagens, correntes e cargas nos capacitores são geralmente funções do tempo, e não constantes, como nos muitos casos de análise de circuitos que fizemos anteriormente. Contudo, as leis de Kirchhoff,

estudadas na Seção 26.2, continuam válidas. Quando as voltagens e correntes variam com o tempo, as leis de Kirchhoff são válidas para cada instante.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Siga o mesmo procedimento descrito na Estratégia para a Solução de Problemas 26.2, na Seção 26.2. (Agora é um excelente momento para revisar essa estratégia.) Desenhe o diagrama de um circuito grande e designe todas as grandezas, conhecidas e desconhecidas. Aplique a regra dos nós imediatamente em cada nó.
2. Determine quais são as incógnitas em termos de grandezas.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

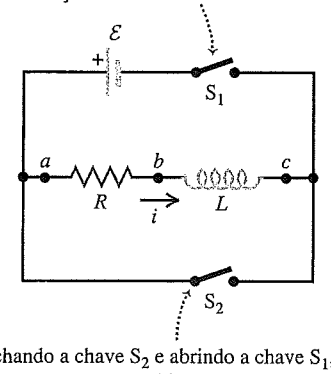
1. Como na Estratégia para a Solução de Problemas 26.2, aplique a regra das malhas de Kirchhoff a cada espira no circuito.
2. Como em todo tipo de análise de circuitos, é essencial obter os sinais corretos para cada diferença de potencial. (Sugerimos que você faça uma revisão das estratégias recomendadas na Seção 26.2.) Para obter o sinal correto para a diferença de potencial entre os terminais de um indutor, recorde a lei de Lenz e a regra de sinais descrita na Seção 30.2 relacionada à Equação (30.7) e à Figura 30.6. Usando a lei das malhas de Kirchhoff, quando atravessamos o indutor no *mesmo* sentido escolhido para a corrente, ocorre uma *queda* de voltagem dada por $L\,di/dt$; logo, o termo correspondente na equação da lei das malhas é $-L\,di/dt$. Quando atravessamos o indutor no sentido *oposto* ao escolhido para a corrente, ocorre uma inversão na diferença de potencial e o termo a ser aplicado na equação da lei das malhas é $+L\,di/dt$.
3. Como sempre, explicite as incógnitas.

AVALIAR *sua resposta*: verifique se sua resposta é consistente com o comportamento dos indutores. Quando a corrente através de um indutor varia, seu resultado deve indicar que a diferença de potencial através do indutor se opõe à variação. Caso contrário, você provavelmente usou um sinal incorreto em algum ponto dos cálculos.

Aumento da corrente em um circuito *R-L*

Podemos aprender muitos conceitos básicos sobre o comportamento de um indutor analisando o circuito indicado na Figura 30.11. Um circuito com apenas um resistor e um indutor e, possivelmente, uma fonte de alimentação é conhecido como **circuito *R-L***. O indutor torna difícil a ocorrência de variações bruscas de corrente, o que pode ser útil quando se deseja manter uma corrente constante em um circuito alimentado por uma fem que possui flutuações. O resistor R pode ser um elemento separado do circuito ou pode ser a resistência do enrolamento da própria bobina; todo indutor real sempre possui alguma resistência, a menos que ele seja feito com um fio supercondutor. Fechando a chave S_1 indicada, podemos conectar a combinação R-L a uma fonte com fem $\mathcal{E}$ constante. (Supomos que a fonte possua resistência interna desprezível, de modo que a voltagem nos terminais da fonte é igual ao valor da fem.)

Fechando a chave S_1, podemos conectar a combinação R-L a uma fonte com fem $\mathcal{E}$.



Fechando a chave S_2 e abrindo a chave S_1, desconectamos a combinação da fonte.

Figura 30.11 Um circuito *R-L*.

Suponha que, inicialmente, as duas chaves estejam abertas e, em um dado instante $t = 0$, fechamos a chave S_1. A corrente não poderia variar repentinamente de zero até seu valor final, porque di/dt e a fem induzida seriam infinitas. Em vez disso, a corrente começa a aumentar com uma taxa que depende do valor de L existente no circuito.

Seja i a corrente para um dado instante t depois que fechamos a chave S_1 e seja di/dt sua taxa de variação no instante considerado. A diferença de potencial v_{ab} através do resistor nesse instante é dada por

$$v_{ab} = iR$$

e a diferença de potencial v_{bc} através do indutor nesse instante é dada por

$$v_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Note que a corrente está no sentido indicado na Figura 30.11 e está crescendo, então v_{ab} e v_{bc} são positivos e a possui um potencial maior do que b, que por sua vez possui um potencial maior que c. (Compare com a Figura 30.6a e c.) Aplicamos a lei das malhas de Kirchhoff, começando no terminal negativo e percorrendo a malha no sentido anti-horário:

$$\mathcal{E} - ir - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (30.12)$$

Explicitando di/dt, verificamos que a taxa de aumento da corrente é

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i \qquad (30.13)$$

No instante inicial em que a chave S_1 é fechada, $i = 0$ e a queda de potencial através de R é igual a zero. A taxa inicial de aumento da corrente é

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{inicial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Quanto maior a indutância, mais lentamente a corrente aumenta.

À medida que a corrente aumenta, o termo $(R/L)i$ na Equação (30.13) também aumenta, e a *taxa* de aumento da corrente dada pela Equação (30.13) torna-se cada vez menor. Isso significa que a corrente se aproxima de um valor estacionário final I. Quando a corrente atinge esse valor, sua taxa de aumento é igual a zero. Então, a Equação (30.13) fornece

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \quad \text{e}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Ou seja, a corrente *final* I não depende da indutância L; ela seria a mesma, caso a resistência R estivesse conectada sozinha à mesma fonte com fem $\mathcal{E}$.

O comportamento da corrente em função do tempo é indicado no gráfico da Figura 30.12. Para deduzirmos a equação dessa curva (isto é, a expressão da corrente em função do tempo), procedemos de modo análogo ao usado durante a carga de um capacitor na Seção 26.4. Inicialmente, separamos as variáveis e escrevemos a Equação (30.13) do seguinte modo:

$$\frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L}dt$$

A variável i está no membro esquerdo, separada da variável t, que está no membro direito. A seguir, integramos ambos os membros, trocando as variáveis para i' e t', de modo que possamos usar i e t como os limites superiores das integrais. (Os limites inferiores de ambas as integrais é igual a zero porque a corrente é igual a zero no instante $t = 0$.) Obtemos

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt'$$

$$\ln\left(\frac{i - (\mathcal{E}/R)}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

A seguir, tomamos a função exponencial em ambos os membros e explicitamos i. Sugerimos que você faça os detalhes da solução; o resultado é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \qquad (30.14)$$

(corrente em um circuito R-L com fem)

Essa é a equação da curva indicada na Figura 30.12. Derivando a Equação (30.14) em relação ao tempo, encontramos

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-(R/L)t} \qquad (30.15)$$

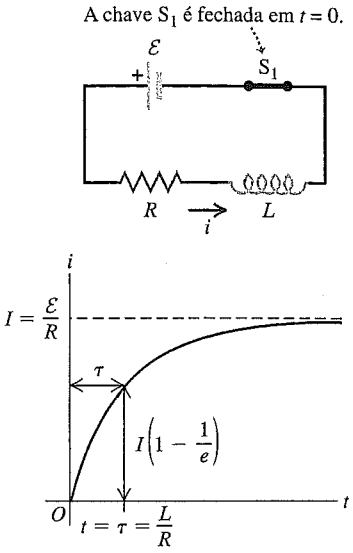


Figura 30.12 Gráfico de i *versus* t para o aumento da corrente em um circuito R-L com uma fem em série. A corrente final é $I = \mathcal{E}/R$; depois de uma constante de tempo τ, a corrente é igual a $1 - 1/e$ desse valor.

No instante $t = 0$, $i = 0$ e $di/dt = \mathcal{E}/L$. Quando $t \to \infty$, $i \to \mathcal{E}/R$ e $di/dt \to 0$, conforme havíamos previsto.

Como indica a Figura 30.12, a corrente instantânea i inicialmente cresce rapidamente, a seguir cresce de modo mais lento e tende assintoticamente ao seu valor final $I = \mathcal{E}/R$. No instante igual a L/R, a corrente cresceu para $(1 - 1/e)$, ou cerca de 63% de seu valor final. A grandeza L/R fornece uma indicação da velocidade com a qual a corrente cresce até atingir seu valor final; essa grandeza é chamada de **constante de tempo** do circuito, indicada pela letra τ:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (30.16)$$

(constante de tempo para um circuito R-L)

Para um tempo igual a 2τ, a corrente atinge 86% de seu valor final; para 5τ, 99,3%; e para 10τ, 99,995%. (Compare com a discussão feita na Seção 26.4 para carregar um capacitor com capacitância C em série com um resistor de resistência R; para aquela situação, a constante de tempo era o produto RC.)

O gráfico de i *versus* t possui a mesma forma geral para todos os valores de L. Para determinado valor de R, a constante de tempo τ será tanto maior quanto maior for o valor de L. Quando L é pequeno, a corrente cresce rapidamente até atingir seu valor final; quando L é grande, ela cresce mais lentamente. Por exemplo, para $R = 100\ \Omega$ e $L = 10$ H,

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10\ \text{H}}{100\ \Omega} = 0{,}10\ \text{s}$$

e a corrente leva 0,10 s para atingir cerca de 63% de seu valor final. (Lembre-se de que $1\ \text{H} = 1\ \Omega \cdot \text{s}$.) Porém, quan-

do $L = 0{,}010$ H, $\tau = 1{,}0 \times 10^{-4}$ s = 0,10 ms e o aumento é muito mais rápido.

Considerações de energia nos oferecem uma visualização adicional do comportamento de um circuito *R-L*. A taxa instantânea com a qual a fonte fornece energia para o circuito é dada por $P = \mathcal{E}i$. A taxa instantânea com a qual a energia é dissipada no resistor é dada por i^2R e a taxa com a qual a energia é armazenada no indutor é dada por $iv_{bc} = Li\,di/dt$ (ou, de modo equivalente, $(d/dt)(\frac{1}{2}Li^2) = Li\,di/dt$). Quando multiplicamos a Equação (30.12) por i e reagrupamos, encontramos

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt} \qquad (30.17)$$

Da potência $\mathcal{E}i$ fornecida pela fonte, uma parte (i^2R) é dissipada no resistor e a outra parte ($Lidi/dt$) fica armazenada no indutor. Essa discussão é completamente análoga à análise sobre a potência durante o processo de carga de um capacitor, feita no final da Seção 26.4.

Exemplo 30.7

ANÁLISE DE UM CIRCUITO *R-L* Um dispositivo eletrônico sensível com 175 Ω deve ser conectado, por meio de uma chave, a uma fonte de fem. O dispositivo foi projetado para operar com uma corrente igual a 36 mA, porém, para evitar danos ao dispositivo, a corrente não pode ultrapassar o valor de 4,9 mA nos 58 μs depois que a chave é fechada. Para proteger esse dispositivo, ele é conectado em série a um indutor, como indicado na Figura 30.11; a chave mencionada é a chave S_1. (a) Qual é o valor da fem da fonte? Suponha que sua resistência interna seja desprezível. (b) Qual é a indutância necessária? (c) Qual é o valor da constante de tempo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema se refere ao crescimento da corrente em um circuito *R-L*, portanto podemos usar os conceitos estudados nesta seção.

PREPARAR: a Figura 30.12 indica que a corrente final é $I = \mathcal{E}/R$. Como a resistência é dada, a fem é determinada pelo requisito de que a corrente final deve ser de 36 mA. O outro requisito é que a corrente não ultrapasse $i = 4{,}9$ mA em $t = 58$ μs; para satisfazer esse requisito, usamos a Equação (30.14) para a corrente em função do tempo e explicitamos a indutância, que é a única grandeza desconhecida. A Equação (30.16) fornecerá a constante de tempo.

EXECUTAR: (a) Usando $I = 36$ mA = 0,036 A e $R = 175\ \Omega$ na expressão $I = \mathcal{E}/R$ para a corrente final e explicitando a fem, obtemos

$$\mathcal{E} = IR = (0{,}036\text{ A})(175\ \Omega) = 6{,}3\text{ V}$$

(b) Para determinarmos a indutância necessária, explicitamos L da Equação (30.14). Inicialmente, multiplicamos ambos os membros por $(-R/\mathcal{E})$ e, somando 1 a ambos os membros, obtemos

$$1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} = e^{-(R/L)t}$$

A seguir, tomamos o logaritmo natural de ambos os membros, explicitamos L e, finalmente, substituímos os valores numéricos:

$$L = \frac{-Rt}{\ln(1 - iR/\mathcal{E})}$$
$$= \frac{-(175\ \Omega)(58 \times 10^{-6}\text{ s})}{\ln[1 - (4{,}9 \times 10^{-3}\text{ A})(175\ \Omega)/(6{,}3\text{ V})]} = 69\text{ mH}$$

(c) A constante de tempo τ é dada pela Equação (30.16):

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{69 \times 10^{-3}\text{ H}}{175\ \Omega} = 3{,}9 \times 10^{-4}\text{ s} = 390\ \mu\text{s}$$

AVALIAR: notamos que 58 μs é muito menor do que a constante de tempo. Em 58 μs, a corrente cresce de zero até 4,9 mA, uma pequena fração do valor final que é igual a 36 mA; depois de 390 μs, a corrente torna-se igual a $(1 - 1/e)$ de seu valor final; ou cerca de (0,63)(36 mA) = 23 mA.

Diminuição da corrente em um circuito *R-L*

Suponha agora que a chave S_1 no circuito da Figura 30.11 tenha permanecido fechada durante certo tempo e que a corrente tenha atingido um valor final I_0. Damos uma nova partida ao cronômetro para definir o instante inicial no momento em que fechamos a chave S_2 para $t = 0$, eliminando a bateria do circuito. (Nesse mesmo instante, devemos abrir, simultaneamente, a chave S_1 para não estragar a bateria.) A corrente através de R e de L não se anula instantaneamente, porém diminui até zero lentamente, como indica a Figura 30.13. Para usar a lei das malhas de Kirchhoff, basta omitir o termo $\mathcal{E}$ da Equação (30.12). Desafiamos você a repetir as etapas que fizemos anteriormente e mostrar que a corrente i varia com o tempo de acordo com a expressão

$$i = I_0 e^{-(R/L)t} \qquad (30.18)$$

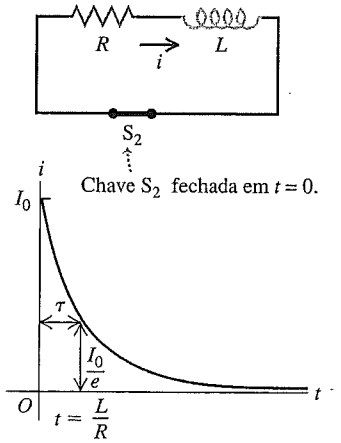


Figura 30.13 Gráfico de i *versus* t para a diminuição da corrente em um circuito *R-L*. Após uma constante de tempo τ, a corrente é $1/e$ do seu valor inicial.

em que I_0 é a corrente inicial para $t = 0$. A constante de tempo $\tau = L/R$ é o tempo necessário para que a corrente diminua para $1/e$, ou cerca de 37% do valor inicial. Para um tempo igual a 2τ, a corrente se reduziu a 13,5%; para 5τ, se reduziu a 0,67%, e para 10τ, a 0,0045%.

A energia necessária para manter a corrente durante essa diminuição é fornecida pela energia do campo magnético do indutor. A análise detalhada da energia é mais simples nesse caso. Em vez da Equação (30.17), temos

$$0 = i^2R + Li\frac{di}{dt} \tag{30.19}$$

No caso presente, $Li\,di/dt$ tem sinal negativo; a Equação (30.19) mostra que a energia armazenada no indutor *diminui* com uma taxa igual à taxa de dissipação de energia i^2R no resistor.

Toda essa discussão pode parecer familiar, pois a situação é muito semelhante ao problema de carregar ou descarregar um capacitor, como analisamos na Seção 26.4. Seria uma boa idéia rever aquela seção e compará-la a nossa discussão sobre o circuito *R-L*.

Exemplo 30.8

ENERGIA EM UM CIRCUITO *R-L* Quando uma corrente em um circuito *R-L* está diminuindo, que fração da energia inicial armazenada no indutor é dissipada depois de 2,3 constantes de tempo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema se refere à diminuição de corrente em um circuito *R-L* bem como à relação entre a corrente em um indutor e a quantidade de energia armazenada.

PREPARAR: a corrente i em qualquer instante t neste caso é dada pela Equação (30.18). A energia armazenada associada a essa corrente é dada pela Equação (30.9), $U = \frac{1}{2}Li^2$.

EXECUTAR: de acordo com a Equação (30.18), a corrente i em qualquer instante t é

$$i = I_0e^{-(R/L)t}$$

A energia U do indutor em *qualquer* instante é obtida substituindo-se a expressão anterior na relação $U = \frac{1}{2}Li^2$. Obtemos

$$U = \frac{1}{2}LI_0^2e^{-2(R/L)t} = U_0e^{-2(R/L)t}$$

em que $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$ é a energia no instante inicial $t = 0$. Quando $t = 2{,}3\tau = 2{,}3L/R$, obtemos

$$U = U_0e^{-2(2{,}3)} = U_0e^{-4{,}6} = 0{,}010\,U_0$$

Ou seja, somente 0,010 ou 1,0% da energia inicial no indutor ainda permanece armazenada; logo, a quantidade de energia dissipada no resistor corresponde a 99,0% da energia inicial.

AVALIAR: para ter uma noção do que esse resultado significa, considere o circuito *R-L* que analisamos no Exemplo 30.7, para o qual a constante de tempo é igual a 390 μs. Com $L = 60$ mH $= 0{,}069$ H e uma corrente inicial $I_0 = 36$ mA $= 0{,}036$ A, a quantidade de energia no indutor é inicialmente $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}(0{,}069\text{ H})\,(0{,}036\text{ A})^2 = 4{,}5 \times 10^{-5}$ J. Disto, 99,0% ou $4{,}4 \times 10^{-5}$ J é dissipado em $2{,}3(390\ \mu\text{s}) = 9{,}0 \times 10^{-4}$ s = 0,90 ms. Em outras palavras, este circuito pode ser desligado quase por completo em 0,90 ms e pode ser ligado no mesmo período de tempo. O tempo mínimo para um ciclo completo de ligar e desligar é, portanto, igual a 1,8 ms. Para muitas finalidades, tal como em redes de chaveamento rápido em telecomunicações, um ciclo ainda mais curto de tempo é exigido. Nesses casos, uma constante de tempo menor $\tau = L/R$ é necessária.

Teste sua compreensão da Seção 30.4 (a) Na Figura 30.11, quais são os sinais algébricos das diferenças de potencial v_{ab} e v_{bc}, quando a chave S_1 é fechada e a chave S_2 é aberta? (i) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} > 0$; (ii) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} < 0$; (iii) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} > 0$; (iv) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} < 0$. (b) Quais são os sinais de v_{ab} e v_{bc} quando S_1 é aberta, S_2 é fechada e a corrente flui no sentido indicado? (i) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} > 0$; (ii) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} < 0$; (iii) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} > 0$; (iv) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} < 0$. ∎

30.5 O circuito *L-C*

Um circuito com um indutor e um capacitor mostra um comportamento completamente novo, caracterizado pelas *oscilações* das correntes e das cargas. Tal comportamento contrasta fortemente com o comportamento *exponencial* que descrevemos tanto no circuito *R-C* quanto no circuito *R-L*. No **circuito *L-C***, indicado na Figura 30.14a, carregamos o capacitor até uma diferença de potencial V_m e carga inicial $Q = CV_m$ sobre sua placa da esquerda e, a seguir, fechamos a chave. O que acontece?

O capacitor começa a se descarregar sobre o indutor. Em virtude da fem induzida pelo indutor, a corrente não pode variar instantaneamente; ela parte de zero e começa a crescer até atingir um valor máximo I_m. Durante esse crescimento, o capacitor está se descarregando. Em cada instante, o potencial do capacitor é igual à fem induzida; portanto, à medida que o capacitor se descarrega, a *taxa de variação* da corrente diminui. Quando o potencial do capacitor torna-se zero, a fem induzida também é igual a zero e a corrente foi elevada até seu valor máximo I_m. A Figura 30.14b mostra essa situação; o capacitor está completamente descarregado. A diferença de potencial entre os terminais do capacitor (e entre os terminais do indutor) diminuiu até zero, e a corrente atingiu seu valor máximo I_m.

Durante a descarga do capacitor, a corrente crescente no indutor estabelece um campo magnético em torno dele, e a energia elétrica que estava inicialmente armazenada no campo elétrico do capacitor agora passa a ser armazenada no campo magnético do indutor.

Embora o capacitor esteja completamente descarregado na Figura 30.14b, a corrente persiste (ela não pode mudar instantaneamente) e o capacitor começa a se carregar com uma polaridade oposta à que existia no estado inicial. À medida que a corrente diminui, o campo magnético também

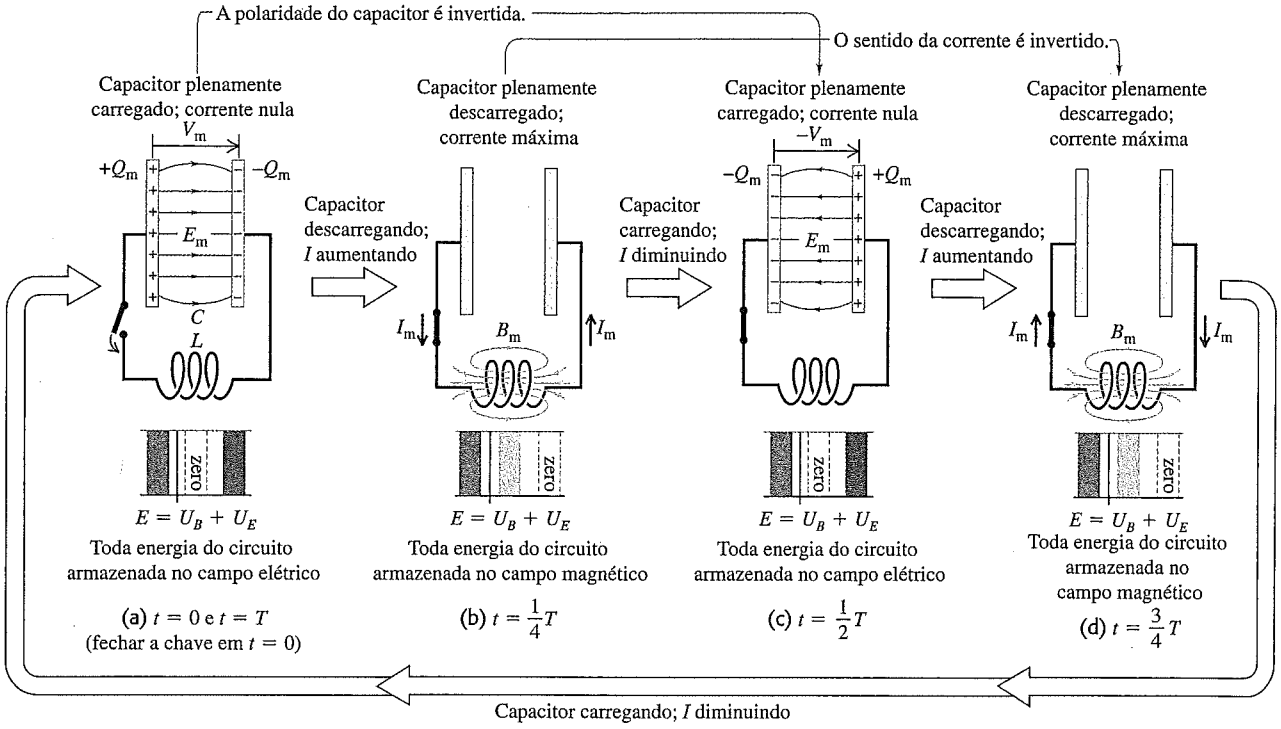


Figura 30.14 Em um circuito *L-C* oscilante, a carga do capacitor e a corrente através do indutor variam senoidalmente com o tempo. A energia é transferida entre a energia magnética no indutor (U_B) e a energia elétrica no capacitor (U_E). Como no caso de um movimento harmônico simples, a energia total E permanece constante. (Compare com a Figura 13.14 na Seção 13.3.)

diminui, induzindo uma fem no indutor com o *mesmo* sentido da corrente. Por fim, a corrente e o campo magnético atingem um valor igual a zero; e o capacitor fica carregado com uma polaridade *oposta* à inicial (Figura 30.14c), com uma diferença de potencial $-V_m$ e uma carga $-Q$ em sua placa da esquerda.

O processo então se inverte; um pouco mais tarde, o capacitor se descarrega e surge uma corrente em sentido oposto no indutor (Figura 30.14d). A seguir, ainda mais tarde, a carga do capacitor retorna a seu valor original (Figura 30.14a) e o processo todo se repete. Caso não existisse nenhuma perda de energia, as cargas do capacitor continuariam a oscilar indefinidamente. Esse processo é chamado de **oscilação elétrica**.

Do ponto de vista energético, a oscilação descrita corresponde à transferência de energia entre o campo elétrico do capacitor e o campo magnético do indutor e vice-versa. A energia *total* associada ao circuito permanece constante. Essa situação é análoga ao caso de um sistema mecânico oscilante em que ocorre transformação de energia potencial em energia cinética e vice-versa. Conforme veremos, essa analogia pode ser ainda mais estendida.

Oscilações elétricas em um circuito *L-C*

Para estudarmos com detalhes o escoamento das cargas, seguiremos o processo adotado quando analisamos o circuito *R-L*. Na Figura 30.15, mostramos nossas definições de q e de i.

ATENÇÃO Corrente positiva em um circuito *L-C* Depois de examinar a Figura 30.14, o sentido positivo para a corrente na Figura 30.15 pode parecer invertido. De fato, escolhemos esse sentido para simplificar a relação entre a corrente e a carga do capacitor. Definimos a corrente a cada instante como $i = dq/dt$, que é a taxa de variação da carga da placa que é do capacitor do lado esquerdo. Portanto, se o capacitor está inicialmente carregado e começa a se descarregar, como indicado nas figuras 30.14a e 30.14b, então $dq/dt < 0$ e a corrente inicial i é negativa; o sentido da corrente é, portanto, oposto ao sentido (positivo) indicado na Figura 30.15.

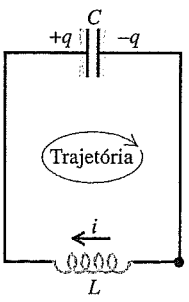


Figura 30.15 Aplicação da lei das malhas de Kirchhoff para um circuito *L-C*. O sentido do percurso em torno da malha é indicado. Logo depois de completar o circuito e o capacitor começar a descarregar, como na Figura 30.14a, a corrente é negativa (com sentido oposto ao indicado).

Aplicamos a lei das malhas de Kirchhoff para o circuito indicado na Figura 30.15. Começamos no vértice inferior do lado esquerdo e somamos as voltagens à medida que percorremos o circuito no sentido horário ao longo da malha e obtemos

$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Como $i = dq/dt$, concluímos que $di/dt = d^2q/dt^2$. Substituindo essas expressões na relação anterior e dividindo por $-L$, encontramos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.20)$$

(circuito L-C)

A Equação (30.20) possui a mesma forma da equação do movimento harmônico simples que deduzimos na Seção 13.2, Equação (13.4). Essa equação é dada por $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

(Sugerimos que você faça uma revisão da Seção 13.2 antes de prosseguir nesta discussão.) No circuito L-C, a carga do capacitor q desempenha o papel do deslocamento x e a corrente $i = dq/dt$ é análoga à velocidade $v_x = dx/dt$. A indutância L é análoga à massa m e o inverso da capacitância, $1/C$, é análogo à constante da mola k.

Continuando a fazer essa analogia, lembramos que a freqüência angular $\omega = 2\pi f$ do oscilador harmônico é dada por $(k/m)^{1/2}$, e a posição é dada em função do tempo pela Equação (13.13),

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

em que a amplitude A e o ângulo de fase ϕ dependem das condições iniciais. Na situação elétrica análoga, a carga q do capacitor é dada por

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \qquad (30.21)$$

e a freqüência angular ω da oscilação é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \begin{matrix}\text{(freqüência angular da}\\ \text{oscilação em um circuito } L\text{-}C\text{)}\end{matrix} \qquad (30.22)$$

Tente demonstrar que a Equação (30.21) satisfaz a equação das malhas, Equação (30.20), quando ω possui o valor indicado na Equação (30.22). Para isso, você verificará que a corrente instantânea $i = dq/dt$ é dada por

$$i = -\omega Q\,\text{sen}(\omega t + \phi) \qquad (30.23)$$

Portanto, a carga e a corrente em um circuito L-C oscilam senoidalmente com o tempo, com a freqüência angular determinada pelos valores de L e de C. Como sempre, a freqüência f, o número de ciclos por segundo, é igual a $\omega/2\pi$. As constantes Q e ϕ nas equações (30.21) e (30.23) são determinadas pelas condições iniciais. No instante $t = 0$, a placa do lado esquerdo do capacitor da Figura 30.15 possui sua carga máxima Q e a corrente i é igual a zero, então $\phi = 0$. Quando $q = 0$ para $t = 0$, então $\phi = \pm\pi/2$ rad.

Energia em um circuito L-C

Podemos ainda estudar um circuito L-C utilizando o método da análise da energia. A analogia com o movimento harmônico simples também é útil nesse tratamento. No problema mecânico, um corpo de massa m está preso a uma dada mola, cuja constante é igual a k. Suponha que você desloque o corpo da posição de equilíbrio até uma distância A e, a seguir, o liberte no instante $t = 0$. A energia cinética do sistema em qualquer instante é $\frac{1}{2}mv_x^2$ e sua energia elástica é igual a $\frac{1}{2}kx^2$. Como existe conservação da energia, a soma das duas energias anteriores é igual à energia inicial do sistema $\frac{1}{2}kA^2$. Calculamos a velocidade v_x em cada ponto x do mesmo modo que fizemos na Seção 13.3, Equação (13.22):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (30.24)$$

O circuito L-C também é um sistema conservativo. Novamente, considere Q a carga máxima do capacitor. A energia do campo magnético $\frac{1}{2}Li^2$ no indutor em qualquer instante corresponde à energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ do corpo que oscila, e a energia do campo elétrico $q^2/2C$ no capacitor corresponde à energia potencial elástica $\frac{1}{2}Kx^2$ da mola. A soma dessas duas energias é igual à energia total $Q^2/2C$ do sistema:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \qquad (30.25)$$

A energia total no circuito L-C é *constante*; a forma magnética da energia se transforma na forma elétrica e elas oscilam de modo que a soma permanece constante, tal como no caso de um movimento harmônico simples, no qual a energia potencial se converte em energia cinética, mas a energia total permanece constante.

Explicitando a variável i da Equação (30.25), verificamos que, quando a carga do capacitor é q, a corrente i é dada por

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2} \qquad (30.26)$$

Substituindo q, dado pela Equação (30.21), e i, dado pela Equação (30.23), é possível verificar a validade da equação precedente. Comparando a Equação (30.24) à Equação (30.26), você notará que a corrente $i = dq/dt$ e a carga q estão relacionadas de forma análoga à relação entre a velocidade $v_x = dx/dt$ e o deslocamento x.

Tabela 30.1 Comparação entre oscilações mecânicas de um sistema massa-mola e oscilações elétricas de um circuito *L-C*.

Sistema massa–mola
Energia cinética = $\frac{1}{2}mv_x^2$
Energia potencial = $\frac{1}{2}kx^2$
$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$
$v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2}$
$v_x = dx/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$x = A\cos(\omega t + \phi)$
Circuito indutor–capacitor
Energia magnética = $\frac{1}{2}Li^2$
Energia elétrica = $q^2/2C$
$\frac{1}{2}Li^2 + q^2/2C = Q^2/2C$
$i = \pm\sqrt{1/LC}\sqrt{Q^2 - q^2}$
$i = dq/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
$q = Q\cos(\omega t + \phi)$

Na Tabela 30.1, mostramos um resumo das analogias entre um movimento harmônico simples e um circuito *L-C*. As impressionantes analogias entre oscilações mecânicas e oscilações elétricas indicadas nessa tabela constituem um dos muitos exemplos de analogias entre diversas partes da física. Essa analogia é tão segura que podemos resolver problemas complicados de mecânica e de acústica usando circuitos elétricos análogos e medindo as correntes e as voltagens correspondentes às respectivas grandezas mecânicas ou acústicas consideradas. Esse é o princípio básico do funcionamento de um computador analógico. Essa analogia pode ser estendida para oscilações *amortecidas*, que serão analisadas na próxima seção. No Capítulo 31, estenderemos essas analogias ainda mais, a fim de incluir oscilações elétricas *forçadas*, que ocorrem em todos os circuitos de corrente alternada.

Exemplo 30.9

UM CIRCUITO OSCILANTE Uma fonte de alimentação de 300 V é usada para carregar um capacitor de 25 μF. Depois de o capacitor ficar completamente carregado, ele é desconectado da fonte e conectado aos terminais de um indutor de 10 mH. A resistência do circuito é desprezível. (a) Calcule a freqüência e o período das oscilações do circuito. (b) Determine a carga do capacitor e a corrente no circuito 1,2 ms depois que o capacitor é ligado ao indutor.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas são a freqüência f e o período T, bem como os valores da carga q e da corrente i em um dado instante t.

PREPARAR: temos a capacitância C e a indutância L, a partir das quais podemos calcular a freqüência e o período usando a Equação (30.22). Determinamos a carga e a corrente usando as equações (30.21) e (30.23). Inicialmente, o capacitor está plenamente carregado e a corrente é nula, como indica a Figura 30.14a, portanto o ângulo da fase é $\phi = 0$ (veja a discussão que segue a Equação (30.23)).

EXECUTAR: a freqüência *angular* natural é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3}\,\text{H})(25 \times 10^{-6}\,\text{F})}}$$
$$= 2{,}0 \times 10^3\,\text{rad/s}$$

A freqüência f é igual a $1/2\pi$ vezes esse valor:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2{,}0 \times 10^3\,\text{rad/s}}{2\pi\,\text{rad/ciclo}} = 320\,\text{Hz}$$

O período é igual ao inverso da freqüência:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\,\text{Hz}} = 3{,}1 \times 10^{-3}\,\text{s} = 3{,}1\,\text{ms}$$

(b) Como o período das oscilações é $T = 3{,}1$ ms, $t = 1{,}2$ ms corresponde a 0,38 T; isso equivale a uma situação intermediária entre a Figura 30.14b ($t = T/4$) e a Figura 30.14c ($t = T/2$). Comparando essas figuras à Figura 30.15, espera-se que a carga q do capacitor seja negativa (isto é, deve haver carga negativa sobre a placa esquerda do capacitor) e a corrente i também deve ser negativa (ou seja, o sentido da corrente é anti-horário).

Para calcularmos o valor de q, usamos a Equação (30.21). A carga é máxima para $t = 0$; logo, $\phi = 0$ e $Q = C\mathcal{E} = (25 \times 10^{-6}\,\text{F})(300\,\text{V}) = 7{,}5 \times 10^{-3}$ C. A carga q em função do tempo é dada por

$$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\,\text{C})\cos\omega t$$

Para $t = 1{,}2 \times 10^{-3}$ s,

$$\omega t = (2{,}0 \times 10^3\,\text{rad/s})(1{,}2 \times 10^{-3}\,\text{s}) = 2{,}4\,\text{rad}$$
$$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\,\text{C})\cos(2{,}4\,\text{rad}) = -5{,}5 \times 10^{-3}\,\text{C}$$

A corrente i em função do tempo é dada por

$$i = -\omega Q \operatorname{sen}\omega t$$

No instante $t = 1{,}2 \times 10^{-3}$ s,

$$i = -(2{,}0 \times 10^3\,\text{rad/s})(7{,}5 \times 10^{-3}\,\text{C})\operatorname{sen}(2{,}4\,\text{rad}) = -10\,\text{A}$$

AVALIAR: note que os sinais de q e de i são ambos negativos, como havíamos previsto.

Exemplo 30.10

ENERGIA EM UM CIRCUITO OSCILANTE Considere o circuito *L-C* mencionado no Exemplo 30.9. (a) Calcule a energia magnética e a energia elétrica para $t = 0$. (b) Determine a energia magnética e a energia elétrica para $t = 1{,}2$ ms.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema pede a energia magnética (armazenada no indutor) e a energia elétrica (armazenada no capacitor) em dois instantes diferentes durante a oscilação do circuito *L-C*.

PREPARAR: pelo Exemplo 30.9, temos os valores do capacitor, da carga q e da corrente i no circuito para ambos os instantes de interesse. Usaremos esses valores para calcular a energia magnética armazenada no indutor, dada por $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, e a energia elétrica armazenada no capacitor, dada por $U_E = q^2/2C$.

EXECUTAR: (a) Para $t = 0$ não existe nenhuma corrente e $q = Q$. Portanto, não há nenhuma energia magnética e a energia do circuito está armazenada no campo elétrico do capacitor:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = 0 \qquad U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(7{,}5 \times 10^{-3}\,\text{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\,\text{F})} = 1{,}1\,\text{J}$$

(b) Conforme dissemos no Exemplo 30.9, $t = 1{,}2$ ms corresponde a uma situação intermediária entre a Figura 30.14b ($t = T/4$) e a Figura 30.14c ($t = T/2$). Portanto, espera-se que, para esse instante, uma parte da energia seja magnética e a outra, elétrica. De acordo com o Exemplo 30.9, $i = -10$ A e $q = -5{,}5 \times 10^{-3}$ C; logo,

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(10 \times 10^{-3}\,\text{H})(-10\,\text{A})^2 = 0{,}5\,\text{J}$$

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(-5{,}5 \times 10^{-3}\,\text{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\,\text{F})} = 0{,}6\,\text{J}$$

AVALIAR: para $t = 3T/8 = 0{,}375T$, o campo magnético e o campo elétrico apresentam os mesmo valores; o tempo considerado aqui é ligeiramente maior e U_B é pouco menor do que U_E. Enfatizamos que a energia *total* $E = U_B + U_E$ possui *sempre* o mesmo valor, neste caso, 1,1 J. Um circuito L-C sem resistência é um sistema conservativo: não ocorre nenhuma dissipação de energia.

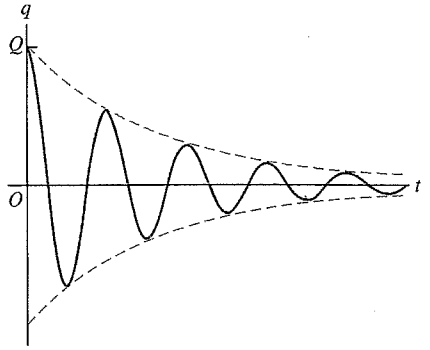
Teste sua compreensão da Seção 30.5 Uma forma de considerar a energia armazenada no circuito L-C é afirmar que os elementos do circuito realizam trabalho positivo ou negativo sobre as cargas que se movem para a frente e para trás através do circuito. (a) Entre os estágios (a) e (b) na Figura 30.14, o capacitor realiza trabalho positivo ou negativo sobre as cargas? (b) Que tipo de força (elétrica ou magnética) o capacitor exerce sobre as cargas para realizar esse trabalho? (c) Durante esse processo, o indutor realiza trabalho positivo ou negativo sobre as cargas? (d) Que tipo de força (elétrica ou magnética) o indutor exerce sobre as cargas? ■

30.6 O circuito *R*-*L*-*C* em série

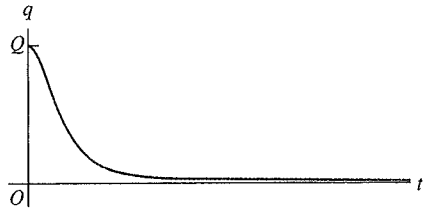
Em nossa discussão do circuito L-C, imaginamos que não existe nenhuma *resistência* no circuito. Certamente, isso é uma idealização; sabemos que todo indutor real possui resistência em suas espiras, assim como os fios conectores possuem resistências. Em virtude da resistência, uma parte da energia eletromagnética do circuito é dissipada e convertida em outras formas de energia, como a energia interna dos materiais do circuito. A resistência em um circuito elétrico é um fator análogo ao atrito em um sistema mecânico.

Considere um indutor com indutância L e resistência R ligado em série a um capacitor carregado, formando um **circuito *R*-*L*-*C* em série**. Como antes, o capacitor começa a se descarregar logo após sua conexão com o indutor. Porém, em virtude das perdas i^2R no resistor, a energia magnética adquirida pelo indutor depois que o capacitor é completamente descarregado é *menor* do que a energia elétrica inicial do capacitor. De maneira análoga, concluímos que a energia do capacitor quando a energia magnética do indutor diminui até zero é ainda menor do que a energia inicial do capacitor e assim por diante.

(a) Subamortecido (R pequeno)



(b) Criticamente amortecido (R grande)



(c) Superamortecido (R muito grande)

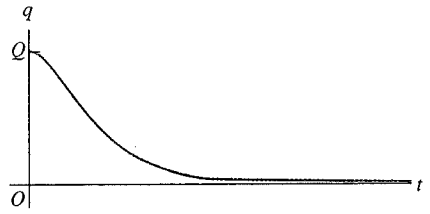


Figura 30.16 Gráficos da carga do capacitor em função do tempo em um circuito R-L-C em série com uma carga inicial Q.

Quando a resistência R é relativamente pequena, o circuito ainda oscila, porém com um **movimento harmônico amortecido** (Figura 30.16a), e dizemos que o circuito está **subamortecido**. Quando a resistência R é maior do que no caso anterior, as oscilações tendem a zero mais rapidamente. Quando a resistência atinge um certo valor, o circuito deixa de oscilar, tornando-se **criticamente amortecido** (Figura 30.16b). Para valores da resistência R maiores do que o valor crítico, o circuito é **superamortecido** (Figura 30.16c), e a carga do capacitor tende a zero mais lentamente. Usamos esses mesmos termos quando descrevemos na Seção 13.7 o comportamento do sistema mecânico análogo, o oscilador harmônico amortecido.

Análise de um circuito *R-L-C*

Para analisarmos com mais detalhes o comportamento de um circuito *R-L-C*, consideramos o circuito indicado na Figura 30.17. Ele é semelhante ao circuito *L-C* da Figura 30.15, porém agora existe um resistor R em série; mostramos também a fonte que fornece a carga inicial do capacitor. Os sinais de q e de i são os mesmos que usamos para o circuito *L-C*.

Inicialmente, deslocamos a chave para cima, fechando o circuito superior, conectando o capacitor com uma fonte de fem $\mathcal{E}$ durante tempo suficiente para carregar o capacitor com uma carga $Q = C\mathcal{E}$ e fazendo as oscilações iniciais desaparecerem. A seguir, para $t = 0$, deslocamos a chave para a posição inferior, desconectando a fonte do circuito e ligando o capacitor em série ao resistor e ao indutor. Note que o sentido da corrente inicial é negativo, oposto ao sentido de i indicado na figura.

Para sabermos como q e i variam com o tempo, aplicamos a lei das malhas de Kirchhoff. Começando no ponto a e percorrendo o circuito ao longo da malha no sentido *abcda*, obtemos a equação

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Substituindo i por dq/dt e reagrupando, encontramos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Note que, quando $R = 0$, a equação anterior se transforma na Equação (30.20) para um circuito *L-C*.

Existem métodos gerais para obter a solução da Equação (30.27). A forma da solução para o caso subamortecido (R pequeno) é diferente do caso superamortecido (R grande). Quando R^2 é menor do que $4L/C$, a solução possui a seguinte forma:

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \phi\right) \qquad (30.28)$$

em que A e ϕ são constantes. Convidamos você a tomar a derivada de primeira ordem e depois a derivada de segunda ordem da relação anterior e substituir os resultados na Equação (30.27), para demonstrar a validade da solução indicada na Equação (30.28).

A solução apresentada corresponde ao comportamento *subamortecido* indicado na Figura 30.16a; a função representa uma oscilação senoidal com uma amplitude que diminui exponencialmente. (Note que o fator exponencial $e^{-(R/2L)t}$ é diferente do fator exponencial $e^{-(R/L)t}$ que encontramos ao descrever o circuito *R-L*, na Seção 30.4.) Quando $R = 0$, a Equação (30.28) se reduz à Equação (30.21) para as oscilações de um circuito *L-C*. Quando R não é zero, a freqüência angular das oscilações é *menor* do que $1/(LC)^{1/2}$ em virtude do termo que contém R. A freqüência angular ω' das oscilações amortecidas é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (30.29)$$

(circuitos *R-L-C* subamortecidos)

Quando $R = 0$, o resultado anterior fornece a Equação (30.22), $\omega = 1/(LC)^{1/2}$. À medida que R aumenta, ω' torna-se cada vez menor. Quando $R^2 = 4L/C$, o valor da grandeza embaixo do sinal da raiz quadrada torna-se igual a zero; então o sistema deixa de oscilar, atingindo a condição do *amortecimento crítico* (Figura 30.16b). Quando R aumenta ainda mais, o sistema se comporta conforme ilustra a Figura 30.16c. Nesse caso, dizemos que o sistema está *superamortecido* e q é uma função do tempo dada pela soma de duas funções exponenciais decrescentes com o tempo.

No caso *subamortecido*, a constante da fase ϕ na função co-seno da Equação (30.28) permite que haja, simultaneamente, uma carga inicial e uma corrente inicial para $t = 0$, uma situação análoga ao caso do oscilador harmônico subamortecido que necessita de valores simultâneos para o deslocamento inicial e para a velocidade inicial (veja o Exercício 30.38).

Enfatizamos mais uma vez que o comportamento de um circuito *R-L-C* é completamente análogo ao do oscilador harmônico amortecido estudado na Seção 13.7. Convidamos você a verificar, por exemplo, que se partirmos da Equação (13.41), substituindo x por q, m por L, k por $1/C$ e a constante de amortecimento b por R, encontraremos a Equação (30.27). Analogamente, o limite entre o comportamento subamortecido e o superamortecido ocorre quando $b^2 = 4km$ no caso de um

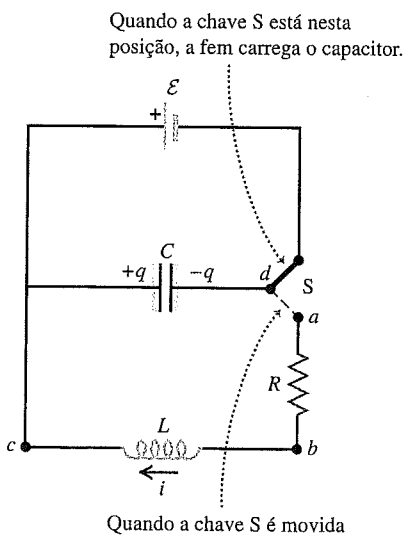


Figura 30.17 Um circuito *R-L-C* em série.

sistema mecânico e quando $R^2 = 4L/C$ no caso elétrico. Você é capaz de determinar outros aspectos dessa interessante analogia?

Outros fatos importantes do comportamento desse circuito surgem quando introduzimos no circuito uma fonte de corrente que varia senoidalmente. O resultado é análogo ao caso das *oscilações forçadas* que estudamos na Seção 13.7 e também existem efeitos análogos de *ressonância*. Esse tipo de circuito denomina-se *circuito de corrente alternada* (*ca*); a análise de um circuito ca será o principal objetivo do próximo capítulo.

Exemplo 30.11

UM CIRCUITO *R-L-C* EM SÉRIE SUBAMORTECIDO Qual deve ser o valor da resistência R (em termos de L e de C) para que a freqüência das oscilações de um circuito *R-L-C* seja igual à metade da freqüência do circuito não-amortecido?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema se refere a um circuito *R-L-C* em série subamortecido (Figura 30.16a): o objetivo é que a resistência seja suficientemente grande para reduzir a freqüência de oscilação à metade do valor não-amortecido, mas que não seja tão grande que o oscilador se torne criticamente amortecido (Figura 30.16b) ou superamortecido (Figura 30.16c).

PREPARAR: a freqüência angular de um circuito *R-L-C* em série subamortecido é dada pela Equação (30.29); a freqüência angular de um circuito *L-C* não-amortecido é dada pela Equação (30.22). Usaremos ambas para explicitar a incógnita R.

EXECUTAR: o objetivo aqui é que a freqüência angular ω', dada pela Equação (30.29), seja igual à metade da freqüência do circuito não-amortecido dada pela Equação (30.22):

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação anterior e explicitando R, obtemos

$$R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

Por exemplo, adicionando-se uma resistência de 35 Ω ao circuito do Exemplo 30.9, verifica-se que sua freqüência seria reduzida de 320 Hz para 160 Hz.

AVALIAR: o circuito se torna criticamente amortecido sem nenhuma oscilação, quando $R = \sqrt{4L/C}$. O resultado obtido para R é menor do que isso, conforme a expectativa; o circuito deve ser subamortecido.

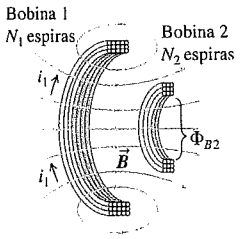
Teste sua compreensão da Seção 30.6 Um circuito *R-L-C* em série inclui um resistor de 2,0 Ω. No instante $t = 0$, a carga do capacitor é igual a 2,0 μC. Para qual dos seguintes valores de indutância e capacitância a carga do capacitor *não* oscilará? (i) $L = 3{,}0$ μH, $C = 6{,}0$ μF; (ii) $L = 6{,}0$ μH, $C = 3{,}0$ μF; (iii) $L = 3{,}0$ μH, $C = 3{,}0$ μF; ■

Resumo

Indutância mútua: quando uma corrente variável i_1 em um circuito produz um fluxo magnético variável em outro circuito, uma fem $\mathcal{E}_2$ é induzida no segundo circuito. Analogamente, uma corrente variável i_2 no segundo circuito gera uma fem $\mathcal{E}_1$ no primeiro circuito. A constante M, denominada indutância mútua, depende da geometria das duas bobinas e do material entre elas. Quando os circuitos são bobinas com N_1 e N_2 espiras, respectivamente, a indutância mútua pode ser expressa em termos do fluxo magnético médio ϕ_{B2} através de cada espira da bobina 2 produzido pela corrente i_1 da bobina 1, ou em termos do fluxo magnético médio ϕ_{B1} através de cada espira da bobina 1 gerado pela corrente i_2 da bobina 2. A unidade SI de indutância mútua é o henry, abreviado por H. (Ver exemplos 30.1 e 30.2.)

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \text{ e } \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \tag{30.4}$$

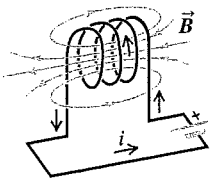
$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \tag{30.5}$$



Auto-indutância: uma corrente variável i em qualquer circuito induz uma fem $\mathcal{E}$ no mesmo circuito, chamada de fem auto-induzida. A constante L, denominada auto-indutância ou indutância, depende da geometria do circuito e do material existente em suas vizinhanças. A indutância de uma bobina com N espiras é relacionada com o fluxo magnético médio Φ_B através de cada espira produzido pela corrente i que passa na bobina. Denomina-se indutor um dispositivo, em geral com uma bobina, que apresenta uma indutância elevada. (Ver exemplos 30.3 e 30.4.)

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \tag{30.7}$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \tag{30.6}$$



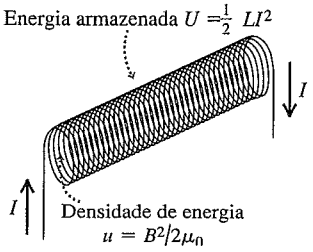
Energia do campo magnético: um indutor com indutância L que conduz uma corrente I possui energia U associada ao campo magnético do indutor. A densidade de energia magnética u (energia por unidade de volume) é proporcional ao quadrado do módulo do campo magnético. (Veja os exemplos 30.5 e 30.6.)

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \tag{30.9}$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{(no vácuo)} \tag{30.10}$$

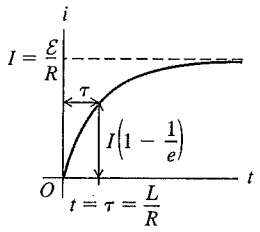
$$u = \frac{B^2}{2\mu} \tag{30.11}$$

(em um material com permeabilidade magnética μ)



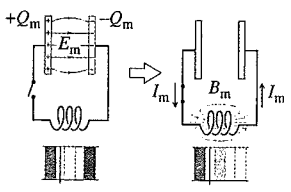
Circuitos *R-L*: em um circuito *R-L*, contendo um resistor *R*, um indutor *L* e uma fonte de fem, o aumento e o decréscimo da corrente são dados por uma função exponencial, com um tempo característico τ denominado constante de tempo. Esse valor fornece o intervalo de tempo necessário para que a corrente atinja um valor igual a $1/e$ de seu valor final. (Ver exemplos 30.7 e 30.8.)

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{30.16}$$



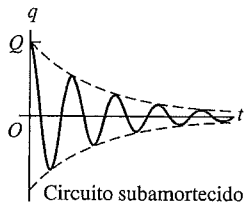
Circuitos *L-C*: um circuito *L-C*, com um indutor *L* e um capacitor *C*, executa oscilações elétricas com uma freqüência angular ω que depende de *L* e de *C*. Tal circuito é análogo a um oscilador harmônico, sendo a indutância *L* análoga à massa *m*, o inverso da capacitância ($1/C$) análogo à constante da mola *k*, a carga *q* análoga ao deslocamento *x* e a corrente *i* análoga à velocidade v_x. (Ver exemplos 30.9 e 30.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{30.22}$$



Circuitos *R-L-C* em série: um circuito *R-L-C* que contém resistência, indutância e capacitância realiza oscilações amortecidas quando a resistência é suficientemente pequena. A freqüência angular ω' das oscilações amortecidas depende dos valores de *R*, *L* e *C*. À medida que *R* aumenta, o amortecimento cresce; quando *R* é maior do que um dado valor, o circuito torna-se superamortecido e deixa de oscilar. A transição do comportamento superamortecido para o comportamento subamortecido ocorre quando $R^2 = 4L/C$; quando essa condição é satisfeita, dizemos que o circuito está criticamente amortecido. (Exemplo 30.11.)

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{30.29}$$



Principais termos

circuito *L-C*, 329
circuito *R-L*, 326
circuito *R-L-C* em série, 333
criticamente amortecido, 333
constante de tempo, 327
densidade de energia magnética, 324
fem auto-induzida, 320
henry, 318
indutância (auto-indutância), 320
indutância mútua, 317
indutor, 320
movimento harmônico amortecido, 333
oscilação elétrica, 330
subamortecido, 333
superamortecido, 333

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Como foi explicado na Seção 30.2, os sensores dos semáforos operam medindo a variação da indutância de uma bobina embutida sob a superfície do pavimento, quando um carro passa sobre ela.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

30.1 Resposta: (iii) Duplicar tanto o comprimento do solenóide (l) quanto o número de espiras no solenóide (N_1) *não* exerce efeito sobre a indutância mútua *M*. O Exemplo 30.1 indica que *M* depende da razão entre essas grandezas, que permaneceria constante. Isso ocorre porque o campo magnético produzido pelo solenóide depende do número de giros *por unidade de comprimento*, e a variação proposta não exerce efeito sobre essa grandeza.

30.2 Resposta: (iv), (i), (iii), (ii) Pela Equação (30.8), a diferença de potencial através do indutor é $V_{ab} = L\,di/dt$. Para os quatro casos, obtemos (i) V_{ab} = (2,0 μH) (2,0 A – 1,0 A)/(0,50 s) = 4,0 μV; (ii) V_{ab} = (4,0 μH) (0 – 3,0 A)/(2,0 s) = –6,0 μV; (iii) $V_{ab} = 0$ porque a taxa de variação da corrente é nula; e (iv) V_{ab} = (1,0 μH) (4,0 A – 0)/(0,25 s) = 16 μV.

30.3 Respostas: (a) sim, (b) não Inverter o sentido da corrente não exerce efeito sobre o módulo do campo magnético, mas provoca a inversão do sentido dele. Não exerce efeito sobre a densidade de energia do campo magnético, que é proporcional ao quadrado do *módulo* do campo magnético.

30.4 Respostas: (a) (i), (b) (ii) Lembre-se de que v_{ab} é o potencial no ponto a menos o potencial no ponto b, e da mesma forma para v_{bc}. Para qualquer arranjo das chaves, a corrente flui através do resistor de a para b. A extremidade superior do resistor possui sempre o maior potencial, portanto v_{ab} é positivo. Com S_1 fechada e S_2 aberta, a corrente que passa pelo indutor flui de b para c e continua aumentando. A fem auto-induzida se opõe a esse aumento e está, portanto, orientada de c para b, o que significa que b possui maior potencial. Logo, v_{bc} é positivo. Com S_1 aberta e S_2 fechada, a corrente do indutor novamente flui de b para c, mas dessa vez, diminuindo. A fem auto-induzida está orientada de b para c em um esforço para sustentar a corrente decrescente, portanto c possui potencial maior e v_{bc} é negativo.

30.5 Respostas: (a) positivo, (b) elétrica, (c) negativo, (d) elétrica O capacitor perde energia entre os estágios (a) e (b), portanto realiza trabalho positivo sobre as cargas. Ele faz isso exercendo uma força elétrica que afasta a corrente da placa esquerda com carga positiva do capacitor e que a aproxima da placa direita com carga negativa. Ao mesmo tempo, o indutor ganha energia e realiza trabalho negativo sobre as cargas em movimento. Embora o indutor armazene energia magnética, a força que ele realiza é *elétrica*. Essa força se origina da fem audo-induzida do indutor (veja Seção 30.2).

30.6 Respostas: (i), (iii) Não há oscilações, para $R^2 \geq 4L/C$. Em cada caso, $R^2 = (2{,}0\ \Omega)^2 = 4{,}0\ \Omega$. No caso (i) $4L/C = 4(3{,}0\ \mu\text{H})/(6{,}0\ \mu\text{F}) = 2{,}0\ \Omega^2$, não há oscilações (o sistema está superamortecido); no caso (ii) $4L/C = 4(6{,}0\ \mu\text{H})/(3{,}0\ \mu\text{F}) = 8{,}0\ \Omega^2$, não há oscilações (o sistema está subamortecido); e no caso (iii) $4L/C = 4(3{,}0\ \mu\text{H})/(3{,}0\ \mu\text{F}) = 4{,}0\ \Omega^2$, não há oscilações (o sistema está criticamente amortecido).

Questões para discussão

Q30.1 Em um ônibus elétrico, o motor do veículo extrai corrente de um fio suspenso por meio de um braço longo com um conector na ponta, que desliza pelo fio suspenso. Uma faísca elétrica cintilante é geralmente vista quando o conector passa por uma junção nos fios, no momento em que o contato é momentaneamente perdido. Explique esse fenômeno.

Q30.2 Um transformador consiste basicamente de duas bobinas em estreita proximidade, mas não em contato elétrico. A corrente em uma bobina induz magneticamente uma fem na segunda bobina, com propriedades que podem ser controladas ajustando-se a geometria das duas bobinas. Entretanto, esse dispositivo funciona somente com corrente alternada, não com corrente contínua. Explique.

Q30.3 Na Figura 30.1, se a bobina 2 faz um giro de 90°, de modo que seu eixo fique na vertical, a indutância mútua aumenta ou diminui? Explique.

Q30.4 O solenóide toroidal com espiras enroladas de modo compacto é uma das poucas configurações para a qual é fácil calcular a auto-indutância. Que características do solenóide toroidal fornecem essa simplicidade?

Q30.5 Duas bobinas idênticas com espiras enroladas de modo compacto, que possuem uma auto indutância L, são colocadas ao longo do eixo comum e a distância entre elas é tão pequena que quase se tocam. Quando elas são conectadas em série, qual é a auto-indutância da combinação? E se elas fossem ligadas em paralelo? Elas podem ser ligadas de modo que a indutância total seja igual a zero? Explique.

Q30.6 Duas bobinas circulares com enrolamentos compactos possuem o mesmo número de espiras, porém o raio de uma delas é igual ao dobro do raio da outra. Qual é a relação entre as auto-indutâncias dessas bobinas? Explique.

Q30.7 Deseja-se fazer um resistor enrolando um fio em torno de um núcleo cilíndrico. Para fazer o valor da indutância ser o menor possível, enrola-se a metade do fio em um sentido e a outra metade em sentido contrário, sobre a camada anterior. Isso produziria o efeito desejado? Por quê?

Q30.8 Para um mesmo valor do campo magnético B, a densidade de energia magnética possui um valor maior no vácuo ou em um material magnético? Explique. Da Equação (30.11), podemos concluir que, para um solenóide longo no qual circula uma corrente I, a energia armazenada é proporcional a $1/\mu$? Isso significa que, para uma mesma corrente, menos energia é armazenada quando um solenóide é preenchido com um material ferromagnético do que no caso de existir ar em seu interior? Explique.

Q30.9 Na Seção 30.5, aplicamos a lei das malhas de Kirchhoff no circuito L-C, no qual o capacitor é inicialmente carregado por completo, e deduzimos a equação $-L\,di/dt - q/C = 0$. Porém, quando o capacitor começa a descarregar, a corrente aumenta a partir de zero. A equação afirma que $L\,di/dt = -q/C$, ou seja, que $L\,di/dt$ possui valor negativo. Explique como $L\,di/dt$ pode ser negativo quando a corrente está aumentando.

Q30.10 Na Seção 30.5, aplicamos a relação $i = dq/dt$ para deduzir a Equação (30.20). Porém, um fluxo da corrente corresponde a uma diminuição da carga do capacitor. Portanto, explique a razão pela qual o uso dessa relação está correto, em vez do uso da relação $i = -dq/dt$.

Q30.11 No circuito R-L da Figura 30.11, quando fechamos a chave S_1, o potencial v_{ab} varia repentinamente e de forma descontínua, porém a corrente não. Explique a razão pela qual a voltagem pode variar bruscamente, porém a corrente não.

Q30.12 No circuito R-L da Figura 30.11, a corrente no resistor é sempre a mesma que a corrente no indutor? Como ter certeza disso?

Q30.13 Suponha que exista uma corrente contínua através de um indutor. Caso você tente reduzir a corrente até zero instantaneamente, abrindo rapidamente uma chave, um arco voltaico pode se formar nos contatos da chave. Por quê? É fisicamente possível interromper uma corrente instantaneamente? Explique.

Q30.14 Em um circuito R-L-C, que critérios você usa para saber se o sistema é superamortecido ou subamortecido? Por exemplo, você pode comparar a energia máxima armazenada durante um ciclo com a energia dissipada durante um ciclo? Explique.

Exercícios

Seção 30.1 Indutância mútua

30.1 A indutância mútua entre duas bobinas é $M = 3{,}25 \times 10^{-4}$ H. A corrente i_1 na primeira bobina cresce com uma taxa uniforme de 830 A/s. (a) Qual é a fem induzida na segunda bobina? Ela é constante? (b) Suponha que a corrente esteja circulando na segunda bobina em vez de na primeira. Qual é o módulo da fem induzida na primeira bobina?

30.2 Duas bobinas são enroladas sobre um mesmo núcleo cilíndrico, como as bobinas do Exemplo 30.1. Quando a corrente na primeira bobina diminui com uma taxa de – 0,242 A/s, a fem induzida na segunda bobina possui módulo igual a $1,65 \times 10^{-3}$ V. (a) Qual é a indutância mútua do sistema com as duas bobinas? (b) Quando a segunda bobina possui 25 espiras, qual é o fluxo através de cada espira quando a corrente na primeira bobina é igual a 1,20 A? (c) Quando a corrente na segunda bobina cresce com uma taxa igual a 0,360 A/s, qual é o módulo da fem induzida na primeira bobina?

30.3 De acordo com a Equação (30.5), 1 H = 1 Wb/A, e, de acordo com a Equação (30.4), 1 H = 1 Ω · s. Mostre que essas duas definições são equivalentes.

30.4 Um solenóide com 25 espiras de fio é enrolado de forma compacta em torno de outra bobina com 300 espiras (veja o Exemplo 30.1). O solenóide interno tem 25,0 cm de comprimento e diâmetro de 2,0 cm. Em um dado momento, a corrente no solenóide interno é igual a 0,120 A e aumenta a uma taxa de $1,75 \times 10^3$ A/s. Desta vez, calcule: (a) o fluxo magnético médio através de cada espira do solenóide interno; (b) a indutância mútua dos dois solenóides; (c) a fem induzida no solenóide externo pela corrente variante no solenóide interno.

30.5 Dois solenóides toroidais são enrolados sobre um mesmo núcleo de modo que o campo magnético de um passa através das espiras do outro. O toróide 1 possui 700 espiras, enquanto o toróide 2 possui 400 espiras. Quando a corrente no toróide 1 é igual a 6,52 A, o fluxo magnético médio através de cada espira da bobina 2 é igual a 0,0320 Wb. (a) Qual é a indutância mútua do sistema com os dois toróides? (b) Quando a corrente na bobina 2 é igual a 2,54 A, qual é o fluxo magnético médio através de cada espira da bobina 1?

Seção 30.2 Indutores e auto-indutância

30.6 Um solenóide toroidal possui 500 espiras, área de seção reta de 6,25 m^2 e raio médio de 4,0 cm. (a) Calcule a auto-indutância da bobina. (b) Para o caso em que a corrente diminui uniformemente de 5,0 A para 2,0 A em 3,0 ms, calcule a fem auto-induzida na bobina. (c) A corrente está orientada no sentido do terminal *a* da bobina para o terminal *b*. O sentido da fem induzida é de *a* para *b* ou de *b* para *a*?

30.7 No instante em que a corrente em um indutor está aumentando com uma taxa 0,0640 A/s, o módulo da fem auto-induzida é igual a 0,0160 V. (a) Qual é a indutância do indutor? (b) Se o indutor é um solenóide com 400 espiras, qual é o fluxo magnético médio através de cada espira quando a corrente é igual a 0,720 A?

30.8 Quando a corrente em um solenóide toroidal está variando com uma taxa igual a 0,0260 A/s, o módulo da fem é igual a 12,6 mV. Quando a corrente é igual a 1,40 A, o fluxo magnético médio através de cada espira do solenóide é igual a 0,00285 Wb. Quantas espiras o solenóide possui?

30.9 O indutor na Figura 30.18 apresenta indutância de 0,260 H e conduz uma corrente no sentido indicado que diminui com uma taxa constante dada por $di/dt = -0,0180$ A/s. (a) Qual é a fem auto-induzida? (b) Qual é a extremidade do indutor que está a um potencial mais elevado, *a* ou *b*?

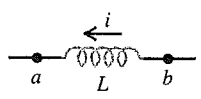


Figura 30.18 Exercícios 30.9 e 30.10.

30.10 O indutor indicado na Figura 30.18 possui indutância igual a 0,260 H e transporta uma corrente no sentido indicado. A taxa de variação da corrente é constante. (a) O potencial entre os pontos *a* e *b* é $V_{ab} = 1,04$ V, com o ponto *a* possuindo potencial mais elevado. A corrente está aumentando ou diminuindo? (b) Quando a corrente em $t = 0$ é de 12,0 A, qual é a corrente em $t = 2,0$ s?

30.11 Indutância de um solenóide. Um solenóide reto e longo possui *N* espiras, seção reta com área *A* e comprimento *l*. Mostre que a indutância deste solenóide é dada pela equação $L = \mu_0 AN^2/l$. Suponha que o campo magnético seja uniforme dentro do solenóide e igual a zero fora dele. (Sua resposta será aproximada porque, na realidade, *B* é menor nas extremidades do que no centro do solenóide. Por isso, sua resposta será um limite superior para a indutância.)

Seção 30.3 Energia do campo magnético

30.12 Um indutor usado em uma fonte de alimentação de corrente contínua possui uma indutância igual a 12,0 H e uma resistência de 180 Ω. Ele conduz uma corrente de 0,300 A. (a) Qual é a energia armazenada no campo magnético? (b) Qual é a taxa de produção de energia térmica no indutor? (c) Sua resposta do item (b) significa que a energia magnética está diminuindo com o tempo? Explique.

30.13 Um solenóide toroidal cheio de ar possui raio médio igual a 15,0 cm e seção reta com área de 5,0 cm^2. Quando a corrente é de 12,0 A, a energia armazenada é igual a 0,390 J. Quantas espiras ele possui?

30.14 Um solenóide toroidal cheio de ar possui 300 espiras e um raio médio de 12,0 cm, com seção reta de área igual a 4,0 cm^2. Supondo que a corrente seja de 5,0 A, calcule: (a) o campo magnético do solenóide; (b) a auto-indutância do solenóide; (c) a energia armazenada no campo magnético; (d) a densidade de energia no campo magnético. (e) Confira sua resposta para o item (d), dividindo a sua resposta para o item (c) pelo volume do solenóide.

30.15 Um solenóide de 25,0 cm de comprimento e área de seção reta de 0,500 cm^2 contém 400 espiras e transporta uma corrente de 80,0 A. Calcule: (a) o campo magnético no solenóide; (b) a densidade de energia no campo magnético, se o solenóide for preenchido com ar; (c) a energia total contida no campo magnético da bobina (suponha o campo uniforme); (d) a indutância do solenóide.

30.16 Existe uma proposta para usar grandes indutores como dispositivos para armazenar energia. (a) Qual é a energia total convertida em energia térmica e energia luminosa quando uma lâmpada incandescente de 200 W fica acesa durante um dia? (b) Se a energia calculada na parte (a) fosse armazenada em um indutor no qual circulasse uma corrente de 80,0 A, qual seria sua indutância?

30.17 Partindo da Equação (30.9), deduza com detalhes a Equação (30.11) para a densidade de energia de um toróide preenchido com um material magnético.

30.18 Deseja-se armazenar 1,0 kW · h = $3,60 \times 10^6$ J de energia elétrica em um campo magnético uniforme com módulo igual a 0,600 T. (a) Qual é o volume (no vácuo) que o campo magnético deve ocupar para armazenar essa quantidade de energia? (b) Se essa quantidade de energia fosse armazenada (no vácuo) em um volume contido em um cubo de aresta igual a 40,0 cm, qual deveria ser o campo magnético necessário?

Seção 30.4 O circuito *R-L*

30.19 Um indutor com uma indutância de 2,50 H e uma resistência igual a 8,0 Ω está conectado aos terminais de uma bateria com fem de 6,0 V e resistência interna desprezível. Calcule (a) a taxa inicial

do crescimento da corrente no circuito; (b) a taxa de aumento da corrente no instante em que a corrente é igual a 0,500 A; (c) a corrente 0,250 s depois que o circuito é fechado; (d) a corrente estacionária final.

30.20 Um resistor de 15,0 Ω e uma bobina estão conectados em série a uma bateria de 6,30 V com resistência interna desprezível e uma chave fechada. (a) Após 2,0 ms da abertura da chave, a corrente diminuiu para 0,210 A. Calcule a indutância da bobina. (b) Calcule a constante de tempo do circuito. (c) Quanto tempo após a chave ser fechada a corrente atingirá 1,0% do seu valor original?

30.21 Uma bateria de 35,0 V com resistência interna desprezível, um resistor de 50,0 Ω e um indutor de 1,25 mH com resistência interna desprezível estão conectados em série a uma chave aberta. A chave é subitamente fechada. (a) Quanto tempo após a chave ser fechada a corrente através do indutor atingirá metade do seu valor máximo? (b) Quanto tempo após o fechamento da chave a energia armazenada no indutor atingirá a metade do seu valor máximo?

30.22 Na Figura 30.11, a chave S_1 é fechada, enquanto a chave S_2 é mantida aberta. A indutância é $L = 0{,}115$ H e a resistência é $R = 120\ \Omega$. (a) Quando a corrente atinge seu valor final, a energia armazenada no indutor é igual a 0,260 J. Qual é a fem $\mathcal{E}$ da bateria? (b) Depois que a corrente atinge seu valor final, a chave S_1 é aberta e a chave S_2 é fechada; quanto tempo é necessário para que a energia armazenada no indutor diminua até 0,130 J, a metade do valor inicial?

30.23 Mostre que L/R possui unidades de tempo.

30.24 Escreva uma relação correspondente à Equação (30.13) para a corrente na Figura 30.11 logo após a chave S_1 ser aberta e a chave S_2 ser fechada, designando por I_0 a corrente inicial. Use métodos de integração para verificar a Equação (30.18).

30.25 Na Figura 30.11, suponha que $\mathcal{E} = 60{,}0$ V, $R = 240\ \Omega$ e $L = 0{,}1600$ H. A chave S_2 é mantida aberta e fechamos a chave S_1 até que uma corrente constante seja estabelecida. A seguir, a chave S_1 é aberta e a chave S_2 é fechada, de modo que a bateria não alimente mais o circuito. (a) Qual é a corrente inicial no resistor logo após a chave S_1 ser aberta e a chave S_2 ser fechada? (b) Qual é a corrente no resistor quando $t = 4{,}0 \times 10^{-4}$ s? (c) Qual é a diferença de potencial entre os pontos b e c quando $t = 4{,}0 \times 10^{-4}$ s? Qual dos dois pontos está a um potencial mais elevado? (d) Quanto tempo é necessário para que a corrente se reduza à metade de seu valor inicial?

30.26 Na Figura 30.11, suponha que $\mathcal{E} = 60{,}0$ V, $R = 240\ \Omega$ e $L = 0{,}160$ H. Inicialmente, não existe nenhuma corrente no circuito. A chave S_2 é mantida aberta e fechamos a chave S_1. (a) Logo após fechar a chave S_1, quais são os valores de v_{ab} e v_{bc}? (b) Calcule v_{ab} e v_{bc} muito tempo depois do fechamento da chave S_1 (após muitas constantes de tempo). (c) Calcule v_{ab} e v_{bc} para um tempo intermediário quando $i = 0{,}150$ A.

30.27 Tome como referência o Exercício 30.19. (a) Qual é a potência fornecida pela bateria para o indutor em função do tempo quando o circuito fica fechado no instante $t = 0$? (b) Qual é a taxa de dissipação de energia na resistência do indutor em função do tempo? (c) Qual é a taxa com a qual a energia do campo magnético no indutor está crescendo em função do tempo? (d) Compare os resultados dos itens (a), (b) e (c).

Seção 30.5 O circuito *L-C*

30.28 Um capacitor de 20,0 μF é carregado por uma fonte de alimentação de 150,0 V e, a seguir, desconectado da fonte para ser conectado em série a um indutor de 0,280 mH. Calcule: (a) a frequência de oscilação do circuito; (b) a energia armazenada no capacitor no instante $t = 0$ ms (o momento da conexão com o indutor); (c) a energia armazenada no indutor no instante $t = 1{,}30$ ms.

30.29 Um capacitor de 7,50 nF é carregado até 12,0 V e, a seguir, desconetado da fonte de alimentação e conectado em série através de uma bobina. O período de oscilação do circuito é medido em $8{,}60 \times 10^{-5}$ s. Calcule: (a) a indutância da bobina; (b) a carga máxima no capacitor; (c) a energia total do circuito; (d) a corrente máxima no circuito.

30.30 Um capacitor de 18,0 μF é conectado a uma bateria de 22,5 V por alguns segundos e, a seguir, conectado a um indutor de 12,0 mH com resistência desprezível. (a) Após o capacitor e o indutor estarem ambos conectados, determine a corrente máxima no circuito. Quando a corrente é máxima, qual é a carga no capacitor? (b) Quanto tempo após o capacitor e o indutor serem conectados em conjunto o capacitor é completamente descarregado da primeira vez? E da segunda vez? (c) Faça gráficos da carga nas placas do capacitor e da corrente que passa pelo indutor em função do tempo.

30.31 Oscilações *L-C*. Um capacitor com capacitância igual a $6{,}0 \times 10^{-5}$ F é carregado conectando-o a uma bateria de 12,0 V. A seguir, o capacitor é desconectado da bateria e conectado a um indutor com $L = 1{,}50$ H. (a) Calcule a freqüência angular ω das oscilações elétricas e o período dessas oscilações (o tempo de uma oscilação). (b) Qual é a carga inicial do capacitor? (c) Qual é a energia inicial armazenada no capacitor? (d) Qual é a carga do capacitor 0,0230 s depois de ele ser ligado ao indutor? Interprete o sinal de sua resposta. (e) No instante dado no item (d), qual é a corrente no indutor? Interprete o sinal de sua resposta. (f) No instante dado no item (d), qual é a energia elétrica armazenada no capacitor e qual é a energia armazenada no indutor?

30.32 Um circuito de sintonia de rádio. A capacitância mínima do capacitor variável de um rádio é igual a 4,18 pF. (a) Qual é a indutância de uma bobina conectada a esse capacitor para que a freqüência de oscilação do circuito *L-C* seja igual a 1600×10^3 Hz, correspondente a uma extremidade da faixa de freqüência de rádio da banda AM, quando o seletor for posicionado de modo que o capacitor possua sua capacitância mínima? (b) A freqüência da outra extremidade dessa faixa de freqüência é igual a 540×10^3 Hz. Qual é o valor máximo da capacitância para que as freqüências das oscilações possam ser selecionadas dentro do intervalo dessa banda de freqüências de rádio?

30.33 Um circuito *L-C* formado por um indutor de 80,0 mH e um capacitor de 1,25 nF oscila com uma corrente máxima de 0,750 A. Calcule: (a) a carga máxima no capacitor e (b) a freqüência de oscilação no circuito. (c) Supondo que o capacitor tenha carga máxima no instante $t = 0$, calcule a energia armazenada no indutor, após 2,50 ms de oscilação.

30.34 Em um circuito *L-C*, $L = 85{,}0$ mH e $C = 3{,}20$ μF. Durante a oscilação, a corrente máxima no indutor é igual a 0,850 mA. (a) Qual é a carga máxima do capacitor? (b) Qual é o módulo da carga do capacitor quando a corrente no indutor possui módulo igual a 0,500 mA?

30.35 (a) Aplicando as equações (30.21) e (30.23) para um circuito *L-C*, escreva expressões para a energia armazenada em um capacitor em função do tempo e para a energia armazenada em um indutor em função do tempo. (b) Usando a Equação (30.22) e a identidade trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, mostre que a energia total em um circuito *L-C* é constante e igual a $Q^2/2C$.

30.36 Mostre que a equação diferencial indicada na Equação (30.20) é satisfeita pela função $q = Q\cos(\omega t + \phi)$, em que ω é dado por $1/\sqrt{LC}$.
30.37 Mostre que $\sqrt{LC}$ possui unidades de tempo.

Seção 30.6 O circuito *R-L-C* em série

30.38 Para o circuito indicado na Figura 30.17, seja $C = 15{,}0$ nF, $L = 22$ mH e $R = 75{,}0\ \Omega$. (a) Calcule a freqüência de oscilação no circuito após o capacitor ter sido carregado e a chave ter sido conectada ao ponto *a*; (b) Quanto tempo levará para a amplitude da oscilação cair 10,0% em relação ao seu valor original? (c) Qual valor de *R* produzirá um circuito criticamente amortecido?
30.39 (a) Na Equação (13.41), substitua *x* por *q*, *m* por *L*, *k* por 1/*C* e a constante de amortecimento *b* por *R*. Mostre que o resultado é a Equação (30.27). (b) Faça essas mesmas substituições na Equação (13.43) para obter a Equação (30.29). (c) Repita essas mesmas substituições na Equação (13.42) para obter a Equação (30.28).
30.40 (a) Derive duas vezes em relação ao tempo a carga *q* dada pela Equação (30.28) e mostre que aquela expressão é realmente a solução da Equação (30.27). (b) No instante $t = 0$, a chave na Figura 30.17 é colocada na posição que liga o ponto *d* ao ponto *a*; nesse instante, $q = Q$ e $i = dq/dt = 0$. Mostre que as constantes ϕ e *A* na Equação (30.28) são dadas por

$$\tan\phi = -\frac{R}{2L\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} \quad \text{e} \quad A = \frac{Q}{\cos\phi}$$

30.41 Um circuito *R-L-C* possui $L = 0{,}450$ H, $C = 2{,}50 \times 10^{-5}$ F e resistência *R*. (a) Qual é a freqüência angular do circuito quando $R = 0$? (b) Qual deve ser o valor de *R* para que a freqüência angular seja 5,0% menor do que o valor calculado no item (a)?
30.42 Mostre que a grandeza $\sqrt{L/C}$ possui unidades de resistência (ohms).

Problemas

30.43 Considere dois solenóides, um dentro do outro. O solenóide externo possui comprimento de 50,0 cm e contém 6750 espiras, enquanto o solenóide coaxial interno tem 3,0 cm de comprimento e 0,120 cm de diâmetro, contendo 15 espiras. A variação na corrente do solenóide externo é igual a 37,5 A/s. (a) Qual é a indutância mútua desses solenóides? (b) Determine a fem induzida no solenóide interno.
30.44 Uma bobina possui 400 espiras e uma auto-indutância de 3,50 mH. A corrente na bobina varia de acordo com a equação $i = (680\text{ mA})\cos[\pi t/(0{,}0250\text{ s})]$. (a) Qual é a fem máxima induzida na bobina? (b) Qual é o fluxo magnético médio máximo através de cada espira da bobina? (c) Para $t = 0{,}0180$ s, qual é o módulo da fem induzida?
30.45 Um circuito para fazer derivadas. A corrente que passa em um indutor sem resistência é indicada em função do tempo pelo gráfico da Figura 30.19. (a) Faça um gráfico da configuração que se deve observar na tela de um osciloscópio conectado aos terminais do indutor. (O ponto luminoso do osciloscópio varre horizontalmente a tela com uma velocidade constante e sua deflexão vertical é proporcional à diferença de potencial entre os terminais do indutor.) (b) Por que o indutor pode ser usado para obter um 'circuito para fazer derivadas'?

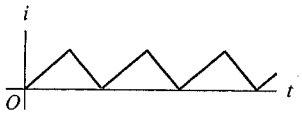


Figura 30.19 Problema 30.45.

30.46 Um indutor de 0,250 H conduz uma corrente que varia com o tempo de acordo com a expressão $i = (124\text{ mA})\cos[(240\pi/\text{s})t]$. (a) Determine uma expressão para a fem induzida em função do tempo. Faça um gráfico para a corrente induzida e para a fem induzida em função do tempo desde $t = 0$ até $t = \left(\frac{1}{60}\text{s}\right)$. (b) Qual é a fem máxima? Qual é a corrente quando a fem induzida é máxima? (c) Qual é a corrente máxima? Qual é a fem induzida quando a corrente é máxima?
30.47 Indutores em série e paralelo. Você dispõe de dois indutores, um com uma auto-indutância L_1 e outro com uma auto-indutância L_2. (a) Você conecta os dois indutores em série, de modo que a indutância mútua entre eles seja desprezível. Mostre que a indutância equivalente da combinação é dada por $L_{eq} = L_1 + L_2$. (b) Você conecta os dois indutores em paralelo, de modo que novamente a indutância mútua entre eles seja desprezível. Mostre que a indutância equivalente da combinação é dada pela expressão $L_{eq} = (1/L_1 + 1/L_2)^{-1}$. (*Sugestão:* tanto no caso da ligação em série quanto no caso da ligação em paralelo, a diferença de potencial através da ligação é $L_{eq}(di/dt)$, em que *i* é a corrente que passa na combinação. Para a combinação em paralelo, *i* é a soma das duas correntes que passam nos indutores.)
30.48 Um cabo coaxial. Um pequeno condutor maciço com raio *a* é suportado por dois discos isolantes não-magnéticos no eixo de um tubo com paredes finas com raio interno igual a *b*. O condutor interno e o condutor externo conduzem correntes de mesmo módulo *i*, porém com sentidos contrários. (a) Aplique a lei de Ampère para determinar o campo magnético em qualquer ponto do volume entre os condutores. (b) Escreva uma expressão para o fluxo magnético $d\Phi_B$ através de uma faixa estreita de comprimento *l* paralela ao eixo, com espessura *dr*, situada a uma distância *r* do centro do cabo e sobre o plano que contém o eixo. (c) Integre a expressão encontrada no item (b) sobre o volume entre os dois condutores, para calcular o fluxo magnético produzido pela corrente *i* que passa no condutor central. (d) Mostre que a indutância *L* de um comprimento *l* do cabo é dada por

$$L = l\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(e) Use a Equação (30.9) para calcular a energia magnética armazenada no campo magnético para um comprimento *l* do cabo.
30.49 Considere o cabo coaxial do Problema 30.48. As correntes dos condutores possuem o mesmo módulo *i*, porém seus sentidos são opostos. (a) Aplique a lei de Ampère para determinar o campo magnético em qualquer ponto do volume entre os condutores. (b) Use a expressão da densidade de energia do campo magnético, Equação (30.10), para calcular a energia armazenada em uma camada cilíndrica fina entre os dois condutores. Suponha que a camada cilíndrica possua raio interno *r*, raio externo igual a $r + dr$ e comprimento *l*. (c) Integre a expressão encontrada no item (b) sobre o volume entre os dois condutores para calcular a energia total armazenada no campo magnético para um comprimento *l* do cabo. (d) Use o resultado do item (c) e a Equação (30.9) para calcular a indutân-

cia L de um comprimento l do cabo. Compare sua resposta ao resultado obtido no item (d) do Problema 30.48.

30.50 Um solenóide toroidal com um raio médio r e uma área de seção reta A está uniformemente enrolado com um número de espiras igual a N_1. Um segundo solenóide com um número de espiras igual a N_2 é colocado no centro do primeiro solenóide. Ambos são enrolados no mesmo sentido. (a) Deduza uma expressão para a indutância L_1 quando somente a primeira bobina é usada; e uma expressão L_2 quando somente a segunda bobina é usada. (b) Mostre que $M^2 = L_1L_2$.

30.51 (a) Qual deveria ser a auto-indutância de um solenóide para que ele armazenasse 10,0 J de energia, quando uma corrente de 1,50 A passa por ele? (b) Supondo que o diâmetro da seção reta do solenóide seja igual a 4,0 cm e que as suas bobinas possam ser enroladas a uma densidade de 10 bobinas/mm, qual seria o comprimento do solenóide? (Veja o Exercício 30.11.) Esse comprimento é viável para uso rotineiro em um laboratório?

30.52 Um indutor está ligado aos terminais de uma bateria com fem igual a 12,0 V e resistência interna desprezível. Depois de 0,725 ms de a ligação ser feita, a corrente é igual a 4,86 mA. Depois de um tempo muito longo, a corrente é de 6,45 mA. (a) Qual é a resistência R do indutor? (b) Qual é a indutância L do indutor?

30.53 Continuação dos exercícios 30.19 e 30.27. (a) Qual é a quantidade de energia armazenada no campo magnético de um indutor para uma constante de tempo depois de a bateria ser desconectada ao indutor mencionado no Exercício 30.19? Calcule isso integrando a expressão do Exercício 30.27(c) e usando a Equação (30.9); compare os dois resultados. (b) Integre a expressão obtida no Exercício 30.27 (a) para calcular a energia *total* fornecida pela bateria durante o intervalo de tempo considerado no item (a). (c) Integre a expressão obtida no Exercício 30.27 (b) para determinar a energia *total* dissipada na resistência do indutor durante o mesmo intervalo de tempo. (d) Compare os resultados obtidos nos itens (a), (b) e (c).

30.54 Continuação do Exercício 30.25. (a) Qual é a energia total armazenada inicialmente no indutor? (b) Para $t = 4{,}0 \times 10^{-4}$ s, qual é a taxa da diminuição da energia armazenada no indutor? (c) Para $t = 4{,}0 \times 10^{-4}$ s, com que taxa a energia elétrica está sendo convertida em energia térmica no resistor? (d) Obtenha uma expressão para a taxa de conversão da energia elétrica em energia térmica no resistor em função do tempo. Integre essa expressão desde $t = 0$ até $t = \infty$ para obter a energia elétrica total dissipada no resistor. Compare seu resultado à resposta do item (a).

30.55 A relação que precede a Equação (30.27) pode ser convertida em uma relação de energia. Multiplique ambos os membros daquela equação por $-i = -dq/dt$. Então, o primeiro termo torna-se igual a i^2R. Mostre que o segundo termo pode ser escrito na forma $d(\frac{1}{2}Li^2)/dt$ e o terceiro termo pode ser escrito na forma $d(q^2/2C)/dt$. O que a equação resultante revela sobre a conservação da energia no circuito?

30.56 Um capacitor de 5,0 μF possui carga inicial com potencial igual a 16,0 V. A seguir, ele é conectado em série a um indutor de 3,75 mH. (a) Qual é a energia total armazenada nesse circuito? Qual é a carga nas placas do capacitor no instante em que a corrente no indutor é máxima?

30.57 Alarme veicular eletromagnético. A sua mais recente invenção é um alarme para carros que produz um som a uma freqüência particularmente perturbadora de 3500 Hz. Para fazer isso, o circuito desse alarme deve produzir uma corrente elétrica alternada com a mesma freqüência. Por esse motivo, o seu projeto inclui um indutor e um capacitor em série. A voltagem máxima através do capacitor deve ser de 12,0 V (a mesma voltagem da bateria do carro). Para produzir um som suficientemente alto, o capacitor deve armazenar 0,0160 J de energia. Quais valores de capacitância e indutância você deve escolher para o circuito do seu alarme para carros?

30.58 Um circuito L-C é constituído por um indutor de 60,0 mH e um capacitor de 250 μF. A carga inicial do capacitor é igual a 6,0 μC e a corrente inicial no indutor é igual a zero. (a) Qual é a voltagem máxima através do capacitor? (b) Qual é a corrente máxima no indutor? (c) Qual é a energia máxima acumulada no indutor? (d) Quando a corrente no indutor atinge a metade de seu valor máximo, qual é a carga no capacitor e qual é a energia acumulada no indutor?

30.59 Energia solar magnética. A força dos campos magnéticos no interior de uma mancha solar podem chegar a 0,4 T. (Comparativamente, a força do campo magnético da Terra é cerca de 1/10000 disso.) As manchas solares podem ter até 25000 km de raio. O material de uma mancha solar possui densidade aproximada de 3×10^{-4} kg/m^3. Suponha que μ para o material da mancha solar seja μ_0. Se 100% da energia do campo magnético armazenado em um ponto solar pudesse ser usada para ejetar da superfície do Sol o material da mancha solar, qual seria a velocidade da ejeção do material? Compare com a velocidade de escape do Sol, que é de aproximadamente 6×10^5 m/s. (*Sugestão:* calcule a energia cinética que o campo magnético pode fornecer a 1 m^3 de material da mancha solar.)

30.60 Ao estudar uma bobina de indutância e resistência interna desconhecidas, você a conecta em série a uma bateria de 25,0 V e a um resistor de 150 Ω. A seguir, você conecta um osciloscópio a um desses elementos de circuito e o utiliza para medir a voltagem que passa pelo elemento de circuito em função do tempo. O resultado é indicado na Figura 30.20. (a) A qual elemento de circuito (bobina ou resistor) o osciloscópio está conectado? Como você sabe? (b) Determine a indutância e a resistência interna da bobina. (c) Cuidadosamente, faça um desenho quantitativo da voltagem contra o tempo que você observaria, se conectasse o osciloscópio ao outro elemento de circuito (resistor ou bobina).

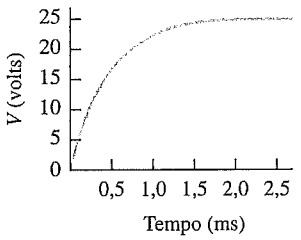


Figura 30.20 Problema 30.60.

30.61 No laboratório, você está tentando determinar a indutância e a resistência interna de um solenóide. Você o instala em série a uma bateria de resistência interna desprezível, um resistor de 10,0 Ω e uma chave. A seguir, você conecta um osciloscópio a um desses elementos de circuito para medir a voltagem que passa por ele em função do tempo. Você fecha a chave e o osciloscópio indica a voltagem contra o tempo conforme indica a Figura 30.21. (a) A qual elemento de circuito (solenóide ou resistor) o osciloscópio está conectado? Como você sabe? (b) Por que o gráfico não se aproxima de zero enquanto t tende a ∞? (c) Qual é a fem da bateria?

(d) Determine a corrente máxima no circuito. (e) Quais são a resistência interna e a indutância do solenóide?

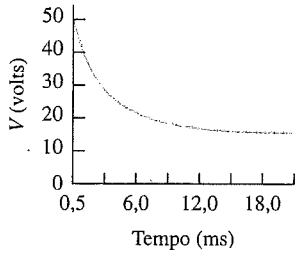


Figura 30.21 Problema 30.61.

30.62 No circuito indicado na Figura 30.22, determine a leitura em cada amperímetro e voltímetro (a) logo após a chave S ser fechada e (b) após S estar fechada há muito tempo.

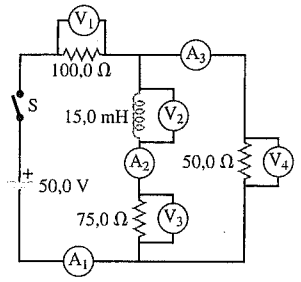


Figura 30.22 Problema 30.62.

30.63 No circuito indicado na Figura 30.23, a chave S é fechada no instante $t = 0$ sem carga inicial no capacitor. (a) Determine a leitura em cada amperímetro e voltímetro logo após a chave S ser fechada. (b) Determine a leitura de cada instrumento após S estar fechada há muito tempo. (c) Determine a carga máxima no capacitor. (d) Desenhe um gráfico qualitativo da leitura do voltímetro V_2 em função do tempo.

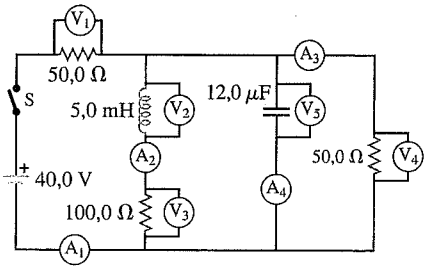


Figura 30.23 Problema 30.63.

30.64 No circuito indicado na Figura 30.24, a bateria e o indutor não possuem resistência interna significativa e não há corrente no circuito. Após a chave ser fechada, determine as leituras do amperímetro (A) e do voltímetro (V_1 e V_2) (a) no instante após a chave ser fechada e (b) após a chave estar fechada há muito tempo. (c) Qual resposta nos itens (a) e (b) sofreria alteração, se considerarmos uma indutância de 24,0 mH?

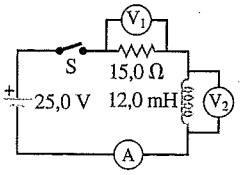


Figura 30.24 Problema 30.64.

30.65 No circuito indicado na Figura 30.25, a chave S é fechada no instante $t = 0$. (a) Determine a leitura de cada instrumento logo após a chave S ser fechada. (b) Qual é a leitura após a chave S estar fechada há muito tempo?

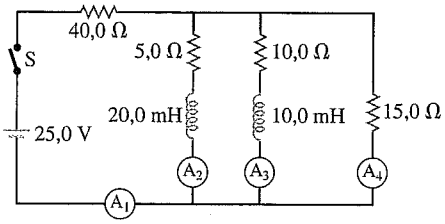


Figura 30.25 Problema 30.65.

30.66 No circuito indicado na Figura 30.26, a chave S está fechada há um longo tempo, o suficiente para que a leitura da corrente esteja estacionária a 3,50 A. Subitamente, a chave S_2 é fechada, e a chave S_1 é aberta no mesmo instante. (a) Qual é a carga máxima que o capacitor receberá? (b) Qual é a corrente no indutor nesse período?

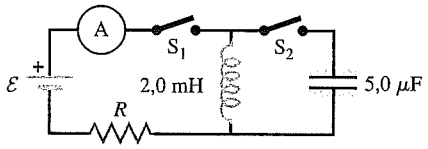


Figura 30.26 Problema 30.66.

30.67 No circuito indicado na Figura 30.27, $\mathcal{E} = 60{,}0$ V, $R_1 = 40{,}0\ \Omega$, $R_2 = 25{,}0\ \Omega$ e $L = 0{,}300$ H. A chave S está fechada para $t = 0$. Logo depois de a chave ser fechada, (a) qual é a diferença de potencial v_{ab} nos terminais do resistor R_1? (b) qual é o ponto que está a um potencial mais elevado, a ou b? (c) qual é a diferença de potencial v_{cd} nos terminais do indutor L? (d) qual é o ponto que está a um potencial mais elevado, c ou d? A seguir, a chave é mantida fechada durante um tempo muito longo e depois é aberta. Logo após a chave ser aberta, (e) qual é a diferença de potencial v_{ab} nos terminais do resistor R_1? (f) qual é o ponto que está a um potencial mais elevado, a ou b? (g) qual é a diferença de potencial v_{cd} nos terminais do indutor L? (h) qual é o ponto que está a um potencial mais elevado, c ou d?

30.68 No circuito indicado na Figura 30.27, $\mathcal{E} = 60{,}0$ V, $R_1 = 40{,}0\ \Omega$, $R_2 = 25{,}0\ \Omega$ e $L = 0{,}300$ H. (a) A chave S está fechada. Em um instante t posterior, a corrente no indutor está crescendo com uma taxa $di/dt = 50{,}0$ A/s. Nesse instante, qual é a corrente i_1 que passa em R_1 e qual é a corrente i_2 que passa em R_2? (*Sugestão:* analise duas espiras separadas: uma contendo $\mathcal{E}$ e R_1

e a outra contendo $\mathcal{E}$, R_2 e L.) (b) A seguir, a chave é mantida fechada durante um tempo muito longo e depois é aberta. Logo depois de ela ser aberta, qual é a corrente que passa em R_1?

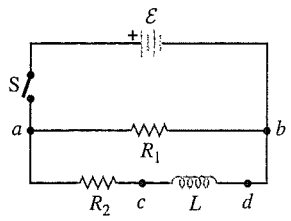


Figura 30.27 Problemas 30.67, 30.68 e 30.75.

30.69 Considere o circuito indicado na Figura 30.28. Seja $\mathcal{E} = 36{,}0$ V, $R_0 = 50{,}0\ \Omega$, $R = 150\ \Omega$ e $L = 4{,}0$ H. (a) A chave S_1 é fechada e a chave S_2 é mantida aberta. Logo depois que a chave S_1 é fechada, quais são os valores da corrente i_0 que passa em R_0, da diferença de potencial v_{ac} e da diferença de potencial v_{cb}? (b) Depois que a chave S_1 é fechada durante um tempo muito longo (mantendo ainda a chave S_2 aberta), de modo que a corrente atinja seu valor estacionário final, quais são os valores de i_0, v_{ac} e v_{cb}? (c) Determine as expressões de i_0, v_{ac} e v_{cb} em função do tempo, a partir do momento em que a chave S_1 é fechada. Seu resultado deve estar de acordo com a resposta do item (a), quando $t = 0$, e com a resposta do item (b), quando $t \to \infty$. Faça um gráfico de i_0, v_{ac} e v_{cb} em função do tempo.

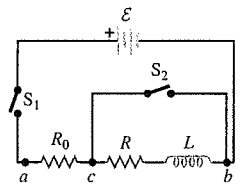


Figura 30.28 Problemas 30.69 e 30.70.

30.70 Depois que a corrente na Figura 30.28 atinge seu valor estacionário final com a chave S_1 fechada e a chave S_2 aberta, a chave S_2 é fechada, colocando o indutor em curto-circuito. (A chave S_1 permanece fechada. Veja o Problema 30.69 para os valores numéricos dos elementos do circuito.) (a) Logo depois de a chave S_2 ser fechada, quais são os valores de v_{ac} e v_{cb} e quais são as correntes que passam em R_0, R e S_2? (b) Depois que a chave S_2 é fechada durante um tempo muito longo, quais são os valores de v_{ac} e v_{cb} e quais são as correntes que passam em R_0, R e S_2? (c) Determine as expressões para as correntes que passam em R_0, R e S_2 em função do tempo desde o momento em que a chave S_2 é fechada. Seu resultado deve concordar com a resposta do item (a) quando $t = 0$ e com a resposta do item (b) quando $t \to \infty$. Faça um gráfico dessas três correntes em função do tempo.

30.71 No circuito indicado na Figura 30.29, a chave está aberta há muito tempo, quando é subitamente fechada. Nem a bateria nem os indutores possuem resistência interna significativa. Revise os resultados do Problema 30.47. (a) Qual é a leitura do amperímetro e a do voltímetro logo após S ser fechada? (b) Quais são essas leituras após S estar fechada há muito tempo? (c) Qual é a leitura do amperímetro e a do voltímetro 0,115 ms após S ser fechada?

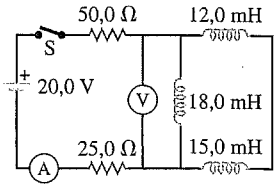


Figura 30.29 Problema 30.71.

30.72 No circuito indicado na Figura 30.30, nem a bateria nem os indutores possuem resistência interna significativa, os capacitores não possuem carga inicial e a chave S está na posição 1 há um longo tempo. Revise os resultados do Problema 30.47. (a) Qual é a corrente no circuito? (b) A chave é agora subitamente passada para a posição 2. Determine a carga máxima que cada capacitor receberá e quanto tempo após a mudança de posição da chave eles levarão para adquirir essa carga.

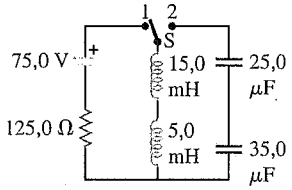


Figura 30.30 Problema 30.72.

30.73 Anteriormente, desprezamos a variação do campo magnético ao longo da seção reta de um solenóide toroidal. Vamos agora examinar a ordem de grandeza dessa aproximação. Um dado solenóide toroidal possui uma seção reta retangular (Figura 30.31). Ele contém ar em seu núcleo e N espiras uniformemente espaçadas. O campo magnético no interior do toróide foi deduzido no Exemplo 28.11 (Seção 28.7). *Não* suponha que o campo magnético seja uniforme ao longo da seção reta. (a) Mostre que o fluxo magnético através da seção reta do toróide é dado por

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(b) Mostre que a indutância do toróide é dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(c) A fração b/a pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{b}{a} = \frac{a + b - a}{a} = 1 + \frac{b - a}{a}$$

Use o desenvolvimento em série de potências $\ln(1 + z) = z + z^2/2 + \ldots$, válido para qualquer $|z| < 1$, para mostrar que, quando $b - a$ é muito menor do que a, a indutância pode ser escrita aproximadamente do seguinte modo:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h (b - a)}{2\pi a}$$

Compare o resultado anterior ao resultado obtido no Exemplo 30.3 (Seção 30.2).

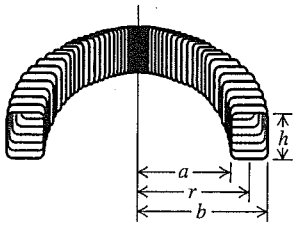


Figura 30.31 Problema 30.73.

30.74 Na Figura 30.32, a chave é fechada, com o capacitor contendo a polaridade indicada. Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente induzida na espira retangular A.

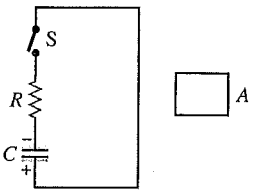


Figura 30.32 Problema 30.74.

30.75 Uma demonstração do efeito da indutância. Uma demonstração comum para o efeito da indutância utiliza um circuito semelhante ao indicado na Figura 30.27. A chave S é fechada, e a lâmpada incandescente (representada pela resistência R_1) possui um brilho muito fraco. Depois de certo tempo, a chave S é aberta e a lâmpada brilha fortemente durante um breve intervalo de tempo. Para entender esse efeito, imagine um indutor como um dispositivo capaz de usar um efeito de inércia para 'segurar' a corrente, impedindo que ocorra uma variação descontínua de corrente através dele. (a) Deduza funções explícitas do tempo para i_1 (a corrente que passa através da lâmpada) e para i_2 (a corrente que passa através do indutor) logo depois que a chave S é fechada. (b) Após um tempo muito longo, as correntes i_1 e i_2 atingem seus valores estacionários finais. Obtenha expressões para esses valores estacionários. (c) A seguir, a chave S é aberta. Deduza funções explícitas do tempo para a corrente que passa através da lâmpada e para a corrente que passa através do indutor. (d) Você foi contratado para projetar um dispositivo experimental para fazer essa demonstração usando o circuito indicado na Figura 30.27, com um indutor de 22,0 H e uma lâmpada de 40,0 W. Você deve conectar um resistor em série ao indutor, e R_2 representa a soma da referida resistência com a resistência interna do indutor. Quando a chave S é aberta, surge uma corrente transiente que começa com 0,600 A e diminui até 0,150 A depois de 0,0800 s. Para simplificar, suponha que a resistência da lâmpada seja constante e igual ao valor da resistência da lâmpada quando dissipa 40,0 W para 120 V. Determine R_2 e $\mathcal{E}$ para as considerações do projeto. (e) Com os valores numéricos calculados no item (d), qual é a corrente que passa na lâmpada logo após a abertura da chave? O resultado obtido confirma a descrição qualitativa do efeito que deve ser observado na demonstração?

Problemas desafiadores

30.76 Considere o circuito indicado na Figura 30.33. Os elementos do circuito possuem os valores $\mathcal{E} = 32{,}0$ V, $L = 0{,}640$ H, $C = 2{,}0\ \mu$F e $R = 400\ \Omega$. A chave S é fechada para $t = 0$. A corrente i_1 passa através do indutor, a corrente i_2 passa através do capacitor e a carga no capacitor é igual a q_2. (a) Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff, verifique as seguintes equações:

$$R(i_1 + i_2) + L\left(\frac{di_1}{dt}\right) = \mathcal{E}$$

$$R(i_2 + i_2) + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$$

(b) Quais eram os valores iniciais de i_1, i_2 e q_2? (c) Por meio de substituição direta nas equações do item (a), mostre que i_1 e q_2 satisfazem essas equações. Mostre que elas também satisfazem as condições iniciais

$$i_1 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)[1 - e^{-\beta t}(2\omega RC)^{-1}\text{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

$$q_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{\omega R}\right)e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t)$$

em que $\beta = (2RC)^{-1}$ e $\omega = [(LC)^{-1} - (2RC)^{-2}]^{1/2}$. (d) Determine o tempo t_1 para o qual i_2 torna-se igual a zero pela primeira vez.

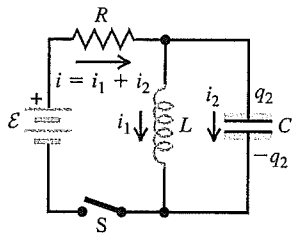


Figura 30.33 Problema desafiador 30.76.

30.77 Um dispositivo para medir volume. Um tanque contendo um líquido possui espiras enroladas em torno dele, fazendo com que ele funcione como um indutor. O volume do líquido no interior do tanque pode ser medido usando-se o valor de sua indutância para determinar a altura do líquido. A indutância do tanque varia de um valor L_0, correspondente a uma permeabilidade relativa igual a 1, quando o tanque está vazio, até um valor L_f, correspondente a uma permeabilidade relativa igual a K_m (a permeabilidade relativa do líquido), quando o tanque está cheio. Um circuito eletrônico apropriado pode determinar a indutância com cinco algarismos significativos e, portanto, é capaz de determinar a permeabilidade relativa efetiva da combinação do volume de ar com o volume do líquido na cavidade retangular do tanque. A seção reta retangular do tanque possui largura W e altura D (Figura 30.34). A altura atingida pelo líquido no tanque é igual a d. Despreze os efeitos de borda e suponha que a permeabilidade relativa do material do tanque seja desprezível. (a) Deduza uma expressão para d em função de L, a indutância correspondente a uma dada altura do líquido, de L_0, L_f e D. (b) Qual é a indutância (com cinco algarismos significativos) para um tanque cheio até $\frac{1}{4}$, cheio até $\frac{1}{2}$, cheio até $\frac{3}{4}$ e completamente cheio de oxigênio líquido? Considere $L_0 = 0{,}63000$ H. A suscetibilidade magnética do oxigênio líquido é $\chi_m = 1{,}52 \times 10^{-3}$. (c) Repita o item (b) para o mercúrio. A suscetibilidade magnética do mercúrio é dada na Tabela 28.1. (d) Para que tipo de material esse dispositivo de medição de volume é mais prático?

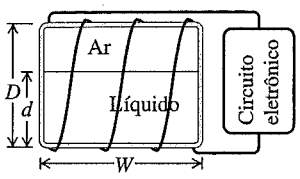


Figura 30.34 Problema desafiador 30.77.

30.78 Duas bobinas possuem enrolamentos semelhantes aos indicados na Figura 30.3. As correntes circulam com o mesmo sentido através das espiras das duas bobinas. Uma bobina apresenta auto-indutância L_1 e a outra possui auto-indutância L_2. A indutância mútua das bobinas é igual a M. (a) Mostre que, se as duas bobinas são ligadas em série, a indutância equivalente da combinação é dada por $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$. (b) Mostre que, se as duas bobinas são ligadas em paralelo, a indutância equivalente da combinação é dada por

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

(*Sugestão:* veja a dica dada no Problema 30.47.)

30.79 Considere o circuito indicado na Figura 30.35. A chave S é fechada para $t = 0$, produzindo uma corrente i_1 que passa através do ramo do indutor e uma corrente i_2 que passa através do ramo do capacitor. A carga inicial do capacitor é igual a zero e a carga no instante t é igual a q_2. (a) Deduza expressões para i_1, i_2 e q_2 em função do tempo. Expresse as respostas em termos de $\mathcal{E}$, L, C, R_1, R_2 e t. Para o restante deste problema, use os seguintes valores para os elementos do circuito: $\mathcal{E} = 48$ V, $L = 8{,}0$ H, $C = 20$ μF, $R_1 = 25$ Ω e $R_2 = 5000$ Ω. (b) Qual é a corrente inicial que passa através do ramo do indutor? Qual é a corrente inicial que passa por meio do ramo do capacitor? (c) Quais são as correntes que passam através do ramo do indutor e do ramo do capacitor um longo tempo depois de a chave ser fechada? Qual é a duração desse 'longo tempo'? Explique. (d) Para qual tempo t_1 (com precisão de dois algarismos significativos) a corrente i_1 torna-se igual a i_2? (*Sugestão:* você deve considerar o desenvolvimento em série da função exponencial.) (e) Calcule i_1 para as condições especificadas no item (d). (f) A corrente total através da bateria é $i = i_1 + i_2$. Para qual tempo t_2 (com precisão de dois algarismos significativos) a corrente i torna-se igual à metade de seu valor final? (*Sugestão*: o cálculo numérico pode ser simplificado se você fizer aproximações adequadas. Um desenho de i_1 e de i_2 em função de t pode ajudar a decidir qual é a aproximação válida.)

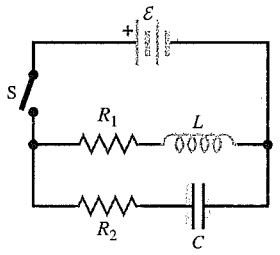
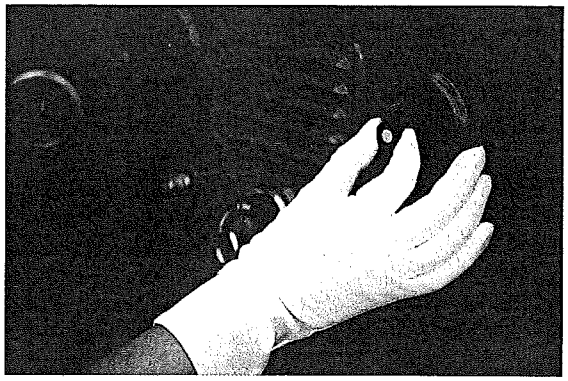


Figura 30.35 Problema desafiador 30.79.

CORRENTE ALTERNADA 31



As ondas de uma estação de radiodifusão produzem uma corrente alternada nos circuitos de um rádio (como o deste em um carro antigo). Quando um rádio é sintonizado a uma freqüência de 1000 kHz, ele também detecta as transmissões de uma estação que transmite a 600 kHz?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como os fasores facilitam a descrição senoidal das grandezas variantes.
- Como usar a reatância para descrever a voltagem através de um elemento de circuito que transporta uma corrente alternada.
- Como analisar um circuito *R-L-C* em série com uma fem senoidal.
- O que determina a quantidade de potência que entra ou sai de um circuito de corrente alternada.
- Como um circuito *R-L-C* em série responde a fems senoidais de freqüências diferentes.
- Por que os transformadores são úteis e como eles funcionam.

Durante a década de 1880, ocorreu nos Estados Unidos um caloroso debate entre dois inventores sobre qual deveria ser o melhor método para a distribuição da energia elétrica. Thomas Edson defendia que a melhor solução seria usar a corrente contínua (cc), ou seja, a corrente que não varia com o tempo. George Westinghouse afirmava que o melhor método consistia em usar a **corrente alternada** (**ca**), ou seja, a corrente que varia senoidalmente. Ele afirmava que o transformador (que estudaremos neste capítulo) funciona somente quando estimulado por uma voltagem ca, e não por voltagem cc; as baixas voltagens são mais seguras para os consumidores, porém é necessário usar uma voltagem muito elevada com baixa corrente correspondente para minimizar as perdas i^2R nos cabos de transmissão que conduzem a corrente elétrica para distâncias muito grandes.

Por fim, as idéias de Westinghouse prevaleceram e quase todos os sistemas atuais de distribuição de energia elétrica funcionam com corrente alternada: qualquer eletrodoméstico que você ligar na tomada da parede usa ca; muitos dispositivos que empregam baterias, como um telefone sem fio ou um rádio de pilha, precisam de um conversor para transformar a corrente contínua da bateria em corrente alternada amplificada. Circuitos modernos usados em dispositivos de comunicação, incluindo a televisão e o telefone celular, também empregam muito a corrente alternada.

Neste capítulo, aprenderemos como os resistores, os indutores e os capacitores se comportam com correntes que variam senoidalmente. Muitos princípios que consideramos úteis nos capítulos 25, 28 e 30 podem ser aplicados, com diversos conceitos novos relacionados ao comportamento de circuitos com capacitores e indutores. Um conceito fundamental neste estudo é a *ressonância*, que vimos no Capítulo 13 para sistemas mecânicos.

31.1 Fasor e corrente alternada

Para fornecer uma corrente alternada a um circuito é necessária uma fonte de voltagem ou fem. Um exemplo desse tipo de fonte é uma espira girando com velocidade angular constante em um campo magnético, conforme discutimos no Exemplo 29.4 (Seção 29.2). Essa rotação produz uma fem senoidal, sendo o protótipo do gerador comercial ou *alternador* (veja a Figura 29.8).

Usaremos a expressão **fonte ca** para qualquer dispositivo que aplique uma voltagem que varia senoidalmente v (diferença de potencial) ou que forneça uma corrente i. Nos diagramas de circuitos elétricos, uma fonte ca é representada pelo seguinte símbolo:

Uma tensão senoidal pode ser representada por uma função do seguinte tipo:

$$v = V\cos\omega t \qquad (31.1)$$

Na expressão anterior, v (com letra minúscula) é a diferença de potencial *instantânea*; V (com letra maiúscula) é a diferença de potencial máxima, que chamaremos de **amplitude da voltagem**; e ω é a *freqüência angular*, que é igual a 2π vezes a freqüência f (Figura 31.1).

Em diversos países, inclusive no Brasil, quase todos os sistemas de distribuição de energia elétrica usam a freqüência $f = 60$ Hz, que corresponde a uma freqüência angular $\omega = (2\pi\,\text{rad})(60\ \text{s}^{-1}) = 377$ rad/s; em alguns países, usa-se a freqüência $f = 50$ Hz ($\omega = 314$ rad/s). De modo análogo, uma corrente senoidal pode ser escrita na forma

$$i = I\cos\omega t \qquad (31.2)$$

em que i (com letra minúscula) é a corrente instantânea e I (com letra maiúscula) é a corrente máxima ou **amplitude da corrente**.

Diagramas de fasores

Para representarmos correntes e tensões que variam senoidalmente, faremos diagramas vetoriais semelhantes aos usados nos estudos dos movimentos harmônicos simples, na Seção 13.2 (veja as figuras 13.5b e 13.6). Nesses diagramas, o valor instantâneo de uma grandeza que varia senoidalmente com o tempo é representado pela *projeção* sobre o eixo horizontal de um vetor cujo comprimento fornece a amplitude da grandeza considerada. O vetor gira

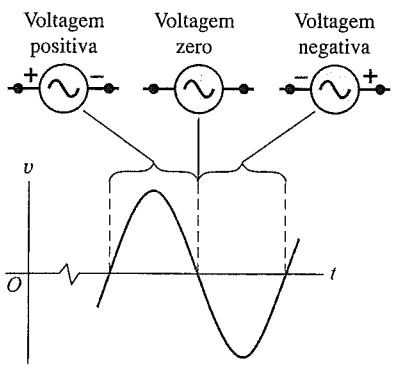


Figura 31.1 Voltagem através de uma fonte ca senoidal.

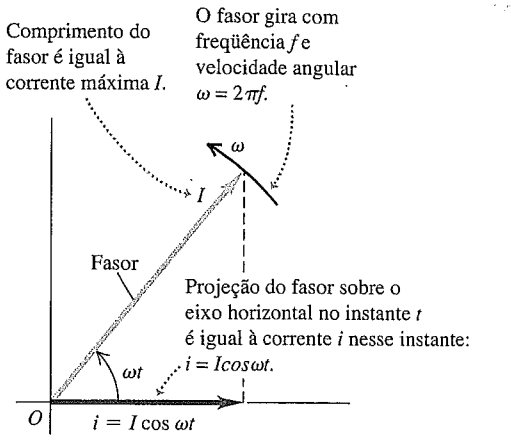


Figura 31.2 Diagrama com um único fasor.

no sentido anti-horário com velocidade angular constante ω. Esses vetores girantes são chamados de **fasores**, e um desenho com essas grandezas é chamado de **diagrama de fasor**. A Figura 31.2 mostra um diagrama com um fasor para descrever a grandeza senoidal descrita pela Equação (31.2). A projeção do fasor sobre o eixo horizontal no instante t é igual a $I\cos\omega t$; essa é a razão pela qual preferimos usar a função co-seno na Equação (31.2), em vez de uma função seno.

ATENÇÃO O que exatamente é um fasor? Um fasor não é uma grandeza vetorial real com direção e sentido no espaço, tal como a velocidade, o momento linear ou o campo elétrico. Em vez disso, trata-se de uma grandeza *geométrica* escalar, que ajuda a descrever e analisar grandezas físicas que variam senoidalmente com o tempo. Na Seção 13.2, empregamos um único fasor para representar a posição de uma massa puntiforme executando um movimento harmônico simples. Neste capítulo, usaremos fasores para *somar* voltagens e correntes senoidais. A combinação de grandezas senoidais com diferenças de fase torna-se, então, um problema de soma vetorial. Voltaremos a usar o método dos fasores em problemas semelhantes nos capítulos 35 e 36, nos quais estudaremos os efeitos da interferência da luz.

Corrente alternada retificada

Como medir uma corrente que varia senoidalmente? Na Seção 26.3, usamos um galvanômetro de d'Arsonval para medir uma corrente contínua. Porém, quando uma corrente *senoidal* passa por um galvanômetro de d'Arsonval, o torque sobre a bobina móvel varia senoidalmente e, durante a metade do ciclo, a corrente passa por um sentido e, durante a outra metade, ela varia no sentido oposto. A agulha pode oscilar um pouco se a freqüência for muito baixa, porém o desvio médio é igual a zero. Portanto, um medidor de d'Arsonval não é útil para medir uma corrente alternada.

Para obtermos uma corrente mensurável fluindo através de um medidor, podemos usar *diodos* — descritos na Seção 25.3. Um diodo (ou retificador) conduz melhor em

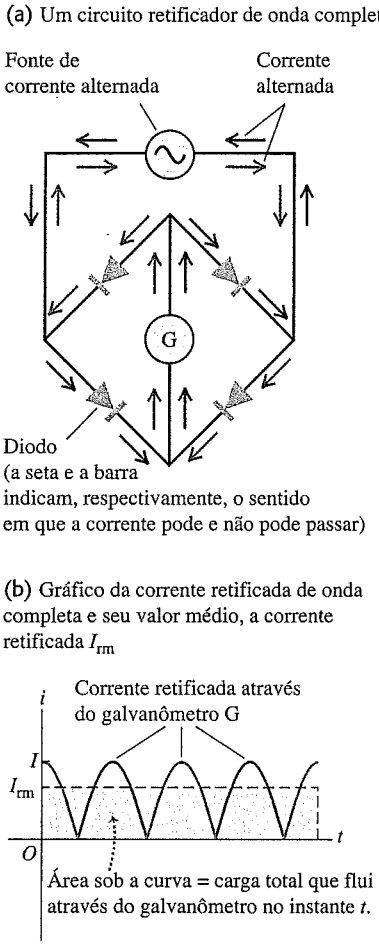


Figura 31.3 (a) Um circuito retificador de onda completa. (b) Gráfico da corrente resultante que passa pelo galvanômetro G.

um sentido do que no outro; um diodo ideal possui resistência nula em um sentido e resistência infinita no sentido oposto. Um arranjo possível é descrito na Figura 31.3a. A corrente que passa no galvanômetro G é sempre orientada no mesmo sentido positivo, independentemente do sentido da corrente fornecida pela fonte ca (i.e., não importa se a metade do ciclo é positiva ou negativa). A corrente que passa em G é indicada pela Figura 31.2b. Ela é pulsante, porém possui sempre o mesmo sentido, e agora o desvio médio do medidor *não* é igual a zero. Esse dispositivo envolvendo diodos denomina-se *retificador de onda completa.*

A **corrente retificada média** I_{rm} é aquela que, considerando qualquer número de ciclos, seria igual a uma corrente contínua que possuísse o mesmo valor I_{rm}. A notação I_{rm}, usada para indicar a corrente *retificada média,* serve para enfatizar que essa corrente *não* é a corrente média da corrente senoidal original. Na Figura 31.3b, a carga total que flui no tempo t corresponde a uma área embaixo da curva de i contra t (lembre-se de que $i = dq/dt$; logo, q é a integral de t); essa área é dada pela área do retângulo com altura I_{rm}. Vemos que I_{rm} é menor do que a corrente máxima I; as duas são relacionadas por

$$I_{rm} = \frac{2}{\pi} I = 0{,}637I \qquad (31.3)$$

(valor médio retificado de uma corrente senoidal)

(O fator $2/\pi$ é o valor médio de $|\cos \omega t|$ ou de $|\operatorname{sen} \omega t|$; veja o Exemplo 29.5, na Seção 29.2.) O desvio do galvanômetro é proporcional a I_{rm}. O galvanômetro pode ser calibrado para ler I, I_{rm} ou, mais freqüentemente, o valor quadrático médio I_{qm} (definido a seguir).

Valor quadrático médio (qm)

Um método mais útil para a descrição de qualquer grandeza positiva ou negativa consiste em usar o *valor quadrático médio* (também chamado de *valor eficaz*) da respectiva grandeza. Já aplicamos o conceito de valor eficaz na Seção 18.3 em conexão com as velocidades das moléculas de um gás. Elevamos ao *quadrado* a corrente instantânea i, tomamos o valor *médio* (a média) de i^2 e, finalmente, extraímos a *raiz quadrada* dessa média. Esse procedimento define a **corrente quadrática média** (ou **corrente eficaz**), que será designada por I_{qm} (Figura 31.4). Mesmo quando i for negativa, i^2 sempre será positiva, de modo que I_{qm} nunca será igual a zero (a menos que i seja nula em todos os instantes).

Vejamos agora como obter a corrente quadrática média I_{qm}, como a indica a Figura 31.4. Se a corrente instantânea for dada por $i = I\cos\omega t$, então

$$i^2 = I^2 \cos^2 \omega t$$

Significado do valor quadrático médio de uma grandeza senoidal (neste caso, corrente ca com $I = 3$ A)

(1) Desenhe o gráfico da corrente *i versus* o tempo.

(2) Faça a *raiz* quadrada da corrente instantânea i.

(3) Calcule o valor *médio* de i^2.

(4) Calcule a *raiz* quadrada dessa média.

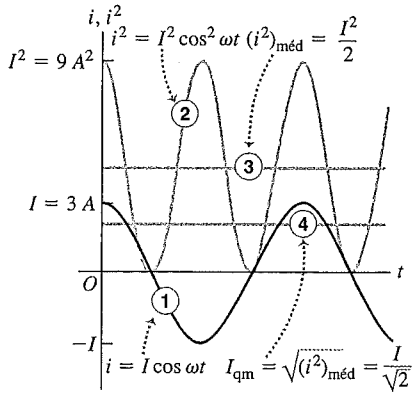


Figura 31.4 Cálculo do valor quadrático médio de uma corrente alternada.

Usando a identidade trigonométrica que relaciona o dobro de um ângulo, obtemos

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$$

encontrando

$$i^2 = I^2\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}I^2 + \frac{1}{2}I^2\cos 2\omega t$$

O valor médio de cos $2\omega t$ é igual a zero, porque a função é positiva na metade do tempo e negativa na outra metade. Portanto, o valor médio de i^2 é simplesmente igual a $I^2/2$. A raiz quadrada desse valor fornece o valor quadrático médio, ou valor eficaz I_{qm}:

$$I_{qm} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad (31.4)$$

(valor quadrático médio de uma corrente senoidal)

De modo análogo, o valor quadrático médio de uma voltagem senoidal de amplitude V (valor máximo) é dado por

$$V_{qm} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad (31.5)$$

(valor quadrático médio de uma voltagem senoidal)

Podemos converter um amperímetro retificador em um voltímetro colocando um resistor em série, tal como fizemos no caso discutido na Seção 26.3. Os multímetros usados para medir uma corrente ou uma voltagem ca são quase sempre calibrados para ler um valor eficaz e não medem o valor máximo nem o valor retificado médio. Cada voltagem e cada corrente são sempre especificadas pelo respectivo valor eficaz nos sistemas de distribuição de energia elétrica. A tensão usual fornecida para as residências de '120 volts ca' possui uma voltagem eficaz igual a 120 V (Figura 31.5). A amplitude da voltagem é dada por

$$V = \sqrt{2}V_{qm} = \sqrt{2}(120\text{ V}) = 170\text{ V}$$

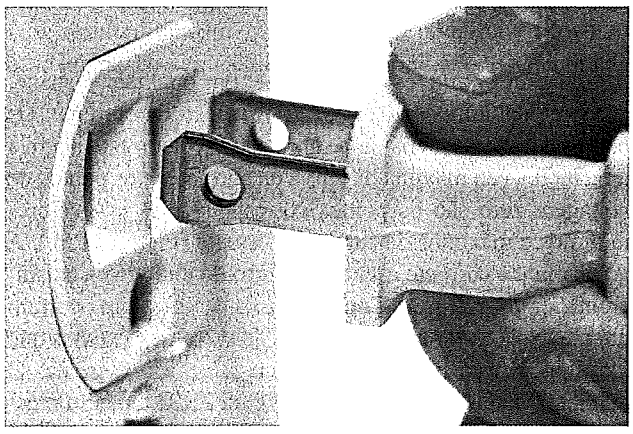


Figura 31.5 Esta tomada de parede fornece uma tensão eficaz de 120 V. A voltagem em seus terminais varia desde $(\sqrt{2})(120\text{ V}) = 170$ V até -170 V, repetindo sempre essa variação 60 vezes por segundo.

Exemplo 31.1

CORRENTE EM UM COMPUTADOR PESSOAL A placa na parte traseira de um computador diz que ele consome 2,7 A de uma linha de 120 V com 60 Hz. Para esse computador, calcule: (a) a corrente média, (b) o valor médio do quadrado da corrente e (c) a amplitude da corrente.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo refere-se à corrente alternada.

PREPARAR: nos itens (b) e (c), usamos o conceito de que a corrente do valor quadrático médio, dada pela Equação (31.4), é a *raiz quadrada* do valor *principal* (médio) do *quadrado* da corrente.

EXECUTAR: (a) O valor médio de *qualquer* grandeza alternada senoidal em um número inteiro de ciclos é sempre igual a zero.

(b) A corrente fornecida é o valor eficaz: $I_{qm} = 2{,}7$ A. A incógnita $(i^2)_{méd}$ é igual ao valor *médio* do *quadrado* da corrente. A corrente do valor quadrático médio é a raiz quadrada dessa incógnita, ou seja

$$I_{qm} = \sqrt{(i^2)_{méd}} \text{ ou } (i^2)_{méd} = (I_{qm})^2 = (2{,}7\text{ A})^2 = 7{,}3\text{ A}^2$$

(c) Pela Equação (31.4), a amplitude da corrente I é

$$I = \sqrt{2}I_{qm} = \sqrt{2}(2{,}7\text{ A}) = 3{,}8\text{ A}$$

A Figura 31.6 mostra os gráficos de i e i^2.

AVALIAR: por que nos interessaria o valor médio do quadrado da corrente? Lembre-se de que a taxa de dissipação da energia em um resistor R é igual a i^2R. Essa taxa varia quando a corrente é alternada, portanto é mais bem descrita pelo seu valor médio $(i^2)_{méd}R = I_{qm}{}^2R$. Aplicamos esse conceito na Seção 31.4.

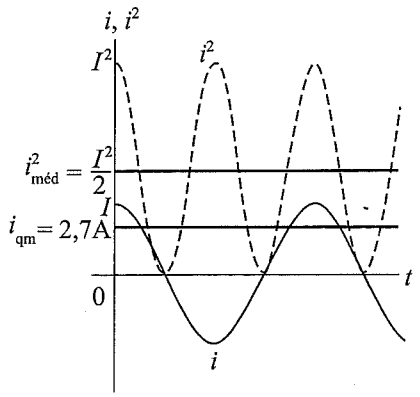
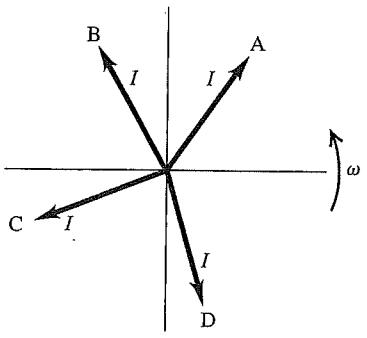


Figura 31.6 Nossos gráficos da corrente i e do quadrado da corrente i^2 *versus* o tempo t.



Teste sua compreensão da Seção 31.1 A figura acima indica quatro diferentes fasores de corrente, com a mesma freqüência angular ω. No instante indicado, qual dos fasores corresponde a (a) uma corrente positiva que se torna mais positiva; (b) uma corrente positiva que diminui, tendendo a zero; (c) uma corrente negativa que se torna mais negativa; (d) uma corrente negativa cujo módulo diminui, tendendo a zero? ▮

31.2 Resistência e reatância

Nesta seção, vamos deduzir uma relação entre a corrente e a voltagem para os elementos individuais de um circuito que conduz uma corrente senoidal. Vamos considerar resistores, indutores e capacitores.

Resistor em um circuito ca

Inicialmente, consideremos um resistor com resistência R através do qual passa uma corrente senoidal dada pela Equação (31.2): $i = I\cos\omega t$. O sentido positivo da corrente é anti-horário em torno do circuito, como na Figura 31.7a. A amplitude da corrente (valor máximo) é I. De acordo com a lei de Ohm, a diferença de potencial instantânea v_R entre um ponto a e um ponto b (ou seja, a voltagem instantânea através do resistor) é dada por

$$v_R = iR = (IR)\cos\omega t \tag{31.6}$$

A voltagem máxima V_R, a *amplitude da voltagem*, é o coeficiente da função co-seno:

$$V_R = IR \tag{31.7}$$

(amplitude de voltagem através de um resistor, circuito ca)

Portanto, podemos também escrever

$$v_R = V_R\cos\omega t \tag{31.8}$$

A corrente i e a voltagem v_R são ambas proporcionais a cos ωt, de modo que a corrente está *em fase* com a voltagem. A Equação (31.7) mostra que a amplitude da corrente é relacionada à amplitude da tensão por meio da mesma equação usada para um circuito de corrente contínua.

A Figura 31.7b mostra um gráfico de i e de v_R em função do tempo. A escala vertical da corrente é diferente da escala da voltagem, de modo que a altura relativa das duas curvas não é relevante. O diagrama de fasor correspondente é fornecido pela Figura 31.7c. Como i e v_R estão *em fase* e possuem a mesma freqüência, os fasores da corrente e da voltagem giram juntos e são paralelos em todos os instantes. Suas projeções sobre o eixo horizontal representam, respectivamente, a corrente e a voltagem.

Indutor em um circuito ca

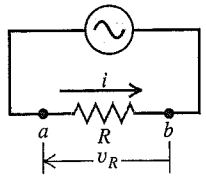
A seguir, troque o resistor na Figura 31.7 por um indutor puro com indutância L e resistência zero (Figura 31.8a). Novamente, supomos uma corrente dada por $i = I\cos\omega t$, com o sentido positivo da corrente i como o sentido do percurso anti-horário em torno do circuito.

Embora não exista nenhuma resistência, há diferença de potencial v_L entre os terminais a e b do indutor, porque a corrente varia com o tempo, dando origem a uma fem auto-induzida. A fem auto-induzida no sentido de i é dada pela Equação (30.7), $\varepsilon = -L\,di/dt$; contudo, a voltagem v_L *não* é simplesmente igual a ε. Para entender o motivo disso, note que a corrente do indutor está orientada no sentido positivo (anti-horário) de a até b e está crescendo, então di/dt é positivo e a *fem* induzida é orientada para a esquerda, a fim de se opor ao aumento da corrente; portanto, o ponto a está a um potencial mais elevado do que o ponto b. Logo, o potencial do ponto a em relação ao ponto b é positivo, sendo dado por $v_L = +L\,di/dt$, o valor da fem com sinal *contrário*. (Você deve se convencer de que essa expressão dá o valor correto de v_L em *todas* as situações, incluindo i anti-horário e diminuindo, i horário e aumentando e i horário e diminuindo; talvez seja interessante fazer uma revisão da Seção 30.2.) Portanto, obtemos

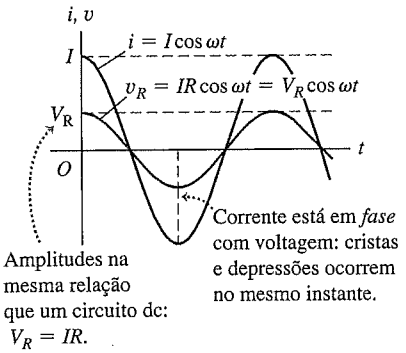
$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I\cos\omega t) = -I\omega L\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{31.9}$$

A voltagem v_L através do indutor é, em qualquer instante, proporcional ao valor da *taxa de variação* da corrente. Os pontos de voltagem máxima sobre o gráfico correspondem a uma inclinação máxima da curva da corrente, e os pontos de voltagem zero são os pontos correspondentes aos valores mínimos e máximos da curva da corrente (Figura 31.8b). A voltagem e a corrente estão um quarto do ciclo 'fora de sincronia' ou *fora de fase*. Como os picos de voltagem ocorrem um quarto do ciclo antes dos picos de corrente, dizemos que a voltagem está *adiantada* 90° em relação à corrente. O diagrama de fasores indicado na Figura 31.8c também mostra essa relação entre as fases; o fasor da voltagem está 90° na frente do fasor da corrente.

(a) Um resistor R conectado aos terminais de uma fonte ca



(b) Gráfico da corrente e da voltagem *versus* o tempo



(c) Diagrama de fasor

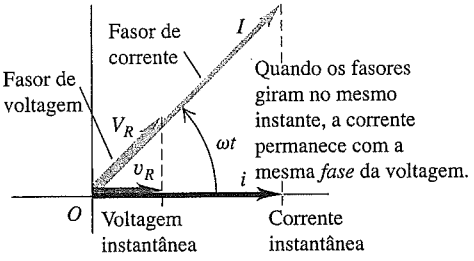


Figura 31.7 Resistência R conectada através de uma fonte ca.

Podemos também obter essa relação de fase reescrevendo a Equação (31.9) e aplicando a identidade $\cos(A + 90°) = -\text{sen}\,A$:

$$v_L = I\omega L\cos(\omega t + 90°) \tag{31.10}$$

Esse resultado mostra que a voltagem pode ser vista como uma função co-seno, cuja 'frente inicial' está 90° adiantada em relação à corrente.

Como fizemos na Equação (31.10), geralmente escrevemos as fases da *voltagem* em relação à *corrente*, e não o contrário. Portanto, quando em um circuito a corrente i é dada por

$$i = I\cos\omega t$$

e a voltagem v de um ponto em relação a outro for dada por

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$

chamamos FI de **ângulo de fase**, pois ele fornece a fase da *voltagem* em relação à *corrente*. No caso de um resistor puro, $\phi = 0$, e, para um indutor puro, $\phi = 90°$.

Pela Equação (31.9) ou (31.10), a amplitude V_L da voltagem do indutor é

$$V_L = I\omega L \tag{31.11}$$

Definimos a **reatância indutiva** X_L de um indutor como

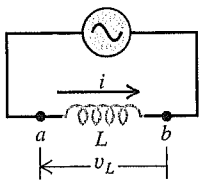
$$X_L = \omega L \tag{31.12}$$
(reatância indutiva)

Usando X_L, podemos escrever a Equação (31.11) de modo análogo à Equação (31.7) para um resistor ($V_R = IR$):

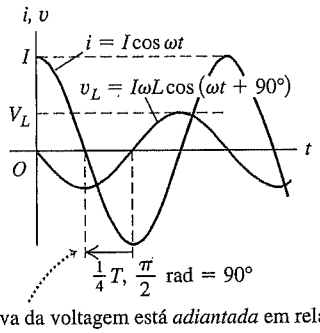
$$V_L = IX_L \tag{31.13}$$
(amplitude de voltagem através de um indutor, circuito ca)

Como X_L é a razão entre uma voltagem e uma corrente, sua unidade SI é o ohm, a mesma unidade usada para resistência.

(a) Circuito com fonte ca e indutor



(b) Gráficos de corrente e voltagem *versus* tempo



A curva da voltagem está *adiantada* em relação à curva da corrente por um quarto de ciclo (correspondendo a $\phi = \pi/2$ rad = 90°).

(c) Diagrama de fasor

O fasor da voltagem está *adiantado* em relação ao fasor da corrente por $\phi = \pi/2$ rad = 90°.

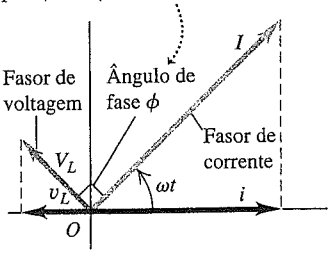


Figura 31.8 Indutância L conectada através de uma fonte ca.

ATENÇÃO A voltagem do indutor e a corrente não estão em fase Lembre-se de que a Equação (31.13) é uma relação entre as *amplitudes* da voltagem oscilante e a corrente para o indutor na Figura 31.8a. Ela *não* diz se a voltagem em qualquer instante é igual à corrente nesse instante multiplicada por X_L. Como indica a Figura 31.8b, a voltagem e a corrente estão fora da fase em 90°. A voltagem e a corrente estão em fase somente para os resistores, como na Equação (31.6).

O significado da reatância indutiva

A reatância indutiva X_L é, na realidade, uma descrição da fem auto-induzida que se opõe a qualquer variação de corrente através do indutor. Pela Equação (31.13), para uma dada amplitude de corrente I, a voltagem $v_L = +L\,di/dt$ através do indutor e a fem auto-induzida $\mathcal{E} = -L\,di/dt$ possuem a mesma amplitude V_L, que é diretamente proporcional a X_L. De acordo com a Equação (31.12), a reatância indutiva e a fem auto-induzida crescem com uma variação mais rápida da corrente (ou quando a freqüência angular ω aumenta) e com o aumento da indutância L.

Quando uma voltagem oscilante com uma dada amplitude de voltagem V_L é aplicada através dos terminais de um indutor, a corrente resultante terá uma amplitude menor I para valores mais elevados de X_L. Uma vez que X_L é proporcional à freqüência, uma voltagem com alta freqüência aplicada ao indutor produz uma corrente pequena, enquanto uma voltagem de baixa freqüência com a mesma amplitude produz uma corrente mais elevada. Os indutores são usados em algumas aplicações em circuitos, tais como fontes de alimentação e filtros de rádio, que servem para bloquear freqüências elevadas enquanto permitem a passagem de freqüências mais baixas ou corrente contínua. Um circuito que emprega um indutor para esse objetivo denomina-se *filtro passa-baixos* (veja o Problema 31.50).

Exemplo 31.2

INDUTOR EM UM CIRCUITO CA Suponha que se queira obter uma corrente de 250 μA em um indutor puro de um circuito de rádio submetido a uma amplitude de voltagem de 3,60 V, com uma freqüência de 1,60 MHz (correspondente ao limite superior da banda AM das freqüências de rádio). (a) Qual é a reatância indutiva necessária? Qual é a indutância? (b) Se a amplitude da voltagem for mantida constante, qual será a amplitude da corrente através de um indutor para 16,0 MHz? E para 160 kHz?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: não conhecemos nenhum outro elemento do circuito do qual o indutor faça parte. E não devemos nos preocupar com esses outros elementos, já que, no contexto deste exemplo, o que eles fazem se resume a fornecer ao indutor uma voltagem oscilante. Portanto, todos esses outros elementos de circuito estão agrupados na fonte ca indicada na Figura 31.8a.

PREPARAR: conhecemos a amplitude de corrente I e a amplitude de voltagem V. As incógnitas do item (a) são a reatância indutiva X_L, a 1,60 MHz e a indutância L, que determinamos pelas equações (31.13) e (31.12). Quando obtemos L, usamos essas mesmas equações para determinar a reatância indutiva e a amplitude de corrente em qualquer outra freqüência.

EXECUTAR: (a) Pela Equação (31.13),

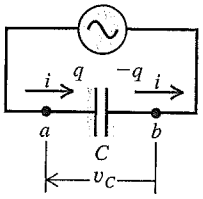
$$X_L = \frac{V_L}{I} = \frac{3{,}60\ \text{V}}{250 \times 10^{-6}\ \text{A}} = 1{,}44 \times 10^4\ \Omega = 14{,}4\ \text{k}\Omega$$

Pela Equação (31.13), com $\omega = 2\pi f$, encontramos

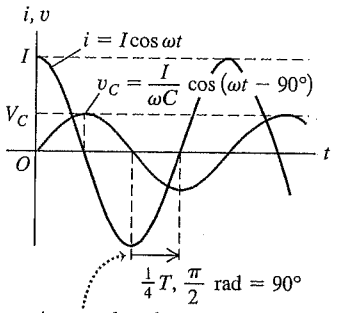
$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{1{,}44 \times 10^4\ \Omega}{2\pi(1{,}60 \times 10^6\ \text{Hz})} = 1{,}43 \times 10^{-3}\ \text{H} = 1{,}43\ \text{mH}$$

(b) Combinando as equações (31.12) e (31.13), verificamos que a amplitude da corrente é dada por $I = V_L/X_L = V_L/\omega L = V_L/2\pi fL$. Logo, a amplitude da corrente é inversamente proporcional à freqüência f. Visto que $I = 250\ \mu$A para $f = 1{,}60$ MHz, a amplitude da corrente para 16,0 MHz (dez vezes a freqüência original) torna-se dez vezes menor, ou 25,0 μA; para 160 kHz = 0,160 MHz (um décimo da freqüência original), a corrente torna-se dez vezes maior, ou 2500 μA = 2,50 mA.

(a) Um circuito com fonte ca e capacitor



(b) Gráficos da corrente e da voltagem em função do tempo



A curva da voltagem está retardada em relação à curva da corrente em um quarto do ciclo, o que corresponde a $\phi = \pi/2$ rad = 90°.

(c) Diagrama de fasor.

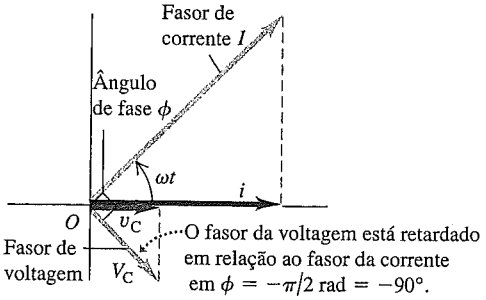


Figura 31.9 Um capacitor C conectado através de uma fonte ca.

AVALIAR: em geral, quanto menor for a freqüência de uma voltagem oscilante aplicada através de um indutor, maior será a amplitude da corrente oscilante resultante.

Capacitor em um circuito ca

Finalmente, conectamos um capacitor com capacitância C, como na Figura 31.9a, produzindo-se uma corrente $i = I\cos\omega t$ através do capacitor. Novamente, consideramos positivo o sentido anti-horário em torno do circuito.

ATENÇÃO Corrente alternada através de um capacitor Você pode contestar isso dizendo que, na realidade, uma carga não pode passar através de um capacitor, porque suas duas placas são separadas por um isolante. Isso é verdade, porém, como o capacitor se carrega e descarrega, existe uma corrente i entrando em uma das placas, uma corrente igual saindo da outra placa e uma corrente de *deslocamento* igual entre as placas, tal como se uma corrente estivesse sendo transportada através do capacitor. (Pode ser conveniente fazer uma revisão da discussão de corrente de deslocamento na Seção 29.7.) Portanto, freqüentemente falamos que uma corrente alternada passa *através* do capacitor.

Para encontrarmos a voltagem instantânea v_C através do capacitor, ou seja, o potencial de um ponto a e um ponto b, inicialmente chamamos de q a carga da placa esquerda do capacitor na Figura 31.9a (logo, $-q$ é a carga da placa direita). A corrente i é relacionada a q por $i = dq/dt$; com essa definição, a corrente positiva corresponde a uma carga crescente na placa esquerda do capacitor. Logo,

$$i = \frac{dq}{dt} = I\cos\omega t$$

Integrando a relação anterior, obtemos

$$q = \frac{I}{\omega}\operatorname{sen}\omega t \tag{31.14}$$

Além disso, pela Equação (24.1), a carga q é igual à voltagem v_C multiplicada pela capacitância, $q = Cv_C$. Substituindo isso na Equação (31.14), encontramos

$$v_C = \frac{I}{\omega C}\operatorname{sen}\omega t \tag{31.15}$$

A corrente instantânea i é igual à taxa de variação dq/dt da carga q do capacitor; visto que $q = Cv_C$, i também é proporcional à taxa de variação da voltagem. (Compare ao indutor, para o qual a situação é inversa e v_L é proporcional à taxa de variação da corrente i.) A Figura 31.9b mostra v_C e i em função de t. Como $i = dq/dt = C\,dv_C/dt$, a corrente possui seu módulo máximo quando a curva v_C aumenta ou diminui mais rapidamente; e a corrente é nula quando v_C atinge seu valor máximo ou mínimo.

A voltagem do capacitor está defasada em um quarto do ciclo da corrente. Os picos da voltagem ocorrem um quarto de ciclo *depois* dos picos da corrente correspondentes; dizemos então que a voltagem se *atrasa* 90° em relação à corrente. O diagrama de fasor na Figura 31.9c mostra essa relação; o fasor da voltagem está 90° atrás do fasor da corrente ou um quarto de ciclo.

Podemos também deduzir essa diferença de fase reescrevendo a Equação (31.15) e usando a identidade $\cos(A - 90°) = \operatorname{sen} A$:

$$v_C = \frac{I}{\omega C}\cos(\omega t - 90°) \tag{31.16}$$

Isso corresponde a um ângulo de fase $\phi = -90°$. Essa função co-seno começa 'depois' de 90° em comparação à corrente $i = I\cos\omega t$.

As equações (31.15) e (31.16) mostram que a voltagem *máxima* V_C (a amplitude da voltagem) é dada por

$$V_C = \frac{I}{\omega C} \tag{31.17}$$

Para colocarmos essa expressão sob forma semelhante à da Equação (31.7) para um resistor, $V_R = IR$, definimos uma grandeza X_C, chamada de **reatância capacitiva** do capacitor, pela relação

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{31.18}$$

(reatância capacitiva)

Portanto,

$$V_C = IX_C \tag{31.19}$$

(amplitude da voltagem através de um capacitor, circuito ca)

A unidade SI de X_C é o ohm, a mesma usada para resistência e reatância indutiva, pois X_C é uma razão entre uma voltagem e uma corrente.

ATENÇÃO Voltagem do capacitor e corrente não estão em fase Lembre-se de que a Equação (31.19) para um capacitor, como a Equação (31.13) para um indutor, *não* é uma afirmação sobre os valores instantâneos de voltagem e de corrente. Os valores instantâneos estão realmente 90° fora de fase, como indica a Figura 31.9b. Em vez disso, a Equação (31.19) relaciona as *amplitudes* da voltagem com a corrente.

O significado da reatância capacitiva

A reatância capacitiva de um capacitor é inversamente proporcional a ω e a C; quanto maior for a capacitância e maior a freqüência, *menor* será a reatância capacitiva X_C. Os capacitores tendem a permitir a passagem de uma corrente com freqüência elevada e bloquear correntes com baixa freqüência ou uma corrente contínua, comportamento exatamente oposto ao de um indutor. Um dispositivo que deixa passar preferencialmente sinais com freqüências elevadas denomina-se *filtro passa-altos* (veja o Problema 31.49).

Exemplo 31.3

RESISTOR E CAPACITOR EM UM CIRCUITO CA Um resistor de 200 Ω é conectado em série com um capacitor de 5,0 μF. A voltagem através do resistor é $v_R = (1{,}20\ \text{V})\cos(2500\ \text{rad/s})t$. (a) Deduza uma expressão para a corrente do circuito. (b) Determine a reatância capacitiva do capacitor. (c) Deduza uma expressão para a voltagem v_C através do capacitor.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como se trata de um circuito em série, a corrente é a mesma através do capacitor e através do resistor. As incógnitas são a corrente i, a reatância capacitiva X_C e a voltagem do capacitor v_C.

PREPARAR: a Figura 31.10 mostra o circuito. Determinamos a corrente através do resistor e, portanto, através do circuito como um todo, usando a Equação (31.6). Usamos a Equação (31.18) para determinar a reatância capacitiva X_C, a Equação (31.19) para determinar a amplitude de voltagem e a Equação (31.16) para escrever uma expressão para a voltagem instantânea através do capacitor.

EXECUTAR: (a) Aplicando $v_R = iR$, verificamos que a corrente i no resistor e, portanto, através do circuito todo é dada por

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{(1{,}2\ \text{V})\cos(2500\ \text{rad/s})t}{200\ \Omega}$$

$$= (6{,}0 \times 10^{-3}\ \text{A})\cos(2500\ \text{rad/s})t$$

(b) Para calcularmos a reatância capacitiva X_C, usamos a Equação (31.18), substituindo $\omega = 2500$ rad/s:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2500\ \text{rad/s})(5{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 80\ \Omega$$

(c) Pela Equação (31.19), a amplitude da voltagem V_C através do capacitor é dada por

$$V_C = IX_C = (6{,}0 \times 10^{-3}\ \text{A})(80\ \Omega) = 0{,}48\ \text{V}$$

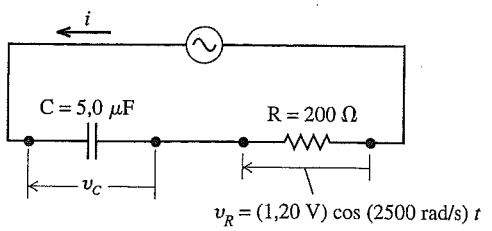


Figura 31.10 Nosso esquema para esse problema.

A reatância de 80 Ω do capacitor é igual a 40% da resistência de 200 Ω do resistor, de modo que o valor de V_C é 40% de V_R. A voltagem instantânea do capacitor é dada pela Equação (31.16):

$$v_C = V_C\cos(\omega t - 90°)$$
$$= (0{,}48\ \text{V})\cos[(2500\ \text{rad/s})t - \pi/2\ \text{rad}]$$

AVALIAR: embora a *corrente* seja a mesma no resistor e no capacitor, as respectivas amplitudes da *voltagem* são diferentes tanto em amplitude quanto em fase. Note que, na expressão para v_C, convertemos 90° para $\pi/2$ rad para que todas as grandezas angulares possuam as mesmas unidades. Na análise de um circuito ca, os ângulos de fase geralmente são dados em graus, de modo que você deve tomar cuidado e converter os ângulos de graus para radianos, quando necessário.

Comparação de elementos de circuito ca

Na Tabela 31.1, apresentamos um resumo das relações envolvendo as amplitudes da voltagem e as amplitudes da corrente para os três elementos de circuito que descrevemos anteriormente. Note que novamente a voltagem *instantânea* e a corrente são proporcionais em um resistor, porque a diferença de fase entre v_R e i no resistor é igual a zero (Figura 31.7b). Os valores instantâneos da voltagem e da corrente *não* são proporcionais em um indutor ou capacitor, porque existe uma diferença de fase de 90° entre a voltagem e a corrente, tanto no indutor (Figura 31.8b) quanto no capacitor (Figura 31.9b).

A Figura 31.11 mostra como a resistência de um resistor e as reatâncias de um indutor e de um capacitor variam com a freqüência angular ω. A resistência R é independente da freqüência, enquanto as reatâncias X_C e X_L dependem da freqüência angular. Quando $\omega = 0$, correspondendo a um circuito cc, *não* existe nenhuma corrente através do capacitor, porque $X_C \to \infty$, e não existe nenhum efeito indutivo, porque $X_L = 0$. No limite, $\omega \to \infty$, X_L também tende ao infinito e a corrente através do indutor torna-se praticamente igual a zero; lembre-se de que a fem auto-induzida

Tabela 31.1 Elementos de circuito no caso de uma corrente alternada

Elemento do circuito	Relações entre amplitudes	Grandeza do circuito	Fase de v
Resistor	$V_R = IR$	R	Em fase com i
Indutor	$V_L = IX_L$	$X_L = \omega L$	Adiantada 90° em relação a i
Capacitor	$V_C = IX_C$	$X_C = 1/\omega C$	Atrasada 90° em relação a i

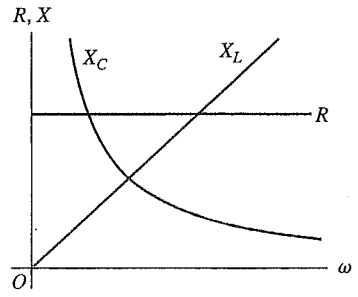


Figura 31.11 Gráficos de R, X_L e X_C em função da freqüência angular ω.

se opõe a variações rápidas da corrente. Nesse mesmo limite, X_C e a voltagem através do capacitor tendem a zero; o sentido da corrente varia tão rapidamente que nenhuma carga pode permanecer sobre qualquer placa.

A Figura 31.12 mostra uma aplicação da discussão anterior para um sistema de alto-falantes. Os sons de baixa freqüência são produzidos pelo *woofer*, que é um alto-falante com diâmetro grande; o *tweeter*, um alto-falante de diâmetro pequeno, produz sons com altas freqüências. Para que os sinais com freqüências diferentes sejam recebidos pelo alto-falante apropriado, o *tweeter* e o *woofer* são conectados em paralelo na saída do amplificador. O capacitor no ramo do *tweeter* bloqueia os componentes de baixa freqüência do som, mas deixa passar as freqüências altas; o indutor no circuito do *woofer* desempenha o papel oposto.

Teste sua compreensão da Seção 31.2 Uma voltagem oscilante de amplitude fixa é aplicada através de um elemento de circuito. Se a freqüência dessa voltagem for aumentada, a amplitude da corrente que passa pelo elemento vai (i) aumentar, (ii) diminuir ou (iii) permanecer constante se for (a) um resistor, (b) um indutor ou (c) um capacitor? ▮

31.3 O circuito *R-L-C* em série

Muitos circuitos ca empregados na eletrônica envolvem resistências, reatâncias indutivas e reatâncias capacitivas. Um exemplo simples é o circuito em série com um resistor, um indutor, um capacitor e uma fonte ca, como indica a Figura 31.13a. (Na Seção 30.6, consideramos o comportamento de um circuito *R-L-C* em série *sem* uma fonte.)

Para analisarmos esse e outros circuitos semelhantes, usaremos um diagrama de fasores que inclui os fasores da corrente e da voltagem para cada um dos componentes. Nesse circuito, tendo em vista a lei das malhas de Kirchhoff, a voltagem instantânea *total* v_{ad} através de todos os três componentes é igual à voltagem da fonte em cada instante. Mostraremos que o fasor que representa essa voltagem total é dado pela *soma vetorial* dos fasores das três voltagens individuais. Diagramas de fasores completos para esse circuito são indicados nas figuras 31.13b e 31.13c. Eles podem parecer complexos, por isso vamos explicar cada etapa separadamente.

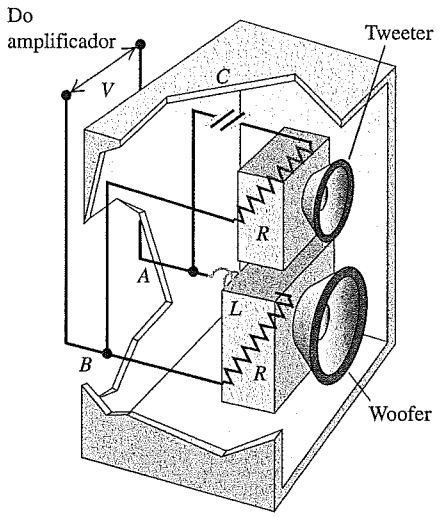
Vamos supor que a fonte forneça uma corrente i dada por $i = I\cos\omega t$. Como os elementos do circuito estão ligados em série, a corrente em cada instante é a mesma em todos os pontos do circuito. Logo, um *único fasor I*, cujo comprimento é proporcional à amplitude da corrente, representa a corrente que passa em *todos* os elementos do circuito.

Tal como na Seção 31.2, usaremos os símbolos v_R, v_L e v_C para as voltagens instantâneas nos terminais de R, de L e de C, e os símbolos V_R, V_L e V_C para as voltagens máximas. Designaremos a voltagem instantânea e a voltagem máxima da *fonte* pelos símbolos v e V, respectivamente. Então, pela Figura 31.13a, $v = v_{ad}$, $v_R = v_{ab}$, $v_L = v_{bc}$ e $v_C = v_{cd}$.

Já mostramos que a diferença de potencial entre os terminais de um resistor está *em fase* com a corrente que passa no resistor e que seu valor máximo V_R é dado pela Equação (31.7):

$$V_R = IR$$

(a) Conexões de alimentação em um sistema de alto-falantes



(b) Gráficos da corrente eficaz em função da freqüência para uma dada voltagem do amplificador

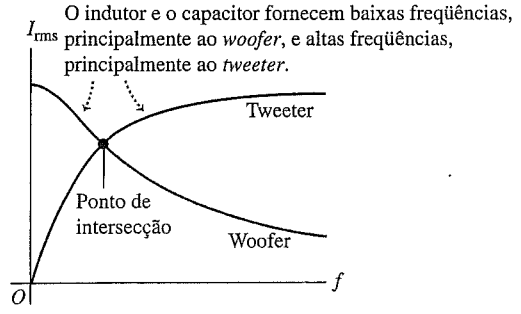


Figura 31.12 (a) Os dois alto-falantes são conectados em paralelo ao amplificador. (b) Gráficos da amplitude da corrente no *woofer* e no *tweeter* em função da freqüência para uma determinada amplitude da voltagem do amplificador.

O fasor V_R na Figura 31.13b, em fase com o fasor da corrente I, representa a voltagem através do resistor. Sua projeção sobre o eixo horizontal em qualquer instante fornece a diferença de potencial instantânea v_R.

A voltagem através do indutor está *adiantada* 90° em relação à corrente. Sua amplitude de voltagem é dada pela Equação (31.13):

$$V_L = IX_L$$

O fasor V_L na Figura 31.13b representa a voltagem através do indutor e sua projeção sobre o eixo horizontal em qualquer instante é igual a v_L.

A voltagem através de um capacitor está *atrasada* 90° em relação à corrente. Sua amplitude de voltagem é dada pela Equação (31.19):

$$V_C = IX_C$$

O fasor V_C na Figura 31.13b representa a voltagem através do capacitor, e sua projeção sobre o eixo horizontal em qualquer instante é igual a v_C.

A diferença de potencial instantânea v entre os terminais a e d é igual, em cada instante, à soma algébrica de cada diferença de potencial v_R, v_L e v_C. Ou seja, ela é dada pela soma das *projeções* dos fasores V_R, V_L e V_C. Porém, a soma das projeções desses fasores é igual à *projeção da soma vetorial* dos fasores. Logo, a soma vetorial que fornece V deve ser o fasor que representa a voltagem da fonte v e a voltagem total instantânea v_{ad} através dos elementos em série.

Para fazermos essa soma vetorial, inicialmente subtraímos o fasor V_C do fasor V_L. (Esses dois fasores estão sempre sobre a mesma linha, com sentidos opostos.) Isso fornece o fasor $V_L - V_C$. O fasor resultante sempre forma um ângulo reto com o fasor V_R, de modo que, usando o teorema de Pitágoras, obtemos para o módulo do fasor V a seguinte expressão:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

$$\text{ou} \quad V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{31.20}$$

Definimos a **impedância** Z de um circuito ca como sendo a razão entre a voltagem aplicada através do circuito e a amplitude da corrente que flui no circuito. Pela Equação (31.20), a impedância de um circuito *R-L-C* é dada por

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{31.21}$$

portanto, a Equação (31.20) pode ser escrita na forma

$$V = IZ \tag{31.22}$$

(amplitude da voltagem através de um circuito ca)

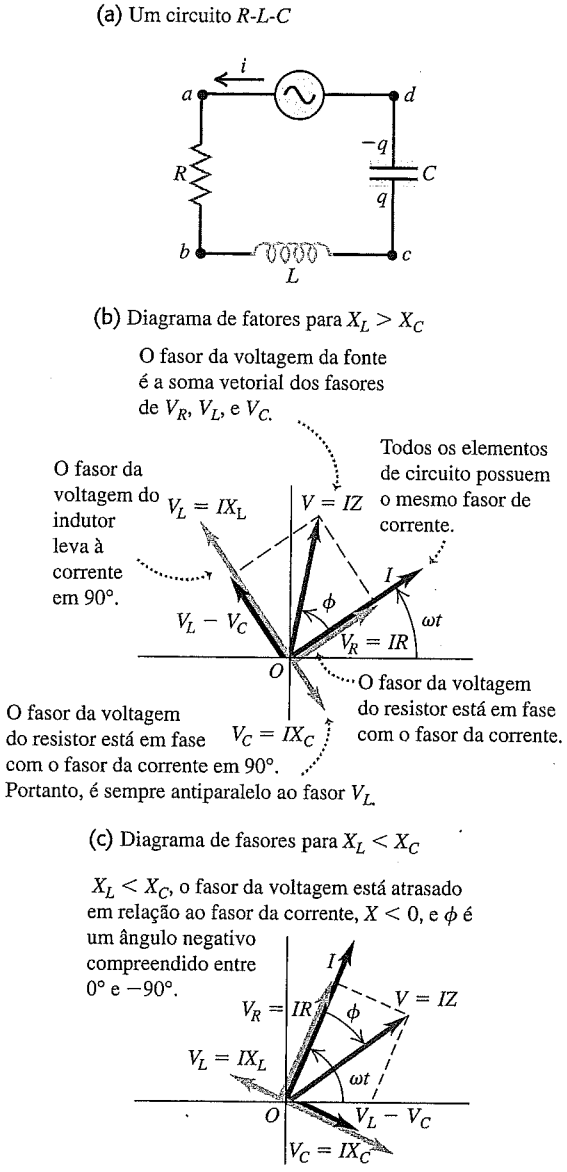


Figura 31.13 Um circuito *R-L-C* conectado em série com os terminais de uma fonte ca.

Embora a Equação (31.21) seja válida somente para um circuito *R-L-C* em série, podemos aplicar a Equação (31.22) para *qualquer* conjunto de circuitos com resistores, indutores e capacitores e definir a impedância do conjunto como a razão entre a amplitude da voltagem que alimenta o conjunto e a amplitude da corrente que passa no circuito equivalente do conjunto. A unidade SI de impedância é o ohm.

O significado de impedância e ângulo de fase

A Equação (31.22) possui forma semelhante a $V = IR$, em que a impedância Z do circuito ca desempenha o papel da resistência R do circuito cc. Assim como a corrente dire-

ta tende a seguir a trajetória da menor resistência, a corrente alternada tende a seguir a trajetória da menor impedância (Figura 31.14). Contudo, observe que, na realidade, a impedância é uma função de R, de L, de C e da freqüência angular ω. Podemos ver essa dependência substituindo na Equação (31.12) o valor de X_L, dado pela Equação (31.18), e X_C, dado pela Equação (31.21), obtendo-se a seguinte expressão completa para Z em circuito em série:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \tag{31.23}$$

(impedância de um circuito *R-L-C* em série)

Portanto, para uma determinada amplitude V da fonte de tensão que alimenta o circuito, a amplitude $I = V/Z$ da corrente será diferente para freqüências diferentes. Estudaremos essa dependência com a freqüência detalhadamente na Seção 31.5.

No diagrama de fasor indicado na Figura 31.13b, o ângulo ϕ entre o fasor da voltagem e o fasor da corrente é o ângulo de fase da voltagem v da fonte em relação à corrente i; ou seja, é o ângulo do avanço da voltagem da fonte em relação à corrente. Pelo diagrama,

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I(X_L - X_C)}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{31.24}$$

(ângulo de fase de um circuito *R-L-C* em série)

Quando a corrente é $i = I\cos\omega t$, então a voltagem da fonte v é dada por

$$v = V\cos(\omega t + \phi) \tag{31.25}$$

A Figura 31.13b mostra o comportamento de um circuito em série no qual $X_L > X_C$. A Figura 31.13c mostra o comportamento quando $X_L < X_C$; o fasor da voltagem V está do lado oposto do fasor I e a voltagem está *atrasada* em relação à corrente. Nesse caso, $X_L - X_C$ é *negativo*, tg ϕ é negativa e ϕ é um ângulo negativo compreendido entre 0° e –90°. Como X_L e X_C dependem da freqüência, o ângulo de fase ϕ também depende da freqüência. Vamos examinar as conseqüências desse comportamento na Seção 31.5.

Todas as expressões que deduzimos para um circuito *R-L-C* em série continuam válidas mesmo que não exista um dos elementos do circuito. Quando não há o resistor, fazemos $R = 0$; quando não existe o indutor, $L = 0$. Porém, quando não há o capacitor, fazemos $C = \infty$, correspondendo à ausência de qualquer diferença de potência ($v_C = q/C = 0$) ou qualquer reatância capacitiva ($X_C = 1/\omega C = 0$).

Em toda esta discussão, descrevemos os módulos das voltagens e das correntes com base em seus valores *máximos*, as *amplitudes* das voltagens e das correntes. Porém, observamos no final da Seção 31.1 que essas grandezas são geralmente descritas mediante o uso do respectivo valor eficaz e não em termos do valor da amplitude da grandeza. O valor eficaz de qualquer grandeza que varia senoidalmente é sempre dado por $1/\sqrt{2}$ vezes a amplitude da grandeza. Todas as relações entre voltagem e corrente que deduzimos nesta seção e na anterior continuam válidas quando descrevemos grandezas mediante o uso do respectivo valor eficaz em vez das amplitudes das grandezas. Por exemplo, dividindo a Equação (31.22) por $\sqrt{2}$, obtemos

$$\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}}Z$$

que pode ser reescrita na forma

$$V_{qm} = I_{qm}Z \tag{31.26}$$

Podemos fazer para as equações (31.7), (31.13) e (31.19) um procedimento exatamente igual.

Consideramos somente circuitos ca para os quais existe um resistor ligado em série com um capacitor e um

Figura 31.14 A esfera de vidro cheia de gás possui uma voltagem alternada aplicada entre sua superfície e o eletrodo existente em seu centro. As descargas luminosas indicam a corrente alternada que passa através do gás. Ao tocar a parte externa da esfera, os dedos e a parte interna da esfera formam um capacitor, e a esfera com o corpo formam um circuito *R-L-C* em série. A corrente (tão pequena que não causa nenhum malefício) é conduzida para os dedos da menina, porque o percurso através do seu corpo possui baixa impedância.

indutor. Você pode fazer uma análise semelhante em um circuito *R-L-C em paralelo* — veja o Problema 31.54.

Finalmente, enfatizamos que, nesta seção, estudamos a condição *estacionária* do circuito, o estado que permanece muito tempo após a conexão da fonte de tensão no circuito. No momento em que a fonte é conectada, surgem voltagens e correntes adicionais, chamadas de *transientes*, que dependem do tempo inicial do ciclo quando o circuito é ligado. Uma análise detalhada de transientes foge ao nosso objetivo. Todos eles desaparecem depois de um tempo suficientemente longo e não alteram o comportamento estacionário do circuito. Contudo, eles podem provocar danos e perdas em linhas de transmissão, sendo essa a razão do uso de complexos sistemas eletrônicos de proteção.

Estratégia para a solução de problemas 31.1

CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: todos os conceitos que usamos para analisar circuitos de corrente contínua também se aplicam a circuitos de corrente alternada. Entretanto, devemos tomar o cuidado para distinguir as amplitudes de correntes alternadas e voltagens dos seus valores instantâneos. Devemos também ter em mente as distinções entre resistência (para resistores), reatância (para indutores ou capacitores) e impedância (para circuitos compostos).

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um diagrama do circuito e designe todas as grandezas conhecidas e desconhecidas.
2. Determine as incógnitas.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Use as relações deduzidas nas seções 31.2 e 31.3 para solucionar as incógnitas, usando as sugestões a seguir.
2. Em problemas de circuito ca, quase sempre é mais fácil usar a freqüência angular ω. Quando a freqüência f for expressa em Hz, não se esqueça de convertê-la usando a relação $\omega = 2\pi f$.
3. Memorize alguns fatos básicos sobre relações de fase. Para um resistor, a voltagem e a corrente estão sempre *em fase* e os dois fasores correspondentes no diagrama de fasores possuem sempre a mesma direção e o mesmo sentido. Para um indutor, a voltagem está sempre *adiantada* 90° em relação à corrente (ou seja, $\phi = +90°$) e o fasor da voltagem gira sempre 90° no sentido anti-horário a partir do fasor da corrente. Para um capacitor, a voltagem está sempre *atrasada* 90° em relação à corrente (ou seja, $\phi = -90°$) e o fasor da voltagem gira sempre 90° no sentido horário a partir do fasor da corrente.
4. Lembre-se de que em um circuito ca todas as voltagens e correntes são funções senoidais do tempo e não são constantes, porém as leis de Kirchhoff são válidas a cada instante. Logo, em um circuito em série, a corrente instantânea é a mesma através de todos os elementos do circuito; em um circuito paralelo, a diferença de potencial instantânea é a mesma através de todos os elementos do circuito.
5. A reatância indutiva, a reatância capacitiva e a impedância desempenham papéis análogos ao papel da resistência. Cada uma dessas grandezas é a razão entre a amplitude da voltagem V e a amplitude da corrente I, em um elemento do circuito ou através da combinação de elementos. Contudo, lembre-se de que as relações que envolvem as fases desempenham um papel crucial; os efeitos da resistência e da reatância devem ser combinados com as regras da soma *vetorial* dos fasores das voltagens correspondentes, como nas figuras 31.13b e 31.13c. Quando houver diversos elementos do circuito ligados em série, por exemplo, você não pode apenas *somar* os valores numéricos das resistências e reatâncias para obter a impedância; com esse procedimento, você estaria ignorando as relações entre as fases.

AVALIAR *sua resposta*: ao lidar com um circuito *R-L-C* em série, você pode conferir os resultados comparando os valores da reatância indutiva X_L com os da reatância capacitiva X_C. Se $X_L > X_C$, a amplitude da voltagem através do indutor é maior do que aquela através do capacitor e o ângulo de fase é positivo (entre 0° e 90°). Se $X_L < X_C$, a amplitude da voltagem através do indutor é menor do que aquela através do capacitor e o ângulo de fase ϕ é negativo (entre 0° e –90°).

Exemplo 31.4

UM CIRCUITO *R-L-C* EM SÉRIE No circuito em série da Figura 31.13a, suponha que $R = 300\ \Omega$, $L = 60$ mH, $C = 0{,}50\ \mu$F, $V = 50$ V e $\omega = 10000$ rad/s. Calcule as reatâncias X_L e X_C, a impedância Z, a amplitude da corrente I, o ângulo de fase ϕ e a amplitude da voltagem através de cada elemento do circuito.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa os conceitos desenvolvidos na Seção 31.2 e nesta seção sobre o comportamento dos elementos de circuito em um circuito ca.

PREPARAR: usamos as equações (31.12) e (31.18), para determinar as reatâncias e a Equação (31.23) para determinar a impedância. A seguir, usamos a Equação (31.22) para determinar a amplitude da corrente e a Equação (31.24) para calcular o ângulo de fase. Obtida essa informação, as relações na Tabela 31.1 fornecem as amplitudes de voltagem.

EXECUTAR: as reatâncias indutiva e capacitiva são:

$$X_L = \omega L = (10000\ \text{rad/s})(60\ \text{mH}) = 600\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(10000\ \text{rad/s})(0{,}50\times 10^{-6}\ \text{F})} = 200\ \Omega$$

A impedância do circuito é:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (600\ \Omega - 200\ \Omega)^2} = 500\ \Omega$$

Como a amplitude da voltagem é $V = 50$ V, a amplitude da corrente é

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0{,}10\ \text{A}$$

O ângulo de fase ϕ é

$$\phi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\frac{400\ \Omega}{300\ \Omega} = 53°$$

Pela Tabela 31.1, as amplitudes de voltagem V_R, V_L e V_C através do resistor, do indutor e do capacitor, respectivamente, são:

$$V_R = IR = (0{,}1\text{ A})(300\ \Omega) = 30\text{ V}$$
$$V_L = IX_L = (0{,}1\text{ A})(600\ \Omega) = 60\text{ V}$$
$$V_C = IX_C = (0{,}1\text{ A})(200\ \Omega) = 20\text{ V}$$

AVALIAR: note que $X_L > X_C$, de modo que a amplitude da voltagem através do indutor é maior que aquela através do capacitor e ϕ é negativo. O valor $\phi = -53°$ significa que a voltagem da corrente está *adiantada* em 53°; assim como na situação indicada na Figura 31.13b.

Note que a amplitude de voltagem da fonte $V = 50$ V *não* é igual à soma das amplitudes das voltagens através de cada elemento do circuito. (Ou seja, 50 V ≠ 30 V + 60 V + 20 V.) Verifique se você entendeu por que não é!

Exemplo 31.5

UM CIRCUITO *R-L-C* EM SÉRIE II Para o circuito *R-L-C* em série apresentado no Exemplo 31.4, descreva a dependência com o tempo da corrente instantânea e de cada voltagem instantânea.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no Exemplo 31.4 encontramos as *amplitudes* da corrente e das voltagens. Neste caso, devemos obter as expressões para os *valores instantâneos* da corrente e das voltagens. Como aprendemos na Seção 31.2, a voltagem que passa por um resistor está em fase com a corrente, mas as voltagens que atravessam um indutor ou capacitor não estão. Também aprendemos nesta seção que ϕ é o ângulo de fase entre a voltagem da fonte e a corrente.

PREPARAR: ao descrever a corrente usando a Equação (31.2), as voltagens são dadas pela Equação (31.8) para o resistor, a Equação (31.10) para o indutor, a Equação (31.16) para o capacitor e a Equação (31.25) para a fonte.

EXECUTAR: a corrente e todas as voltagens oscilam com a mesma freqüência angular $\omega = 10000$ rad/s e, portanto, com o mesmo período, $2\pi/\omega = 2\pi/(10000\text{ rad/s}) = 6{,}3 \times 10^{-4}$ s = 0,63 ms. A corrente é descrita pela Equação (31.2),

$$i = I\cos\omega t = (0{,}10\text{ A})\cos(10000\text{ rad/s})t$$

Essa escolha significa simplesmente que definimos $t = 0$ como o instante no qual a corrente atinge seu valor máximo. A voltagem do resistor está *em fase* com a corrente; logo

$$v_R = V_R\cos\omega t = (30\text{ V})\cos(10000\text{ rad/s})t$$

A voltagem do indutor está *adiantada* 90° em relação à corrente, portanto

$$v_L = V_L\cos(\omega t + 90°) = -V_L\,\text{sen}\,\omega t$$
$$= -(60\text{ V})\,\text{sen}\,(10000\text{ rad/s})t$$

A voltagem do capacitor está *atrasada* 90° em relação à corrente, portanto

$$v_C = V_C\cos(\omega t - 90°) = V_C\,\text{sen}\,\omega t$$
$$= (20\text{ V})\,\text{sen}\,(10000\text{ rad/s})t$$

Finalmente, a voltagem da fonte (igual à voltagem total através do resistor, do indutor e do capacitor) está *adiantada* de um ângulo $\phi = 53°$ em relação à corrente; logo,

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$
$$= (50\text{ V})\cos\left[(10.000\text{ rad/s})t + \left(\frac{2\pi\text{ rad}}{360°}\right)(53°)\right]$$
$$= (50\text{ V})\cos[(10.000\text{ rad/s})t + 0{,}93\text{ rad}]$$

AVALIAR: a Figura 31.15 mostra um gráfico das diversas voltagens *versus* o tempo. A voltagem do indutor possui uma amplitude maior que a voltagem do capacitor, porque $X_L > X_C$. Enquanto a amplitude da voltagem da fonte V não é igual à soma das amplitudes das voltagens individuais V_R, V_L e V_C, a voltagem *instantânea* da fonte v é sempre dada pela soma das voltagens instantâneas v_R, v_L e v_C. Você pode verificar isso medindo os valores das voltagens indicados nos gráficos para diferentes valores do tempo t.

Teste sua compreensão da Seção 31.3 Classifique os seguintes circuitos ca por ordem de amplitude de corrente, do maior para o menor valor. (i) O circuito no Exemplo 31.4; (ii) o circuito no Exemplo 31.4 com o capacitor e o indutor removidos; (iii) o circuito no Exemplo 31.4 com o resistor e o capacitor removidos; (iv) o circuito no Exemplo 31.4 com o resistor e o indutor removidos. ∎

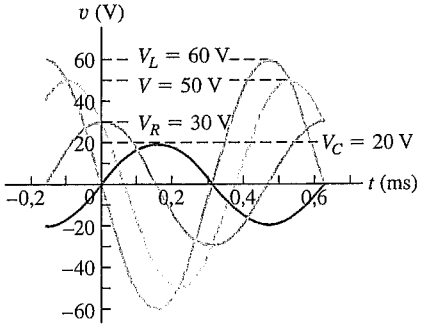


Figura 31.15 Gráficos da voltagem da fonte v, da voltagem do resistor v_R, da voltagem do indutor v_L e da voltagem do capacitor v_C em função do tempo para a situação descrita no Exemplo 31.4. A corrente, não indicada, está em fase com a voltagem através do resistor.

31.4 Potência em circuitos de corrente alternada

As correntes alternadas desempenham um papel fundamental nos sistemas para distribuição, conversão e uso da energia elétrica, por isso é importante pesquisar as relações que envolvem a potência em circuitos ca. Para um circuito ca com uma corrente instantânea i e amplitude de corrente I, vamos considerar um elemento desse circuito através do qual existe uma diferença de potencial instantânea v com uma amplitude de voltagem V. A potência instantânea p fornecida para esse elemento do circuito é dada por

$$p = vi$$

Vamos, inicialmente, verificar o que isso significa para os elementos individuais do circuito. Para cada caso, vamos supor que $i = I\cos\omega t$.

Potência em um resistor

Suponha, inicialmente, que o elemento do circuito seja um *resistor puro* R, como indicado na Figura 31.7a; portanto, $v = v_R$ e i estão *em fase*. Obtemos o gráfico que representa p multiplicando as alturas dos gráficos de v e de i na Figura 31.7b em cada instante. Esse gráfico é indicado pela letra p na Figura 31.16a. O produto vi é sempre positivo porque ou ambos são positivos ou ambos são negativos. Portanto, a energia é fornecida *para* o resistor em cada instante nos dois sentidos de i, embora a potência não seja constante.

A curva da potência para um resistor puro é simétrica em torno de um valor igual à metade de seu valor máximo VI; logo, a *potência média* $P_{méd}$ é dada por

$$P_{méd} = \frac{1}{2}VI \qquad (31.27)$$

(para um resistor puro)

Uma expressão equivalente é

$$P_{méd} = \frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}} = V_{qm}I_{qm} \qquad (31.28)$$

(para um resistor puro)

Porém, como $V_{qm} = I_{qm}R$, podemos também expressar $P_{méd}$ mediante qualquer uma das seguintes relações:

$$P_{méd} = I_{qm}^2R = \frac{V_{qm}^2}{R} = V_{qm}I_{qm} \qquad (31.29)$$

(para um resistor puro)

Note que as expressões na Equação (31.29) possuem a mesma forma que as relações correspondentes para um circuito de corrente contínua, Equação (25.18). Note também que elas valem somente para resistores puros, mas não para circuitos mais complicados que envolvam combinações de elementos.

Potência em um indutor

A seguir, conectamos a fonte a um indutor puro L, como na Figura 31.8a. A voltagem $v = v_L$ está adiantada 90° em relação à corrente i. Quando multiplicamos as curvas de v e de i, o produto vi é *negativo* durante a metade do ciclo quando v e i possuem sentidos *contrários*. A curva da potência indicada na Figura 31.16b é simétrica em relação ao eixo

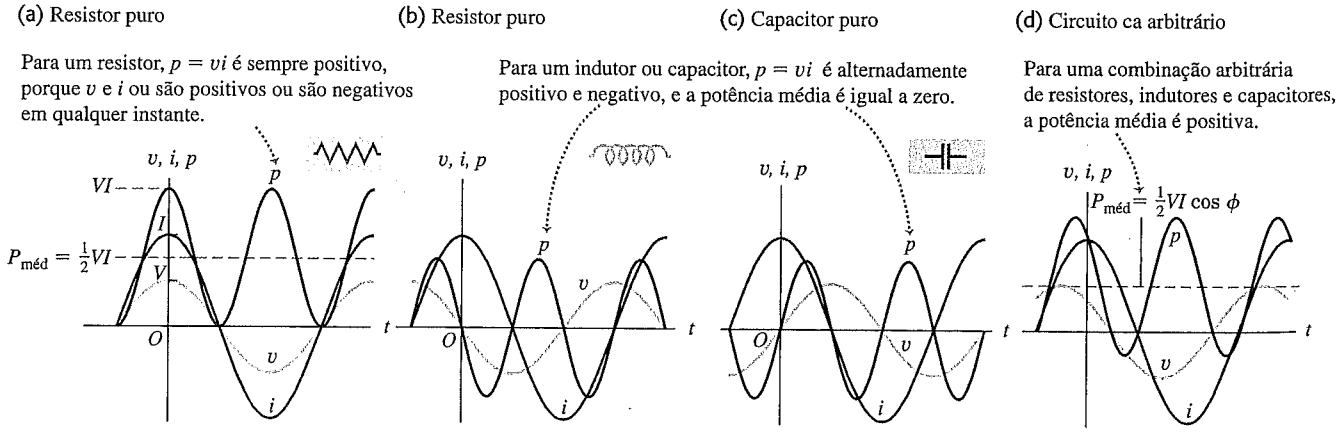


Figura 31.16 Gráficos da corrente, da voltagem e da potência em função do tempo para (a) um resistor puro, (b) um indutor puro, (c) um capacitor puro e (d) um circuito ca arbitrário que pode possuir resistência, indutância e capacitância.

horizontal, é positiva na metade do tempo e negativa na outra metade, e a potência média é igual a zero. Quando p é positivo, a energia está sendo fornecida para criar o campo magnético no indutor; quando p é negativo, o campo está diminuindo e o indutor restitui a energia para a fonte. A energia líquida transferida no ciclo é igual a zero.

Potência em um capacitor

Finalmente, conectamos à fonte um capacitor puro C, como indicado na Figura 31.9a. A voltagem $v = v_C$ está atrasada 90° em relação à corrente i. A Figura 31.16c mostra a curva da potência; a potência média é novamente igual a zero. A energia é fornecida para carregar o capacitor e restituída para a fonte quando o capacitor é descarregado. A transferência de energia líquida em um ciclo é novamente igual a zero.

Potência em um circuito ca genérico

Em *qualquer* circuito ca, com uma combinação arbitrária de resistores, capacitores e indutores, a voltagem v através do circuito todo possui algum ângulo de fase ϕ em relação à corrente i. Então, a potência instantânea p é dada por

$$p = vi = [V\cos(\omega t + \phi)][I\cos\omega t] \qquad (31.30)$$

A curva da potência instantânea possui a forma indicada na Figura 31.16d. A área compreendida entre as partes positivas e o eixo horizontal é maior que a área entre as partes negativas e o eixo horizontal; a potência média é positiva.

Usando a Equação (31.30), podemos deduzir uma expressão para a *potência média* $P_{\text{méd}}$ usando a identidade do co-seno da soma de dois ângulos:

$$\begin{aligned} p &= [V(\cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi)][I\cos\omega t] \\ &= VI\cos\phi\cos^2\omega t - VI\operatorname{sen}\phi\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

Pela discussão na Seção 31.1, que serviu para deduzir a Equação (31.4), vimos que o valor médio de $\cos^2\omega t$ (sobre um ciclo) é igual a $\frac{1}{2}$. O valor médio de $\cos\omega t\,\operatorname{sen}\omega t$ é zero,

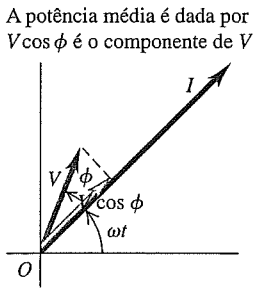


Figura 31.17 Uso de fasores para calcular a potência média de um circuito ca arbitrário.

porque esse produto é igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\omega t$, cujo valor médio sobre um ciclo é igual a zero. Logo, a potência média $P_{\text{méd}}$ é dada por

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2}VI\cos\phi = V_{\text{qm}}I_{\text{qm}}\cos\phi \qquad (31.31)$$

(potência média em um circuito ca genérico)

Quando v e i estão em fase, $\phi = 0$; logo, a potência média é dada por $\frac{1}{2}VI = V_{\text{qm}}I_{\text{qm}}$; quando v e i possuem uma diferença de fase de 90°, a potência média é igual a zero. No caso geral, quando v possui um ângulo de fase ϕ em relação a i, a potência média é igual a $\frac{1}{2}I$ vezes $V\cos\phi$, o componente do fasor da voltagem que está *em fase* com o fasor da corrente. A Figura 31.17 mostra a relação geral entre o fasor da corrente e o fasor da voltagem. Para o circuito *R-L-C* em série, as figuras 31.13b e 31.13c mostram que $V\cos\phi$ é igual à amplitude da voltagem V_R através do resistor; portanto, a Equação (31.31) é a potência média dissipada no resistor. Na média não existe nenhum fluxo de energia para dentro ou para fora do indutor ou do capacitor; logo, $P_{\text{méd}}$ não entra nem sai de nenhum desses dois elementos do circuito.

O fator $\cos\phi$ denomina-se **fator de potência** do circuito. Para uma resistência pura, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ e $P_{\text{méd}} = V_{\text{qm}}I_{\text{qm}}$. Para um indutor ou para um capacitor, $\phi = \pm 90°$, $\cos\phi = 0$ e $P_{\text{méd}} = 0$. Para um circuito em série *R-L-C*, o fator de potência é igual a R/Z; deixaremos a prova dessa afirmação como um problema para você resolver (veja o Exercício 31.27).

Um fator de potência pequeno (ângulo de fase com atraso ou adiantamento elevado) costuma ser indesejável em circuitos de potência. A explicação é que, para uma determinada diferença de potencial, uma corrente elevada torna-se necessária para que seja fornecida uma dada potência. Isso produz uma elevada perda de i^2R nas linhas de transmissão. A empresa de distribuição de energia elétrica de sua cidade pode cobrar uma taxa mais alta de um cliente com fator de potência mais baixo. Muitas máquinas e aparelhagens ca produzem uma corrente *atrasada*, ou seja, a corrente que percorre as máquinas está atrasada em relação à voltagem aplicada; portanto, a voltagem está adiantada em relação à corrente, logo, $\phi > 0$ e $\cos\phi < 1$. O fator de potência pode ser corrigido até o valor ideal igual a 1, conectando-se um capacitor em paralelo com a carga. A corrente através do capacitor está *adiantada* em relação à tensão (ou seja, a voltagem através do capacitor está atrasada em relação à corrente), o que produz uma compensação pelo atraso da corrente no outro ramo do circuito. O próprio capacitor não absorve nenhuma potência líquida do circuito.

Exemplo 31.6

POTÊNCIA DE UM SECADOR DE CABELO Um secador de cabelo elétrico consome uma potência de 1500 W para 120 V. A potência especificada por esse secador de cabelo ou por qualquer outro dispositivo ca é a potência *média* consumida pelo dispositivo e a voltagem especificada é dada pelo valor eficaz da voltagem. Calcule (a) a resistência; (b) a corrente eficaz; e (c) a potência instantânea máxima. Suponha que o secador de cabelo seja uma resistência pura. (O elemento de aquecimento do secador de cabelo atua como um resistor.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assumimos que o secador de cabelo é uma resistência pura. Temos a potência média $P_{méd} = 1500$ W e a voltagem eficaz $V_{qm} = 120$ V. As incógnitas são a resistência R, a corrente eficaz I_{qm} e o valor máximo da potência instantânea p.

PREPARAR: explicitamos a Equação (31.29) para determinar a resistência R. Determinamos a corrente eficaz de V_{qm} e $P_{méd}$ usando a Equação (31.28) e achamos a potência instantânea máxima pela Equação (31.30).

EXECUTAR: (a) pela Equação (31.29), a resistência é

$$R = \frac{V_{qm}^2}{P_{méd}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1500\ \text{W}} = 9{,}6\ \Omega$$

(b) De acordo com a Equação (31.28),

$$I_{qm} = \frac{P_{méd}}{V_{qm}} = \frac{1500\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 12{,}5\ \text{A}$$

(c) Para um resistor puro, a voltagem e a corrente estão em fase e o ângulo de fase ϕ é igual a zero. Logo, pela Equação (31.30), a potência instantânea é $p = VI\cos^2\omega t$ e a potência instantânea máxima $p_{máx} = VI$. De acordo com a Equação (31.27), isso é o dobro da potência média $P_{méd}$, portanto

$$p_{máx} = VI = 2P_{méd} = 2(1500\ \text{W}) = 3000\ \text{W}$$

AVALIAR: podemos confirmar o resultado obtido no item (b) usando a Equação (31.7): $I_{qm} = V_{qm}/R = (120\text{V})/(9{,}6\ \Omega) = 12{,}5$ A. Note que alguns fabricantes de amplificadores estéreo anunciam as saídas de potência em termos do valor de pico em vez do valor médio inferior, para enganar consumidores desatentos.

Exemplo 31.7

POTÊNCIA EM CIRCUITO *R-L-C* EM SÉRIE Para o circuito *R-L-C* mencionado no Exemplo 31.4, (a) calcule o fator de potência; (b) calcule a potência média fornecida pelo circuito todo e para cada elemento do circuito.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: podemos usar todos os resultados obtidos no Exemplo 31.4.

PREPARAR: o fator de potência é justamente o co-seno do ângulo de fase ϕ, e a Equação (31.31) permite determinar a potência média fornecida em termos de ϕ e das amplitudes de voltagem e corrente.

EXECUTAR: (a) O fator de potência é dado por $\cos\phi = \cos 53° = 0{,}60$.

(b) Pela Equação (31.31), a potência média fornecida ao circuito é

$$P_{méd} = \tfrac{1}{2}VI\cos\phi = \tfrac{1}{2}(50\ \text{V})(0{,}10\text{A})(0{,}60) = 1{,}5\ \text{W}$$

AVALIAR: enquanto $P_{méd}$ é a potência média fornecida para a combinação *R-L-C*, toda essa potência é dissipada no resistor. A potência média transferida para um indutor puro ou um capacitor puro é sempre igual a zero (veja as figuras 31.16b e 31.16c).

Teste sua compreensão da Seção 31.4 A Figura 31.16d mostra que, durante uma parte do ciclo de oscilação, a potência instantânea transferida para o circuito é negativa. Isso significa que a energia está sendo extraída do circuito. (a) De onde a energia está sendo extraída? (i) Do resistor; (ii) do indutor; (iii) do capacitor; (iv) da fonte ca; (v) de mais de um desses elementos. (b) Para onde vai a energia? (i) para o resistor; (ii) para o indutor; (iii) para o capacitor; (iv) para a fonte ca; (v) para mais de um desses elementos. ∎

31.5 Ressonância em circuitos de corrente alternada

Muitas aplicações práticas dos circuitos *R-L-C* em série se devem ao modo pelo qual tais circuitos respondem a diferentes fontes de freqüência angular ω. Por exemplo, um circuito de sintonia típico em um receptor de rádio é simplesmente um circuito *R-L-C* em série. Um sinal de rádio com qualquer freqüência produz uma corrente com a mesma freqüência no circuito do receptor, porém a amplitude da corrente atinge seu valor *máximo* quando a freqüência do sinal é igual a uma freqüência particular para a qual o circuito receptor se encontra 'sintonizado'. Esse efeito é chamado de *ressonância*. O circuito é projetado de tal modo que os sinais de sintonia produzem correntes tão pequenas que não ocorre nenhum som audível no alto-falante do rádio.

Para verificar como um circuito *R-L-C* pode ser usado desse modo, suponha que você conecte uma fonte ca cuja amplitude da voltagem V seja constante, porém com uma freqüência angular ω ajustável através de um circuito *R-L-C* em série. A corrente que surge no circuito possui a mesma freqüência angular da fonte e uma amplitude de corrente $I = V/Z$, em que Z é a impedância do circuito *R-L-C* em série. Essa impedância depende da freqüência, como mostra a Equação (31.23). A Figura 31.18a apresenta gráficos de R, X_L, X_C e Z em função de ω. Usamos uma escala logarítmica para a freqüência angular de modo a cobrir um vasto intervalo de freqüências. À medida que a freqüência aumenta, X_L aumenta e X_C diminui; portanto, existe sempre uma freqüência para a qual X_L é igual a X_C e $X_L - X_C$ é igual a zero. Para essa freqüência, a impedância $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ atinge seu valor *mínimo*, que é simplesmente igual a R.

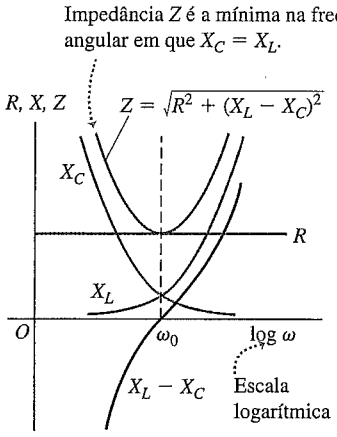
Comportamento do circuito em ressonância

À medida que fazemos variar a freqüência angular ω da fonte, a amplitude da corrente $I = V/Z$ varia conforme indicado na Figura 31.18b; o valor *máximo* de I ocorre quando a impedância Z é *mínima*. O fenômeno no qual a amplitude da corrente atinge seu valor máximo denomina-se **ressonância**. A freqüência angular ω_0 para a qual ocorre o pico da ressonância é chamada de **freqüência angular de ressonância**. Essa é a freqüência angular para a qual a reatância indutiva é igual à reatância capacitiva; portanto, na ressonância,

$$X_L = X_C \qquad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31.32}$$

(circuito *R-L-C* em série em ressonância)

(a) Reatância, resistência, e impedância em função da freqüência angular



(b) Impedância, amplitude da corrente e ângulo de fase em função da freqüência angular

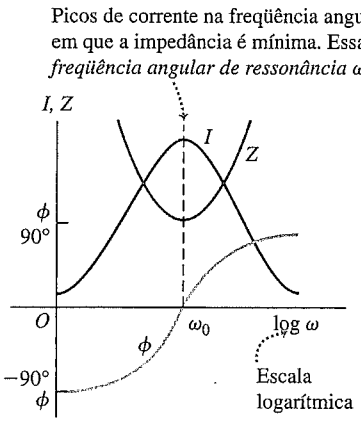


Figura 31.18 Como as variações na freqüência angular de um circuito ca afetam (a) reatâncias, resistência e impedância e (b) impedância, amplitude de corrente e ângulo de fase.

Observe que esse valor é igual ao valor da freqüência angular das oscilações naturais de um circuito *L-C*, que deduzimos na Seção 30.5, Equação (30.32). A **freqüência de ressonância** f_0 é igual a $\omega_0/2\pi$. Para essa freqüência, surge a corrente mais elevada no circuito para uma dada amplitude de voltagem; em outras palavras, f_0 é a freqüência para a qual o circuito está 'sintonizado'.

Convém saber o que ocorre com as *voltagens* em um circuito *R-L-C* em série durante a ressonância. A corrente em cada instante é a mesma tanto em L quanto em C. A voltagem através de um indutor sempre está *adiantada* 90° em relação à corrente, ou $\frac{1}{4}$ do ciclo, e a voltagem através de um capacitor está sempre *atrasada* 90° em relação à corrente. Portanto, a diferença de fase instantânea através de L e de C é sempre igual a 180° ou $\frac{1}{2}$ ciclo; logo, elas possuem sinais opostos a cada instante. Para a freqüência de ressonância e *somente* para a freqüência de ressonância, $X_L = X_C$ e as amplitudes de voltagem $V_L = IX_L$ e $V_C = IX_C$ são *iguais*; então, a soma da voltagem através de L e C é igual a zero em todos os instantes, e a voltagem *total* v_{bd} através da combinação *L-C*, indicada na Figura 31.13a, é exatamente zero. A voltagem através do resistor torna-se igual à voltagem da fonte. Logo, para a freqüência de ressonância, o circuito se comporta como se não existisse o indutor nem o capacitor!

A *fase* da voltagem em relação à corrente é dada pela Equação (31.24). Para freqüências abaixo da ressonância, X_C é maior que X_L; a reatância capacitiva é dominante, a voltagem está *atrasada* em relação à corrente e o ângulo de fase ϕ está compreendido entre zero e −90°. Acima da ressonância, a reatância indutiva é dominante; a voltagem está *adiantada* em relação à corrente e o ângulo de fase está compreendido entre zero e +90°. Essa variação de ϕ com a freqüência está indicada na Figura 31.18b.

Projeto de um circuito ca

Se podemos variar a indutância L e a capacitância C de um circuito, podemos também variar a freqüência de ressonância. Isso fornece exatamente o método para 'sintonizar' um receptor de rádio ou de televisão para receber uma dada estação. No início da tecnologia dos rádios, isso era realizado usando-se capacitores com placas metálicas móveis, cujas áreas podiam ser superpostas para se obter uma variação de C. (É isso o que ocorre com o botão de sintonia do rádio indicado na fotografia que abre este capítulo.) Um método mais moderno consiste em fazer variar o valor de L, empregando-se uma bobina com um núcleo de ferrita que pode deslizar para dentro ou para fora do núcleo.

Em um circuito *R-L-C* em série, a impedância atinge seu valor mínimo e a corrente atinge seu valor máximo durante a ressonância. Na Figura 31.19, mostramos um gráfico de corrente em função da freqüência para esse tipo de

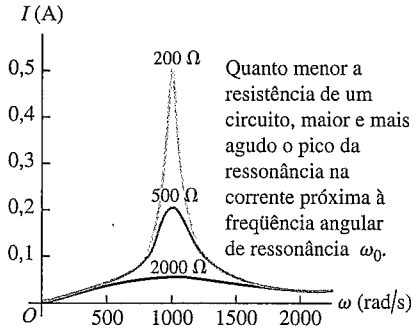


Figura 31.19 Gráfico da amplitude da corrente I em função da freqüência angular ω em um circuito R-L-C em série com $V = 100$ V, $L = 2{,}0$ H, $C = 0{,}50$ μF e três valores diferentes para a resistência R.

circuito, com amplitude de voltagem da fonte $V = 100$ V, $L = 2{,}0$ H, $C = 0{,}50$ μF e $R = 500$ Ω. Essa curva representa uma *curva de resposta*, mais conhecida como *curva de ressonância*. A freqüência angular da ressonância é dada por $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 1000$ rad/s. Como era de esperar, a curva possui um pico para essa freqüência angular.

A freqüência de ressonância depende de L e de C; o que ocorre quando fazemos R variar? A Figura 31.19 também mostra curvas de ressonância de I em função de ω para $R = 200$ Ω e para $R = 2000$ Ω. As curvas são semelhantes para freqüências muito afastadas da ressonância, em que X_L ou X_C desempenham papéis dominantes na impedância. Mas, próximo à ressonância, em que X_L é quase igual a X_C, a curva torna-se achatada e larga para valores de R elevados e torna-se mais estreita com picos mais pontiagudos para valores de R pequenos. Na ressonância, $Z = R$ e $I = V/R$, de modo que a altura máxima da curva é inversamente proporcional a R.

A forma da curva de ressonância é importante no projeto de circuitos de recepção de rádio e de televisão. A curva com um pico muito agudo possibilita discriminar entre duas estações com bandas de freqüência adjacentes. Contudo, quando o pico é *demasiadamente* agudo, podem ser perdidas algumas informações do sinal recebido, tais como as freqüências mais elevadas dos sons musicais. A forma da curva de ressonância também é relacionada aos conceitos de oscilações superamortecidas ou subamortecidas, descritas na Seção 30.6. Uma curva de ressonância com um pico agudo corresponde a um valor de R pequeno e a um sistema oscilante ligeiramente amortecido; uma curva larga e achatada corresponde a um valor de R elevado e a um sistema fortemente amortecido.

Nesta seção, discutimos a ressonância em um circuito R-L-C em *série*. A ressonância também pode ocorrer em um circuito ca no qual o resistor, o indutor e o capacitor estão ligados em *paralelo*. Deixamos os detalhes para você (veja o Problema 31.55).

O fenômeno da ressonância não é exclusivo de circuitos ca, ela ocorre em todas as áreas da física. Já discutimos exemplos de ressonância em sistemas *mecânicos* nas seções 13.8 e 16.5. A amplitude atinge um valor máximo em uma oscilação mecânica quando a freqüência da força motriz é igual à freqüência das oscilações naturais do sistema – isso é análogo ao surgimento do pico da corrente em um circuito R-L-C. Sugerimos que você faça uma revisão das seções sobre ressonância mecânica e procure entender as analogias. Outros exemplos importantes de ressonância ocorrem na física atômica, na física nuclear e no estudo das partículas fundamentais (física das altas energias).

Exemplo 31.8

SINTONIZANDO UM RÁDIO O circuito em série na Figura 31.20 é semelhante ao arranjo usado em circuitos de sintonização de rádio. Esse circuito é ligado aos terminais de uma fonte de alimentação ca nos terminais da qual a voltagem possui um valor eficaz igual a 1,0 V e uma freqüência variável. Calcule: (a) a freqüência de ressonância; (b) a reatância indutiva, a reatância capacitiva e a impedância para a freqüência de ressonância; (c) a corrente eficaz na ressonância; e (d) a diferença de potencial eficaz através de cada elemento do circuito na ressonância.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o circuito na Figura 31.20 é um circuito R-L-C em série, porém com a inclusão de medidores para medir a corrente eficaz e as voltagens (que são as incógnitas deste problema).

PREPARAR: a Equação (31.32) inclui a fórmula da *freqüência angular de ressonância* ω_0, a partir da qual obtemos a freqüência de ressonância f_0. Solucionamos as incógnitas restantes usando os resultados nas seções 31.2 e 31.3.

EXECUTAR: (a) A freqüência angular da ressonância é

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0{,}40 \times 10^{-3}\,\text{H})(100 \times 10^{-12}\,\text{F})}} = 5{,}0 \times 10^6\,\text{rad/s}$$

A freqüência correspondente $f_0 = \omega_0/2\pi$ é dada por

$$f_0 = 8{,}0 \times 10^5\,\text{Hz} = 800\,\text{kHz}$$

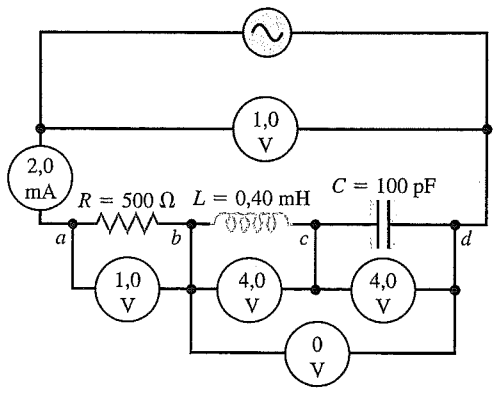


Figura 31.20 Um circuito sintonizador de rádio durante a ressonância. Os círculos denotam a corrente eficaz e as voltagens.

Essa freqüência faz parte da banda inferior da faixa AM de freqüências de rádio.

(b) Para essa freqüência,

$$X_L = \omega L = (5{,}0 \times 10^6\ \text{rad/s})(0{,}40 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 2000\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(5{,}0 \times 10^6\ \text{rad/s})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})} = 2000\ \Omega$$

Como $X_L = X_C$ e $X_L - X_C = 0$, de acordo com a Equação (31.23), concluímos que a impedância Z na ressonância possui valor igual ao da resistência: $Z = R = 500\ \Omega$.

(c) De acordo com a Equação (31.26), o valor eficaz da corrente na ressonância é

$$I_{\text{qm}} = \frac{V_{\text{qm}}}{Z} = \frac{V_{\text{qm}}}{R} = \frac{1{,}0\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0{,}0020\ \text{A} = 2{,}0\ \text{mA}$$

(d) A diferença de potencial eficaz através do resistor é

$$V_{R\text{qm}} = I_{\text{qm}}R = (0{,}0020\ \text{A})(500\ \Omega) = 1{,}0\ \text{V}$$

A diferença de potencial eficaz através do indutor e do capacitor são, respectivamente,

$$V_{L\text{qm}} = I_{\text{qm}}X_L = (0{,}0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4{,}0\ \text{V}$$

$$V_{C\text{qm}} = I_{\text{qm}}X_C = (0{,}0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4{,}0\ \text{V}$$

AVALIAR: a diferença de potencial eficaz através do indutor e através do capacitor possuem os mesmos valores e as mesmas amplitudes, porém existe uma diferença de fase de 180° a cada instante e, portanto, a soma desses valores é sempre igual a zero. Note também que $V_{R\text{qm}}$ é igual à diferença potencial eficaz V_{qm} através da fonte, embora neste exemplo $V_{L\text{qm}}$ e $V_{C\text{qm}}$ possuam valores consideravelmente *maiores* do que V_{qm}.

Teste sua compreensão da Seção 31.5 Como a freqüência de ressonância de um circuito *R-L-C* em série varia, quando as placas do capacitor são colocadas juntas? (i) Aumenta; (ii) diminui; (iii) permanece constante. ▮

31.6 Transformadores

Como a corrente alternada permite elevar e abaixar o valor da tensão com mais facilidade do que a corrente contínua, concluímos que, para essa finalidade, a transmissão e a distribuição da energia elétrica com o uso da corrente contínua é mais vantajosa do que o emprego da corrente alternada. Para transmitir energia elétrica através de distâncias muito grandes, é desejável o uso de uma tensão a mais elevada possível e de uma corrente muito pequena; isso faz diminuir as perdas proporcionais a i^2R que ocorrem nas linhas de transmissão, e fios mais finos podem ser usados, economizando materiais. As linhas de transmissão modernas operam geralmente com valores da tensão eficaz da ordem de 500 kV. Por outro lado, questões de segurança e de isolamento exigem o uso de baixas tensões em residências e indústrias. A tensão padronizada em muitos estados do Brasil é de 110 V a 120 V, porém, em algumas cidades brasileiras e em diversos países, a tensão é de 220 V a 240 V. A conversão de uma dada voltagem para qualquer outra tensão é obtida por meio de um **transformador**.

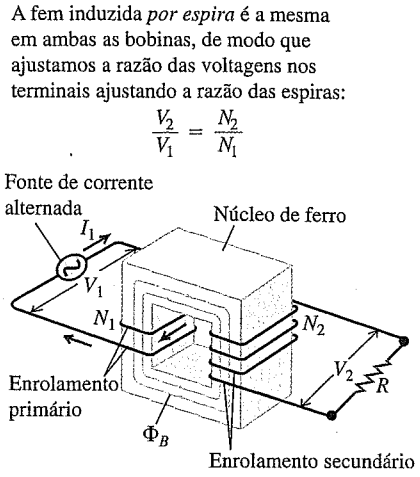


Figura 31.21 Diagrama esquemático de um transformador ideal para elevar uma tensão. O primário é conectado a uma fonte de tensão ca; o secundário é conectado a um dispositivo com resistência R.

Como os transformadores trabalham

A Figura 31.21 mostra um transformador idealizado. Os componentes básicos do transformador são duas bobinas ou *enrolamentos*, isolados eletricamente um do outro, porém enrolados sobre o mesmo núcleo. O núcleo é em geral feito de um material com elevada permeabilidade magnética relativa K_{m}, tal como o ferro. Isso obriga as linhas do campo magnético, produzidas pela corrente do enrolamento, a ficarem confinadas quase completamente no interior do núcleo. Portanto, quase todas as linhas de campo passam através do outro enrolamento, maximizando a *indutância mútua* dos dois enrolamentos (veja a Seção 30.1). O **primário** é o enrolamento conectado com a fonte de tensão; denomina-se **secundário** o enrolamento cujos terminais fornecem a tensão transformada. Um transformador com um núcleo de ferro, tal como aquele usado na rede de distribuição de energia elétrica, é indicado em um circuito por meio do seguinte símbolo:

Vejamos então como funciona um transformador. A fonte ca produz uma corrente alternada no primário, que dá origem a um fluxo magnético alternado no núcleo; isso gera uma fem induzida em cada enrolamento, em obediência à lei de Faraday. A fem induzida no secundário dá origem a uma corrente alternada no secundário, que fornece energia elétrica para o dispositivo que está conectado ao

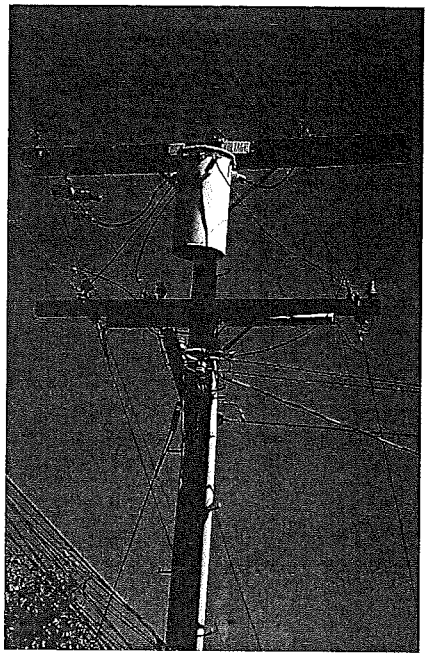


Figura 31.22 O recipiente cilíndrico no topo do poste é um transformador usado para abaixar uma tensão. Ele converte a alta tensão ca da linha de transmissão para a baixa tensão (120 V) ca, que é a seguir distribuída para as residências e para o comércio.

secundário. Todas as correntes e fems produzidas possuem a mesma freqüência da fonte de tensão ca.

É importante entender como a tensão no secundário pode ser maior ou menor do que a tensão aplicada no primário. Vamos desprezar a resistência dos enrolamentos e supor que todas as linhas do campo magnético ficam confinadas no núcleo de ferro, de modo que em todos os instantes o fluxo magnético Φ_B é o mesmo em todas as espiras do enrolamento primário e do secundário. O enrolamento primário possui N_1 espiras e o enrolamento secundário possui N_2 espiras. Quando o fluxo magnético varia porque as correntes variam nas duas bobinas, cada fem é dada por

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.33}$$

O fluxo *por espira* Φ_B é o mesmo tanto no primário quanto no secundário, de modo que as relações indicadas na Equação (31.33) mostram que a fem induzida *por espira* é a mesma nas duas bobinas. Portanto, dividindo membro a membro essas relações, encontramos:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.34}$$

Como $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ oscilam com a mesma freqüência da fonte ca, a Equação (31.34) também fornece a razão entre as amplitudes ou entre os valores eficazes de cada fem induzida. Como estamos supondo a resistência do enrolamento igual a zero, cada fem $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ deve ser igual à respectiva voltagem através do primário e do secundário; portanto,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.35}$$

(voltagens nos terminais do transformador primário e secundário)

em que V_1 pode ser a amplitude da tensão ou o valor eficaz da tensão no primário e V_2 é a amplitude da tensão ou o valor eficaz da tensão no secundário. Escolhendo-se uma razão apropriada N_2/N_1, podemos obter qualquer valor desejado para a voltagem secundária a partir de uma dada tensão no primário. Quando $N_2 > N_1$,como na Figura 31.21, então $V_2 > V_1$ e dizemos que o transformador *eleva a tensão*; quando $N_2 < N_1$, então $V_2 < V_1$ e obtemos um transformador que *abaixa a tensão*. Nas usinas geradoras de energia elétrica, existem transformadores que elevam a tensão; o primário é ligado ao gerador e o secundário é ligado à linha de transmissão, obtendo-se a tensão bastante alta necessária para a transmissão. Nos locais do consumo da energia elétrica, usam-se transformadores para abaixar a tensão até que ela atinja valores convenientes para uso doméstico ou industrial (Figura 31.22).

Mesmo a voltagem relativamente baixa fornecida por uma tomada de parede doméstica é alta demais para muitos aparelhos eletrônicos, tornando necessário um transformar adicional para abaixar a tensão. Essa é a função de um 'adaptador ca' (também conhecido como 'cubo de potência' ou 'adaptador de potência'), como aqueles usados para recarregar um telefone celular ou um computador portátil. Esses adaptadores contêm um transformador que abaixa a tensão e converte a tensão de linha para um valor menor, tipicamente de 3 a 12 volts, bem como diodos para converter a corrente alternada para a corrente contínua exigida pelos aparelhos eletrônicos (Figura 31.23).

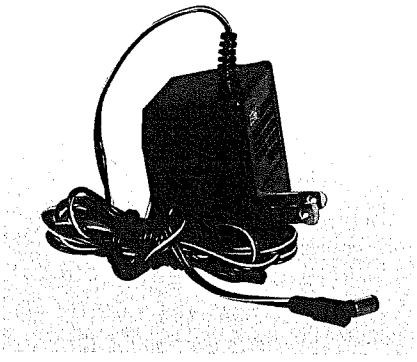


Figura 31.23 Um adaptador como este converte a corrente ca de uso doméstico em corrente cc de baixa voltagem para uso em aparelhos eletrônicos. Ele contém um transformador que abaixa tensão e diodos que transformam a corrente gerada (veja a Figura 31.3).

Considerações sobre a energia para transformadores

Quando o secundário está ligado a uma resistência R, então a amplitude da corrente ou o valor eficaz da corrente no secundário é $I_2 = V_2/R$. A potência fornecida ao primário é igual à potência consumida no secundário (porque estamos desprezando as resistências dos enrolamentos); logo,

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \qquad (31.36)$$

(correntes no primário e secundário do transformador)

Combinando as equações (31.35) e (31.36) com a relação $I_2 = V_2/R$ para eliminar V_2 e I_2, encontramos:

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{(N_2/N_1)^2} \qquad (31.37)$$

Essa relação mostra que, quando o secundário é fechado através de uma resistência R, o resultado é o mesmo que no caso em que a *fonte* é conectada diretamente a uma resistência R dividida pelo quadrado da razão entre as espiras $(N_2/N_1)^2$. Em outras palavras, o transformador 'transforma' não somente voltagens e correntes, mas também as resistências. De modo geral, podemos encarar um transformador como um dispositivo que 'transforma' a *impedância* do circuito ao qual o secundário é conectado.

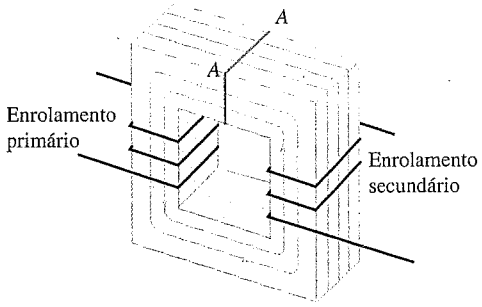
A Equação (31.37) acarreta muitas conseqüências práticas. A potência fornecida por uma fonte a um resistor depende da resistência da fonte e do resistor. Podemos demonstrar que a transferência da potência é máxima quando as duas resistências são *iguais*. O mesmo princípio é válido tanto no caso de um circuito cc quanto no caso de um circuito ca. Se uma fonte ca com impedância elevada precisa ser ligada a um circuito com baixa impedância, tal como um amplificador de áudio ligado a um alto-falante, a impedância da fonte deve se *igualar* à do circuito por meio do uso de um transformador com uma razão de espiras N_2/N_1 apropriada.

Um transformador real apresenta sempre alguma perda de energia. (Por isso, um adaptador ca como o indicado na Figura 31.23 se aquece após algum tempo de uso; o transformador é aquecido pela energia dissipada.) Os enrolamentos possuem alguma resistência e produzem perdas i^2R. Ocorrem também perdas por histerese no núcleo (Seção 28.8). As perdas por histerese podem ser minimizadas usando-se ferro doce com um ciclo de histerese estreito.

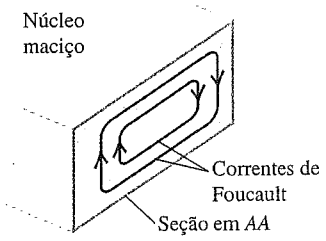
Outro mecanismo importante para a perda de energia no núcleo do transformador envolve as correntes de Foucault (Seção 29.6). Considere a seção reta AA que corta o núcleo de ferro de um transformador (Figura 31.24a). Como o ferro é condutor, qualquer seção igual a essa pode ser descrita como diversas espiras condutoras, uma no interior da outra (Figura 31.24b). O fluxo através de cada uma dessas espiras varia continuamente, de modo que correntes de Foucault podem circular no volume inteiro do núcleo, cujas linhas de escoamento formam planos perpendiculares ao fluxo. Essas correntes de Foucault são indesejáveis: elas produzem perda de energia através do termo i^2R do efeito térmico e elas próprias geram um fluxo oposto.

Os efeitos das correntes de Foucault podem ser minimizados usando-se um núcleo *laminado*, ou seja, um núcleo constituído por folhas finas ou lâminas. A elevada resistência superficial de cada lâmina, produzida por uma camada de óxido ou por um verniz de isolante, faz com que as correntes de Foucault fiquem confinadas em lâminas individuais (Figura 31.24c). Os caminhos possíveis para as correntes de Foucault tornam-se mais estreitos, a fem induzida em cada caminho é menor e as correntes de Foucault são apreciavelmente reduzidas. O campo magnético alternado exerce forças sobre as lâminas que conduzem corrente, produzindo vibrações; essas vibrações produzem um 'ronco' característico de um transformador em funcionamento. Você pode ouvir esse mesmo 'ronco' do lastro magnético de uma lâmpada fluorescente (veja a Seção 30.2).

(a) Transformador esquematizado



(b) Grandes correntes de Foucault em um núcleo maciço



(c) Correntes de Foucault menores em núcleo laminado

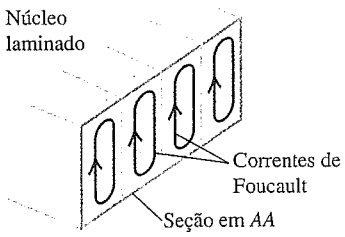


Figura 31.24 (a) Enrolamento primário e enrolamento secundário de um transformador. (b) Correntes de Foucault, no núcleo de ferro, indicadas na seção reta AA. (c) Redução das correntes de Foucault usando-se um núcleo laminado.

Graças ao uso do ferro doce e de lâminas no núcleo, a eficiência de um transformador geralmente é da ordem de 90%; nas instalações de grande porte, a eficiência pode atingir até 99%.

Exemplo 31.9

'ACORDE E USE O TRANSFORMADOR!' Uma amiga trouxe da Europa um aparelho que ela afirma ser a melhor cafeteira elétrica do mundo. Infelizmente, o aparelho só funciona com uma fonte de alimentação de 240 V para fornecer a potência de 960 W necessária para seu funcionamento. (a) O que ela deve fazer para ligar o aparelho em uma fonte de 120 V? (b) Qual deve ser a corrente que a cafeteira consome de uma linha de 120 V? (c) Qual é a resistência da cafeteira? (O valor de cada voltagem é um valor eficaz.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a nossa amiga necessita de um transformador que abaixe a tensão, de modo a converter a corrente ca de 120 V disponível na casa para a corrente ca de 240 V exigida pela cafeteira. Este problema se refere às propriedades deste transformador.

PREPARAR: usamos a Equação (31.35) para determinar a razão de giros N_2/N_1 do transformador, a relação $P_{méd} = V_{qm}I_{qm}$ de um resistor para obter o consumo de corrente e a Equação (31.37) para calcular a resistência.

EXECUTAR: (a) Para obter $V_2 = 240$ V com $V_1 = 120$ V, nossa amiga precisa usar um transformador que eleve a tensão com uma razão de espiras tal que $N_2/N_1 = V_2/V_1 = (240\text{ V})/(120\text{ V}) = 2$. Ou seja, a bobina secundária (que deve ser ligada na cafeteira) precisa ter um enrolamento com um número de espiras igual ao dobro do número de espiras existentes no primário (ligado na linha de 120 V).

(b) O valor eficaz da corrente I_1 no primário de 120 V pode ser calculado a partir da fórmula $P_{méd} = V_1I_1$, em que $P_{méd}$ é a potência média consumida pela cafeteira e, portanto, a potência fornecida pela linha de 120 V. (Estamos supondo que não existem perdas de energia no transformador.) Portanto, $I_1 = P_{méd}/V_1 = (960\text{ W})/(120\text{ V}) = 8{,}0$ A. A corrente no secundário é então $I_2 = P_{méd}/V_2 = (960\text{ W})/(240\text{ V}) = 4{,}0$ A.

(c) Temos $V_1 = 120$ V, $I_1 = 8{,}0$ A e $N_2/N_1 = 2$; logo,

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{120\text{ V}}{8{,}0\text{ A}} = 15\ \Omega$$

Pela Equação (31.37)

$$R = 2^2(15\ \Omega) = 60\ \Omega$$

AVALIAR: para conferir, $V_2/R = (240\text{ V})/(60\ \omega) = 4{,}0\text{ A} = I_2$, o mesmo valor obtido anteriormente. Podemos também comprovar o resultado de R usando a expressão $P_{méd} = V_2^2/R$ para a potência consumida pela cafeteira.

Teste sua compreensão da Seção 31.6 Cada um destes quatro transformadores possui 1000 espiras na bobina primária. Classifique os transformadores, do maior para o menor número de espiras na bobina secundária. (i) Converte 120 V ca em 6,0 V ca; (ii) converte 120 V ca em 240 V ca; (iii) converte 240 V ca em 6,0 V ca; (iv) converte 240 V ca em 120 V ca. ■

Resumo

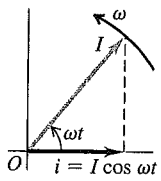
Fasores e corrente alternada: um alternador ou fonte ca produz uma fem que varia senoidalmente com o tempo. Uma corrente ou voltagem senoidal pode ser representada por um fasor, um vetor que gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante ω que é igual à freqüência angular da grandeza senoidal. Sua projeção sobre o eixo horizontal em qualquer instante representa o valor instantâneo da grandeza.

Para uma corrente senoidal, a corrente média retificada e a corrente quadrática média (corrente eficaz) são relacionadas com a amplitude da corrente I. Analogamente, a tensão quadrática média (tensão eficaz) de uma grandeza senoidal é relacionada com a amplitude da tensão V. (Veja o Exemplo 31.1.)

$$I_{rm} = \frac{2}{\pi}I = 0{,}637I \tag{31.3}$$

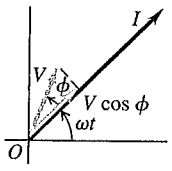
$$I_{qm} = \frac{I}{\sqrt{2}} \tag{31.4}$$

$$V_{qm} = \frac{V}{\sqrt{2}} \tag{31.5}$$



Voltagem, corrente e ângulo de fase: em geral, a voltagem instantânea entre dois pontos em um circuito ca não está em fase com a corrente instantânea que passa por esses pontos. A grandeza ϕ é chamada de ângulo de fase da voltagem em relação à corrente.

$$i = I\cos\omega t \quad (31.2)$$
$$v = V\cos(\omega t + \phi) \tag{31.2}$$

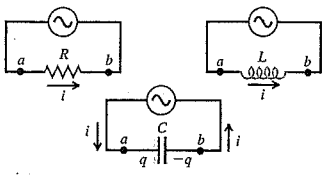


Resistência e reatância: a voltagem nos terminais de um resistor R está em fase com corrente. A voltagem nos terminais de um indutor L está adiantada 90° em relação à corrente ($\phi = +90°$), ao passo que a voltagem nos terminais de um capacitor C está atrasada 90° em relação à corrente ($\phi = -90°$). A amplitude da voltagem através de cada tipo de dispositivo é proporcional à amplitude de corrente I. Um indutor possui reatância indutiva $X_L = \omega L$, e um capacitor possui reatância capacitiva $X_C = 1/\omega C$. (Veja os exemplos 31.2 e 31.3.)

$$V_R = IR \tag{31.7}$$

$$V_L = IX_L \tag{31.13}$$

$$V_C = IX_C \tag{31.19}$$

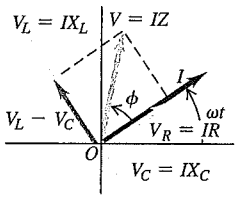


Impedância e o circuito *R-L-C* em série: em um circuito ca genérico, as amplitudes da voltagem e da corrente são relacionadas pela impedância do circuito Z. Para um circuito *R-L-C* em série, os valores de R, L e C e a freqüência angular ω determinam a impedância e o ângulo de fase ϕ da voltagem em relação à corrente. (Veja os exemplos 31.4 e 31.5.)

$$V = IZ \tag{31.22}$$

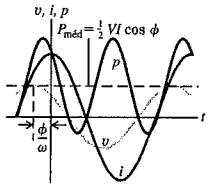
$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \end{aligned} \tag{31.23}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{31.24}$$



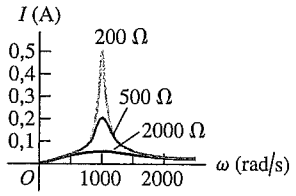
Potência em circuitos ca: a potência média $P_{méd}$ de um circuito ca depende das amplitudes de voltagem e de corrente (ou, de forma equivalente, os seus valores eficazes) e o ângulo de fase ϕ da voltagem em relação à corrente. A grandeza $\cos\phi$ denomina-se fator de potência. (Veja os exemplos 31.6 e 31.7.)

$$\begin{aligned} P_{méd} &= \frac{1}{2} VI\cos\phi \\ &= V_{qm} I_{qm} \cos\phi \end{aligned} \tag{31.31}$$



Ressonância em circuitos ca: em um circuito *R-L-C* em série, a impedância torna-se mínima e a amplitude da corrente torna-se máxima a uma freqüência angular chamada de freqüência angular de ressonância. Esse fenômeno constitui a ressonância. Na ressonância, a voltagem e a corrente estão em fase, e a impedância Z possui valor igual ao da resistência R (Exemplo 31.8).

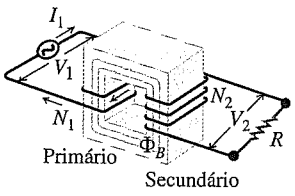
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31.32}$$



Transformadores: um transformador serve para transformar correntes e voltagens em um circuito. Para um transformador ideal que não perde nenhuma energia, quando a bobina do primário possui N_1 espiras e a bobina do secundário possui N_2 espiras, os valores das amplitudes das duas voltagens (ou os valores eficazes dessas voltagens) são relacionados pela Equação (31.35). Os valores das amplitudes (ou os valores eficazes) da voltagem e da corrente no primário são relacionados com os respectivos valores no secundário do transformador por meio pela Equação (31.36). (Veja o Exemplo 31.9.)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.35}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{31.36}$$



Principais termos

ângulo de fase, 351
amplitude da corrente, 347
amplitude da voltagem, 347
corrente alternada (ca), 346
corrente quadrática média (corrente eficaz), 348
corrente retificada média, 348
diagrama de fasor, 347
fasores, 347
fator de potência, 361
fonte ca, 347
freqüência angular de ressonância, 363
freqüência de ressonância, 363
impedância, 356
primário, 365
reatância capacitiva, 353
reatância indutiva, 351
ressonância, 363
secundário, 365
transformador, 365

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Sim. De fato, o rádio detecta simultaneamente as transmissões em *todas* as freqüências. Entretanto, um rádio está em um circuito *R-L-C* em série e, em um dado instante qualquer, ele é sintonizado para ter uma ressonância em uma única freqüência. Logo, a resposta do rádio a essa freqüência é muito maior do que sua resposta a qualquer outra freqüência, motivo pelo qual você ouve somente uma estação transmissora pelo alto-falante do rádio. (Às vezes, você pode ouvir uma segunda estação, caso a freqüência dessa estação esteja suficientemente próxima à freqüência sintonizada.)

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

31.1 **Respostas: (a) D; (b) A; (c) B; (d) C** Para cada fasor, a corrente real é representada pela projeção desse fasor sobre o eixo horizontal. Todos os fasores giram no sentido anti-horário em torno da origem, com freqüência angular ω, de modo que no instante indicado a projeção do fasor A é positiva, porém tendendo a zero; a projeção do fasor B é negativa e se torna cada vez mais negativa; a projeção do fasor C é negativa, porém tendendo a zero; a projeção do fasor D é positiva e se torna cada vez mais positiva.

31.2 **Respostas: (a) (iii); (b) (ii); (c) (i)** Para um resistor, $V_R = IR$, portanto $I = V_R/R$. A amplitude da voltagem e a resistência R não variam com a freqüência, portanto a amplitude da corrente I permanece constante. Para um indutor, $V_L = IX_L = I\omega L$, portanto $I = V_L/\omega L$. A amplitude da voltagem V_L e a indutância L são constantes, de modo que a amplitude da corrente I diminui à medida que a freqüência aumenta. Para um capacitor, $V_C = IX_C = I/\omega C$, portanto $I = V_C\omega C$.A amplitude de voltagem V_C e a capacitância C são constantes, portanto a amplitude da corrente I aumenta à medida que a freqüência aumenta.

31.3 **Resposta: (iv), (ii), (i), (iii)** Para o circuito no Exemplo 31.4, $I = V/Z = (50\ \text{V})/(500\ \Omega) = 0{,}10$ A. Quando o capacitor e o indutor são removidos, de modo que restem somente a fonte ca e o resistor, o circuito se assemelha ao indicado na Figura 31.7a; então $I = V/R = (50\ \text{V})/(300\ \Omega) = 0{,}17$ A. Quando o resistor e o capacitor são removidos, de modo que restem somente a fonte ca e o indutor, o circuito se assemelha ao indicado na Figura 31.8a; então $I = V/X_L = (50\ \text{V})/(600\ \Omega) = 0{,}083$ A. Finalmente, quando o resistor e o indutor são removidos, de modo que restem somente a fonte ca e o capacitor, o circuito se assemelha ao indicado na Figura 31.9a; então $I = V/X_C = (50\ \text{V})/(200\ \Omega) = 0{,}25$ A.

31.4 **Respostas: (a) (v); (b) (iv)** A energia não pode ser extraída do resistor, visto que a energia é dissipada em um resistor e não pode ser recuperada. Em vez disso, a energia deve ser extraída do indutor (que armazena a energia do campo magnético) ou do capacitor (que armazena energia do campo elétrico). A potência positiva significa que a energia está sendo transferida da fonte ca para o circuito, de modo que a potência *negativa* implica que a energia está sendo transferida de volta para a fonte.

31.5 **Resposta: (ii)** A capacitância C aumenta quando o espaçamento entre as placas diminui (veja a Seção 24.1). Logo, a freqüência de ressonância $f_0 = \omega_0/2\pi = \frac{1}{2}\pi\sqrt{LC}$ diminui.

31.6 **Resposta: (ii), (iv), (i), (iii)** Pela Equação (31.35) a razão de espiras é $N_2/N_1 = V_2/V_1$, portanto o número de espiras no secundário é $N_2 = N_1V_2/V_1$. Portanto, para os quatro casos, temos (i) $N_2 = (1000)/(6{,}0\ \text{V})/(120\ \text{V}) = 50$ espiras; (ii) $N_2 = (1000)/(240\ \text{V})/(120\ \text{V}) = 2000$ espiras; (iii) $N_2 = (1000)/(6{,}0\ \text{V})/(240\ \text{V}) = 25$ espiras; e (iv) $N_2 = (1000)/(120\ \text{V})/(240\ \text{V}) = 500$ espiras. Note que (i), (iii) e (iv) são transformadores que abaixam a tensão com menos espiras no secundário do que no primário, ao passo que (ii) é um transformador que eleva a tensão com mais espiras no secundário do que no primário.

Questões para discussão

Q31.1 No Brasil, nos Estados Unidos, no Canadá e em muitos outros países, a tensão de 110 V a 120 V é padronizada, enquanto em vários lugares da Europa é mais comum o uso da tensão de 220 V a 240 V. Quais são as vantagens e as desvantagens desses sistemas?

Q31.2 A corrente em uma linha de transmissão ca muda de sentido 120 vezes por segundo e seu valor médio é igual a zero. Explique como é possível transmitir energia elétrica com esse sistema.

Q31.3 Em um circuito ca, por que a energia média em um indutor e em um capacitor é zero, mas não em um resistor?

Q31.4 A Equação (31.14) foi deduzida usando-se a relação $i = dq/dt$ entre a corrente e a carga no capacitor. Na Figura 31.9a, a corrente positiva cresce no sentido anti-horário, fazendo aumentar a carga no capacitor. Quando a placa esquerda for positiva, mas seu valor estiver diminuindo com o tempo, a relação $i = dq/dt$ será correta ou deveremos usar $i = -dq/dt$? A relação $i = dq/dt$ continua válida quando a placa do lado direito é positiva e seu módulo aumenta ou diminui? Explique.

Q31.5 Uma lâmpada fluorescente geralmente usa um indutor de compensação, chamado de indutor de lastro, para limitar a corrente no tubo. Por que é melhor usar um indutor em vez de um resistor para esse objetivo?

Q31.6 A Equação (31.9) afirma que $v_{ab} = L\,di/dt$ (Figura 31.8a). Use a lei de Faraday para explicar por que o ponto a está em um potencial mais elevado do que o ponto b quando i flui no sentido indicado na Figura 31.8a e seu módulo está aumentando. A expressão $v_{ab} = L\,di/dt$ permanece válida quando i possui sentido anti-horário e seu módulo diminui ou a expressão correta seria $v_{ab} = -L\,di/dt$? A expressão $v_{ab} = L\,di/dt$ permanece válida quando i está no sentido horário e seu módulo aumenta ou diminui? Explique.

Q31.7 É possível o fator de potência de um circuito ca *R-L-C* em série ser igual a zero? Justifique sua resposta em termos *físicos*.

Q31.8 Em um circuito *R-L-C* em série, pode a voltagem instantânea através do capacitor superar a voltagem da fonte no mesmo instante? Isso pode ser verdade para a voltagem através do indutor? E através do resistor? Explique.

Q31.9 Em circuito *R-L-C* em série, qual é o valor do ângulo de fase ϕ quando a resistência é muito menor do que a reatância capacitiva e a reatância indutiva e o circuito está operando fora da ressonância? Explique.

Q31.10 Quando um circuito *R-L-C* em série é conectado através de uma linha ca de 120 V, a tensão do capacitor pode superar o valor máximo estipulado mesmo quando sua voltagem máxima estipulada é de 200 V ou 400 V. Como você explica isso?

Q31.11 No Exemplo 31.6 (Seção 31.4), um secador de cabelo foi definido como um resistor puro. Porém, como o elemento aquecedor é constituído por um fio enrolado e no motor do ventilador existem bobinas, um secador de cabelo também possui uma indutância. Qualitativamente, a inclusão de uma indutância faz aumentar ou diminuir os valores de R, de I_{qm} e de P?

Q31.12 Um lâmpada e um capacitor de placas paralelas, com ar entre as placas, são conectados em série a uma fonte ca. O que acontece com a luminosidade da lâmpada, quando um dielétrico é inserido entre as placas do capacitor? Explique.
Q31.13 Uma bobina enrolada em um tubo oco e uma lâmpada são conectados em série a uma fonte ca. O que acontece à luminosidade da lâmpada quando um bastão de ferro é inserido no tubo?
Q31.14 Um circuito consiste de uma lâmpada, um capacitor e um indutor conectados em série a uma fonte ca. O que acontece com a luminosidade da lâmpada, quando o indutor é removido? Quando o indutor é mantido no circuito, mas o capacitor é removido? Explique.
Q31.15 Um circuito consiste de uma lâmpada, um capacitor e um indutor conectados em série a uma fonte ca. É possível que tanto o capacitor quanto o indutor sejam removidos e que a luminosidade da lâmpada permaneça inalterada? Explique.
Q31.16 É possível usar um transformador ligando-o a uma fonte cc? Explique. O que ocorreria se você ligasse um transformador projetado para 120 V ca em uma fonte de 120 V cc?
Q31.17 Um transformador ideal possui N_1 enrolamentos no primário e N_2 enrolamentos no secundário. Se você dobrar somente o número de enrolamentos secundários, por qual fator (a) a amplitude da voltagem no secundário varia e (b) a resistência efetiva do circuito secundário varia?
Q31.18 Alguns aparelhos elétricos podem funcionar tanto para uma fonte ca quanto para uma fonte cc de mesma voltagem, enquanto outros funcionam somente com ca ou somente com cc. Forneça exemplos de cada um deles e explique as diferenças.

Exercícios

Seção 31.1 Fasor e corrente alternada

31.1 Uma placa na parte traseira de um scanner computadorizado informa que a unidade consome 0,34 A de corrente de uma linha de 120 V e 60 Hz. Determine (a) a corrente quadrática média, (b) a amplitude da corrente, (c) a corrente média, (d) o quadrado médio da corrente.
31.2 Uma corrente senoidal $i = I\cos\omega t$ possui um valor eficaz $I_{qm} = 2{,}10$ A. (a) Qual é a amplitude da corrente? (b) A corrente passa através de um retificador de onda completa. Qual é o valor da corrente retificada média? (c) Qual é o maior valor, I_{rm} ou I_{qm}? Explique usando um gráfico da corrente retificada e um gráfico de i^2.
31.3 A voltagem através dos terminais de uma fonte ca varia com o tempo de acordo com a Equação (31.1). A amplitude da voltagem é $V = 45{,}0$ V. Calcule: (a) o valor eficaz ou o valor quadrático médio da diferença de potencial V_{qm}; (b) a diferença de potencial média $V_{méd}$ entre os dois terminais da fonte de tensão.

Seção 31.2 Resistência e reatância

31.4 Um capacitor de 2,20 μF está conectado através de uma fonte ca cuja amplitude de corrente é mantida constante a 60,0 V, mas cuja freqüência pode variar. Calcule a amplitude da corrente para quando a freqüência angular for: (a) 100 rad/s; (b) 1000 rad/s; (c) 10000 rad/s. (d) Mostre os resultados de (a) até (c) fazendo um gráfico de log I contra log ω.
31.5 Um indutor de 5,0 H com resistência desprezível é conectado através da fonte ca do Exercício 31.4. Calcule a amplitude da corrente para quando a freqüência angular for: (a) 100 rad/s; (b) 1000 rad/s; (c) 10000 rad/s. (d) Mostre os resultados de (a) até (c) fazendo um gráfico de log I contra log ω.
31.6 Uma capacitância C e uma indutância L são operadas na mesma freqüência angular. (a) Em qual freqüência angular elas terão a mesma reatância? (b) Se $L = 5{,}0$ mH e $C = 3{,}50$ μF, qual é o valor numérico da freqüência angular no item (a) e qual é a reatância de cada elemento?
31.7 Em cada circuito descrito a seguir, uma fonte de voltagem ca que produz uma corrente $i = I\cos\omega t$ é conectada a um elemento de circuito adicional. (a) A fonte ca é conectada através de um resistor R. Desenhe gráficos da corrente no circuito e a diferença de potencial através do resistor em função do tempo, cobrindo dois ciclos de oscilação. Coloque ambos os gráficos no *mesmo* conjunto de eixos, para que você possa compará-los. (b) Faça o mesmo no item (a), porém supondo que o resistor seja substituído por um indutor L. Desenhe os mesmos gráficos do item (a), mas neste caso através do indutor em vez do resistor. (c) Faça o mesmo que no item (a), mas supondo que o resistor seja substituído por um capacitor C. Desenhe os mesmos gráficos do item (a), porém agora através do capacitor em vez do resistor. (d) Desenhe diagramas de fasores para cada um dos casos anteriores.
31.8 (a) Calcule a reatância de um indutor de 0,450 H para freqüências de 60,0 Hz e 600 Hz. (b) Calcule a reatância de um capacitor de 2,50 μF para as mesmas freqüências. (c) Para qual freqüência a reatância de um indutor de 0,450 H possui valor igual ao da reatância de um capacitor de 2,50 μF?
31.9 (a) Qual é a reatância de um indutor de 3,0 H para uma freqüência de 80,0 Hz? (b) Qual é a indutância de um indutor cuja reatância é igual a 120 Ω para 80,0 Hz? (c) Qual é a reatância de um capacitor de 4,0 μF para uma freqüência de 80,0 Hz? (d) Qual é a capacitância de um capacitor cuja reatância é igual a 120 Ω para 80,0 Hz?
31.10 Indutor de um rádio. Você deseja obter uma amplitude de corrente igual a 2,60 mA passando através de um indutor de 0,450 mH (uma parte de um circuito de um receptor de rádio) quando uma voltagem senoidal com amplitude de 12,0 V é aplicada nos terminais do indutor. Que freqüência é necessária?
31.11 Capacitância na cozinha. O circuito de um refrigerador contém um capacitor na entrada. Uma voltagem com amplitude de 170 V e freqüência igual a 60,0 Hz é aplicada através do capacitor e produz uma corrente com amplitude de 0,850 A através do capacitor. Qual é o valor da capacitância C necessária?
31.12 Um resistor de 250 Ω é conectado em série a um capacitor de 4,80 μF. A voltagem nos terminais do capacitor é dada por $v_C = (7{,}60\text{ V})\,\text{sen}\,[(120\text{ rad/s})t]$. (a) Determine a reatância capacitiva do capacitor. (b) Deduza uma expressão para a voltagem v_R através do resistor.
31.13 Um resistor de 150 Ω é conectado em série a um indutor de 0,250 H. A tensão nos terminais do resistor é $v_R = (3{,}80\text{ V})\cos[(720\text{ rad/s})t]$. (a) Deduza uma expressão para a corrente no circuito. (b) Determine a reatância indutiva do indutor. (c) Deduza uma expressão para a voltagem v_L nos terminais do indutor.

Seção 31.3 O circuito *R-L-C* em série

31.14 Você dispõe de um resistor de 200 Ω, de um indutor de 0,400 H e de um capacitor de 6,0 μF. Suponha que você faça um circuito em série ligando o resistor e o indutor com uma fonte de tensão com amplitude de voltagem igual a 30,0 V e freqüência angular igual a 250 rad/s. (a) Qual é a impedância do circuito? (b) Qual é a amplitu-

de da corrente? (c) Calcule as amplitudes das voltagens através do resistor e do indutor. (d) Qual é o ângulo de fase ϕ da voltagem da fonte em relação à corrente? A voltagem está atrasada ou adiantada em relação à corrente? (e) Faça um diagrama de fasores.

31.15 (a) Para o circuito *R-L* do Exercício 31.14, faça um gráfico de v, v_R e v_L contra t para $t = 0$ até $t = 50{,}0$ ms. A corrente é dada por $i = I\cos\omega t$, logo, $v = V\cos(\omega t + \phi)$. (b) Quais são os valores de v, v_R e v_L para $t = 20{,}0$ ms? Compare o valor de v com o de $v_R + v_L$ nesse instante. (c) Repita a parte (b) para $t = 40{,}0$ ms.

31.16 Repita o Exercício 31.14 com um circuito constituído somente pelo resistor e pelo capacitor em série. Para o item (c), determine as amplitudes das tensões através do resistor e através do capacitor.

31.17 Repita o Exercício 31.14 com um circuito constituído somente pelo capacitor e pelo indutor em série. Para o item (c), determine as amplitudes das tensões através do indutor e através do capacitor.

31.18 (a) Para o circuito *R-C* do Exercício 31.17, faça um gráfico de v, v_R e v_C contra t para $t = 0$ até $t = 50{,}0$ ms. A corrente é dada por $i = I\cos\omega t$, logo, $v = V\cos(\omega t + \phi)$. (b) Quais são os valores de v, v_R e v_C para $t = 20{,}0$ ms? Compare o valor de v com o de $v_R + v_C$ nesse instante. (c) Repita a parte (b) para $t = 40{,}0$ ms.

31.19 O resistor, o indutor, o capacitor e a fonte de tensão do Exercício 31.14 são conectados formando um circuito *R-L-C* em série. (a) Qual é a impedância do circuito? (b) Qual é a amplitude da corrente? (c) Qual é o ângulo de fase da voltagem da fonte em relação à corrente? A voltagem da fonte está adiantada ou atrasada em relação à corrente? (d) Calcule as amplitudes das voltagens através do resistor, do indutor e do capacitor. (e) Explique como a amplitude da tensão entre as placas do capacitor pode ser maior do que a amplitude da voltagem através da fonte.

31.20 (a) Para o circuito *R-L-C* do Exercício 31.19, faça um gráfico de v, v_R, v_L e v_C contra t para $t = 0$ até $t = 50{,}0$ ms. A corrente é dada por $i = I\cos\omega t$, logo, $v = V\cos(\omega t + \phi)$. (b) Quais são os valores de v, v_R, v_L e v_C para $t = 20{,}0$ ms? Compare o valor de v com o de $v_R + v_L + v_C$ nesse instante. (c) Repita a parte (b) para $t = 40{,}0$ ms.

31.21 Análise de um circuito *R-L-C*. Você dispõe de um resistor de 200 Ω, de um indutor de 0,400 H, de um capacitor de 5,0 μF e uma fonte ca de freqüência variável com amplitude de 3,0 V. Todos esses quatro elementos são conectados de modo a formar um circuito em série. (a) Em qual freqüência a corrente no circuito atingirá o seu valor máximo? Qual será a amplitude da corrente nessa freqüência? (b) Qual será a amplitude da corrente para uma freqüência angular igual a 400 rad/s? Nessa freqüência, a voltagem da fonte está adiantada ou atrasada em relação à corrente?

31.22 Um circuito *R-L-C* em série é construído com um resistor de 175 Ω, um capacitor de 12,5 μF e um indutor de 8,0 mH, todos conectados através de uma fonte ca com freqüência variável e uma amplitude de voltagem de 25,0 V. (a) Em qual freqüência angular a impedância atingirá o seu valor mínimo e qual é a impedância nessa freqüência? (b) Na freqüência angular no item (a), qual é a corrente máxima que passa pelo indutor? (c) Na freqüência angular do item (a), calcule a diferença de potencial através da fonte ca, do resistor, do capacitor e do indutor no instante em que a corrente é igual à metade do seu maior valor positivo. (d) No item (c), como as diferenças de potencial através do resistor, do indutor e do capacitor estão relacionadas à diferença de potencial através da fonte ca?

31.23 Em um circuito *R-L-C* em série, a voltagem eficaz através do resistor é igual a 30,0 V, através do capacitor é igual a 90,0 V e através do indutor é igual a 50,0 V. Qual é a voltagem eficaz da fonte?

31.24 Defina a reatância de um circuito *R-L-C* como $X = X_L - X_C$. (a) Mostre que $X = 0$ quando a freqüência angular ω é igual à freqüência angular da ressonância ω_0. (b) Qual é o sinal de X para $\omega > \omega_0$? (c) Qual é o sinal de X para $\omega < \omega_0$? (d) Faça um gráfico de X contra ω.

Seção 31.4 Potência em circuitos de corrente alternada

31.25 A potência de um dado tocador de CD que opera a 120 V_{qm} é igual a 20,0 W. Supondo que o tocador de CD se comporte como uma resistência pura, calcule (a) a potência instantânea máxima; (b) a corrente eficaz; (c) a resistência desse aparelho.

31.26 Os componentes de um circuito *R-L-C* em série possuem os seguintes valores: $L = 20{,}0$ mH, $C = 140$ nF e $R = 350$ Ω. O gerador possui tensão eficaz de 120 V e freqüência de 1,25 kHz. Determine (a) a potência fornecida pelo gerador e (b) a potência dissipada no resistor.

31.27 (a) Mostre que, para um circuito *R-L-C* em série, o fator de potência é igual a R/Z. (*Sugestão:* use o diagrama de fasores; veja a Figura 31.13b.) (b) Mostre que, para qualquer circuito ca, mesmo para aqueles que contêm indutores e capacitores, e não somente resistências puras, a potência média fornecida pela fonte é dada por $P_{méd} = I_{qm}{}^2 R$.

31.28 Um circuito *R-L-C* em série é conectado a uma fonte ca de 120 Hz cuja tensão eficaz é dada por $V_{qm} = 80{,}0$ V. O circuito possui uma resistência de 75,0 Ω e uma impedância igual a 105 Ω para essa freqüência. Qual é a potência média fornecida pela fonte?

31.29 Um circuito *R-L-C* em série com $L = 0{,}120$ H, $R = 240$ Ω e $C = 7{,}30$ μF conduz uma corrente eficaz de 0,450 A com uma freqüência igual a 400 Hz. (a) Calcule o ângulo de fase e o fator de potência do circuito. (b) Qual é a impedância do circuito? (c) Qual é a tensão eficaz da fonte? (d) Qual é a potência média fornecida pela fonte? (e) Qual é a taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica no resistor? (f) Qual é a taxa média da conversão de energia elétrica (em outras formas de energia) no capacitor? (g) E no indutor?

31.30 Um circuito ca em série contém um resistor de 250 Ω, um indutor de 15 mH, um capacitor de 3,5 μF e uma fonte de potência ca com amplitude de tensão igual a 45 V que opera a uma freqüência angular de 360 rad/s. (a) Qual é o fator de potência desse circuito? (b) Determine a potência média fornecida para todo o circuito. (c) Qual é a potência média fornecida para o resistor, o capacitor e o indutor?

Seção 31.5 Ressonância em circuitos de corrente alternada

31.31 Em um circuito *R-L-C* em série, $R = 300$ Ω, $L = 0{,}400$ H e $C = 6{,}0 \times 10^{-8}$ F. Quando a fonte ca opera na freqüência de ressonância do circuito, a amplitude da corrente é igual a 0,500 A. (a) Qual é a amplitude da voltagem da fonte? (b) Qual é a amplitude da voltagem através do resistor, do indutor e do capacitor? (c) Qual é a potência média fornecida pela fonte?

31.32 Um circuito *R-L-C* em série consiste de uma fonte com amplitude de voltagem de 120 V e freqüência angular de 50,0 rad/s, um resistor com $R = 400$ Ω, um indutor com $L = 9{,}0$ H e um capacitor com capacitância C. (a) Para qual valor de C a amplitude da corrente no circuito será máxima? (b) Quando C tiver o valor calculado no item (a), qual será a amplitude da voltagem *através do indutor?*

31.33 Em um circuito *R-L-C* em série, $R = 150$ Ω, $L = 0{,}750$ H e $C = 0{,}0180$ μF. A fonte possui uma amplitude de voltagem

$V = 150$ V e uma freqüência igual à freqüência de ressonância do circuito. (a) Qual é o fator de potência? (b) Qual é a potência média fornecida pela fonte? (c) O capacitor é substituído por outro com $C = 0{,}0360\ \mu$F e a freqüência da fonte é ajustada para o novo valor da ressonância. Qual é então a nova potência média fornecida pela fonte?

31.34 Em um circuito *R-L-C* em série, $R = 400\ \Omega$, $L = 0{,}350$ H e $C = 0{,}0120\ \mu$F. (a) Qual é a freqüência angular de ressonância do circuito? (b) O capacitor pode suportar uma tensão máxima de 550 V. Supondo que a fonte esteja operando com a freqüência de ressonância, qual é a amplitude de voltagem máxima que ela pode ter para que a voltagem do capacitor não seja superada?

31.35 Um circuito em série consiste de uma fonte ca com freqüência variável, um resistor de 115 Ω, um capacitor de 1,25 μF e um indutor de 4,50 mH. Determine a impedância desse circuito, quando a freqüência angular da fonte ca é ajustada para (a) a freqüência angular da ressonância; (b) o dobro da freqüência angular da ressonância; (c) a metade da freqüência angular da ressonância.

31.36 Em um circuito *R-L-C* em série, $L = 0{,}280$ H e $C = 4{,}0\ \mu$F. A amplitude da voltagem da fonte é igual a 120 V. (a) Qual é a freqüência angular de ressonância do circuito? (b) Quando a fonte opera com a freqüência angular de ressonância, a amplitude da corrente no circuito é de 1,70 A. Qual é a resistência R do resistor? (c) Na ressonância, quais são os valores máximos das voltagens nos terminais do indutor, do capacitor e do resistor?

Seção 31.6 Transformadores

31.37 Um transformador para abaixar a tensão. Um transformador conectado a uma fonte ca de 120 V (valor eficaz) deve fornecer 12,0 V (valor eficaz) a um dispositivo eletrônico portátil. A resistência de carga no secundário é igual a 5,0 Ω. (a) Qual é a razão entre o número de espiras do primário e o número de espiras do secundário desse transformador? (b) Qual é o valor eficaz da corrente fornecida pelo secundário? (c) Qual é a potência média fornecida para a carga? (d) Que resistência deveria ser conectada diretamente na fonte de 120 V para que ela consumisse a mesma potência fornecida ao transformador? Mostre que esse valor é igual a 5,0 Ω [illegible]

[illegible] fornecer 13000 V (valor eficaz) para um anúncio de neônio. Para prevenir o risco de choque, um fusível é inserido no circuito primário; o fusível deve se fundir se a corrente eficaz superar o valor de 8,50 mA no secundário. (a) Qual é a razão entre o número de espiras do primário e o número de espiras do secundário desse transformador? (b) Qual é a potência fornecida para o transformador quando a corrente eficaz no secundário é de 8,50 mA? (c) Qual deve ser a corrente máxima do fusível inserido no circuito primário?

31.39 Partindo para a Europa! Você pretende levar seu secador de cabelo para a Europa, onde as tomadas elétricas geram uma tensão de 240 V em vez dos 120 V comumente usados no Brasil. O secador gera 1600 W a 120 V. (a) O que você deve fazer para fazer o seu secador funcionar em 240 V na Europa? (b) Qual é a corrente consumida pelo seu secador na Europa? (c) Qual é a resistência que o seu secador parece ter quando opera a 240 V?

Problemas

31.40 A Figura 31.12a representa um corte de um alto-falante, indicando os circuitos usados no sistema. Um ramo é constituído por um capacitor C e por um resistor R em série (o *tweeter*). Esse ramo está em paralelo com um segundo ramo (o *woofer*), constituído por um indutor L em série com um resistor R. A mesma fonte de tensão com freqüência angular ω é aplicada aos dois ramos ligados em paralelo. (a) Qual é a impedância do ramo do *tweeter*? (b) Qual é a impedância do ramo do *woofer*? (c) Explique por que as correntes nos dois ramos são iguais quando as impedâncias dos dois ramos são as mesmas. (d) Deduza uma expressão para a freqüência f que corresponde ao ponto de interseção das curvas indicadas na Figura 31.12b.

31.41 Uma bobina possui uma resistência de 48,0 Ω. Para uma freqüência de 80,0 Hz, a tensão através da bobina está adiantada 52,3° em relação à corrente. Determine a indutância da bobina.

31.42 Cinco voltímetros com impedância infinita, calibrados para medir o valor eficaz da tensão, são conectados conforme indicado na Figura 31.25. Seja $R = 200\ \Omega$, $L = 0{,}400$ H, $C = 6{,}0\ \mu$F e $V = 30{,}0$ V. Qual é a leitura de cada voltímetro quando (a) $\omega = 200$ rad/s? (b) $\omega = 1000$ rad/s?

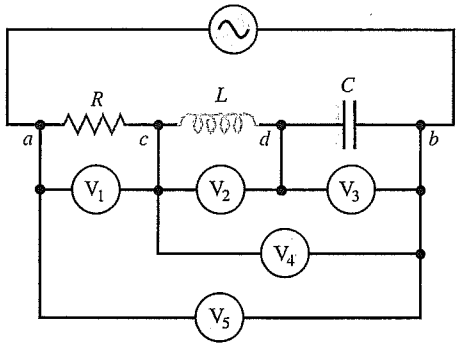


Figura 31.25 Problema 31.42.

31.43 Uma corrente senoidal é dada por $i = I\cos\omega t$. A corrente obtida por um retificador de onda completa é indicada na Figura 31.3b. (a) Sejam t_1 e t_2 os menores tempos positivos para os quais a corrente é igual a $I/2$. Qual é a fração da carga que flui entre os instantes t_1 e t_2? (c) Iguale o resultado do item (b) com $I_{rm} = (t_2 - t_1)$ e calcule I_{rm} em termos da amplitude da corrente I. Compare sua resposta à Equação (31.3).

31.44 Uma bobina grande de um eletroímã está conectada a uma fonte ca de 120 Hz. A bobina possui resistência de 400 Ω e para essa freqüência da fonte a bobina apresenta reatância igual a 250 Ω. (a) Qual é a indutância da bobina? (b) Qual deve ser a tensão eficaz da fonte sabendo que a bobina consome uma potência elétrica média de 800 W?

31.45 Um circuito em série possui uma impedância de 60,0 Ω e um fator de potência igual a 0,720 para 50,0 Hz. A tensão da fonte está atrasada em relação à corrente. (a) Que elemento de circuito, um indutor ou um capacitor, deve ser ligado em série com o circuito para fazer aumentar seu fator de potência? (b) Qual deve ser o valor desse elemento para que o fator de potência seja igual a 1?

31.46 Um circuito consiste de um resistor e um capacitor em série com uma fonte ca que fornece uma voltagem eficaz de 240 V. Na

freqüência da fonte, a reatância do capacitor é igual a 50,0 Ω. A corrente eficaz no circuito é de 3,0 A. Qual é a potência média fornecida pela fonte?

31.47 Um circuito *R-L-C* em série consiste de um resistor de 50,0 Ω, um capacitor de 10,0 μF, um indutor de 3,50 mH e uma fonte de voltagem ca com amplitude de tensão igual a 60,0 V que opera a 1250 Hz. (a) Determine a amplitude da corrente e as amplitudes da voltagem através do indutor, do resistor e do capacitor. Por que as amplitudes de voltagem somam *mais* de 60,0 V? (b) Se a freqüência for duplicada, mas nada mais seja alterado, quais grandezas no item (a) vão sofrer variação? Calcule os novos valores das grandezas que variam.

31.48 Para uma freqüência ω_1, a reatância de um certo capacitor é igual à reatância de um certo indutor. (a) Se a freqüência variar para $\omega_2 = 2\omega_1$, qual deverá ser a razão entre a reatância do indutor e a reatância do capacitor? Qual das duas reatâncias é a mais elevada? (b) Se a freqüência variar para $\omega_3 = \omega_1/3$, qual será a razão entre a reatância do indutor e a reatância do capacitor? Qual das duas reatâncias é a mais elevada? (c) Se o capacitor e o indutor fossem conectados em série com um resistor de resistência R para formar um circuito *R-L-C* em série, qual seria a freqüência angular durante a ressonância do circuito?

31.49 Um filtro passa-altos. Uma aplicação do circuito *R-L-C* em série consiste no uso de um filtro passa-altos ou de um filtro passa-baixos, que filtram, respectivamente, os componentes de baixa freqüência ou os componentes de altas freqüências de um determinado sinal. Um filtro passa-altos é indicado na Figura 31.26, em que a tensão de saída é tomada através da combinação *L-R*. (A combinação *L-R* representa uma bobina de indução que também possui uma resistência, pois seu enrolamento é um fio com um comprimento muito grande.) Deduza uma expressão para $V_{saída}/V_s$, a razão entre a amplitude da tensão na saída e a amplitude da tensão da fonte, em função da freqüência angular ω da fonte. Mostre que, quando ω é pequeno, essa razão é proporcional a ω e, portanto, é pequena, e mostre que ela tende a 1 no limite de freqüências elevadas.

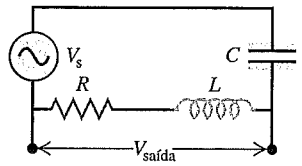


Figura 31.26 Problema 31.49.

31.50 Um filtro passa-baixos. A Figura 31.27 mostra um filtro passa-baixos (veja o Problema 31.49); a tensão de saída é tomada através do capacitor do circuito *R-L-C* em série. Deduza uma expressão para $V_{saída}/V_s$, a razão entre a amplitude da tensão na saída e a amplitude da tensão da fonte, em função da freqüência angular ω da fonte. Mostre que, quando ω é grande, essa razão é proporcional a ω^{-2} e, portanto, muito pequena, e mostre que ela tende a 1 no limite de freqüências pequenas.

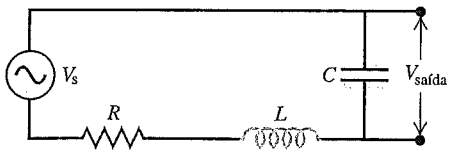


Figura 31.27 Problema 31.50.

31.51 Um circuito *R-L-C* em série é conectado a uma fonte ca com uma amplitude de tensão V constante e freqüência angular variável ω. (a) Mostre que a amplitude da corrente em função de ω é dada por

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

(b) Mostre que a potência média dissipada no resistor é

$$P = \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

(c) Mostre que I e P são *ambos* máximos quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$, ou seja, quando a freqüência da fonte é igual à freqüência de ressonância do circuito. (d) Faça um gráfico de P em função de ω para $V = 100$ V, $R = 200$ Ω, $L = 2{,}0$ H e $C = 0{,}50$ μF. Compare o resultado com a curva indicada com o dístico de 200 Ω na Figura 31.19. Discuta o comportamento de I e de P nos limites $\omega = 0$ e $\omega \to \infty$.

31.52 Um circuito *R-L-C* em série é conectado a uma fonte ca que possui uma amplitude de voltagem constante V e freqüência angular variável ω. Usando os resultados do Problema 31.51, desenvolva uma expressão para (a) a amplitude da voltagem V_L através do indutor em função de ω; (b) a amplitude da voltagem V_C através do capacitor em função de ω. (c) Faça um gráfico de V_L e de V_C em função de ω para $V = 100$ V, $R = 200$ Ω, $L = 2{,}0$ H e $C = 0{,}50$ μF. (d) Discuta o comportamento de V_L e de V_C nos limites $\omega = 0$ e $\omega \to \infty$. Para qual valor de ω obtemos $V_L = V_C$? Qual é o significado desse valor de ω?

31.53 Um circuito *R-L-C* em série é conectado com uma fonte ca que possui uma amplitude de voltagem constante V e freqüência angular variável ω. (a) Mostre que a média temporal da energia armazenada no indutor é $U_B = \frac{1}{4}LI^2$ e a média temporal da energia armazenada no capacitor é $U_E = \frac{1}{4}CV^2$. (b) Use os resultados dos problemas 31.51 e 31.52 para definir expressões para U_B e U_E em função de ω. (c) Faça um gráfico de U_B e U_E em função de ω para $V = 100$ V, $R = 200$ Ω, $L = 2{,}0$ H e $C = 0{,}50$ μF. (d) Discuta o comportamento de U_B e de U_E nos limites $\omega = 0$ e $\omega \to \infty$. Para qual valor de ω obtemos $U_B = U_E$? Qual é o significado desse valor de ω?

31.54 O circuito *R-L-C* em paralelo. Um resistor, um indutor e um capacitor são ligados em paralelo com uma fonte ca com amplitude de voltagem V e freqüência angular ω. Suponha que a voltagem da fonte seja dada por $v = V\cos\omega t$. (a) Mostre que a voltagem instantânea nos terminais de cada elemento v_R, v_L e v_C em qualquer instante é a mesma da fonte v e que $i = i_R + i_L + i_C$, em que i é a corrente que passa na fonte e i_R, i_L e i_C são as correntes que passam no resistor, no indutor e no capacitor, respectivamente. (b) Quais são as fases de i_R, i_L e i_C em relação à v? Use fasores para representar as correntes i, i_R, i_L e i_C. Sobre o diagrama de fasores, mostre as fases dessas quatro correntes em relação a v. (c) Use o diagrama de fasores do item (b) para mostrar que a amplitute da corrente I para a corrente i que passa na fonte é dada por $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$. (d) Mostre que o resultado da parte (c) pode ser escrito na forma $I = V/Z$, com $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$.

31.55 Ressonância em paralelo. A impedância em um circuito *R-L-C* em paralelo foi deduzida no Problema 31.54. (a) Mostre que na ressonância a freqüência angular é dada por $\omega_0 = 1$

$\sqrt{LC}$, $I_C = I_L$ e I é um *mínimo*. (b) Como I é um mínimo na ressonância, é correto dizer que a potência fornecida ao resistor é um mínimo para $\omega = \omega_0$? Explique. (c) Na ressonância, qual é o ângulo de fase da corrente que passa na fonte em relação à voltagem da fonte? Como isso se compara com o ângulo de fase em um circuito *R-L-C* em *série* durante a ressonância? (d) Faça um diagrama do circuito para um circuito *R-L-C* em paralelo, Em seu diagrama, coloque o resistor mais próximo da fonte e os outros elementos mais afastados. Justifique a seguinte afirmação: Quando a freqüência angular da fonte é $\omega = \omega_0$, não existe *nenhuma* corrente circulando entre (i) a parte do circuito incluindo a fonte e o resistor e (ii) os dois elementos do circuito incluindo o indutor e o capacitor, de modo que seria possível cortar os fios que ligam essas duas partes do circuito sem alterar o valor das correntes. (e) A afirmação mencionada no item (d) ainda permanece válida quando consideramos que qualquer indutor e capacitor real possui uma pequena resistência? Explique.

31.56 Um resistor de 400 Ω e um capacitor de 6,0 μF são conectados em paralelo com um gerador ca que fornece uma tensão eficaz de 220 V para uma freqüência angular de 360 rad/s. Use os resultados do Problema 31.54. Observe que, como não existe indutor no circuito, o termo $1/\omega L$ não está presente na expressão de Z. Calcule (a) a amplitude da corrente no resistor; (b) a amplitude da corrente no capacitor; (c) o ângulo de fase da corrente da fonte; (d) a amplitude da corrente através do gerador. (e) A corrente da fonte está atrasada ou adiantada em relação à voltagem da fonte?

31.57 Um circuito *R-L-C* em paralelo está conectado a uma fonte ca com amplitude de voltagem constante igual a V e freqüência angular variável ω. (a) Usando os resultados do Problema 31.54, desenvolva expressões para as amplitudes das correntes I_R, I_L e I_C que passam no resistor, no indutor e no capacitor em função de ω. (b) Faça um gráfico de I_R, I_L e I_C em função de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2{,}0$ H e $C = 0{,}50\ \mu$F. (c) Discuta os comportamentos de I_L e I_C nos limites $\omega = 0$ e $\omega \to \infty$. Explique o comportamento de I_L e I_C nesses limites. (d) Calcule a freqüência de ressonância (em Hz) do circuito e faça um diagrama de fasores para a freqüência de ressonância. (e) Para a freqüência de ressonância, qual é a amplitude da corrente através da fonte? (f) Para a freqüência de ressonância, qual é a amplitude da corrente através do resistor, através do indutor e através do capacitor?

31.58 Um circuito *R-L-C* em série consiste de um capacitor de 2,50 μF, um indutor de 5,0 mH e um resistor de 75,0 Ω conectados através de uma fonte ca com amplitude de voltagem igual a 15,0 V e freqüência variável. (a) Sob quais circunstâncias a potência média fornecida ao circuito equivale a $\frac{1}{2}V_{qm}I_{qm}$? (b) Sob as condições no item (a), qual é a potência média fornecida a cada elemento de circuito e qual é a corrente máxima que passa pelo capacitor?

31.59 Em um circuito *R-L-C* em série, o módulo do ângulo de fase é igual a 54,0° com a voltagem da fonte atrasada em relação à corrente. A reatância do capacitor é de 350 Ω e a resistência do resistor é de 180 Ω. A potência média fornecida pela fonte é igual a 140 W. Calcule (a) a reatância do indutor; (b) a corrente eficaz; (c) a voltagem eficaz da fonte.

31.60 Um circuito *R-L-C* em série possui $R = 500\ \Omega$, $L = 2{,}0$ H, $C = 0{,}500\ \mu$F e $V = 100$ V. (a) Para $\omega = 800$ rad/s, calcule V_R, V_L, V_C e ϕ. Usando um único conjunto de eixos, faça um gráfico de v, v_R, v_L e v_C em função do tempo. Inclua dois ciclos de v em seu gráfico. (b) Repita o item (a) para $\omega = 1000$ rad/s. (c) Repita o item (a) para $\omega = 1250$ rad/s.

31.61 Em um circuito *R-L-C* em série, a fonte possui uma amplitude de voltagem igual a 120 V, $R = 80{,}0\ \Omega$ e a reatância do capacitor é de 480 Ω. A amplitude da voltagem nos terminais do capacitor é igual a 360 V. (a) Qual é a amplitude da corrente no circuito? (b) Qual é a impedância? (c) Quais são os dois valores da reatância do indutor? (d) Para qual dos dois valores que você encontrou no item (c) a freqüência angular é menor do que a freqüência angular da ressonância? Explique.

31.62 Um circuito em série consiste de um indutor de 1,50 mH, um resistor de 125 Ω e um capacitor de 25,0 nF conectados através de uma fonte ca com voltagem eficaz de 35,0 V e freqüência variável. (a) Em qual freqüência angular a amplitude da corrente será igual a $\frac{1}{3}$ do seu valor máximo possível? (b) Na freqüência obtida no item (a), quais são a amplitude de corrente e a amplitude de voltagem através de cada elemento de circuito (incluindo a fonte ca)?

31.63 A corrente em um circuito varia com o tempo como indicado na Figura 31.28. Calcule a corrente média e o valor eficaz (ou valor quadrático médio) da corrente em termos de I_0.

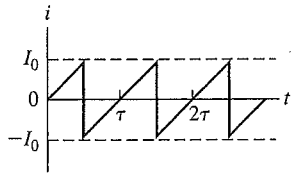


Figura 31.28 Problema 31.63.

31.64 Largura da ressonância. Considere um circuito *R-L-C* em série com um indutor de 1,80 H, um capacitor de 0,900 μF e um resistor de 300 Ω. A fonte possui uma voltagem eficaz $V_{qm} = 60{,}0$ V e uma freqüência angular variável ω. (a) Qual é a freqüência angular de ressonância ω_0 do circuito? (b) Qual é o valor eficaz que passa no circuito I_{qm}^{-0} na ressonância? (c) Quais são os dois valores, ω_1 e ω_2, da freqüência de ressonância para os quais a corrente eficaz é igual à metade do valor da corrente durante a ressonância? (d) O valor $|\omega_1 - \omega_2|$ define a *largura da ressonância*. Calcule I_{qm}^{-0} e a largura da ressonância para $R = 300\ \Omega$, 30,0 Ω e 3,0 Ω. Discuta como seus resultados se comparam com os resultados da Seção 31.5.

31.65 Um indutor, um capacitor e um resistor são conectados em série a uma fonte ca. Se a resistência, a indutância e a capacitância forem duplicadas, por qual fator cada uma das seguintes grandezas variará? Indique se elas aumentam ou diminuem: (a) a freqüência angular de ressonância; (b) a reatância indutiva; (c) a reatância capacitiva. (d) A impedância dobra?

31.66 Um transformador consiste de 275 enrolamentos primários e 834 enrolamentos secundários. Se a diferença potencial através da bobina primária é de 25,0 V, (a) qual é a voltagem através da bobina secundária e (b) qual é a efetiva resistência de carga da bobina secundária, se ela estiver conectada através de um resistor de 125 Ω?

31.67 Você deseja duplicar a freqüência angular de ressonância de um circuito *R-L-C* em série alterando somente os elementos de circuito *pertinentes*, todos pelo mesmo fator. (a) Quais deles você deve alterar? (b) Por qual fator você deve alterá-los?

31.68 Uma resistência R, uma capacitância C e uma indutância L são ligadas em série a uma fonte com amplitude de voltagem V e freqüência angular variável ω. Sendo $\omega = \omega_0$ a freqüência angular da ressonância, calcule: (a) a corrente máxima no resistor; (b) a

voltagem máxima através do capacitor; (c) a voltagem máxima através do indutor; (d) a energia máxima armazenada no capacitor; (e) a energia máxima armazenada no indutor. Forneça suas respostas em função de R, C, L e V.

31.69 Repita o problema 31.68 para $\omega = \omega_0/2$.

31.70 Repita o Problema 31.68 para $\omega = 2\omega_0$.

31.71 Cálculo de uma indutância desconhecida. Seu chefe solicita que você meça a indutância de um indutor. Você possui um resistor, um voltímetro ca de alta impedância, um capacitor e uma fonte ca. Explique como você deve usar esses instrumentos para determinar a indutância e cite outros equipamentos de que possa necessitar. Certifique-se de explicar claramente como usar os equipamentos e do que você necessita para medir a indutância desconhecida.

31.72 Um circuito *R-L-C* em série consome 220 W de uma linha ca de 120 V (valor eficaz) com 50,0 Hz. O fator de potência é igual a 0,560 e a voltagem da fonte está adiantada em relação à corrente. (a) Qual é a resistência líquida R do circuito? (b) Calcule a capacitância de um capacitor em série capaz de produzir no circuito um fator de potência igual a 1, quando ele é conectado ao circuito original. (c) Qual é a nova potência consumida da fonte de alimentação?

31.73 Em um circuito *R-L-C* em série a corrente é dada por $i = I\cos\omega t$. As amplitudes das voltagens através do resistor, do indutor e do capacitor são, respectivamente, V_R, V_L e V_C. (a) Mostre que a potência instantânea através do resistor é dada por $P_R = V_R I\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}V_R I\,(1+\cos 2\omega t)$. O que essa expressão fornece para a potência média através do resistor? (b) Mostre que a potência instantânea através do indutor é dada por $P_L = -V_L I \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t = -\frac{1}{2}V_L I \operatorname{sen} 2\omega t$. O que essa expressão fornece para a potência média através do indutor? (c) Mostre que a potência instantânea através do capacitor é dada por $P_C = V_C I \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t = \frac{1}{2}V_C I \operatorname{sen} 2\omega t$. O que essa expressão fornece para a potência média através do capacitor? (d) Na Seção 31.4, verificamos que a potência instantânea fornecida pela fonte é dada por $p = VI\cos\omega t\,(\cos\phi\cos\omega t - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t)$. Mostre que em qualquer instante o valor de p é dado pela soma $p_R + p_L + p_C$.

Problemas desafiadores

31.74 (a) Para qual freqüência angular a amplitude da voltagem através do *resistor* atinge seu valor máximo em um circuito *R-L-C* em série? (b) Para qual freqüência angular a amplitude da voltagem através do *indutor* atinge seu valor máximo em um circuito *R-L-C* em série? (c) Para qual freqüência angular a amplitude da voltagem através do *capacitor* atinge seu valor máximo em um circuito *R-L-C* em série? (Talvez seja conveniente você usar como referência o Problema 31.52.)

31.75 Números complexos em um circuito. A voltagem através de um dado elemento em um circuito ca não está necessariamente em fase com a corrente que passa através desse elemento. Portanto, as amplitudes das voltagens através dos elementos ligados em uma dada malha do circuito não podem ser somadas algebricamente para se determinar a voltagem total. Um método geralmente usado para simplificar a análise de um circuito ca alimentado por uma fonte de tensão consiste em representar Z como um *número complexo*. A parte real do número complexo é a resistência R da impedância, e a reatância $X = X_L - X_C$ é a parte imaginária. Portanto, para um ramo do circuito com um resistor, um indutor e um capacitor em série, a impedância complexa é dada pelo número complexo $Z_{cpx} = R + iX$, em que $i^2 = -1$. Se a amplitude da voltagem através do ramo do circuito é V_{cpx}, definimos uma amplitude de corrente *complexa* através da relação $I_{cpx} = V_{cpx}/Z_{cpx}$. A amplitude da corrente *real* é dada pelo módulo da amplitude de corrente complexa, ou seja, $I = (I_{cpx}{}^* I_{cpx})^{1/2}$. O ângulo de fase ϕ da corrente em relação à voltagem da fonte é dada pela expressão $\text{tg}\,\phi = \text{Im}(I_{cpx})/\text{Re}(I_{cpx})$. As amplitudes das voltagens V_{Rcpx}, V_{Lcpx} e V_{Ccpx} através do resistor, do indutor e do capacitor, respectivamente, são obtidas multiplicando-se I_{cpx} por R, iX_L ou $-iX_C$, respectivamente. Usando a representação complexa para as amplitudes das voltagens, a voltagem total através de um ramo do circuito é simplesmente dada pela soma algébrica das voltagens através de cada elemento do circuito: $V_{cpx} = V_{R_{cpx}} + V_{L_{cpx}} + V_{C_{cpx}}$. O valor efetivo de qualquer amplitude de corrente ou amplitude de voltagem é o valor absoluto da grandeza complexa correspondente. Considere o circuito *R-L-C* em série indicado na Figura 31.29. Os valores dos elementos dos circuitos da amplitude da voltagem da fonte e da freqüência angular da fonte são indicados na figura. Use a técnica do diagrama de fasores apresentada na Seção 31.1 para determinar uma expressão para: (a) a amplitude da corrente; (b) o ângulo de fase ϕ da corrente em relação à tensão da fonte. (Observe que esse ângulo de fase é igual e de sinal contrário ao ângulo de fase definido na Figura 31.13.) Analise agora o mesmo circuito usando o método dos números complexos. (c) Determine a impedância complexa do circuito, Z_{cpx}. Tome o valor absoluto desse número complexo para obter o valor de Z, a impedância efetiva do circuito. (d) Suponha que a amplitude da voltagem da fonte, V_{cpx}, seja real e calcule a amplitude da corrente I_{cpx}. Determine a amplitude da corrente efetiva calculando o valor absoluto de I_{cpx}. (e) Calcule o ângulo de fase ϕ da corrente em relação à amplitude da voltagem da fonte usando as partes reais e imaginárias do número complexo I_{cpx}, como explicado anteriormente. (f) Calcule a representação complexa das voltagens através do resistor, do indutor e do capacitor. (g) Somando as respostas encontradas na parte (f), verifique se a soma desses números complexos é real e igual a 200 V, a tensão fornecida pela fonte.

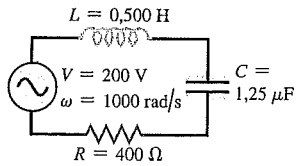
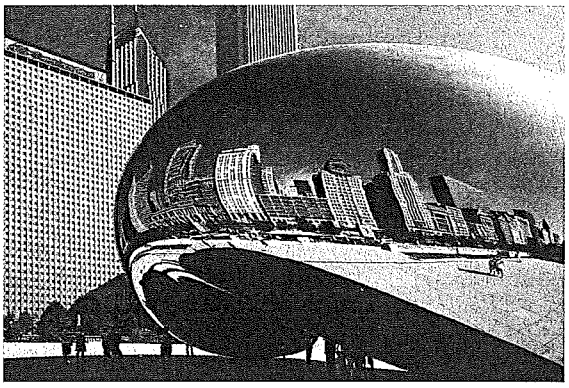


Figura 31.29 Problema desafiador 31.75.

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS 32



Objetos de metal refletem não só a luz visível, mas também as ondas de rádio. Qual aspecto dos metais os torna tão refletivos?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Por que há campos elétricos e magnéticos em uma onda de luz.
- Como a velocidade da luz está relacionada às constantes fundamentais da eletricidade e do magnetismo.
- Como descrever a propagação de uma onda eletromagnética senoidal.
- O que determina a quantidade de potência transportada por uma onda eletromagnética.
- Como descrever as ondas eletromagnéticas estacionárias.

O que é a luz? Por séculos, essa pergunta foi feita pelos seres humanos, sem que houvesse nenhuma resposta, até a unificação da eletricidade com o magnetismo em uma única teoria, conhecida como *eletromagnetismo*, cuja descrição é dada pelas equações de Maxwell. Essas equações mostram que um campo magnético variável funciona como fonte de campo elétrico e que um campo elétrico variável funciona como fonte de campo magnético. Esses campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem se sustentar mutuamente, formando uma *onda eletromagnética* que se propaga através do espaço. A luz visível emitida por um filamento de lâmpada incandescente é um exemplo de onda eletromagnética; outros tipos de ondas eletromagnéticas são produzidas pelas emissoras de rádio e de TV, por osciladores de microondas para fornos e radares, aparelhos de raios X e núcleos radioativos.

Neste capítulo, usaremos as equações de Maxwell como a base teórica para o entendimento das ondas eletromagnéticas. Mostraremos que essas ondas transportam energia e movimento linear. Em ondas eletromagnéticas senoidais, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variam senoidalmente com o tempo e com a posição, com uma dada freqüência e um dado comprimento de onda. Os diversos tipos de ondas eletromagnéticas – a luz visível, o rádio, os raios X e outras ondas – diferem entre si apenas pela freqüência e pelo comprimento de onda. Nosso estudo de óptica nos capítulos posteriores serão baseados parcialmente na natureza eletromagnética da luz.

Diferentemente das ondas em uma corda ou do som se propagando em um fluido, as ondas eletromagnéticas não precisam de um meio material para se propagar; a luz de uma estrela que você vê em uma noite clara viajou sem nenhuma dificuldade por dezenas de anos-luz através do espaço (aproximadamente) vazio. Apesar dessa diferença, as ondas eletromagnéticas e as ondas mecânicas possuem muitas características comuns e são descritas com base na mesma linguagem. Antes de ler este capítulo, seria conveniente fazer uma revisão das propriedades das ondas mecânicas discutidas nos capítulos 15 e 16.

32.1 Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

Em capítulos anteriores, estudamos diversos aspectos dos campos elétricos e magnéticos. Aprendemos que, quando os campos não variam com o tempo, como no caso de campos elétricos produzidos por cargas em repouso ou de campos magnéticos gerados por correntes estacionárias,

podemos analisar os campos elétricos e magnéticos separadamente, sem considerar as interações entre esses campos. Porém, quando ocorrem variações com o tempo, eles deixam de ser independentes. A lei de Faraday (veja a Seção 29.2) nos ensina que a variação de um campo magnético produz um campo elétrico que se traduz pela fem induzida em transformadores e indutores. A lei de Ampère, incluindo o termo da corrente de deslocamento, descoberta por Maxwell (veja a Seção 29.7), mostra que um campo elétrico variável é uma fonte de campo magnético. Essa interação mútua entre os dois campos é sintetizada completamente pelas equações de Maxwell, apresentadas na Seção 29.7.

Portanto, quando um campo elétrico *ou* um campo magnético está variando com o tempo, ocorre uma indução do outro campo na região do espaço adjacente ao campo que está variando. Somos levados a considerar (como Maxwell também considerou) a possibilidade da ocorrência de uma perturbação eletromagnética constituída por campos elétricos e magnéticos variando com o tempo e que pode se propagar de uma região do espaço para outra, mesmo quando não existe nenhuma matéria entre essas regiões. Tal perturbação, caso exista, deve apresentar as características de uma *onda*, e chamá-la de **onda eletromagnética** é bastante apropriado.

Esse tipo de onda existe; as ondas de rádio e de televisão, a luz, os raios X e muitas outras radiações são exemplos de ondas eletromagnéticas. Nosso objetivo no presente capítulo é mostrar como a existência de tais ondas está relacionada aos princípios básicos do eletromagnetismo que estudamos anteriormente e examinar as propriedades dessas ondas.

Eletricidade, magnetismo e luz

Como ocorre freqüentemente no desenvolvimento da ciência, o entendimento teórico das ondas eletromagnéticas seguiu originalmente um caminho muito mais tortuoso do que o que acabamos de mencionar. No início da teoria eletromagnética (no começo do século XIX), dois sistemas diferentes de unidades de carga elétrica eram usados, um para problemas de eletrostática e outro para fenômenos magnéticos envolvendo correntes. Nos sistemas de unidades usados naquela época, essas duas unidades de carga possuíam dimensões diferentes. A dimensão da *razão* entre essas duas grandezas era igual à dimensão de velocidade, e as medidas mostraram que essa razão possuía um valor numérico precisamente igual ao valor da velocidade da luz, $3{,}0 \times 10^8$ m/s. Naquela época, os físicos observaram que isso era uma extraordinária coincidência e não tinham como explicá-la.

Pesquisando esse resultado, Maxwell (Figura 32.1) provou, em 1865, que uma perturbação eletromagnética poderia se propagar no espaço vazio com uma velocidade igual à velocidade da luz e que a luz era, provavelmente, uma onda eletromagnética. Ao mesmo tempo, ele descobriu que os princípios básicos do eletromagnetismo podem ser descritos em quatro equações, que hoje são conhecidas como **equações de Maxwell**, discutidas na Seção 29.7. Essas quatro equações são (1) a lei de Gauss para os campos elétricos; (2) a lei de Gauss para os campos magnéticos, mostrando a ausência de monopolos magnéticos; (3) a lei de Ampère, incluindo a corrente de deslocamento; e (4) a lei de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0} \qquad (29.18)$$

(Lei de Gauss)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (29.19)$$

(Lei de Gauss para o magnetismo)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{inte}} \qquad (29.20)$$

(Lei de Ampère)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(Lei de Faraday)} \qquad (29.21)$$

(Lei de Faraday)

Essas equações valem para campos elétricos e magnéticos no *vácuo*. Quando um material está presente, é necessário substituir a permissividade ϵ_0 e a permeabilidade μ_0 pela permissividade ϵ e pela permeabilidade μ do material. Quando os valores de ϵ e μ variam de um ponto para outro na região de integração, então ϵ e μ devem ser transferidos para o membro esquerdo das equações (29.18) e (29.20), respectivamente, e colocados dentro do sinal das respectivas integrais. Também o valor de ϵ na Equação (29.20) deve ser incluído na integral que fornece $d\Phi_E/dt$.

De acordo com as equações de Maxwell, uma carga puntiforme em repouso produz um campo $\vec{E}$ estático, mas não gera nenhum campo $\vec{B}$; uma carga puntiforme que se move com uma velocidade constante (veja a

Figura 32.1 James Clerk Maxwell (1831-1879) foi o primeiro pesquisador a entender verdadeiramente a natureza fundamental da luz. Ele também fez contribuições importantes para a termodinâmica, a óptica, a astronomia e a fotografia em cores. Albert Einstein descreveu seu trabalho como 'a mais profunda e a mais frutífera contribuição que a física recebeu desde os tempos de Newton'.

Seção 28.1) produz tanto o campo $\vec{E}$ quanto o campo $\vec{B}$. As equações de Maxwell também podem ser usadas para mostrar que, para uma carga puntiforme produzir ondas eletromagnéticas, é necessário que a carga esteja acelerada. De fato, é um resultado geral da teoria eletromagnética que toda carga acelerada irradia ondas eletromagnéticas (Figura 32.2).

Geração de radiação eletromagnética

Um dos modos para fazer uma carga puntiforme emitir ondas eletromagnéticas consiste em fazê-la oscilar com movimento harmônico simples, de maneira que ela possua uma aceleração em quase todos os pontos de sua trajetória (a exceção ocorre quando a partícula passa em sua posição de equilíbrio). A Figura 32.3 mostra algumas linhas de campo elétrico produzidas por uma carga puntiforme oscilante. As linhas de campo não são objetos materiais, porém pode ser útil imaginá-las como se fossem cordas que se estendem desde a carga puntiforme até o infinito. Quando fazemos a carga oscilar para cima e para baixo, produzem-se ondas que se propagam a partir da carga através dessas 'cordas'. Observe que a carga não emite ondas igualmente em todas as direções; as ondas mais acentuadas se propagam em uma direção formando um ângulo de 90° com o eixo do movimento da carga, ao passo que não existe nenhuma onda se propagando ao longo do eixo da oscilação. Isso é exatamente o que o modelo das 'cordas' indica. Também existe uma perturbação magnética que se espalha para fora da carga e que não é indicada na Figura 32.3. Como as perturbações elétricas e magnéticas se espalham ou se irradiam para fora da fonte, podemos usar a expressão **radiação eletromagnética** com o mesmo sentido de 'ondas eletromagnéticas'.

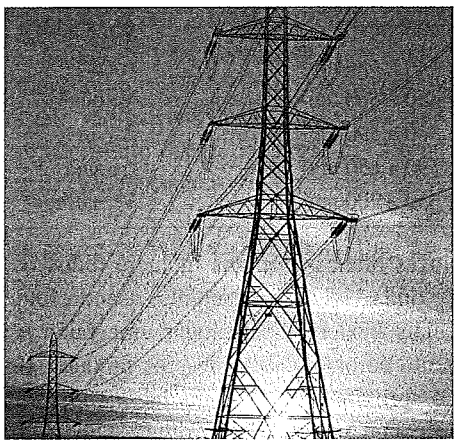


Figura 32.2 (a) Todo telefone celular, modem sem fio ou transmissor de rádio emite sinais sob a forma de ondas eletromagnéticas, que são produzidas por cargas aceleradas. (b) Linhas de transmissão de energia elétrica transportam uma forte corrente alternada, o que significa que uma expressiva quantidade de carga está acelerando para a frente e para trás, gerando ondas eletromagnéticas. Essas ondas podem produzir um som semelhante a um zumbido no rádio do seu carro, se você dirige próximo às linhas.

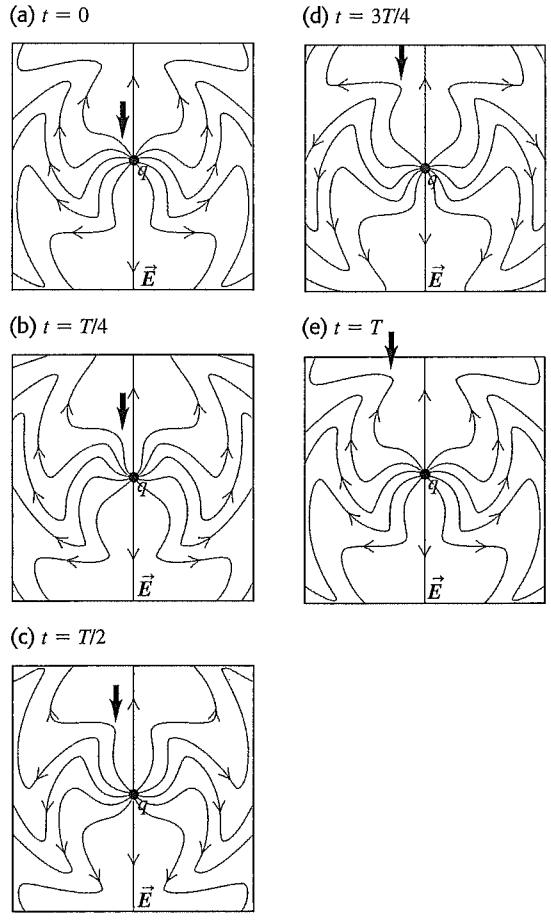


Figura 32.3 Linhas do campo elétrico produzidas por uma carga puntiforme que oscila com movimento harmônico simples. As linhas de campo estão sobre o plano que contém a trajetória da carga e são indicadas em cinco instantes durante um período completo T da oscilação. Para $t = 0$, a carga puntiforme se move de baixo para cima, passando em sua posição de equilíbrio. A seta de cada parte do figura indica uma 'dobra' nas linhas de $\vec{E}$ que se propagam para fora da carga puntiforme. Para maior clareza, as linhas do campo magnético não são indicadas; essas linhas são circunferências situadas em planos perpendiculares ao plano das figuras e são concêntricas ao eixo da oscilação.

Ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda macroscópicos foram inicialmente produzidas em laboratório no ano de 1887, pelo físico alemão Heinrich Hertz. Como fonte ondulatória, ele usou cargas oscilando em um circuito *L-C* do tipo discutido na Seção 30.5; Hertz detectou as ondas eletromagnéticas resultantes usando outro circuito sintonizado para a mesma freqüência e também produziu ondas eletromagnéticas *estacionárias* e mediu a distância entre dois nós consecutivos (meio comprimento de onda) para determinar seu comprimento de onda. Sabendo a freqüência de ressonância de seu circuito, ele então determinou a velocidade da onda usando a relação $v = \lambda f$. Desse modo, verificou que a velocidade da onda eletromagnética era igual à velocidade da luz; isso confirmava diretamente a previsão teórica de Maxwell. Para homenagear Hertz, a unidade SI de freqüência recebeu seu nome: um hertz (1 Hz) é igual a um ciclo por segundo.

O valor moderno da velocidade da luz, que designamos pelo símbolo c, é igual a 299.792.458 m/s. (Recapitulando a Seção 1.3, esse valor é a base do nosso padrão de comprimento: um metro é definido como a distância que a luz viaja em 1/299.792.458 segundo.) Para nossos propósitos, $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s é suficientemente preciso.

A possibilidade do uso de ondas eletromagnéticas para a comunicação através de distâncias longas parece não ter ocorrido para Hertz. Coube ao entusiasmo e ao esforço de Marconi e de outros a idéia de fazer as comunicações por meio do rádio se tornarem uma realidade cotidiana. Em um *transmissor* de rádio, cargas elétricas oscilam ao longo do comprimento de uma antena condutora, produzindo campos oscilantes semelhantes aos indicados na Figura 32.3. Visto que muitas cargas oscilam juntas em uma antena, as perturbações são muito mais fortes que as produzidas por uma única carga oscilando e podem ser detectadas em distâncias muito mais longas. Em um *receptor* de rádio, a antena também é um condutor; os campos das ondas que emanam de um transmissor distante exercem forças sobre as cargas livres no interior da antena receptora, produzindo uma corrente oscilante que é detectada e amplificada pelo circuito receptor.

Na maior parte do restante deste capítulo, nossa preocupação será com as próprias ondas eletromagnéticas, e não com o problema mais complexo de como elas são produzidas.

O espectro eletromagnético

As ondas eletromagnéticas cobrem um espectro extremamente amplo de comprimento de onda e freqüência. Esse **espectro eletromagnético** abrange as transmissões por rádio e TV, a luz visível, a radiação infravermelha e ultravioleta, os raios X e os raios gama. Foram detectadas ondas eletromagnéticas com freqüências de no mínimo 1 até 10^{24} Hz; a porção mais comumente encontrada do espectro é indicada na Figura 32.4, que fornece as faixas aproximadas de comprimento de onda e freqüência para diversos segmentos. Apesar das grandes diferenças nos seus usos e meios de produção, trata-se de ondas eletromagnéticas com a mesma velocidade de propagação (no vácuo) $c = 299.792.458$ m/s. As ondas eletromagnéticas podem diferir em freqüência f e comprimento de onda λ, mas a relação $c = \lambda f$ no vácuo se mantém para cada uma.

Podemos detectar somente um pequeno segmento desse espectro diretamente através do nosso sentido da visão. Chamamos essa faixa de **luz visível**. Seus comprimentos de onda variam de cerca de 400 nm a 700 nm (de 400 a 700×10^{-9} m), com freqüências correspondentes de aproximadamente 750 THz a 430 THz (de 7,5 a $4{,}3 \times 10^{14}$ Hz). Diferentes partes do espectro visível evocam nos seres humanos as sensações de cores diferentes. Os comprimentos de onda para cores no espectro visível são fornecidos (de forma muito aproximada) na Tabela 32.1.

Tabela 32.1 Comprimento de onda de uma luz visível

De 400 a 440 nm	Violeta
De 440 a 480 nm	Azul
De 480 a 560 nm	Verde
De 560 a 590 nm	Amarelo
De 590 a 630 nm	Laranja
De 630 a 700 nm	Vermelho

As luzes brancas comuns incluem todos os comprimentos de onda visíveis. Entretanto, usando fontes ou filtros especiais, podemos selecionar uma faixa estreita de comprimento de onda dentro de uma faixa de alguns nm. Essa luz é aproximadamente uma luz *monocromática* (de uma única cor). Uma luz monocromática absoluta com um único comprimento de onda é uma idealização inatingível. Quando usamos a expressão 'luz monocromática com $\lambda = 550$ nm' em referência a uma experiência laboratorial, queremos realmente dizer uma pequena faixa de comprimento de onda *em torno* de 550 nm. A luz proveniente de um laser está muito mais próxima do monocromático que a luz obtida de qualquer outra forma.

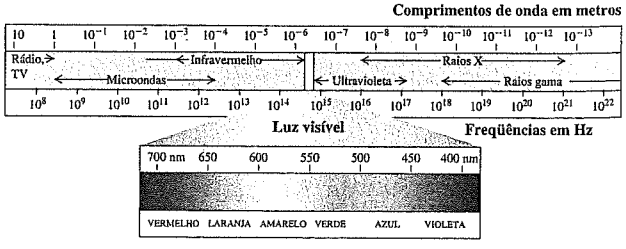


Figura 32.4 O espectro eletromagnético. As freqüências e comprimentos de onda encontrados na natureza se estendem sobre um intervalo tão elevado que é necessário usar uma escala logarítmica para mostrar todas as bandas importantes. Os limites entre as diversas bandas são ligeiramente abstratos.

Formas invisíveis de radiação eletromagnética não são menos importantes que a luz visível. Nosso sistema de comunicação global, por exemplo, depende das ondas de rádio: a rádio AM usa ondas com freqüências de $5{,}4 \times 10^5$ Hz a $1{,}6 \times 10^6$ Hz, enquanto as transmissões de rádio FM estão nas freqüências de $8{,}8 \times 10^7$ Hz a $1{,}08 \times 10^8$ Hz. (As transmissões de TV usam freqüências que fazem parte da banda FM.) As microondas também são usadas nas comunicações (por exemplo, nos telefones celulares e nas redes sem fio) e para radares meteorológicos (em freqüências próximas de 3×10^9 Hz). Muitas câmeras possuem um dispositivo que emite um feixe de radiação infravermelha; analisando as propriedades da radiação infravermelha refletida do sujeito, a câmera determina a distância do sujeito e automaticamente ajusta o foco. A radiação ultravioleta possui comprimentos de onda mais curtos do que a luz visível; como aprenderemos no Capítulo 36, essa propriedade permite o foco em faixas muito estreitas para aplicações de alta precisão, tal como a cirurgia ocular a laser. Os raios X são capazes de penetrar a pele, o que os torna inestimáveis na odontologia e na medicina. A radiação eletromagnética com comprimento de onda mais curto, os raios gama, é produzida na natureza por materiais radioativos (veja o Capítulo 43). Os raios gama, que são muito energéticos, são usados na medicina para destruir células cancerosas.

Teste sua compreensão da Seção 32.1 (a) É possível uma onda puramente elétrica se propagar através do espaço vazio – ou seja, uma onda composta de um campo elétrico, porém sem campo magnético? (b) E uma onda puramente magnética, com campo magnético, porém sem campo elétrico? ∎

32.2 Ondas eletromagnéticas planas e a velocidade da luz

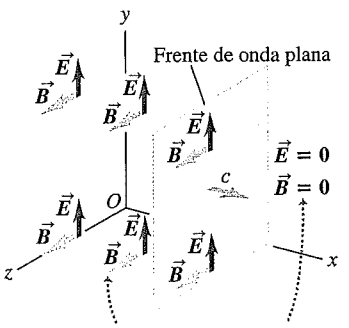
Agora estamos preparados para desenvolver as idéias básicas das ondas eletromagnéticas e suas relações com os princípios do eletromagnetismo. Nosso procedimento será postular uma configuração de campo simples que possui comportamento ondulatório. Vamos supor um campo elétrico $\vec{E}$ que possui somente componente y e um campo magnético $\vec{B}$ com somente componente z e admitir que ambos os campos se deslocam juntos ao longo do eixo $+Ox$ com uma velocidade c que, inicialmente, não conhecemos. (À medida que prosseguirmos, ficará claro por que escolhemos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ perpendiculares à direção da propagação bem como perpendiculares entre si.) A seguir, vamos testar se esses campos são fisicamente possíveis perguntando se eles são consistentes com as equações de Maxwell, particularmente com a lei de Ampère e com a lei de Faraday. Verificaremos que a resposta é sim, desde que c possua um valor dado. Mostraremos também que a *equação de onda*, descrita no Capítulo 15, quando estudamos as ondas mecânicas, pode ser deduzida usando-se as equações de Maxwell.

Uma onda eletromagnética plana simples

Usando um sistema de coordenadas xyz (Figura 32.5), imaginamos que o espaço inteiro seja dividido em duas regiões por um plano perpendicular ao eixo Ox (paralelo ao plano yz). Em cada ponto à esquerda desse plano existe um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ no sentido do eixo $+Oy$ e um campo magnético uniforme $\vec{B}$ no sentido do eixo $+Oz$, conforme está indicado. Além disso, supomos que o plano da fronteira dianteira, denominado *frente da onda*, se desloca da esquerda para a direita ao longo do eixo $+Ox$ com uma velocidade constante c, ainda não conhecida. Logo, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se deslocam da esquerda para a direita em regiões do vácuo com uma velocidade definida. Em resumo, essa situação descreve de modo rudimentar uma onda eletromagnética. Tal onda, na qual em qualquer instante os campos são uniformes sobre qualquer plano perpendicular à direção de propagação, denomina-se **onda plana**. No caso indicado na Figura 32.5, os campos são nulos para planos situados do lado direito da frente de onda e possuem os mesmos valores sobre os planos situados do lado esquerdo da frente de onda; mais adiante, vamos considerar ondas planas mais complexas.

No momento, não estamos preocupados com o problema da *produção* efetiva de tal configuração ondulatória. Em vez disso, simplesmente perguntamos se ela é consistente com as leis do eletromagnetismo, ou seja, com as equações de Maxwell. Vamos examinar, sucessivamente, cada uma dessas quatro equações.

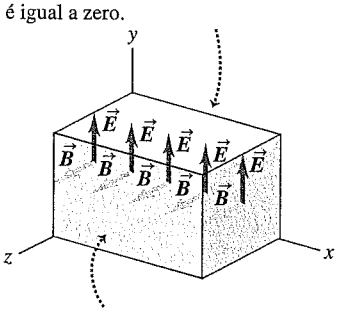
Inicialmente, devemos verificar se a equação de onda satisfaz à primeira e à segunda equação de Maxwell, ou seja, as duas leis de Gauss para os campos elétricos e magnéticos. Para isso, tomamos como superfície gaussiana uma



Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são uniformes sobre os planos atrás da frente de onda, porém são nulos em todos os pontos situados na parte dianteira da frente de onda.

Figura 32.5 Uma frente de onda eletromagnética. O plano que representa a frente de onda se desloca para a direita (no sentido positivo de x) com velocidade c.

O campo elétrico é o mesmo na parte de cima e na parte de baixo da superfície gaussiana, portanto o fluxo elétrico total através da superfície é igual a zero.



O campo magnético é o mesmo nos lados esquerdo e direito da superfície gaussiana, portanto o fluxo magnético total através da superfície é igual a zero.

Figura 32.6 Superfície gaussiana para uma onda eletromagnética plana.

caixa retangular com lados paralelos aos planos *xy*, *xz* e *yz* (Figura 32.6). No interior da caixa, não existe nenhuma carga elétrica. Você deve ser capaz de mostrar que o fluxo elétrico total e o fluxo magnético são ambos iguais a zero; isso seria verdade mesmo imaginando-se uma parte da caixa dentro da região em que $E = B = 0$. Esse *não* seria o caso se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ tivessem componentes ao longo do eixo *Ox*, paralelos à direção de propagação. Vamos deixar a demonstração como um problema (veja o Problema 32.42). Portanto, para satisfazer as duas primeiras equações de Maxwell, é necessário que o campo elétrico e o campo magnético sejam ambos perpendiculares à direção de propagação; ou seja, trata-se de uma **onda transversal**.

A próxima equação de Maxwell a ser considerada é a lei de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{32.1}$$

Para verificarmos se a onda satisfaz à lei de Faraday, aplicamos essa lei a um retângulo *efgh* paralelo ao plano *xy* (Figura 32.7a). Como indica a Figura 32.7b, para uma seção reta no plano *xy*, esse retângulo possui altura *a* e largura Δx. No instante indicado, a frente de onda avança parcialmente através do retângulo, e $\vec{E}$ é zero ao longo do lado *ef*. Para aplicarmos a lei de Faraday, consideramos o vetor área $d\vec{A}$ do retângulo *efgh* no sentido $+Oz$. Com essa escolha, a regra da mão direita exige que a integral de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ seja feita no sentido *anti-horário* em torno do retângulo. Em cada ponto ao longo do lado *ef*, $\vec{E}$ é igual a zero. Em cada ponto ao longo dos lados *fg* e *he*, $\vec{E}$ é nulo ou perpendicular ao vetor $d\vec{l}$. Somente o lado *gh* contribui para a integral. Sobre esse lado, $\vec{E}$ possui sentido oposto ao de $d\vec{l}$ e obtemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea \tag{32.2}$$

Portanto, o membro esquerdo da Equação (32.1) é diferente de zero.

Para que a lei de Faraday, Equação (32.1), seja satisfeita, deve haver um componente de $\vec{B}$ na direção do eixo *Oz* (perpendicular a $\vec{E}$), de modo que nessa região exista um fluxo magnético Φ_B através do retângulo *efgh* e uma derivada $d\Phi_B/dt$ diferente de zero. Na realidade, em nossa onda, $\vec{B}$ possui *apenas* o componente ao longo do eixo *Oz*. Havíamos suposto que esse componente estava orientado no sentido *positivo* do eixo *Oz;* veremos se essa hipótese é consistente com a lei de Faraday. Durante o intervalo de tempo *dt*, a frente de onda se desloca para a direita a uma distância *c dt* na Figura 32.7b, varrendo uma área *ac dt* do retângulo *efgh*. Durante esse intervalo, o fluxo magnético Φ_B através do retângulo *efgh* cresce de $d\Phi_B = B(ac\,dt)$, de modo que a taxa de variação do fluxo magnético é

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bac \tag{32.3}$$

Agora, substituímos as equações (32.2) e (32.3) na lei de Faraday, Equação (32.1); obtemos

$$-Ea = -Bac$$
$$E = cB \tag{32.4}$$

(onda eletromagnética no vácuo)

O resultado anterior mostra que nossa onda é consistente com a lei de Faraday somente quando a velocidade da onda *c* é tal que os módulos dos vetores perpendiculares $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sejam relacionados por meio da Equação (32.4). Observe que, se tivéssemos escolhido para $\vec{B}$ o sentido *negativo* do eixo *Oz*, surgiria um sinal negativo adicional na Equação (32.4); visto que *E*, *c* e *B* são grandezas positivas, a solução obtida seria impossível. Além disso, qualquer componente de $\vec{B}$ ao longo do eixo *Oy* (paralelo a $\vec{E}$) não forneceria nenhuma contribuição para o fluxo magnético variável Φ_B através do retângulo *efgh* (que é paralelo ao plano *xy*) e, portanto, não seria parte da onda.

Finalmente, vamos fazer um cálculo semelhante usando a lei de Ampère, a última equação de Maxwell que restava. Não existe nenhuma corrente de condução ($i_C = 0$), logo, a lei de Ampère é dada por

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{32.5}$$

Para verificarmos se nosso resultado é consistente com a lei de Ampère, imaginemos agora que nosso retângulo esteja situado no plano *xz*, como indicado na Figura 32.8, e novamente examinamos a situação no instante em que a frente de onda se deslocou parcialmente através do retângulo. Consideramos o vetor área $d\vec{A}$ no sentido $+Oy$ e, portanto, a regra da mão direita exige que a integral $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ seja feita no sentido anti-horário em torno do retângulo. O campo $\vec{B}$ é igual a zero em cada ponto ao longo dos lados *ef*, e em cada ponto ao longo dos lados *fg* e *he* ele é igual a zero ou perpendicular

a $d\vec{l}$. Somente o lado gh, no qual $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são paralelos, contribui para a integral, e assim obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Ba \tag{32.6}$$

Portanto, o membro esquerdo da lei de Ampère, Equação (32.5), é diferente de zero; o membro direito também deve ser diferente de zero. Portanto, $\vec{E}$ deve possuir um componente y (perpendicular a $\vec{B}$), de modo que o fluxo elétrico Φ_E através do retângulo e a derivada $d\Phi_E/dt$ possam ser diferentes de zero. Chegamos ao mesmo resultado obtido aplicando-se a lei de Faraday: em uma onda eletromagnética, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devem ser mutuamente perpendiculares.

Em um intervalo de tempo dt, o fluxo elétrico Φ_E através do retângulo aumentou de $d\Phi_E = E(ac\ dt)$. Como escolhemos $d\vec{A}$ no sentido $+Oy$, a variação desse fluxo é positiva; a taxa de variação do campo elétrico é

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = Eac \tag{32.7}$$

Substituindo as equações (32.6) e (32.7) na lei de Ampère, Equação (32.5), encontramos

$$Ba = \epsilon_0 \mu_0 Eac$$

$$B = \epsilon_0 \mu_0 cE \tag{32.8}$$

(onda eletromagnética no vácuo)

Portanto, a onda considerada obedece à lei de Ampère somente quando as grandezas E, B e c forem relacionadas pela Equação (32.8).

Nossa onda eletromagnética deve obedecer *simultaneamente* à lei de Ampère e à lei de Faraday; portanto, as equações (32.4) e (32.8) são ambas satisfeitas. Isso só ocorre quando $\epsilon_0 \mu_0 c = 1/c$, ou seja

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{32.9}$$

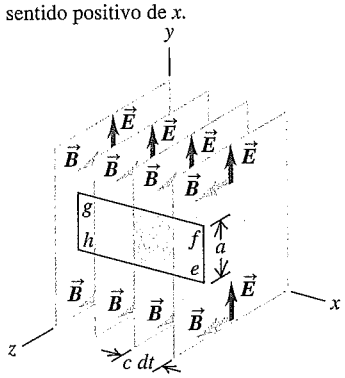
(velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo)

Substituindo os valores numéricos dessas grandezas, obtemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2})}}$$
$$= 3{,}0 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

A onda que consideramos é consistente com todas as equações de Maxwell, desde que a frente de onda se propague com a velocidade anterior, que você reconhece como a velocidade da luz! Note que o valor *exato* de c é definido como 299.792.458 m/s; o valor moderno de ϵ_0 é definido de modo a concordar com isso, quando usado na Equação (32.9) (veja a Seção 21.3).

(a) No intervalo dt, a frente de onda se desloca uma distância $c\ dt$ no sentido positivo de x.



(b) Vista lateral da situação descrita no item (a)

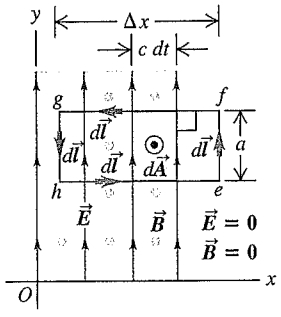


Figura 32.7 (a) Aplicação da lei de Faraday para uma onda plana. (b) No intervalo de tempo dt, o fluxo magnético através do retângulo no plano xy cresce de $d\Phi_B$, que é igual ao fluxo através do retângulo sombreado de área igual $ac\ dt$; ou seja, $d\Phi_B = Bac\ dt$. Logo, $d\Phi_B/dt = Bac$.

As principais propriedades das ondas eletromagnéticas

Escolhemos uma onda simples para nosso estudo, a fim de evitar dificuldades matemáticas; porém, esse caso especial ilustra diversas características importantes de *todas* as ondas eletromagnéticas:

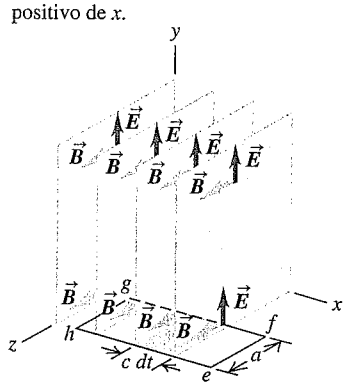
1. A onda é *transversal*; tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$ são perpendiculares à direção de propagação da onda. Os campos elétricos e magnéticos também são mutuamente perpendiculares. O produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ fornece a direção e o sentido da propagação da onda (Figura 32.9).
2. A razão entre o módulo de $\vec{E}$ e o módulo de $\vec{B}$ é constante: $E = cB$.
3. A onda se desloca no vácuo com uma velocidade definida e invariável.
4. Diferentemente das ondas mecânicas, que necessitam das partículas de um meio para oscilar – tal como o ar ou a água – e para transmitir a onda, uma onda eletromagnética não necessita de nenhum meio. As grandezas que 'oscilam' em uma onda eletromagnética são o campo elétrico e o campo magnético.

Podemos generalizar essa discussão para uma situação mais realista. Suponha que todas as frentes de onda possuam forma de planos paralelos perpendiculares ao eixo Ox, todos se propagando da esquerda para a direita com velocidade c. Suponha que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sejam os mesmos em todos os pontos no interior de uma única região entre os dois planos, porém os campos variem de uma região para a outra. A onda resultante é uma onda plana, mas uma onda na qual os campos variem ao longo do eixo Ox. Tal onda poderia ser construída superpondo-se as diversas ondas simples que discutimos anteriormente (indicadas na Figura 32.5). Isso é possível porque os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ obedecem ao princípio da superposição aplicado para as ondas do mesmo modo que em situações estáticas; quando duas ondas se superpõem, o campo elétrico total $\vec{E}$ em cada ponto é dado pela soma vetorial de todos os campos $\vec{E}$ das ondas individuais e, analogamente, esse princípio serve para o campo $\vec{B}$ total.

Podemos estender o desenvolvimento anterior para mostrar que, para as ondas cujos campos variam gradualmente, as leis de Faraday e de Ampère também são válidas, desde que todas as frentes de onda se propaguem com a velocidade c dada pela Equação (32.9). No limite, quando a variação gradual for infinitamente pequena, teremos uma onda para a qual os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variam *continuamente* ao longo do eixo Ox. A configuração inteira do campo se propaga da esquerda para a direita com velocidade c. Na Seção 32.3, vamos considerar ondas para as quais $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são funções *senoidais* de x e de t. Como em cada ponto os módulos de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ são relacionados por $E = cB$, as variações periódicas dos dois campos em qualquer onda progressiva devem permanecer *em fase*.

As ondas eletromagnéticas possuem a propriedade da **polarização**. Na discussão anterior, a escolha do eixo Oy para $\vec{E}$ foi arbitrária. Poderíamos igualmente especificar o eixo Oz para $\vec{E}$; então $\vec{B}$ deveria estar na direção do eixo-Oy. Uma onda para a qual o vetor $\vec{E}$ permanece sempre paralelo a certo eixo denomina-se **linearmente polarizada** ao longo desse eixo. De modo mais geral, *qualquer* onda que se propague na direção Ox pode ser representada como uma superposição de ondas linearmente polarizadas na direção do eixo Oy e na direção Oz. No Capítulo 33, estudaremos a polarização com mais detalhes, dando ênfase especial ao fenômeno da polarização da luz.

(a) No intervalo dt, a frente de onda percorre uma distância $c\,dt$ no sentido positivo de x.



(b) Vista do topo da situação no item (a)

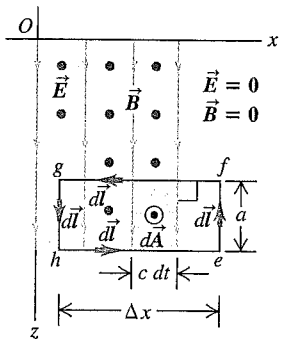


Figura 32.8 Aplicação da lei de Ampère para uma onda plana. (Compare com a Figura 32.7a.) (b) No intervalo de tempo dt, o fluxo elétrico através do retângulo no plano xz cresce de um valor $d\Phi_E$. Esse aumento é igual ao fluxo através da área do retângulo sombreado $ac\,dt$; ou seja, $d\Phi_E = Eac\,dt$. Portanto, $d\Phi_E/dt = Eac$.

Dedução da equação de onda eletromagnética

Vejamos agora uma dedução alternativa da Equação (32.9) para a velocidade das ondas eletromagnéticas. Ela utiliza mais desenvolvimentos matemáticos do que nossos tratamentos anteriores, porém inclui uma dedução da equação de onda para ondas eletromagnéticas. Essa parte da seção pode ser omitida sem a perda da continuidade do capítulo.

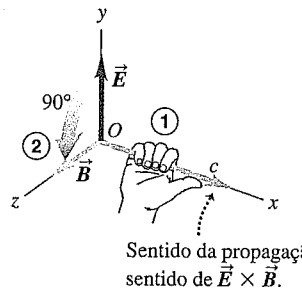
Durante nossa discussão sobre ondas mecânicas na Seção 15.3, mostramos que a função $y(x,t)$, que representa o deslocamento em qualquer ponto da onda mecânica que se desloca ao longo do eixo Ox, deve satisfazer uma equação diferencial, a Equação (15.12):

Regra da mão direita para uma onda eletromagnética:

(1) Aponte o polegar da sua mão direita no sentido da propagação da onda.

(2) Imagine girar 90° o vetor do campo $\vec{E}$ no sentido em que os seus dedos se encurvam.

Esse é o sentido do campo $\vec{B}$.



Sentido da propagação = sentido de $\vec{E} \times \vec{B}$.

Figura 32.9 A regra da mão direita para ondas eletromagnéticas relaciona os sentidos de $\vec{E}$, $\vec{B}$ e o sentido da propagação.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{32.10}$$

A equação anterior denomina-se **equação de onda**, e v é a velocidade de propagação da onda.

Para deduzirmos uma equação correspondente para uma onda eletromagnética, consideramos novamente uma onda plana. Ou seja, vamos supor que, em qualquer instante, E_y e B_z são uniformes sobre planos perpendiculares ao eixo Ox, a direção de propagação da onda. Porém, agora vamos fazer E_y e B_z variar continuamente ao longo do eixo Ox; então, cada onda é uma função de x e de t. Vamos considerar os valores de E_y e de B_z sobre dois planos perpendiculares ao plano Ox, um situado no ponto x e o outro em $x + \Delta x$.

Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, aplicamos a lei de Faraday em um retângulo situado sobre um plano paralelo ao plano xy, como indicado na Figura 32.10. Essa figura é semelhante à Figura 32.7. Suponha que a extremidade esquerda do retângulo gh esteja no ponto x e que a extremidade direita ef esteja na posição $(x + \Delta x)$. No instante t, os valores de E_y sobre esses dois lados são $E_y(x, t)$ e $E_y(x + \Delta x, t)$, respectivamente. Quando aplicamos a lei de Faraday para esse retângulo, verificamos que, em vez de $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea$ como antes, temos

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -E_y(x,t)a + E_y(x + \Delta x, t)a \\ &= a[E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x,t)]\end{aligned} \tag{32.11}$$

Para determinarmos o fluxo magnético Φ_B através desse retângulo, supomos que Δx seja suficientemente pequeno, de modo que B_z pode ser considerado aproximadamente constante sobre o retângulo. Nesse caso, $\Phi_B = B_z(x, t)A = B_z(x, t)a\,\Delta x$ e

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Usamos uma notação com derivadas parciais porque B_z é uma função de x e de t. Quando substituímos essa expressão e a Equação (32.11) na lei de Faraday, dada pela Equação (32.1), obtemos

$$a[E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x,t)] = -\frac{\partial B_z}{\partial t} a\,\Delta x$$

$$\frac{E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x,t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Finalmente, suponha que o retângulo seja contraído até formar uma tira estreita, de modo que Δx tenda a zero. Quando tomamos o limite da equação anterior para $\Delta x \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} \tag{32.12}$$

A equação anterior mostra que, quando existe um componente B_z do campo magnético variando com o tempo, também existe um componente E_y do campo elétrico que varia com x, reciprocamente. Vamos deixar guardada essa relação momentaneamente; em breve, retornaremos a ela.

A seguir, aplicamos a lei de Ampère ao retângulo indicado na Figura 32.11. A integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ fornece

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x,t)a \tag{32.13}$$

Supondo novamente que o retângulo seja muito estreito, aproximamos o fluxo elétrico Φ_E através dele por $\Phi_E = E_y(x, t)A = E_y(x, t)a\,\Delta x$. A taxa de variação de Φ_E, necessária para aplicar a lei de Ampère, é dada por

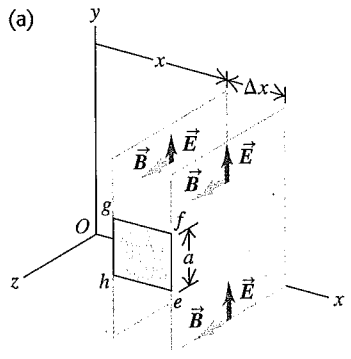
$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Agora substituindo a relação anterior e a Equação (32.13) na lei de Ampère, a Equação (32.5):

$$-B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x,t)a = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Dividindo ambos os membros por $a\,\Delta x$ e tomando o limite quando $\Delta x \to 0$, obtemos

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} \tag{32.14}$$



(b) Vista lateral da situação no item (a)

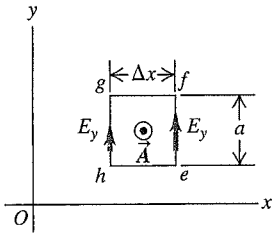
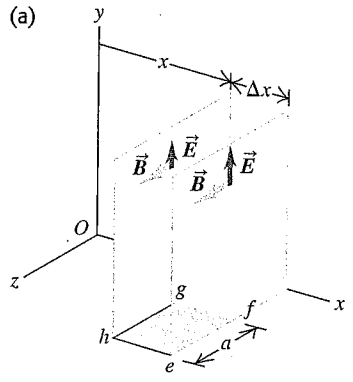


Figura 32.10 Aplicação da lei de Faraday para um retângulo de altura a e base Δx paralelo ao plano xy.



(b) Vista do topo da situação no item (a)

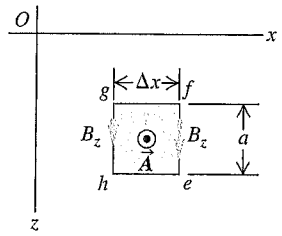


Figura 32.11 Aplicação da lei de Ampère para um retângulo de altura a e base Δx paralelo ao plano xz.

Então surge a etapa final. Fazemos a derivada parcial em relação a x de ambos os membros da Equação (32.12) e fazemos a derivada parcial em relação a t de ambos os membros da Equação (32.14). Obtemos os resultados:

$$-\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t}$$
$$-\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

Combinando as duas equações anteriores para eliminar B_z, finalmente encontramos

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (32.15)$$

(equação da onda eletromagnética no vácuo)

Essa expressão possui a mesma forma da equação geral de uma onda, Equação (32.10). Como o campo elétrico E_y deve satisfazer a essa equação, ele se comporta como uma onda cuja configuração se desloca através do espaço com uma velocidade definida. Além disso, comparando a Equação (32.10) à Equação (32.15), vemos que a velocidade v da onda é dada por

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon_0\mu_0 \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Esse resultado está de acordo com a Equação (32.9), que fornece a velocidade c de propagação de uma onda eletromagnética.

Podemos mostrar que B_z também satisfaz à mesma equação de onda para E_y, a Equação (32.15). Para provar isso, tomamos a derivada parcial da Equação (32.12) em relação a t e a derivada parcial da Equação (32.14) em relação a x e combinamos os resultados. Deixamos essa demonstração para você resolver (veja o Problema 32.37).

Teste sua compreensão da Seção 32.2 Para cada uma das seguintes ondas eletromagnéticas, forneça o sentido do campo magnético. (a) A onda se propaga no sentido positivo de z, e $\vec{E}$ está no sentido positivo de x; (b) a onda se propaga no sentido positivo de y, e $\vec{E}$ está no sentido negativo de z; (c) a onda se propaga no sentido negativo de x, e $\vec{E}$ está no sentido positivo de z. ∎

32.3 Ondas eletromagnéticas senoidais

As ondas eletromagnéticas senoidais são diretamente análogas às ondas mecânicas transversais em uma corda esticada, que estudamos na Seção 15.3. Em uma onda eletromagnética senoidal, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em qualquer ponto do espaço são funções senoidais do tempo e, em qualquer instante, a variação *espacial* dos campos também é senoidal.

Algumas ondas eletromagnéticas senoidais são *ondas planas*; elas possuem em comum com as ondas descritas na Seção 32.2 a propriedade de que, em cada instante, os campos são uniformes sobre qualquer plano perpendicular à direção de propagação. O conjunto todo se desloca na direção e no sentido de propagação da onda com velocidade c. As direções de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ são perpendiculares à direção de propagação da onda (e são mutuamente perpendiculares), de modo que a onda é *transversal*. As ondas eletromagnéticas produzidas por uma carga puntiforme oscilando, indicadas na Figura 32.3, são um exemplo de ondas senoidais que *não* são ondas planas. Porém, se restringimos nossa observação a uma região relativamente pequena e para pontos muito afastados da fonte, até mesmo essas ondas podem ser consideradas aproximadamente ondas planas (Figura 32.12). De modo análogo, a superfície curva da Terra (aproximadamente) esférica parece ser plana para um observador no solo, porque o raio da Terra é muito maior do que o tamanho do observador. Nesta seção, vamos restringir nossa discussão às ondas planas.

A freqüência f, o comprimento de onda λ e a velocidade de propagação da onda c de qualquer onda periódica são relacionados pela equação usual $c = \lambda f$. Quando a freqüência f é a freqüência de uma linha de transmissão de 60 Hz, o comprimento de onda é dado por

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{60 \text{ Hz}} = 5 \times 10^6 \text{ m} = 5000 \text{ km}$$

que é da ordem do raio da Terra! Para uma onda com esse comprimento, até mesmo uma distância de muitos quilômetros contribui apenas com uma pequena fração de um

comprimento de onda. Porém, para uma freqüência de 10^8 Hz (100 MHz), típica de uma onda de rádio de FM, o comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^8 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

e uma distância moderada pode abranger diversas ondas completas.

Campos de uma onda senoidal

A Figura 32.13 mostra uma onda eletromagnética senoidal linearmente polarizada se propagando no sentido do eixo $+Ox$. Os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são indicados apenas em alguns pontos da parte positiva do eixo Ox. Note que os campos elétrico e magnético oscilam em fase: $\vec{E}$ atinge seu valor máximo quando $\vec{B}$ atinge seu valor máximo e $\vec{E}$ é igual a zero quando $\vec{B}$ é igual a zero. Note também que em planos para os quais $\vec{E}$ está no sentido $+y$, $\vec{B}$ está no sentido $+z$; quando $\vec{E}$ está no sentido $-y$, $\vec{B}$ está no sentido $-z$. Note que em todos os planos o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ aponta no sentido da propagação da onda (o sentido $+x$). Mencionamos isso na Seção 32.2, na lista de características das ondas eletromagnéticas.

ATENÇÃO Em uma onda plana, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão em toda parte A Figura 32.13 pode passar a impressão equivocada de que os campos elétrico e magnético existem somente ao longo do eixo x. Na verdade, em uma onda plana senoidal, há campos elétricos e magnéticos em *todos* os pontos no espaço. Imagine um plano perpendicular ao eixo x (ou seja, paralelo ao plano yz) em um dado ponto e em um dado instante; os campos possuem os mesmos valores em todos os pontos nesse plano. Os valores são diferentes em planos diferentes.

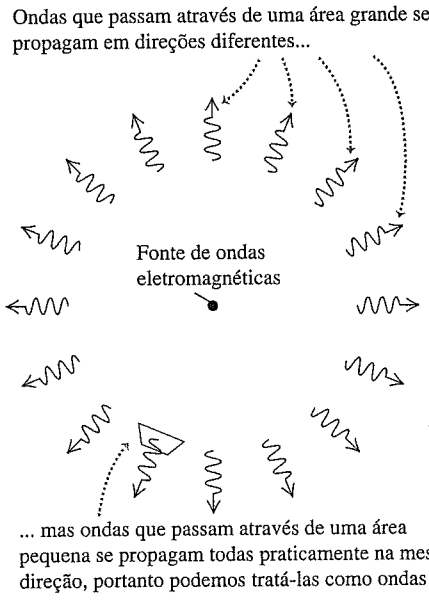


Figura 32.12 Ondas que passam através de uma pequena área a uma distância suficientemente grande de uma fonte podem ser tratadas como ondas planas.

Uma onda eletromagnética pode ser descrita por meio de uma *função de onda*, assim como fizemos na Seção (15.3) para ondas em uma corda vibrante. Uma forma da função de onda para uma onda transversal se propagando no sentido $+x$ ao longo de uma corda esticada é dada pela Equação (15.7):

$$y(x, t) = A \cos (kx - \omega t)$$

em que $y(x,t)$ é o deslocamento transversal a partir do equilíbrio de um ponto da corda de coordenada x para um instante t. A grandeza A é o deslocamento máximo, ou *amplitude*, da onda; ω é sua *freqüência angular*, igual a 2π vezes sua freqüência f; e k é o *número de onda*, igual a $2\pi/\lambda$, em que λ é o comprimento de onda.

Suponha que, na Figura 32.13, $E_y(x,t)$ e $B_z(x,t)$ representem, respectivamente, os valores instantâneos do componente y de $\vec{E}$ e do componente z de $\vec{B}$ e que $E_{máx}$ e $B_{máx}$ representem os valores máximos, ou *amplitudes*, desses campos. Nesse caso, as funções de onda são

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_{máx} \cos (kx - \omega t) \\ B_z(x, t) &= B_{máx} \cos (kx - \omega t) \end{aligned} \qquad (32.16)$$

(onda plana eletromagnética senoidal propagando-se no sentido $+Ox$)

Podemos também escrever as funções de onda usando vetores:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \hat{j} E_{máx} \cos(kx + \omega t) \\ \vec{B}(x, t) &= \hat{k} B_{máx} \cos(kx + \omega t) \end{aligned} \qquad (32.17)$$

ATENÇÃO O símbolo k possui dois significados Note que designamos duas grandezas com a mesma letra k: o vetor unitário $\hat{k}$ no sentido do eixo Oz e o número de onda k. Tome cuidado para não confundir!

As curvas senoidais indicadas na Figura 32.13 representam valores instantâneos dos campos elétricos e magnéticos em função de x e de t para $t = 0$, ou seja, $\vec{E}(x, t = 0)$ e

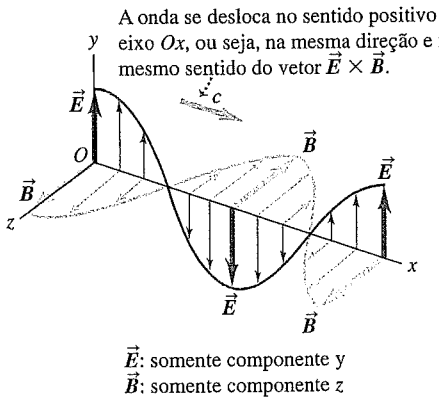


Figura 32.13 Representação de campos elétricos e magnéticos em função de x para uma onda eletromagnética plana senoidal linearmente polarizada. Indicamos um comprimento de onda no instante $t = 0$. Os campos são indicados somente para pontos sobre o eixo Ox.

$\vec{B}(x, t = 0)$. À medida que o tempo passa, a onda se desloca para a direita com velocidade c. As equações (32.16) e (32.17) mostram que, em qualquer ponto, as oscilações senoidais de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ estão *em fase*. A partir da Equação (32.4), as amplitudes devem ser relacionadas por

$$E_{máx} = cB_{máx} \tag{32.18}$$

(onda eletromagnética no vácuo)

Essas relações de fase e de amplitude são também necessárias para que $E(x, t)$ e $B(x, t)$ obedeçam às equações (32.12) e (32.14), obtidas da lei de Faraday e da lei de Ampère, respectivamente. Você é capaz de provar essa afirmação? (Veja o Problema 32.36.)

A Figura 32.14 mostra o campo elétrico e o campo magnético de uma onda que se desloca no sentido *negativo* do eixo Ox. Nos pontos para os quais $\vec{E}$ está no sentido positivo de y, $\vec{B}$ está no sentido *negativo* de z; quando $\vec{E}$ está no sentido negativo de y, $\vec{B}$ está no sentido *positivo* de z. Nesse caso, as funções de onda são

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_{máx} \cos(kx + \omega t) \\ B_z(x, t) &= -B_{máx} \cos(kx + \omega t) \end{aligned} \tag{32.19}$$

(onda eletromagnética plana senoidal propagando-se no sentido $-Ox$)

Assim como no caso de uma onda que se desloca no sentido $+x$, em qualquer ponto as oscilações senoidais de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ estão *em fase*, e o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ aponta no sentido da propagação da onda.

As duas ondas senoidais indicadas nas figuras 32.13 e 32.14 são linearmente polarizadas no eixo Oy; ou seja, o vetor $\vec{E}$ permanece sempre paralelo ao eixo Oy. A onda eletromagnética descrita no Exemplo 32.1 é linearmente polarizada no eixo Oz.

Estratégia para a solução de problemas 32.1

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: muitos dos conceitos que se aplicam às ondas mecânicas (discutidas nos capítulos 15 e 16) também se aplicam às ondas eletromagnéticas. O novo aspecto é que a onda é descrita por duas grandezas, o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$, em vez de por uma única grandeza, como o deslocamento de um fio.

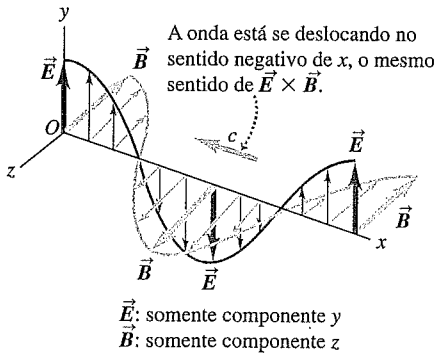


Figura 32.14 Representação no instante $t = 0$ de um comprimento de onda para uma onda eletromagnética plana senoidal linearmente polarizada que se desloca no sentido negativo do eixo Ox. Os campos são indicados somente para pontos sobre o eixo Ox. (Compare com a Figura 32.13.)

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:
1. Faça um diagrama indicando o sentido da propagação da onda e os sentidos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$.
2. Determine as incógnitas.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:
1. Para problemas que envolvem ondas eletromagnéticas, recomendamos que você se concentre nas relações fundamentais, tais como a relação entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (levando em conta o módulo, a direção e o sentido), a determinação da velocidade, a natureza transversal das ondas e assim por diante. Lembre-se dessas relações quando você estiver resolvendo os detalhes da solução matemática.
2. Para ondas senoidais, você deve usar a linguagem adotada nos capítulos 15 e 16. Não vacile e faça uma revisão dessa linguagem, incluindo as estratégias para a solução de problemas recomendadas naqueles capítulos.
3. Recorde as relações fundamentais para ondas periódicas $v = \lambda f$ e $\omega = vk$. Para ondas eletromagnéticas no vácuo, $v = c$. Verifique com cuidado se você sabe distinguir entre freqüência normal f, geralmente expressa em hertz, e freqüência angular $\omega = 2\pi f$, expressa em rad/s. Também lembre-se de que o número da onda é $k = 2\pi/\lambda$.

AVALIAR *sua resposta*: verifique se o resultado obtido é razoável. Para ondas eletromagnéticas no vácuo, o módulo do campo magnético em teslas é muito menor (por um fator de $3{,}0 \times 10^8$) do que o módulo do campo elétrico em volts por metro. Se a sua resposta for diferente disso, você provavelmente cometeu um erro ao usar a relação $E = cB$. (Mais adiante nesta seção, veremos que a relação entre E e B é diferente para ondas eletromagnéticas em um meio material.)

Exemplo 32.1

CAMPOS DE UM FEIXE DE LASER Um laser de dióxido de carbono emite ondas eletromagnéticas senoidais que se propagam no vácuo no sentido negativo do eixo Ox. O comprimento de onda é igual a 10,6 μm, o campo $\vec{E}$ é paralelo ao eixo Oz e seu módulo máximo é igual a 1,5 MV/m. Escreva as equações vetoriais para $\vec{E}$ e para $\vec{B}$ em função do tempo e da posição.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema se refere a uma onda eletromagnética senoidal do tipo que descrevemos nesta seção.

PREPARAR: a Equação (32.19) descreve uma onda se deslocando no sentido negativo do eixo Ox com o campo $\vec{E}$ paralelo ao eixo Oy – ou seja, uma onda que está linearmente polarizada ao longo do eixo y. Em contraste, a onda eletromagnética deste exemplo é linearmente polarizada ao longo do eixo Oz. Nos pontos em que $\vec{E}$ está no sentido positivo de z, $\vec{B}$ deve estar no sentido y positivo para que o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ aponte no sentido negativo do eixo Ox (o sentido da propagação da onda). A Figura 32.15 indica uma onda que atende a esses requisitos.

EXECUTAR: um par de equações que satisfazem a essas exigências é dado por

$$\vec{E}(x,t) = \hat{j}E_{máx}\cos(kx + \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}B_{máx}\cos(kx + \omega t)$$

O sinal positivo nos argumentos das funções co-seno indica que a onda está se propagando no sentido negativo de x, como era de esperar. A lei de Faraday exige que $E_{máx} = cB_{máx}$ [Equação (32.18)], portanto

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{1{,}5 \times 10^6\ \text{V/m}}{3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{T}$$

Para conferir a consistência das unidades, note que 1 V = 1 Wb/s e 1 Wb/m^2 = 1 T.

Temos $\lambda = 10{,}6 \times 10^{-6}$ m, portanto o número de onda e a freqüência angular são dados por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{10{,}6 \times 10^{-6}\ \text{m}} = 5{,}93 \times 10^5\ \text{rad/m}$$
$$\omega = ck = (3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s})(5{,}93 \times 10^5\ \text{rad/m})$$
$$= 1{,}78 \times 10^{14}\ \text{rad/s}$$

Substituindo esses valores nas funções de onda vetoriais escritas anteriormente, obtemos

$$\vec{E}(x,t) = \hat{k}(1{,}5 \times 10^6\ \text{V/m})\cos[(5{,}93 \times 10^5\ \text{rad/m})x + (1{,}78 \times 10^{14}\ \text{rad/s})t]$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{j}(5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{T})\cos[(5{,}93 \times 10^5\ \text{rad/m})x + (1{,}78 \times 10^{14}\ \text{rad/s})t]$$

Mediante essas equações, podemos determinar os valores dos campos no feixe de laser para qualquer posição e tempo, substituindo os respectivos valores de x e de t.

AVALIAR: como era de esperar, o módulo $B_{máx}$ em teslas é muito menor do que o módulo $E_{máx}$ em volts por metro. Para verificar os sentidos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, note que $\vec{E} \times \vec{B}$ está no sentido de $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$. Isso está dentro da expectativa para uma onda que se propaga no sentido negativo de Ox.

Nossas expressões para $\vec{E}(x,t)$ e $\vec{B}(x,t)$ não são as únicas soluções possíveis. Podemos acrescentar uma fase ϕ aos argumentos da função co-seno, de modo que $kx + \omega t$ se torne $kx + \omega t + \phi$. Para determinar o valor de ϕ, temos que conhecer $\vec{E}$ e $\vec{B}$, seja como funções de x em um dado instante t ou como funções de t em uma dada coordenada x. Entretanto, o enunciado do problema não inclui essa informação.

Ondas eletromagnéticas na matéria

Até o momento, nossa discussão sobre as ondas eletromagnéticas se restringiu a ondas se propagando no *vácuo*. Contudo, as ondas eletromagnéticas também podem se propagar na *matéria*; considere a luz se propagando no ar, na água ou no vidro. Podemos estender facilmente nossa análise diretamente para ondas eletromagnéticas se propagando em materiais não condutores, ou seja, em *dielétricos*.

Em um dielétrico, a velocidade de propagação da onda não é a mesma velocidade no vácuo, e vamos designá-la por v em vez de c. A lei de Faraday permanece inalterada, porém na Equação (32.4), deduzida a partir da lei de Faraday, devemos substituir c por v. Na lei de Ampère, a corrente de deslocamento, em vez de ser dada por $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$, em que Φ_E é o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície, é dada por $d\Phi_E/dt = K\epsilon_0 d\Phi_E/dt$, em que K é a constante dielétrica e ϵ é a permissividade do dielétrico. (Introduzimos essas grandezas na Seção 24.4.) Também devemos substituir a constante μ_0 na lei de Ampère por $\mu = K_m\mu_0$, em que K_m é a permeabilidade relativa do dielétrico e μ é a sua permeabilidade (veja a Seção 28.8). Portanto, as equações (32.4) e (32.8) são substituídas por

$$E = vB \quad \text{e} \quad B = \epsilon\mu vE \tag{32.20}$$

Seguindo o mesmo procedimento usado para as ondas em vácuo, encontramos para a velocidade da onda v a expressão

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \tag{32.21}$$

(velocidade das ondas eletromagnéticas em um dielétrico)

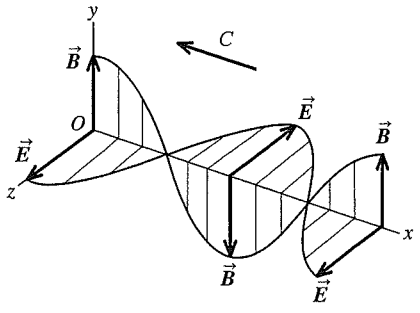
Para quase todos os dielétricos, a permeabilidade relativa K_m é aproximadamente igual a 1 (exceto para materiais ferromagnéticos isolantes). Quando $K_m \cong 1$,

$$v = \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K}}$$

Como K é sempre maior do que 1, a velocidade v da onda eletromagnética é sempre *menor* do que a velocidade no vácuo c de um fator igual a $1/\sqrt{K}$ (Figura 32.16). A razão entre a velocidade no vácuo c e a velocidade v em um material é conhecida na óptica como o **índice de refração** n do material. Quando $K_m \cong 1$,

$$\frac{c}{v} = n = \sqrt{KK_m} \cong \sqrt{K} \tag{32.22}$$

Geralmente, na equação anterior, não podemos usar os valores de K indicados na Tabela 24.1, porque aqueles valores foram medidos a partir de um campo elétrico *cons-*



$\vec{E}$: somente componente y
$\vec{B}$: somente componente z

Figura 32.15 Nosso esquema para esse problema.

tante. Quando o campo elétrico oscila rapidamente, não existe tempo suficiente para que os dipolos sejam orientados na direção do campo, como no caso da ação de um campo estático. Os valores de K medidos com campos oscilantes geralmente são *menores* do que os valores indicados naquela tabela. Por exemplo, para a água, o valor de K é igual a 80,4, quando o campo elétrico é estático, e cerca de 1,8, quando o campo varia com a freqüência da luz. Portanto, a 'constante' dielétrica K é na realidade uma função da freqüência chamada de *função dielétrica* em estudos mais avançados.

Exemplo 32.2

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM DIFERENTES MATERIAIS

(a) Ao visitar uma joalheria certa noite, você segura um diamante contra a iluminação de um poste de rua. O vapor de sódio aquecido do poste emite uma luz amarela com freqüência de $5,09 \times 10^{14}$ Hz. Determine o comprimento de onda no vácuo, a velocidade da propagação da onda no diamante e o comprimento de onda no diamante. Nessa freqüência, o diamante possui propriedades $K = 5,84$ e $K_m = 1,0$. (b) Uma onda de rádio com freqüência de 90,0 MHz (na faixa de FM) passa do vácuo para uma ferrita isolante (um material ferromagnético usado em cabos de computador para suprimir a interferência de rádio). Calcule o comprimento de onda no vácuo, a velocidade da propagação de onda na ferrita e o comprimento de onda na ferrita. Nessa freqüência, a ferrita possui as propriedades $K = 10,0$ e $K_m = 1000$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos a relação entre velocidade de onda, comprimento de onda e freqüência. Também usamos a relação entre a velocidade das ondas eletromagnéticas em um meio e os valores da constante dielétrica K e da permeabilidade relativa K_m para o meio.

PREPARAR: em cada caso, determinamos o comprimento de onda no vácuo usando $c = \lambda f$. A velocidade da onda v é dada pela Equação (32.21). Sabendo o valor de v, usamos $v = \lambda f$ para determinar o comprimento de onda no material em questão.

EXECUTAR: (a) O comprimento de onda no vácuo da luz de sódio é

$$\lambda_{\text{vácuo}} = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{5,09 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 5,89 \times 10^{-7} \text{ m} = 589 \text{ nm}$$

A velocidade da onda no diamante é

$$v_{\text{diamante}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(5,84)(1,0)}} = 1,24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

O resultado anterior é aproximadamente dois quintos da velocidade no vácuo. O comprimento de onda é proporcional à velocidade da onda e, portanto, é reduzida pelo mesmo fator:

$$\lambda_{\text{diamante}} = \frac{v_{\text{diamante}}}{f} = \frac{1,24 \times 10^8 \text{ m/s}}{5,09 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 2,44 \times 10^{-7} \text{ m} = 244 \text{ nm}$$

Figura 32.16 O valor da constante dielétrica K da água é 1,8 para luz visível, então a velocidade da luz visível na água é mais lenta que no vácuo cerca de $1/\sqrt{K} = 1/\sqrt{1,8} = 0,75$.

(b) Seguindo os mesmos passos do item (a), determinamos que o comprimento de onda no vácuo da onda de rádio é

$$\lambda_{\text{vácuo}} = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{90,0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3,33 \text{ m}$$

A velocidade da onda na ferrita é

$$v_{\text{ferrita}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(10,0)(1000)}} = 3,0 \times 10^6 \text{ m/s}$$

O resultado anterior representa somente 1% da velocidade da luz no vácuo, portanto o comprimento de onda é também 1% maior do que o comprimento de onda no vácuo:

$$\lambda_{\text{ferrita}} = \frac{v_{\text{ferrita}}}{f} = \frac{3,0 \times 10^9 \text{ m/s}}{90,0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3,33 \times 10^{-2} \text{ m} = 3,33 \text{ cm}$$

AVALIAR: a velocidade da luz em materiais transparentes, como o diamante, está tipicamente entre c e $0,2c$. Como indicam os resultados obtidos no item (b), a velocidade das ondas eletromagnéticas em materiais densos como a ferrita pode ser *muito mais* lenta do que no vácuo.

Teste sua compreensão da Seção 32.3 A primeira das Equações (32.17) fornece o campo elétrico para uma onda plana medida em pontos ao longo do eixo x. Para essa onda plana, como o campo elétrico no ponto *fora* do eixo x difere da expressão nas Equações (32.17)? (i) A amplitude é diferente; (ii) a fase é diferente; (iii) tanto a amplitude quanto a fase são diferentes; (iv) nenhuma das alternativas. ∎

32.4 Energia e momento linear em ondas eletromagnéticas

É um fato familiar que a energia está associada às ondas eletromagnéticas; pense na energia solar. As aplicações práticas das ondas eletromagnéticas, como os fornos de microondas, os transmissores de rádio e as cirurgias

oculares a laser, fazem uso da energia que essas ondas transportam. Para compreender como utilizar essa energia, é útil deduzirmos relações para a energia associada a uma onda eletromagnética.

Começamos com a expressão deduzida nas seções 24.3 e 30.3 para a **densidade de energia** existente no campo magnético e no campo elétrico; sugerimos que você faça agora uma revisão daquelas deduções. Especificamente, as equações (24.11) e (30.10) mostram que a densidade de energia total u em uma região do espaço vazio onde existem os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é dada por

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad (32.23)$$

em que ϵ_0 é a permissividade do vácuo e μ_0 é a permeabilidade do vácuo. Para a onda eletromagnética no vácuo, os módulos de E e B são relacionados por

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}E \qquad (32.24)$$

Combinando as equações (32.23) e (32.24), podemos expressar a densidade de energia u em uma onda eletromagnética simples no vácuo mediante a relação

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\sqrt{\epsilon_0\mu_0}E)^2 = \epsilon_0 E^2 \qquad (32.25)$$

Isso mostra que, no vácuo, a densidade de energia associada ao campo $\vec{E}$ em nossa onda simples é igual à densidade de energia associada ao campo $\vec{B}$. Geralmente, o módulo do campo elétrico E é uma função do tempo e da posição, como no caso da onda senoidal indicada na Equação (32.16); portanto, a densidade de energia u de uma onda eletromagnética, dada pela Equação (32.25), também é, em geral, uma função do tempo e da posição.

Fluxo de energia eletromagnética e vetor de Poynting

As ondas eletromagnéticas que descrevemos são ondas *progressivas* que transportam energia de uma região para outra. Por exemplo, na onda descrita na Seção 32.2, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ avançam se deslocando para uma região onde não existia nenhum campo e, à medida que elas avançam, transportam a densidade de energia u. Podemos descrever esse transporte de energia em termos da energia transferida *por unidade de tempo e por unidade da área da seção reta* ou em termos da *potência por unidade de área*, considerando uma área perpendicular à direção do deslocamento da onda.

Para verificar como o fluxo de energia é relacionado aos campos, considere um plano em repouso, perpendicular ao eixo Ox, que para um dado instante coincide com a frente de onda. Em um tempo dt depois desse instante, a frente de onda se deslocou para a direita até uma distância ao plano $dx = c\,dt$. Considerando uma área A sobre esse plano em repouso (Figura 32.17), notamos que a energia contida no espaço à direita dessa área passou através de sua superfície para atingir a nova localização. O volume dV da região relevante é dado pela área da base A multiplicada pela distância $c\,dt$, e a energia dU nessa região é dada pela densidade de energia u multiplicada por esse volume:

$$dU = u\,dV = (\epsilon_0 E^2)\,(Ac\,dt)$$

Essa energia passou através da área A em um tempo dt. O fluxo de energia por unidade de tempo e por unidade de área, que designaremos pela letra S, é dado por

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \qquad (32.26)$$

(no vácuo)

Usando as equações (32.15) e (32.25), podemos obter as seguintes formas alternativas:

$$S = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \qquad (32.27)$$

(no vácuo)

A dedução da Equação (32.27) a partir da Equação (32.26) é proposta como um problema (veja o Exercício 32.29). A grandeza S possui unidades de energia por unidade de tempo e por unidade de área, ou potência por unidade de área. A unidade SI de S é 1 J/s · m^2 ou 1 W/m^2.

Podemos definir uma grandeza *vetorial* que descreve o módulo, a direção e o sentido do fluxo de energia:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad (32.28)$$

(vetor de Poynting no vácuo)

O vetor $\vec{S}$ denomina-se **vetor de Poynting**; ele foi introduzido pelo físico inglês John Poynting (1852-1914). Esse vetor fornece a direção e o sentido da propagação da onda (Figura 32.18). Como $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, o módulo do vetor $\vec{S}$ é dado por $S = EB/\mu_0$; de acordo com as

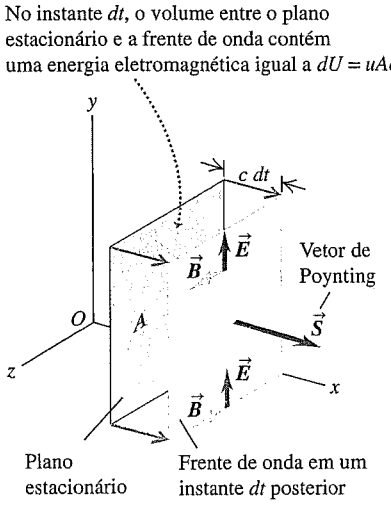


Figura 32.17 Uma frente de onda eletromagnética no instante dt depois que ela atravessa um plano de área A em repouso.

equações (32.26) e (32.27), ele fornece o fluxo de energia por unidade de tempo e por unidade de área através da seção reta perpendicular à direção de propagação da onda. O fluxo total da energia por unidade de tempo (potência, P) que atravessa uma superfície fechada é obtido mediante a integral de $\vec{S}$ sobre a superfície:

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Para as ondas senoidais estudadas na Seção 32.3, bem como para outras ondas mais complexas, em qualquer ponto o campo magnético e o campo elétrico variam com o tempo, de modo que o vetor de Poynting também é uma função do tempo em qualquer ponto. Visto que as freqüências das ondas eletromagnéticas típicas são muito elevadas, a variação do vetor de Poynting com o tempo é tão rápida que é mais apropriado buscar seu valor *médio*. O valor médio do módulo de $\vec{S}$ em um dado ponto denomina-se **intensidade** da radiação no ponto considerado. A unidade SI de intensidade é a mesma de S: 1 W/m^2 (watt por metro quadrado).

Vamos examinar a intensidade da onda senoidal usando as expressões indicadas na Equação (32.17). Inicialmente, substituímos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ na Equação (32.28):

$$\begin{aligned}\vec{S}(x,t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t) \\ &= \frac{1}{\mu_0}[\hat{j}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] \times [\hat{k}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)]\end{aligned}$$

O produto vetorial dos vetores unitários $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ e $\cos^2(kx - \omega t)$ nunca é negativo, portanto $\vec{S}(x, t)$ sempre aponta no sentido positivo de x (o sentido da propagação da onda). O componente x do vetor de Poynting é

$$S_x(x,t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}\cos^2(kx - \omega t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}[1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$

A média temporal de $\cos 2(kx - \omega t)$ é igual a zero porque em qualquer ponto essa função é positiva durante uma metade do ciclo e negativa durante a outra metade. Assim, o valor médio do vetor de Poynting em um ciclo completo é dado por $\vec{S}_{\text{méd}} = \hat{\imath}S_{\text{méd}}$, em que

$$S_{\text{méd}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}$$

Ou seja, o valor médio de $\vec{S}$ para uma onda senoidal (a intensidade I da onda) é igual a $\frac{1}{2}$ de seu valor máximo. Usando as relações $E_{\text{máx}} = B_{\text{máx}}c$ e $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, podemos expressar a intensidade em diversas formas equivalentes:

$$\begin{aligned}I = S_{\text{méd}} &= \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\text{máx}}\end{aligned} \qquad (32.29)$$

(intensidade de uma onda senoidal no vácuo)

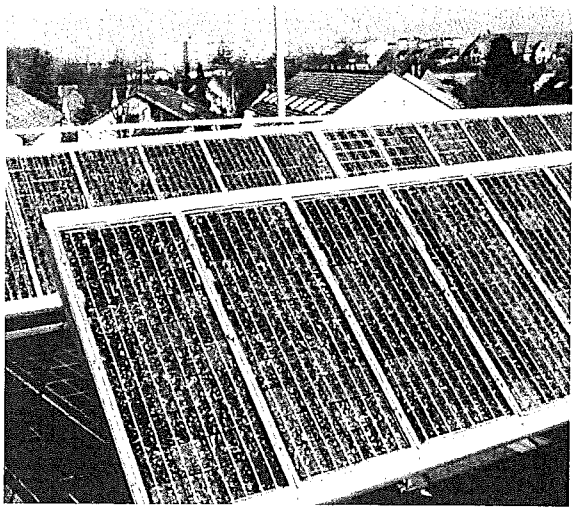


Figura 32.18 Estes painéis de energia solar são inclinados de modo a ficarem frontais ao Sol – ou seja, frontais ao vetor de Poynting das ondas eletromagnéticas provenientes do Sol, para que os painéis possam absorver o máximo de energia da onda.

Convidamos você a verificar que todas essas expressões são equivalentes.

Para uma onda se deslocando no sentido $-x$, representada pela Equação (32.19), o vetor de Poynting está apontando no sentido $-x$ em todos os pontos, porém o módulo é o mesmo que o da onda que se propaga no sentido $+x$. Você terá oportunidade de verificar essas afirmações (veja o Exercício 32.24).

ATENÇÃO Vetor de Poynting *versus* intensidade Em qualquer ponto x, o módulo do vetor de Poynting varia com o tempo. Portanto, a taxa *instantânea* com a qual a energia eletromagnética de uma onda plana senoidal chega a uma superfície não é constante. Isso parece contradizer nossa experiência diária, pois a luz solar, a luz de uma lâmpada ou a luz do laser de um scanner de supermercado aparentemente não variam com o tempo. Contudo, o vetor de Poynting dessas fontes *variam* com o tempo, mas a variação não pode ser percebida porque a freqüência da oscilação é extremamente elevada (da ordem de 5×10^{14} Hz para a luz visível). O que você percebe é o valor *médio* da taxa com a qual a energia atinge seus olhos, sendo essa a razão pela qual se usa a intensidade (o valor médio de S) para descrever a força da radiação eletromagnética.

Em toda a discussão até aqui, consideramos somente as ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo. Contudo, quando as ondas se deslocam em um meio dielétrico, as expressões para a densidade de energia [Equação (32.23)], o vetor de Poynting [Equação (32.28)] e a intensidade de uma onda senoidal [Equação (32.29)] devem ser modificadas. Ocorre que as modificações necessárias são bem simples: simplesmente substituir ϵ_0 pela permissividade ϵ do dielétrico, substituir μ_0 pela permeabilidade μ do

dielétrico e substituir c pela velocidade v das ondas eletromagnéticas no dielétrico. É notável como as densidades de energia nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são iguais, mesmo em um dielétrico.

Exemplo 32.3

ENERGIA EM UMA ONDA NÃO SENOIDAL Para a onda não senoidal descrita na Seção 32.2, suponha $E = 100$ V/m $= 100$ N/C. Calcule o valor de B, a densidade de energia e a taxa do fluxo de energia S por unidade de área.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: na onda descrita na Seção 32.2, os campos elétrico e magnético são uniformes na parte traseira da frente de onda. Portanto, as incógnitas B, u e S também devem ser uniformes na parte traseira da frente de onda.

PREPARAR: dado o valor do módulo E, calculamos o módulo B usando a Equação (32.4), a densidade de energia u usando a Equação (32.25) e a taxa do fluxo de energia por unidade de área S usando a Equação (32.27). (Note que não podemos usar a Equação (32.29), aplicável somente a ondas senoidais.)

EXECUTAR: De acordo com a Equação (32.4),

$$B = \frac{E}{c} = \frac{100\ \text{V/m}}{3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 3{,}33 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

De acordo com a Equação (32.25),

$$u = \epsilon_0 E^2 = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(100\ \text{N/C})^2$$
$$= 8{,}85 \times 10^{-8}\ \text{N/m}^2 = 8{,}85 \times 10^{-8}\ \text{J/m}^3$$

O módulo do vetor de Poynting é dado por

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{(100\ \text{V/m})(3{,}33 \times 10^{-7}\ \text{T})}{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}}$$
$$= 26{,}5\ \text{V}\cdot\text{A/m}^2 = 26{,}5\ \text{W/m}^2$$

AVALIAR: podemos conferir o resultado obtido para S, usando uma fórmula alternativa dada pela Equação (32.26):

$$S = \epsilon_0 c E^2$$
$$= (8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s})(100\ \text{N/C})^2$$
$$= 26{,}5\ \text{W/m}^2$$

Como $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possuem valores constantes sobre planos perpendiculares situados na parte traseira da frente de onda, a densidade de energia u e o módulo do vetor de Poynting S também possuem valores constantes sobre esses planos. Na parte dianteira da frente de onda, $\vec{E} = \mathbf{0}$ e $\vec{B} = \mathbf{0}$, portanto $u = 0$ e $S = 0$; quando não há nenhum campo, não há nenhuma energia no campo.

Exemplo 32.4

ENERGIA EM UMA ONDA SENOIDAL Uma estação de rádio na superfície terrestre irradia ondas senoidais com uma potência média total igual a 50 kW (Figura 32.19). Supondo que a emissora irradie uniformemente em todas as direções acima do solo (o que não é provável em situações reais), determine as amplitudes $E_{máx}$ e $B_{máx}$ detectadas por um satélite a uma distância de 100 km da antena.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se de uma onda senoidal, portanto usamos o conceito de que a intensidade é igual ao módulo do valor médio do vetor de Poynting. Não temos o valor da intensidade, mas *temos* a média da potência total do transmissor. Usamos a idéia de que a intensidade é a mesma da potência média por unidade de área.

PREPARAR: a Figura 32.19 indica uma superfície hemisférica com raio de 100 km e centralizado no transmissor. Dividimos a potência média do transmissor pela área da superfície desse hemisfério, para determinar a intensidade I nessa distância do transmissor. A seguir, podemos determinar $E_{máx}$ pela Equação (32.29) e $B_{máx}$ pela Equação (32.4).

EXECUTAR: a superfície hemisférica centralizada na antena emissora com um raio de $r = 100$ km $= 1{,}0 \times 10^5$ m e área

$$A = 2\pi R^2 = 2\pi(1{,}0 \times 10^5\ \text{m})^2 = 6{,}28 \times 10^{10}\ \text{m}^2$$

Toda potência irradiada passa através dessa superfície, de modo que a potência média por unidade de área (ou seja, a intensidade) é

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi R^2} = \frac{5{,}0 \times 10^4\ \text{W}}{6{,}28 \times 10^{10}\ \text{m}^2} = 7{,}96 \times 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

De acordo com a Equação (32.29), $I = S_{méd} = E_{máx}^2/2\mu_0 c$; logo,

$$E_{máx} = \sqrt{2\mu_0 c S_{méd}}$$
$$= \sqrt{2(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s})(7{,}96 \times 10^{-7}\ \text{W/m}^2)}$$
$$= 2{,}45 \times 10^{-2}\ \text{V/m}$$

De acordo com a Equação (32.4),

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = 8{,}17 \times 10^{-11}\ \text{T}$$

AVALIAR: note que o módulo $E_{máx}$ é comparável a campos comumente encontrados em laboratório, porém o valor de $B_{máx}$ é extremamente pequeno em comparação a valores do campo $\vec{B}$ que descrevemos em capítulos anteriores. Por essa razão, quase todos os detectores de radiação eletromagnética respondem aos efeitos do campo elétrico, porém não são sensíveis ao campo magnético. As antenas de rádio em espira são exceção.

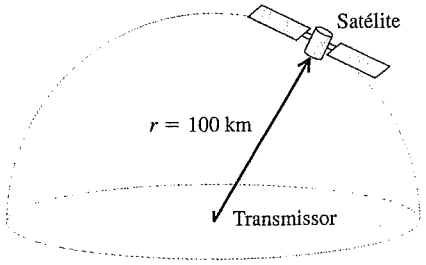


Figura 32.19 Uma estação de rádio irradia ondas no interior da superfície hemisférica indicada.

Fluxo do momento linear eletromagnético e pressão da radiação

Considerando que é necessário usar energia para estabelecer um campo magnético e um campo elétrico, mostramos que as ondas eletromagnéticas transportam energia. Podemos também mostrar que as ondas eletromagnéticas transportam *momento linear p*, com uma correspondente densidade de momento linear (momento linear *dp* por unidade de volume *dV*) dada pelo módulo

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \tag{32.30}$$

Esse momento linear é uma propriedade do campo; ele não é associado com a massa de uma partícula que se move no sentido usual.

Existe uma correspondente da taxa de fluxo do momento linear. O volume dV ocupado por uma onda eletromagnética (velocidade c) que passou através de uma área A no tempo dt é dado por $dV = Ac\,dt$. Substituindo na Equação (32.30) e reagrupando os termos, verificamos que a taxa do fluxo do momento linear por unidade de área é dado por

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \tag{32.31}$$

(taxa de fluxo do momento linear eletromagnético)

A relação anterior fornece o momento linear transferido através de uma superfície por unidade de área e por unidade de tempo. Podemos obter a taxa *média* dessa transferência de momento linear por unidade de área substituindo, na Equação (32.31), S por $S_{méd} = I$.

Esse momento linear é responsável por um fenômeno chamado de **pressão da radiação**. Quando uma onda eletromagnética é absorvida por uma superfície, o momento linear da onda também é transferido para essa superfície. Por simplicidade, vamos considerar uma superfície perpendicular à direção de propagação. Aplicando as idéias desenvolvidas na Seção 8.1, vemos que a taxa dp/dt com a qual o momento linear é transferido para a superfície absorvedora é a *força* realizada sobre a superfície. A força média por unidade de área produzida pela onda, ou *pressão da radiação* p_{rad}, é igual ao valor médio de dp/dt dividido pela área A da superfície absorvedora. (Usamos o índice inferior 'rad' para distinguir a pressão da radiação do momento linear para o qual também usamos a letra p.) De acordo com a Equação (32.31), a pressão da radiação é dada por

$$p_{rad} = \frac{S_{méd}}{c} = \frac{I}{c} \tag{32.32}$$

(pressão da radiação, onda totalmente absorvida)

Quando a onda é totalmente refletida, a variação do momento linear é duas vezes maior e a pressão da radiação é dada por

$$p_{rad} = \frac{2S_{méd}}{c} = \frac{2I}{c} \tag{32.33}$$

(pressão da radiação, onda totalmente refletida)

Figura 32.20 No centro desta nuvem de gás interestelar está um grupo de estrelas intensamente luminosas que exercem tremenda pressão de radiação à sua volta. Auxiliada por um 'vento' de partículas que emanam das estrelas, nos últimos milhões de anos, a pressão de radiação criou uma bolha dentro da nuvem através de 70 anos-luz.

Por exemplo, para a luz solar direta, antes de ela atravessar a atmosfera, o valor de I (ou $S_{méd}$) é aproximadamente igual a 1,4 kW/m^2. De acordo com a Equação (32.32), o valor correspondente da pressão média sobre uma superfície totalmente absorvedora é

$$p_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{1{,}4 \times 10^3\ \text{W/m}^2}{3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{Pa}$$

De acordo com a Equação (32.33), a pressão média sobre uma superfície totalmente *refletora* é igual ao dobro do valor anterior, $2I/c$ ou $9{,}4 \times 10^{-6}$ Pa. Essas pressões são extremamente pequenas, da ordem de 10^{-10} atm, porém elas podem ser medidas com instrumentos suficientemente sensíveis.

A pressão da radiação da luz solar no *interior* do Sol é muito maior do que na superfície da Terra (veja o Problema 32.43). No interior de estrelas com brilhos e massas maiores do que os do Sol, a pressão da radiação é tão elevada que faz aumentar substancialmente a pressão do gás no interior da estrela e ajuda a impedir o colapso gravitacional da estrela sob a ação de sua própria gravidade. Em alguns casos, a pressão de radiação das estrelas pode exercer efeitos drásticos sobre o material que circunda as estrelas (Figura 32.20).

Exemplo 32.5

POTÊNCIA E PRESSÃO DOS RAIOS SOLARES Um satélite em órbita em torno da Terra possui um painel coletor de energia solar com área total igual a 4,0 m^2 (Figura 32.21). Sabendo que a luz solar é perpendicular à superfície do painel e é totalmente absorvida, calcule a potência solar média absorvida e a força média exercida pela pressão da radiação.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa as relações entre intensidade, potência, pressão da radiação e força.

PREPARAR: na discussão anterior, calculamos a intensidade I (potência por unidade de área) da luz solar bem como a pressão

de radiação p_{rad} (força por unidade de área) da luz solar sobre uma superfície absorvedora. (Calculamos esses valores para pontos acima da atmosfera, na órbita do satélite.) Multiplicando cada valor pela área dos painéis solares, temos a potência média absorvida e a força de radiação líquida sobre os painéis.

EXECUTAR: a intensidade I (potência por unidade de área) é igual a $1{,}4 \times 10^3\ \text{W/m}^2$. Embora a luz solar não seja uma onda senoidal simples, podemos ainda usar o fato de que a potência média P é dada pela intensidade I vezes a área A:

$$P = IA = (1{,}4 \times 10^3\ \text{W/m}^2)(4{,}0\ \text{m}^2) = 5{,}6 \times 10^3\ \text{W} = 5{,}6\ \text{kW}$$

A pressão da radiação da luz solar sobre uma superfície absorvente é $p_{rad} = 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{Pa} = 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2$. A força total F é a pressão p_{rad} vezes a área A:

$$F = p_{rad}A = (4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2)(4{,}0\ \text{m}^2) = 1{,}9 \times 10^{-5}\ \text{N}$$

AVALIAR: trata-se de uma potência grande, e uma parte dela pode ser usada para fornecer energia para os equipamentos no interior do satélite. A parte restante da energia produz aquecimento do painel, direta ou indiretamente, em virtude da limitação da eficiência das fotocélulas existentes sobre o painel.

Isso é comparável com o peso (na Terra) de um grão de sal. Contudo, essa força pequena pode ter um efeito sensível sobre a órbita de um satélite artificial, como o mostrado na Figura 32.21, e, portanto, a pressão da radiação deve ser considerada nos projetos desses satélites.

Teste sua compreensão da Seção 32.4 A Figura 32.13 mostra o comprimento de onda de uma onda eletromagnética senoidal em um instante $t = 0$. Para qual dos quatro seguintes valores de x (a) a densidade de energia é máxima; (b) a densidade de energia é mínima; (c) o módulo do vetor de Poynting instantâneo (não médio) é máximo; (d) o módulo do vetor de Poynting instantâneo (não médio) é mínimo? (i) $x = 0$; (ii) $x = \lambda/4$; (iii) $x = \lambda/2$; (iv) $x = 3\lambda/4$. ■

32.5 Ondas eletromagnéticas estacionárias

As ondas eletromagnéticas podem ser *refletidas*; a superfície de um condutor (tal como uma lâmina metálica polida) ou a superfície de um dielétrico (tal como uma placa de vidro) pode funcionar como um refletor. Assim como no caso dos campos elétricos e magnéticos, para as ondas eletromagnéticas também podemos usar o princípio da superposição. A superposição de uma onda incidente com uma onda refletida forma uma **onda estacionária**. A situação é análoga ao caso das ondas estacionárias estudadas na Seção 15.7; sugerimos que você faça uma revisão daquela discussão.

Uma placa muito fina de um condutor perfeito (resistividade nula) colocada sobre o plano yz, como na Figura 32.22, é atingida por uma onda eletromagnética linearmente polarizada, se propagando no sentido negativo do eixo Ox. Conforme dissemos na Seção 23.4, o campo $\vec{E}$ não pode possuir nenhum componente na direção paralela à

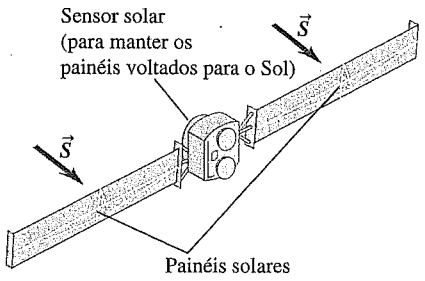


Figura 32.21 Painéis solares sobre um satélite.

superfície de um condutor perfeito, portanto, no presente caso, $\vec{E}$ deve ser igual a zero em todos os pontos sobre o plano yz. Contudo, o campo elétrico da onda eletromagnética *incidente não* é nulo em todos os instantes sobre o plano yz. Porém, esse campo elétrico oscilante produz correntes induzidas na superfície do condutor e essas correntes dão origem a um campo elétrico adicional. Verificamos que, no interior e na superfície do condutor, o campo elétrico *resultante* dado pela soma vetorial do campo elétrico induzido e do campo elétrico $\vec{E}$ incidente é igual a zero, tanto na superfície como no interior do condutor.

As correntes induzidas na superfície também dão origem a uma onda *refletida* que se propaga para fora do plano no sentido $+x$. Suponha que a onda incidente seja descrita pelas funções de onda indicadas na Equação (32.19) (uma onda senoidal se propagando no sentido $-x$) e a onda refletida pela negativa das Equações (32.16) (uma onda senoidal se propagando no sentido $+x$). Tomamos o *negativo* da onda dado pelas Equações (32.16), de modo que os campos elétricos incidentes e refletivos se anulam em $x = 0$ (o plano do condutor, onde o campo elétrico total deve ser igual a zero). O princípio da superposição afirma que o campo $\vec{E}$ resultante em qualquer ponto é dado pela soma vetorial do campo $\vec{E}$ da onda incidente com o campo elétrico da onda refletida, e analogamente para o campo $\vec{B}$ resultante. Portanto, as funções de onda para a superposição das duas ondas são dadas por

$$E_y(x, t) = E_{máx}[\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$
$$B_z(x, t) = B_{máx}[-\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$

Para simplificarmos essas expressões, devemos usar as identidades

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

e, assim, obtemos os seguintes resultados:

$$E_y(x, t) = -2E_{máx} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \qquad (32.34)$$

$$B_z(x, t) = -2B_{máx} \cos kx \cos \omega t \qquad (32.35)$$

A Equação (32.34) é análoga à Equação (15.28) para uma corda esticada. Vemos que, para $x = 0$, o campo elétrico $E_y(x = 0, t)$ é *sempre* igual a zero. Essa exigência é oriunda da natureza do condutor perfeito, que desempenha um papel análogo ao do ponto fixo na extremidade de uma

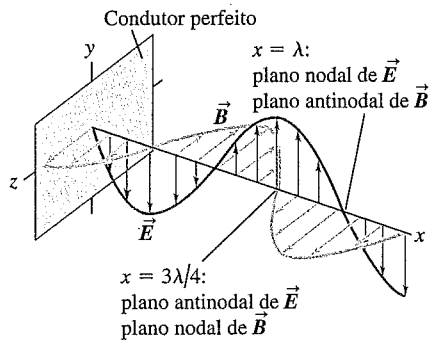


Figura 32.22 Representação do campo elétrico e do campo magnético de uma onda eletromagnética estacionária plana linearmente polarizada quando $\omega t = 3\pi/4$ rad. Em qualquer plano perpendicular ao eixo *Ox*, *E* é máximo (um antinó) quando *B* (um nó) é zero e vice-versa. À medida que o tempo passa, a configuração das ondas *não* se propaga da esquerda para a direita ao longo do eixo *Ox*; em vez disso, em cada ponto os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ simplesmente oscilam.

corda vibrante. Além disso, $E_y(x, t)$ é igual a zero em *qualquer* instante em todos os pontos sobre os planos perpendiculares ao eixo *Ox*, para os quais sen $kx = 0$. Ou seja, $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ Uma vez que $k = 2\pi/\lambda$, as posições desses planos são dadas por

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \qquad (32.36)$$

(planos nodais de $\vec{E}$)

Cada um desses planos constitui um **plano nodal** do campo $\vec{E}$; eles são equivalentes aos nós ou pontos nodais de uma onda estacionária em uma corda vibrante. Entre dois planos nodais adjacentes, existem planos para os quais sen $kx = \pm 1$; sobre cada um desses planos, o módulo $E(x, t)$ atinge duas vezes em cada ciclo o valor máximo possível de $2E_{máx}$. Cada um desses planos constitui um **plano antinodal** de $\vec{E}$, que corresponde aos antinós das ondas estacionárias de uma corda.

O campo magnético total é igual a zero para todos os instantes para os pontos dos planos determinados pela condição cos $kx = 0$. Ou seja, isso ocorre para os pontos

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots \qquad (32.37)$$

(planos nodais de $\vec{B}$)

Cada um desses planos constitui um plano nodal do campo $\vec{B}$; existem planos antinodais de $\vec{B}$ na metade da distância entre dois planos nodais adjacentes.

A Figura 32.22 mostra uma configuração de ondas estacionárias para um dado instante de tempo. O campo magnético *não* é igual a zero sobre a superfície condutora ($x = 0$) e não existe nenhuma razão para que ele seja nulo. As correntes superficiais que criam um campo elétrico para fazer o campo resultante $\vec{E}$ exatamente igual a zero sobre a superfície produzem um campo magnético sobre a superfície. Os planos nodais de cada um dos dois campos são separados por meio comprimento de onda. Os planos nodais de um dos campos estão situados na metade da distância entre dois planos nodais consecutivos do outro campo; portanto, os nós de $\vec{E}$ coincidem com os antinós de $\vec{B}$ e vice-versa. Compare a presente discussão com a distinção entre os nós de pressão e os nós de deslocamento na Seção 16.4.

O campo elétrico total é uma função *seno* de *t* e o campo magnético total é uma função *co-seno* de *t*. As variações senoidais dos dois campos estão, portanto, defasadas 90° em cada ponto. Nos instantes para os quais sen $\omega t = 0$, o campo elétrico é igual a zero *em todas as partes*, e o campo magnético apresenta seu valor máximo. Quando cos $\omega t = 0$, o campo magnético é igual a zero em todas as partes, e o campo elétrico apresenta seu valor máximo. Isso contrasta com uma onda progressiva que se propaga em uma dada direção como descrito separadamente pelas equações (32.16) ou (32.19), para a qual o campo $\vec{E}$ está sempre *em fase* com o campo $\vec{B}$ em qualquer ponto. É instrutivo verificar que as equações (32.34) e (32.35) satisfazem a equação de onda indicada na Equação (32.15). Elas também satisfazem as equações (32.12) e (32.14) (que são formas equivalentes da lei de Faraday e da lei de Ampère); deixaremos as demonstrações dessas afirmações para você resolver como um problema (veja o Exercício 32.34).

Ondas estacionárias em uma cavidade

Dando prosseguimento à analogia com as ondas em uma corda esticada, vamos agora introduzir um segundo plano condutor paralelo ao primeiro e situado sobre o eixo $+Ox$ a uma distância *L* desse plano. Isso é análogo ao caso de uma corda esticada presa nos pontos $x = 0$ e $x = L$. Os dois planos condutores devem ser planos nodais para o campo $\vec{E}$; uma onda estacionária só poderá se formar quando o segundo plano estiver situado sobre um ponto para o qual $E(x, t) = 0$. Ou seja, para que exista uma onda estacionária, *L* deve ser um múltiplo inteiro de $\lambda/2$. Os comprimentos de onda que satisfazem essa condição são dados por

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (32.38)$$

As freqüências correspondentes são

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (32.39)$$

Portanto, existe um conjunto de *modos normais*, cada um dos quais com uma freqüência característica, uma dada forma de onda e uma configuração dos planos nodais (Figura 32.23). Medindo as posições dos nós, podemos determinar os comprimentos de onda. Se a freqüência for conhecida, a velocidade da onda poderá ser calculada. Essa técnica foi aplicada pela primeira vez por Hertz na década de 1880 em suas investigações pioneiras sobre ondas eletromagnéticas.

Um laser possui dois espelhos, e uma onda estacionária se forma na cavidade entre esses dois espelhos. Um dos espelhos possui uma pequena janela parcialmente transparente que permite a saída do feixe através de uma das extremidades do laser.

Superfícies condutoras não são apenas refletoras de ondas magnéticas. As reflexões também ocorrem em uma interface entre dois materiais isolantes com propriedades dielétricas ou magnéticas diferentes. O análogo mecânico é uma junção de duas cordas com igual tensão, porém diferente densidade de massa linear. Em geral, a incidência de uma onda sobre tal superfície limítrofe é parcialmente transmitida para o segundo material e parcialmente refletida de volta ao primeiro. Por exemplo, a luz é transmitida através de uma janela de vidro, mas suas superfícies também refletem a luz.

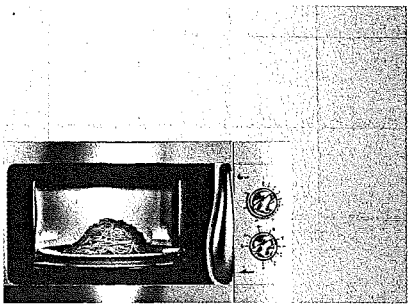


Figura 32.23 Um forno de microondas produz ondas eletromagnéticas estacionárias com $\lambda = 12{,}2$ cm, um comprimento de onda fortemente absorvido pela água existente nos alimentos. Como a distância entre dois nós consecutivos é $\lambda/2 = 6{,}1$ cm, o alimento deve girar durante a operação do forno. Caso não girasse, as partes situadas sobre os nós — pontos onde a amplitude da onda é igual a zero — permaneceriam frias.

Exemplo 32.6

INTENSIDADE DE UMA ONDA ESTACIONÁRIA Calcule a intensidade da onda estacionária discutida nesta seção.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a intensidade I da onda é dada pelo valor médio $S_{méd}$ do módulo do vetor de Poynting.

PREPARAR: vamos inicialmente encontrar o valor instantâneo de S e, a seguir, extrair a média de um número qualquer de períodos da onda para determinar I.

EXECUTAR: usando as equações (32.24) e (32.25) na expressão para o vetor de Poynting $\vec{S}$, Equação (32.28), obtemos

$$\begin{aligned}\vec{S}(x,t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t)\\ &= \frac{1}{\mu_0}[-2\hat{j}E_{máx}\operatorname{sen}kx\cos\omega t] \times [-2\hat{k}B_{máx}\cos kx\operatorname{sen}\omega t]\\ &= \hat{\imath}\frac{E_{máx}B_{máx}}{\mu_0}(2\operatorname{sen}kx\cos kx)(2\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t)\\ &= \hat{\imath}S_x(x,t)\end{aligned}$$

Aplicando a identidade $\operatorname{sen} 2A = 2\operatorname{sen}A\cos A$, podemos escrever a relação anterior na forma

$$S_x(x,t) = \frac{E_{máx}B_{máx}\operatorname{sen}2kx\operatorname{sen}2\omega}{\mu_0}$$

O valor médio de uma função seno sobre um número qualquer de períodos é igual a zero. Portanto, *a média temporal de $\vec{S}$ em qualquer ponto é igual a zero*; $I = S_{méd} = 0$.

AVALIAR: esse resultado já era esperado. Formamos a onda estacionária pela superposição de duas ondas de mesma freqüência e mesma amplitude se deslocando em sentidos opostos. Toda energia transferida por uma das ondas é completamente anulada pela quantidade de energia fornecida em sentido oposto pela outra onda. Se desejamos transmitir potência através de ondas, é necessário evitar as reflexões que possam dar origem a ondas estacionárias.

Exemplo 32.7

ONDAS ESTACIONÁRIAS EM UMA CAVIDADE Ondas eletromagnéticas estacionárias são produzidas em uma cavidade com duas paredes paralelas fortemente condutoras e separadas por uma distância de 1,50 cm. (a) Calcule o comprimento de onda mais longo e a menor freqüência das ondas estacionárias entre as paredes. (b) Para a onda estacionária com o comprimento de onda mais longo, em que pontos da cavidade $\vec{E}$ possui seu módulo máximo? Em que pontos $\vec{E}$ é igual a zero? Em que pontos $\vec{B}$ possui seu módulo máximo? Em que pontos $\vec{B}$ é igual a zero?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema usa o conceito de que somente certos modos normais eletromagnéticos são possíveis para ondas eletromagnéticas em uma cavidade, assim como somente certos modos normais são possíveis para ondas estacionárias em uma corda.

PREPARAR: o comprimento de onda mais longo possível e a freqüência mais baixa possível correspondem ao modo $n = 1$ nas equações (32.38) e (32.39). Usamos essas equações para determinar os valores de λ e f. A seguir, as equações (32.36) e (32.37) fornecem as localizações dos planos nodais de $\vec{E}$ e $\vec{B}$; os planos antinodais de cada campo estão no centro, entre os planos nodais adjacentes.

EXECUTAR: (a) O comprimento de onda mais longo corresponde a $n = 1$ na Equação (32.38):

$$\lambda_1 = 2L = 2(1{,}50\text{ cm}) = 3{,}0\text{ cm}$$

A freqüência correspondente é dada pela Equação (32.38) com $n = 1$:

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{3{,}0 \times 10^8\text{ m/s}}{2(1{,}50 \times 10^{-2}\text{ m})} = 1{,}0 \times 10^{10}\text{ Hz} = 10\text{ GHz}$$

(b) Para $n = 1$, existe apenas a metade do comprimento de onda entre as duas paredes. O campo elétrico possui planos nodais ($\vec{E} = \mathbf{0}$) nas paredes e um plano antinodal (em que ocorre o valor máximo de $\vec{E}$) no centro entre as duas paredes. O campo

magnético apresenta planos *antinodais* nas paredes e um plano nodal no centro entre as duas paredes.

AVALIAR: esses tipos de onda estacionária são usados para produzir um campo elétrico oscilante $\vec{E}$ com uma freqüência fixa, que, por sua vez, serve para sondar o comportamento de uma pequena amostra de material colocada no interior da cavidade. Para submetermos a amostra ao campo elétrico mais forte, devemos colocá-la no centro da cavidade, no plano antinodal de $\vec{E}$.

Teste sua compreensão da Seção 32.5 Na onda estacionária descrita no Exemplo 32.7, há algum ponto na cavidade onde a densidade da energia seja igual a zero em todos os instantes? Se sim, onde? Se não, por quê? ▮

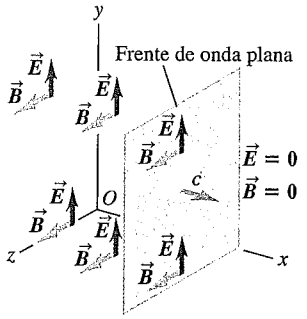
Resumo

Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas: as ondas eletromagnéticas, que se propagam no vácuo com velocidade igual à da luz c, foram previstas pelas equações de Maxwell. O espectro eletromagnético cobre freqüências de, no mínimo, 1 até 10^{24} Hz e uma correspondente ampla gama de comprimentos de onda. A luz visível, com comprimentos de onda de 400 nm a 700 nm, constitui somente uma pequena parte desse espectro. Em uma onda plana, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são uniformes sobre qualquer plano perpendicular à direção de propagação. A lei de Faraday e a lei de Ampère fornecem relações entre os módulos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$; para que essas duas relações sejam satisfeitas é necessária uma expressão para c em termos de ϵ_0 e μ_0. As ondas eletromagnéticas são transversais; os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação. O produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ fornece a direção e o sentido de propagação da onda.

$$E = cB \qquad (32.4)$$

$$B = \epsilon_0\mu_0 cE \qquad (32.8)$$

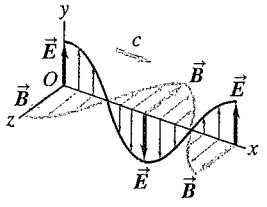
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \qquad (32.9)$$



Ondas eletromagnéticas senoidais: as equações (32.17) e (32.18) descrevem uma onda eletromagnética plana senoidal se propagando no vácuo no sentido $+x$. (Veja o Exemplo 32.1.)

$$\vec{E}(x,t) = \hat{j}E_{máx}\cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}B_{máx}\cos(kx - \omega t) \qquad (32.17)$$

$$E_{máx} = cB_{máx} \qquad (32.18)$$



Ondas eletromagnéticas na matéria: quando uma onda eletromagnética se desloca através de um dielétrico, a velocidade de onda v é menor do que a velocidade da luz no vácuo c. (Veja o Exemplo 32.2.)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \qquad (32.21)$$

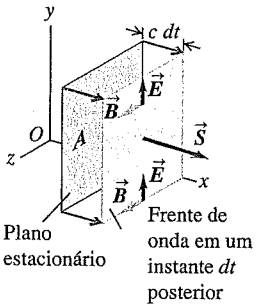
Energia e momento linear nas ondas eletromagnéticas: a taxa do fluxo de energia (potência por unidade de área) para uma onda eletromagnética se propagando no vácuo é dada pelo vetor de Poynting $\vec{S}$. A intensidade I da onda é a média no tempo do módulo do vetor de Poynting. Uma onda eletromagnética também transporta momento linear. Ao atingir uma superfície, uma onda eletromagnética exerce uma pressão de radiação p_{rad}. Quando a superfície é perpendicular à direção de propagação e é totalmente absorvida pela superfície, $p_{rad} = I/c$; quando ocorre reflexão total na superfície, $p_{rad} = 2I/c$. (Veja os Exemplos 32.3 a 32.5.)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad (32.28)$$

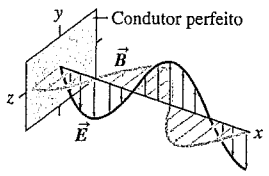
$$I = S_{méd} = \frac{E_{máx}B_{máx}}{2\mu_0} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0 c}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{máx}^2 \qquad (32.29)$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 cE_{máx}^2$$

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \qquad (32.31)$$

(taxa do fluxo do momento linear eletromagnético)



Ondas eletromagnéticas estacionárias: quando uma superfície refletora ideal é colocada em $x = 0$, as ondas refletidas e as ondas incidentes formam ondas estacionárias. Os planos nodais de $\vec{E}$ formam-se nos pontos $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, e os planos nodais de $\vec{B}$ formam-se nos pontos $kx = \pi/2, 3\pi 2, 5\pi/2, \ldots$. Em cada ponto, as variações senoidais de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ estão defasadas em 90°. (Veja os exemplos 32.6 e 32.7.)



Principais termos

densidade de energia, 391
equação de onda, 385
equações de Maxwell, 378
espectro eletromagnético, 380
índice de refração, 389
intensidade, 392
linearmente polarizada, 384
luz visível, 380
onda eletromagnética, 378
onda estacionária, 395
onda plana, 381
onda transversal, 382
plano antinodal, 396
plano nodal, 396
polarização, 384
pressão da radiação, 394
radiação eletromagnética, 379
vetor de Poynting, 392.

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Os metais são refletivos porque são bons condutores de eletricidade. Quando uma onda eletromagnética atinge um condutor, o campo elétrico da onda ativa correntes sobre a superfície do condutor que geram uma onda refletida. Para um condutor perfeito, essa onda refletida é tão intensa quando a onda incidente. Metais foscos são menos brilhantes porque sua superfície está oxidada e é menos condutiva; o polimento do metal remove o óxido e expõe o material condutor.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

32.1 Respostas: (a) não, (b) não Uma onda puramente elétrica teria um campo elétrico variante. Esse campo necessariamente gera um campo magnético através da lei de Ampère, Equação (29.20), portanto uma onda puramente elétrica é impossível. De modo análogo, uma onda puramente magnética é impossível: o campo magnético variante nesse tipo de onda automaticamente geraria um campo elétrico através da lei de Faraday, Equação (29.21).

32.2 Respostas: (a) sentido positivo de *y*, (b) sentido negativo de *x*, (c) sentido positivo de *y* Você pode conferir essas respostas usando a regra da mão direita para demonstrar que $\vec{E} \times \vec{B}$ em cada caso está no sentido da propagação, ou usando a regra indicada na Figura 32.9.

32.3 Resposta: (iv) Em uma onda eletromagnética plana ideal, em qualquer instante, os campos são os mesmos em qualquer ponto de um plano perpendicular ao sentido da propagação. A onda plana descrita pelas equações (32.17) se propaga no sentido de x, portanto os campos dependem da coordenada x e do instante t, mas *não* dependem das coordenadas y e z.

32.4 Respostas: (a) (i) e (iii), (b) (ii) e (iv), (c) (i) e (iii), (d) (ii) e (iv) Tanto a densidade de energia μ quanto o módulo S do vetor de Poynting são máximos onde os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possuírem seus módulos máximos. (O sentido dos campos não importa.) Pela Figura 32.13, isso ocorre em $x = 0$ e $x = \lambda/2$. Tanto μ quanto S possuem um valor mínimo igual a zero; isso ocorre quando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são ambos iguais a zero. Pela Figura 32.13, isso ocorre em $x = \lambda/4$ e $x = 3\lambda/4$.

32.5 Resposta: não Há pontos em que $\vec{E} = 0$ em todos os instantes (nas paredes) e a densidade de energia elétrica $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ é sempre igual a zero. Também há pontos em que $\vec{B} = 0$ em todos os instantes (sobre o plano no centro entre as paredes) e a densidade da energia *magnética* $B^2/2\mu_0$ é sempre igual a zero. Entretanto, *não* há pontos em que tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$ sejam sempre nulos. Portanto, a densidade de energia em qualquer ponto na onda estacionária é sempre diferente de zero.

Questões para discussão

Q32.1 Se você medir o campo magnético e o campo elétrico em um ponto do espaço onde se propaga uma onda eletromagnética, é possível determinar a direção da onda eletromagnética? Explique.

Q32.2 De acordo com a lei de Ampère, é possível a existência simultânea de uma corrente de deslocamento e de uma corrente de condução? Os efeitos dessas duas correntes podem ser cancelados mutuamente de modo que não haja *nenhum* campo magnético resultante? Explique.

Q32.3 Dê exemplos de ondas eletromagnéticas encontradas em nossa vida diária. O que existe de semelhante entre elas? Quais são as diferenças?

Q32.4 Algumas vezes, anúncios de néon desligados, mas localizados próximo a uma emissora de rádio com potência elevada, brilham fracamente durante a noite, embora eles não estejam ligados. O que produz esse brilho fraco?

Q32.5 A polarização é uma propriedade de todas as ondas eletromagnéticas ou é apenas uma propriedade da luz? As ondas sonoras podem ser polarizadas? Qual é a propriedade fundamental das ondas que deve ser considerada? Explique.

Q32.6 Suponha que uma carga puntiforme positiva q esteja inicialmente em repouso sobre o eixo Ox, na frente de uma onda eletromagnética plana descrita na Seção 32.2. A carga irá se mover quando a frente da onda atingi-la? Caso não se mova, por que não? Caso ela se mova, descreva qualitativamente seu movimento. (Lembre-se de que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possuem os mesmos valores em todos os pontos atrás da frente de onda.)

Q32.7 O feixe de um holofote pode possuir um campo elétrico com módulo igual a 1000 V/m, correspondendo a uma diferença de potencial de 1500 V entre a cabeça e os pés de uma pessoa com altura de 1,5 m sobre a qual o feixe incide. Isso provoca um choque elétrico forte sobre essa pessoa? Por quê?

Q32.8 Para uma dada onda senoidal de intensidade I, a amplitude do campo magnético é igual a B. Qual seria a amplitude (em termos de B) em uma onda semelhante com o dobro da intensidade?

Q32.9 A amplitude do campo magnético das ondas eletromagnéticas do laser mencionado no Exemplo 32.1 (Seção 32.3) é cerca de 100 vezes maior do que o campo magnético da Terra. Se você iluminar uma bússola com o feixe desse laser, ocorrerá uma deflexão da bússola? Por quê?

Q32.10 Muitos automóveis possuem antenas verticais para receber ondas de emissoras de rádio. Explique como isso pode dar uma informação sobre a polarização do campo elétrico $\vec{E}$ das ondas eletromagnéticas provenientes das emissoras de rádio.

Q32.11 Se um feixe de luz transporta momento linear, uma pessoa que liga uma lanterna sente um recuo da lanterna analogamente ao

caso do recuo de um rifle quando dispara? Por que esse recuo não é efetivamente observado?

Q32.12 Uma fonte de luz irradia uma onda eletromagnética senoidal de modo uniforme em todas as direções. Essa onda exerce uma pressão média p sobre uma superfície perfeitamente refletora a uma distância R dela. Qual pressão média (em termos de p) essa onda exerceria sobre uma superfície perfeitamente absorvente que estivesse duas vezes mais distante da fonte?

Q32.13 Uma onda eletromagnética *estacionária* transporta energia? Ela transporta momento linear? As respostas dessas questões seriam as mesmas se a pergunta fosse sobre uma onda eletromagnética *progressiva*? Por quê?

Q32.14 Quando um motorista dirige através do nível superior da ponte Bay Bridge, no sentido de Oakland para San Francisco, ele consegue sintonizar facilmente diversas estações emissoras no rádio do seu carro. Quando ele volta de San Francisco para Oakland pelo nível inferior da ponte, que possui nos dois lados uma estrutura de aço para suportar o nível superior, a recepção do rádio é muito fraca. Qual é o motivo dessa diferença?

Exercícios

Seção 32.2 Ondas eletromagnéticas planas e velocidade da luz

32.1 (a) Sabendo que a distância entre a Terra e a Lua é de 384000 km, quanto tempo leva a luz para viajar da Lua até a Terra? (b) A luz emitida pela estrela Sirius leva 8,61 anos para chegar até a Terra. Qual é a distância entre a Terra e Sirius em quilômetros?

32.2 **Fantasma da TV.** O chamado fantasma da TV é uma imagem que se forma sobre a tela em virtude da superposição das ondas eletromagnéticas que chegam diretamente sobre a antena e das ondas que chegam indiretamente depois de refletidas em um edifício ou em uma superfície metálica de grandes dimensões. Para uma tela de 25 polegadas (aproximadamente 0,63 m), a imagem fantasma está deslocada cerca de 1,0 cm para a direita da imagem principal quando o sinal refletido chega 0,60 μs depois do sinal principal. Nesse caso, qual é a diferença entre os comprimentos dos percursos dos dois sinais?

32.3 Para uma onda eletromagnética que se propaga no ar, determine a freqüência de uma onda com um comprimento de onda de (a) 5,0 km; (b) 5,0 m; (c) 5,0 μm; (d) 5,0 nm.

32.4 **Radiação ultravioleta.** Há duas categorias de raio ultravioleta. O ultravioleta A (UVA) possui um comprimento de onda que varia de 320 nm a 400 nm. Ele não é tão prejudicial à pele e é necessário para a produção de vitamina D. O UVB, com comprimento de onda entre 280 nm e 320 nm, é muito mais perigoso porque causa câncer de pele. (a) Determine as faixas de freqüência de UVA e UVB. (b) Quais são as faixas dos números de onda para UVA e UVB?

Seção 32.3 Ondas eletromagnéticas senoidais

32.5 Uma onda eletromagnética senoidal com um campo magnético de amplitude 1,25 μT e um comprimento de onda de 432 nm se desloca no sentido $+x$ através do vácuo. (a) Qual é a freqüência dessa onda? (b) Qual é a amplitude do campo elétrico associado? (c) Escreva as equações para os campos elétrico e magnético em função de x e de t na forma das equações (32.17).

32.6 Uma onda eletromagnética com comprimento de onda igual a 435 nm se desloca no vácuo no sentido $-z$. O campo elétrico é paralelo ao eixo Ox e possui amplitude de $2{,}70 \times 10^{-3}$ V/m. Qual é o valor (a) da freqüência? (b) da amplitude do campo magnético? (c) Escreva equações vetoriais para $\vec{E}(z, t)$ e para $\vec{B}(z, t)$.

32.7 Uma onda eletromagnética senoidal com freqüência igual a $6{,}10 \times 10^{14}$ Hz se desloca no vácuo no sentido $+z$. O campo magnético $\vec{B}$ é paralelo ao eixo Oy e possui amplitude de $5{,}80 \times 10^{-4}$ T. Escreva equações vetoriais para $\vec{E}(z, t)$ e para $\vec{B}(z, t)$.

32.8 O campo elétrico de uma onda eletromagnética senoidal obedece à equação $E = -(375 \text{ V/m}) \operatorname{sen}[(5{,}97 \times 10^{15} \text{ rad/s})t + (1{,}99\ 10^{7} \text{ rad/m})x]$. (a) Quais são a freqüência, o comprimento de onda e o período da onda? Essa luz é visível aos seres humanos? (c) Qual é a velocidade da onda?

32.9 Uma onda eletromagnética possui um campo elétrico dado por $\vec{E}(y, t) = -(3{,}10 \times 10^{5} \text{ V/m})\,\hat{k} \operatorname{sen}[ky - (12{,}65 \times 10^{12} \text{ rad/s})t]$. (a) Em que direção e sentido a onda eletromagnética está se propagando? (b) Qual é o comprimento de onda? (c) Escreva a equação vetorial para $\vec{B}(y, t)$.

32.10 Uma onda eletromagnética possui um campo magnético dado por $\vec{B}(x, t) = (8{,}25 \times 10^{-9} \text{ T})\,\hat{j} \operatorname{sen}[(1{,}38 \times 10^{4} \text{ rad/m})x + \omega t]$. (a) Em que direção e sentido a onda eletromagnética está se propagando? (b) Qual é a freqüência f da onda? (c) Escreva a equação vetorial para $\vec{E}(x, t)$.

32.11 Uma certa estação de rádio emite ondas com freqüência de 830 kHz. Para uma dada distância do transmissor, a amplitude do campo magnético da onda eletromagnética é igual a $4{,}82 \times 10^{-11}$ T. Calcule (a) o comprimento de onda; (b) o número de onda; (c) a freqüência angular; (d) a amplitude do campo elétrico.

32.12 A amplitude do campo elétrico nas vizinhanças de uma certa estação de rádio é igual a $3{,}85 \times 10^{-3}$ V/m. Qual é a amplitude de $\vec{B}$? Como o valor obtido se compara ao módulo do campo magnético da Terra?

32.13 Uma onda eletromagnética com freqüência $5{,}70 \times 10^{14}$ Hz se propaga com uma velocidade de $2{,}17 \times 10^{8}$ m/s em um dado pedaço de vidro. Determine (a) o comprimento de onda da onda no vidro; (b) o comprimento de onda de uma onda com a mesma freqüência que se propaga no ar; (c) o índice de refração n do vidro para uma onda eletromagnética com essa freqüência; (d) a constante dielétrica do vidro nessa freqüência, supondo que a permeabilidade relativa seja igual a 1.

32.14 Uma onda eletromagnética com freqüência de 6,50 Hz se desloca em um material magnético isolante que possui constante dielétrica de 3,64 e permeabilidade relativa de 5,18 nessa freqüência. O campo elétrico possui amplitude $7{,}20 \times 10^{-3}$ V/m. (a) Qual é a velocidade de propagação da onda? (b) Qual é o comprimento de onda? (c) Qual é a amplitude do campo magnético? (d) Qual é a intensidade da onda?

Seção 32.4 Energia e momento linear em ondas eletromagnéticas

32.15 **Campos de uma lâmpada.** Podemos modelar de forma razoável uma lâmpada incandescente de 75 W como uma esfera com 6,0 cm de diâmetro. Tipicamente, somente cerca de 5% da energia vai para a luz visível; o restante vai, em grande parte, para a radiação infravermelha não visível. (a) Qual é a intensidade da luz visível (em W/m^2) na superfície da lâmpada? (b) Quais são as amplitudes dos campos elétrico e magnético nessa superfície, para uma onda senoidal com essa intensidade?

32.16 Considere a direção e o sentido do campo magnético e do campo elétrico indicados a seguir. Para cada caso, qual é a direção

e o sentido da propagação da onda? (a) $\vec{E} = E\hat{i}$, $\vec{B} = -B\hat{j}$; (b) $\vec{E} = E\hat{j}$, $\vec{B} = B\hat{i}$; (c) $\vec{E} = -E\hat{k}$, $\vec{B} = -B\hat{i}$; (d) $\vec{E} = E\hat{i}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$.

32.17 Uma onda eletromagnética senoidal está se propagando no vácuo no sentido $+z$. Se em um dado instante e em um dado ponto do espaço o campo elétrico estiver no sentido $+x$ e possuir módulo de 4,0 V/m, quais serão o módulo, a direção e o sentido do campo magnético da onda nesse mesmo ponto no espaço e mesmo instante no tempo?

32.18 Uma onda eletromagnética senoidal emitida por uma estação de rádio passa perpendicularmente através de uma janela aberta com área de 0,500 m^2. Na janela, o campo elétrico da onda possui valor eficaz de 0,0200 V/m. Quanta energia essa onda transporta através da janela durante um comercial de 30,0 s?

32.19 Teste de um transmissor de rádio no espaço. Você é um especialista em missões da Nasa e realiza sua primeira viagem a bordo do ônibus espacial. Graças ao seu treinamento intensivo em física, você foi designado para avaliar o desempenho de um novo transmissor de rádio a bordo, o International Space Station (ISS). Empoleirado no braço móvel do ônibus espacial, você mira um detector sensível no ISS, que está a 2,5 km de distância. Você calcula que a amplitude do campo elétrico das ondas do rádio emitidas pelo transmissor ISS é 0,090 V/m e que a freqüência das ondas é 244 MHz. Determine o seguinte: (a) a intensidade do rádio na sua localização; (b) a amplitude do campo magnético da onda na sua localização; (c) a potência total do transmissor de rádio ISS. (d) Quais suposições, se alguma, você fez nos seus cálculos?

32.20 A intensidade de um feixe de laser cilíndrico é de 0,800 W/m^2. A área de seção reta do feixe é $3,0 \times 10^{-4}$ m^2 e a intensidade é uniforme através da seção reta do feixe. (a) Qual é a potência média do laser? (b) Qual é o valor eficaz do campo elétrico no feixe?

32.21 Uma sonda espacial que está a $2,0 \times 10^{10}$ m de uma estrela mede que a intensidade total da radiação eletromagnética da estrela é de $5,0 \times 10^{3}$ W/m^2. Se a estrela irradia uniformemente em todas as direções, qual é a potência média total?

32.22 Uma onda eletromagnética senoidal emitida por um telefone celular possui comprimento de onda igual a 35,4 cm e a amplitude do campo elétrico é de $5,40 \times 10^{-2}$ V/m a uma distância de 250 m da antena. Calcule (a) a freqüência da onda; (b) a amplitude do campo magnético; (c) a intensidade da onda.

32.23 Uma fonte de luz monocromática possui potência total igual a 60,0 W e irradia uniformemente em todas as direções uma luz de comprimento de onda igual a 700 nm. Calcule $E_{máx}$ e $B_{máx}$ para a luz de 700 nm a uma distância de 5,0 m da fonte.

32.24 Para a onda eletromagnética representada pela Equação (32.19), mostre que o vetor de Poynting (a) possui a mesma direção e o mesmo sentido da propagação da onda; (b) possui módulo médio dado pela Equação (32.29).

32.25 Uma fonte de luz intensa irradia uniformemente em todas as direções. A uma distância de 5,0 m da fonte, a pressão de radiação sobre uma superfície perfeitamente absorvedora é $9,0 \times 10^{-6}$ Pa. Qual é a potência média total da fonte?

32.26 Transmissão de Televisão. O canal público de televisão KQED em São Francisco, nos Estados Unidos, transmite um sinal de rádio senoidal a uma potência de 316 kW. Suponha que a onda se propague uniformemente para um hemisfério acima do solo. Em uma casa a 5,0 km de distância da antena, (a) qual é a pressão média exercida pela onda sobre uma superfície totalmente refletora; (b) quais são as amplitudes dos campos elétrico e magnético da onda e (c) qual é a densidade média da energia que essa onda transporta? (d) Para a densidade de energia obtida no item (c), qual porcentagem advém do campo elétrico e qual porcentagem do campo magnético?

32.27 Supondo que a intensidade da luz solar incidindo diretamente sobre um dado ponto da superfície terrestre seja igual a 0,78 kW/m^2, calcule: (a) a densidade do momento linear médio (momento linear por unidade de volume) da luz solar; (b) o momento linear médio por unidade de área e por unidade de tempo da luz solar.

32.28 Nos laboratórios de simulação espacial da Nasa, existe uma sala de 25 pés de comprimento (aproximadamente igual a 7,6 m), na qual um conjunto de lâmpadas produz no piso do laboratório uma intensidade de 2500 W/m^2 (uma simulação equivalente à intensidade da luz solar nas vizinhanças do planeta Vênus). Calcule a pressão da radiação média (em pascals e em atmosferas) sobre (a) uma seção totalmente absorvedora do piso do laboratório; (b) uma seção totalmente refletora do piso do laboratório. (c) Calcule a densidade do momento linear médio (momento linear por unidade de volume) da luz que atinge o piso do laboratório.

32.29 Verifique se a Equação (32.27) pode ser escrita a partir das expressões equivalentes indicadas na Equação (32.26).

Seção 32.5 Ondas eletromagnéticas estacionárias

32.30 Uma onda eletromagnética estacionária no ar possui freqüência igual a 750 MHz e se propaga entre dois planos condutores paralelos separados por uma distância de 80,0 cm. Em que pontos entre esses dois planos deve uma carga puntiforme ser colocada em repouso de modo que ela *permaneça* em repouso? Explique.

32.31 Uma onda eletromagnética estacionária em certo material possui freqüência igual a $2,20 \times 10^{10}$ Hz. A distância entre dois planos nodais consecutivos do campo $\vec{B}$ é igual a 3,55 mm. Calcule: (a) o comprimento de onda da onda nesse material; (b) a distância entre dois planos nodais adjacentes do campo $\vec{E}$; (c) a velocidade de propagação da onda.

32.32 Uma onda eletromagnética estacionária no ar possui freqüência igual a 75,0 MHz. (a) Qual é a distância entre dois planos nodais consecutivos do campo $\vec{E}$? (b) Qual é a distância entre um plano nodal do campo $\vec{E}$ e o plano nodal mais próximo do campo $\vec{B}$?

32.33 Uma onda eletromagnética estacionária em certo material possui freqüência de $1,20 \times 10^{10}$ Hz e velocidade de propagação de $2,10 \times 10^{8}$ m/s. (a) Qual é a distância entre um plano nodal do campo $\vec{B}$ e o plano antinodal mais próximo do campo $\vec{B}$? (b) Qual é a distância entre um plano antinodal do campo $\vec{E}$ e o plano antinodal mais próximo do campo $\vec{B}$? (c) Qual é a distância entre um plano nodal do campo $\vec{E}$ e o plano nodal mais próximo do campo $\vec{B}$?

32.34 Mostre que as ondas estacionárias do campo magnético e do campo elétrico para ondas eletromagnéticas estacionárias indicadas pelas equações (32.34) e (32.35) (a) satisfazem a Equação de onda (32.15); (b) satisfazem as equações (32.12) e (32.14).

32.35 Forno de microondas. As microondas de um forno de microondas possuem um comprimento de onda de 12,2 cm. (a) Qual deve ser a largura desse forno para que possa conter cinco planos antinodais do campo elétrico ao longo da sua largura no padrão de onda estacionária? (b) Qual é a freqüência dessas microondas? (c) Suponha que, por um erro de fabricação, o forno tenha ficado 5,0 cm mais comprido do que o especificado no item (a). Nesse caso, qual teria de ser a freqüência das microondas para ainda haver cinco planos antinodais do campo elétrico ao longo da largura do forno?

Problemas

32.36 Considere uma onda eletromagnética senoidal tal que os campos sejam dados pelas equações $\vec{E} = E_{máx}\hat{j}$ sen $(kx - \omega t)$ e $\vec{B} = B_{máx}\hat{k}$ sen $(kx - \omega t + \phi)$, com $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Mostre que, se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem às equações (32.12) e (32.14), então concluímos que $E_{máx} = cB_{máx}$ e $\phi = 0$. (O resultado $\phi = 0$ indica que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilam em fase.)

32.37 Mostre que o campo *magnético* $B_z(x, t)$ de uma onda eletromagnética plana se propagando no sentido $+x$ deve satisfazer a Equação (32.15). (*Sugestão:* faça a derivada parcial da Equação (32.12) em relação a t e a derivada parcial da Equação (32.14) em relação a x. A seguir, combine os resultados.)

32.38 Para uma onda eletromagnética senoidal se propagando no vácuo, tal como a onda descrita na Equação (32.16), mostre que a densidade de energia *média* armazenada no campo elétrico é a mesma que aquela armazenada no campo magnético.

32.39 Um satélite a 575 km acima da superfície terrestre transmite ondas eletromagnéticas senoidais com freqüência de 92,4 MHz uniformemente em todas as direções, com uma potência de 25,0 kW. (a) Qual é a intensidade dessas ondas, quando elas atingem um receptor na superfície terrestre diretamente abaixo do satélite? (b) Quais são as amplitudes dos campos elétrico e magnético no receptor? (c) Se o receptor possui um painel totalmente absorvedor que mede 15,0 cm por 40,0 cm orientado com seu plano perpendicular ao sentido que as ondas percorrem, qual é a força média que essas ondas exercem sobre o painel? Essa força é grande o suficiente para causar efeitos significativos?

32.40 Uma onda eletromagnética senoidal plana se propagando no ar possui comprimento de onda de 3,84 cm e a amplitude do campo $\vec{E}$ é igual a 1,35 V/m. (a) Qual é a freqüência? (b) Qual é a amplitude do campo $\vec{B}$? (c) Qual é a intensidade? (d) Qual é a força média que essa radiação exerce sobre uma superfície totalmente absorvedora perpendicular à direção de propagação com área igual a 0,240 m^2?

32.41 Um pequeno laser de hélio-neônio emite luz vermelha com potência igual a 3,20 mW concentrada em um feixe com diâmetro de 2,50 mm. (a) Calcule as amplitudes do campo elétrico e do campo magnético da luz emitida. (b) Calcule as densidades de energia médias associadas com o campo elétrico e com o campo magnético. (c) Qual é a energia contida em um comprimento do feixe igual a 1,0 m?

32.42 Considere uma onda eletromagnética plana tal como a indicada na Figura 32.5, porém na qual os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também possuam componentes na direção do eixo Ox (ao longo da direção de propagação da onda). Use a lei de Gauss para o campo magnético e para o campo elétrico para mostrar que os componentes E_x e B_x devem ser ambos iguais a zero e que, portanto, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são ambos transversais. (*Sugestão*: use uma superfície gaussiana como indicada na Figura 32.6. Das duas faces paralelas ao plano yz, escolha uma à esquerda da frente de onda e a outra à direita da frente de onda.)

32.43 O Sol emite energia sob forma de ondas eletromagnéticas com uma taxa de $3,9 \times 10^{26}$ W. Essa energia é produzida por reações nucleares que ocorrem próximas ao centro do Sol. (a) Calcule a intensidade da radiação eletromagnética e a pressão da radiação sobre um objeto absorvedor na superfície do Sol (raio $r = R = 6,96 \times 10^5$ km) e a uma distância $r = R/2$ no interior do Sol. Despreze os efeitos de espalhamento das ondas quando elas se propagam radialmente a partir do centro do Sol. Compare o resultado aos valores fornecidos na Seção 32.4 para a luz solar imediatamente antes de ela penetrar na atmosfera terrestre. (b) A pressão do gás na superfície do Sol é aproximadamente igual a $1,0 \times 10^4$ Pa; para $r = R/2$, de acordo com modelos do interior do Sol, a pressão do gás é de cerca de $4,7 \times 10^{13}$ Pa. Comparando esses dados aos resultados que você obteve no item (a), a pressão da radiação é um fator importante para determinar a estrutura do Sol? Por quê?

32.44 Existem projetos para o uso de coletores solares em satélites que orbitam em torno da Terra. A potência coletada pelo satélite seria enviada para a Terra sob forma de radiação de microondas. Para um feixe de microondas cuja seção reta possui área igual a 36,0 m^2 incidindo sobre a superfície da Terra com uma potência total de 2,80 kW, qual seria a amplitude do campo elétrico do feixe sobre a superfície da Terra?

32.45 Dois refletores quadrados, cada qual com 1,50 cm de lado e 4,0 g de massa, estão localizados em extremidades opostas de uma haste delgada, extremamente leve, de 1,0 m e que pode girar sem atrito e no vácuo em torno de um eixo perpendicular a ele no seu centro (Figura 32.24). Esses refletores são suficientemente pequenos para serem tratados como massas puntiformes em cálculos de momento de inércia. Ambos os refletores são iluminados em uma face por uma onda de luz senoidal com um campo elétrico de amplitude 1,25 N/C, que recai uniformemente sobre ambas as superfícies e sempre os atinge perpendicularmente ao plano das suas superfícies. Um refletor é coberto com um revestimento perfeitamente absorvedor e o outro com um revestimento perfeitamente refletor. Qual é a aceleração angular desse dispositivo?

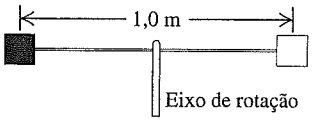


Figura 32.24 Problema 32.45.

32.46 O plano de uma superfície é perpendicular à direção de propagação de um feixe de ondas eletromagnéticas com intensidade I. A superfície absorve uma fração w da intensidade incidente, sendo $0 \leq w \leq 1$, e reflete a parte restante. (a) Mostre que a pressão da radiação sobre a superfície é dada por $(2 - w)\, I/c$. (b) Mostre que o resultado precedente fornece a expressão correta para uma superfície (i) totalmente absorvedora; (ii) totalmente refletora. (c) Para uma intensidade incidente de 1,40 kW/m^2, qual é a pressão da radiação quando ocorre uma absorção de 90%? E quando ocorre uma reflexão de 90%?

32.47 Um condutor cilíndrico com seção reta circular de raio a e resistividade ρ conduz uma corrente constante I. (a) Determine o módulo, a direção e o sentido do vetor $\vec{E}$ em um ponto imediatamente abaixo da superfície do fio situado a uma distância a do eixo central. (b) Determine o módulo, a direção e o sentido do vetor $\vec{B}$ nesse mesmo ponto. (c) Calcule o módulo, a direção e o sentido do vetor de Poynting $\vec{S}$ nesse mesmo ponto. (O sentido de $\vec{S}$ indica o sentido em que a energia eletromagnética flui para o interior ou para o exterior do condutor.) (d) Use o resultado do item (c) para calcular a taxa de escoamento de energia para o interior do volume ocupado por um comprimento l do condutor. (*Sugestão:* integre $\vec{S}$ sobre a superfície do volume considerado.) Compare o resultado à taxa da geração de energia térmica no mesmo volume. Explique por que a energia dissipada na resistência de um condutor que conduz

uma corrente pode ser interpretada em termos de uma energia que penetra no solenóide através de suas paredes cilíndricas.

32.48 Uma fonte de ondas eletromagnéticas senoidais irradia uniformemente em todas as direções. A 10,0 m dessa fonte, a amplitude do campo elétrico é medido como 1,50 N/C. Qual é a amplitude do campo elétrico a uma distância de 20,0 cm da fonte?

32.49 Uma espira circular pode ser usada como uma antena de rádio. Sabendo que uma antena com diâmetro igual a 18,0 cm está localizada a 2,50 km de uma fonte de 95,0 MHz com potência total de 55,0 kW, qual é a fem máxima induzida na antena? (Suponha que o plano que contém a antena circular seja ortogonal à direção do campo magnético da radiação e que a fonte irradie uniformemente em todas as direções.)

32.50 Em uma dada experiência, um transmissor de rádio emite ondas eletromagnéticas senoidais com freqüência de 110,0 MHz em sentidos opostos dentro de uma cavidade estreita com refletores em ambas as extremidades, gerando um padrão de onda estacionária. (a) Qual é a distância que separa os planos nodais do campo magnético? (b) Se o padrão de onda estacionária é determinado como na sua oitava harmônica, qual é o comprimento da cavidade?

32.51 Lanterna para resgate. Você é o único tripulante da nave interplanetária *T:1339 Vorga*, que realiza transporte regular de carga entre a Terra e as colônias de mineração no cinturão de asteróides. Certo dia, você está trabalhando fora da nave, a uma distância de 2,0 AU do Sol. [1 AU (unidade astronômica) é a distância média entre a Terra e o Sol, 149.600.000 km.] Infelizmente, você perde contato com o casco da nave e começa a flutuar no espaço. Você usa os foguetes do seu uniforme espacial para tentar se impulsionar de volta à nave, mas o combustível acaba antes que você consiga retornar à nave. Você está em apuros, flutuando a 16,0 m da nave com velocidade zero em relação a ela. Felizmente, você está carregando uma lanterna de 200 W. Você acende a lanterna e usa seu feixe como um 'foguete de luz' para se impulsionar de volta à nave. (a) Considerando que você, o seu uniforme espacial e a lanterna possuem uma massa combinada de 150 kg, quanto tempo você levará para retornar à nave? (b) Há algum outro modo de usar a lanterna para realizar o mesmo objetivo de retornar à nave?

32.52 Nikola Tesla, um inventor do século XIX, propôs a transmissão de potência elétrica através de ondas eletromagnéticas senoidais. Considere a potência elétrica transmitida por um feixe com seção reta de área igual a 100 m^2. Qual deveria ser a amplitude do campo magnético e a amplitude do campo elétrico para que esse feixe pudesse transmitir uma potência elétrica comparável à potência transmitida por uma linha de transmissão moderna (que opera com tensões da ordem de 500 kV e correntes da ordem de 1000 A)?

32.53 Sistema de Posicionamento Global (GPS). A rede GPS consiste de 24 satélites, e cada qual realiza duas órbitas em torno da Terra por dia. Cada satélite transmite um sinal eletromagnético senoidal de 50,0 W (ou até menos) em duas freqüências, uma das quais é de 1575,42 MHz. Suponha que um satélite transmita metade da sua potência em cada freqüência e que as ondas se propaguem uniformemente em um hemisfério de cima para baixo. (a) Qual é a intensidade média que um receptor de GPS no solo, diretamente abaixo do satélite, recebe? (*Sugestão:* primeiro use as leis de Newton para determinar a altitude do satélite.) (b) Quais são as amplitudes dos campos elétrico e magnético do receptor de GPS no item (a), e quanto tempo leva para o sinal atingir o receptor? (c) Se o receptor for um painel quadrado de 1,50 cm de lado que absorve todo o feixe de luz, qual é a pressão média exercida pelo sinal sobre ele? (d) Qual é o comprimento de onda com o qual o receptor deve estar sintonizado?

32.54 A Nasa está considerando seriamente a possibilidade de a propulsão de naves espaciais usar o conceito das *velas solares*. Uma nave espacial solar teria uma grande vela feita com material leve e usaria a propulsão aproveitando a energia e o momento linear da radiação solar. (a) A vela deve absorver ou refletir a luz solar? Por quê? (b) A potência total emitida pelo Sol é igual a $3,9 \times 10^{26}$ W. Qual deve ser a área de uma vela para impulsionar uma nave espacial de massa igual a 10000 kg no sentido contrário ao da força de atração gravitacional do Sol? Expresse sua resposta em quilômetros quadrados. (c) Explique por que sua resposta do item (b) não depende da distância entre a nave e o Sol.

32.55 O espaço sideral contém muitas partículas que constituem a chamada *poeira cósmica*. A pressão oriunda da radiação emitida pelo Sol estabelece um limite inferior para o diâmetro dessas partículas. Para verificar a origem desse limite, considere uma partícula esférica de poeira de raio R e massa específica ρ. (a) Escreva uma expressão para a força gravitacional exercida pelo Sol sobre a partícula quando ela está a uma distância r do Sol (que possui massa M). (b) Seja L a luminosidade do Sol, ou seja, a taxa com a qual ele emite ondas eletromagnéticas. Calcule a força exercida sobre a partícula (totalmente absorvedora) oriunda da pressão da radiação solar. A grandeza relevante para esse cálculo é a área da seção reta da partícula, e *não* a área de sua superfície. Como parte da resposta, diga por que você deve considerar essa área. (c) A massa específica de uma partícula típica de poeira cósmica é da ordem de 3000 kg/m^3. Calcule qual deve ser o raio R da partícula para que a força gravitacional exercida pelo Sol seja igual ao valor da força oriunda da pressão da radiação. A luminosidade do Sol é de $3,9 \times 10^{26}$ W. Sua resposta depende da distância r entre a partícula e o Sol? Por quê? (d) Explique por que existe uma probabilidade muito pequena de que uma partícula com raio menor do que aquele que você encontrou no item (c) possa existir no espaço interplanetário do sistema solar. (*Sugestão:* obtenha a razão entre a expressão encontrada no item (a) e a encontrada no item (b).)

Problemas desafiadores

32.56 Modelo clássico do átomo de hidrogênio. Podemos considerar que o elétron de um átomo de hidrogênio está em uma órbita circular com raio igual a 0,0529 nm e energia cinética de 13,6 eV. Caso o elétron se comportasse de maneira tradicional, qual seria a quantidade de energia que ele deveria irradiar por segundo? (Veja o problema desafiador 32.57.) O que esse resultado informa a respeito do modelo da física clássica para descrever o átomo?

32.57 Ondas eletromagnéticas são produzidas por cargas aceleradas. A taxa da emissão de energia de uma partícula com carga q e aceleração a é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

em que c é a velocidade da luz. (a) Verifique se essa equação está dimensionalmente correta. (b) Sabendo que um próton se desloca em um acelerador de partícula com energia cinética de 6,0 MeV, percorrendo uma órbita circular de raio igual a 0,750 m, qual é a fração de sua energia que ele irradia por segundo? (c) Considere agora um elétron se deslocando nessa órbita com o mesmo raio e

com a mesma velocidade. Qual é a fração de sua energia que ele irradia por segundo?

32.58 As ondas eletromagnéticas se propagam em *condutores* de modo muito diferente da propagação em dielétricos e no vácuo. Quando a resistividade do condutor for suficientemente pequena (ou seja, quando ele for um bom condutor), o campo elétrico oscilante da onda produzirá uma corrente de condução oscilante que é muito maior do que a corrente de deslocamento. Nesse caso, a equação de onda para o campo elétrico $\vec{E}(x, t) = E_y(x, t)\hat{j}$ se propagando no sentido $+x$ no interior do condutor é dada por

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}$$

em que μ é a permeabilidade do condutor e ρ é sua resistividade. (a) Uma solução para essa equação de onda é dada por

$$E_y(x, t) = E_{máx}e^{-k_C x} \text{ sen } (k_C x - \omega t)$$

em que $k_C = \sqrt{\omega\mu/2\rho}$. Verifique essa solução substituindo $E_y(x, t)$ na equação de onda precedente. (b) O termo exponencial mostra que a amplitude do campo elétrico diminui à medida que a onda se propaga. Explique a razão desse efeito. (*Sugestão:* o campo realiza trabalho para mover a carga no interior do condutor. A corrente resultante desse movimento produz uma dissipação de calor i^2R no interior do condutor, fazendo sua temperatura aumentar. De onde provém a energia para isso?) (c) Mostre que a amplitude do campo elétrico diminui de um fator $1/e$ para uma distância determinada por $1/k_C = \sqrt{2\rho/\omega\mu}$ e calcule essa distância para uma onda de rádio com freqüência $f = 1{,}0$ MHz no cobre (resistividade $1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m e permeabilidade $\mu = \mu_0$). Como essa distância é muito pequena, as ondas eletromagnéticas praticamente não se propagam no interior do cobre. Ao contrário, elas são refletidas na superfície do metal. A partir disso se conclui que as ondas de rádio não penetram no cobre nem em outros metais, explicando-se por que a recepção das ondas de rádio é extremamente fraca no interior de um ambiente cercado por uma estrutura metálica.

APÊNDICE A

O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

O Sistema Internacional de Unidades, abreviado por SI, é o sistema desenvolvido por um congresso internacional e adotado por quase todos os países industrializados do mundo. Ele é baseado nas unidades do Sistema MKSA (metro-quilograma-segundo-ampère). O material apresentado a seguir foi adaptado de B. N. Taylor, ed., *National Institute of Standards and Technology Spec. Pub.* 811 (U. S. Govt. Printing Office, Washington, DC, 1995).

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	
	Unidades básicas do SI		
comprimento	metro	m	
massa	quilograma	kg	
tempo	segundo	s	
corrente elétrica	ampère	A	
temperatura termodinâmica	kelvin	K	
quantidade de substância	mol	mol	
intensidade luminosa	candela	cd	
	Unidades derivadas do SI		**Unidades equivalentes**
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
freqüência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão (tensão mecânica)	pascal	Pa	N/m^2
viscosidade cinemática	metro quadrado por segundo	m^2/s	
viscosidade dinâmica	newton-segundo por metro quadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabalho, energia, calor	joule	J	$N \cdot m$
potência	watt	W	J/s
carga elétrica	coulomb	C	$A \cdot s$
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	J/C, W/A
intensidade do campo elétrico	volt por metro	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	$A \cdot s/V$
fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
indutância	henry	H	$V \cdot s/A$
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidade do campo magnético	ampère por metro	A/m	
força magnetomotriz	ampère	A	
fluxo luminoso	lúmen	lm	$cd \cdot sr$
luminância	candela por metro quadrado	cd/m^2	
iluminamento	lux	lx	lm/m^2
número de onda	um por metro	m^{-1}	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma-kelvin	$J/kg \cdot K$	
condutividade térmica	watt por metro-kelvin	$W/m \cdot K$	

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidade da radiação	watt por estereorradiano	W/sr	
atividade (de uma fonte radioativa)	becquerel	Bq	s^{-1}
dose de radiação	gray	Gy	J/kg
equivalente da dose de radiação	sievert	Sv	J/kg
	Unidades suplementares do SI		
ângulo plano	radiano	rad	
ângulo sólido	estereorradiano	sr	

Definições das unidades do SI

metro (m) O *metro* é um comprimento igual à distância percorrida pela luz no vácuo em um intervalo de tempo igual à fração (1/299.792.458) do segundo.

quilograma (kg) O *quilograma* é uma unidade de massa igual à massa de um protótipo internacional do quilograma. (O protótipo internacional do quilograma é um cilindro de uma liga de platina-irídio preservado em uma galeria da Agência Internacional de Pesos e Medidas em Sèvres, na França.)

segundo (s) O *segundo* é o intervalo de tempo correspondente a 9.192.631.770 ciclos da radiação emitida durante a transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

ampère (A) O *ampère* é uma corrente constante que, ao ser mantida em dois fios retilíneos e paralelos de comprimentos infinitos de seções retas desprezíveis e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produz entre os fios uma força igual a 2×10^{-7} N para cada metro de comprimento dos fios.

kelvin (K) O *kelvin*, unidade de temperatura termodinâmica, é a fração igual a 1/273,16 da temperatura termodinâmica correspondente ao ponto triplo da água.

ohm (OHM) O *ohm* é a resistência elétrica entre dois pontos de um condutor que transporta uma corrente de 1 A quando uma diferença de potencial constante de 1 volt é aplicada entre esses dois pontos, esse trecho do condutor não pode ser fonte de nenhuma força eletromotriz.

coulomb (C) O *coulomb* é a carga elétrica transportada em um segundo por uma corrente de 1 A.

candela (cd) A *candela* é a intensidade luminosa, em dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática com freqüência igual a 540×10^{12} hertz e cuja intensidade da radiação nessa direção equivale a 1/683 watt por estereorradiano.

molécula-grama (mol) O *mol* é a quantidade de uma substância que contém um número de unidades elementares equivalente ao número de átomos existentes em 0,012 kg de carbono 12. Essas unidades elementares devem ser especificadas e podem ser átomos, moléculas, íons, elétrons, outras partículas ou grupos de tais partículas especificadas.

newton (N) O *newton* é a força que fornece para uma massa de 1 quilograma uma aceleração de um metro por segundo por segundo.

joule (J) O *joule* é o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de uma força constante de 1 N é deslocado até uma distância de 1 metro na direção da força.

watt (W) O *watt* é a potência que dá origem a uma produção de energia com uma taxa igual a 1 joule por segundo.

volt (V) O *volt* é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um condutor que transporta uma corrente constante igual a 1 ampère, quando a potência entre esses dois pontos é igual a 1 W.

weber (Wb) O *weber* é o fluxo magnético que, ao atravessar um circuito com uma espira, produz nela uma força eletromotriz igual a 1 V quando o fluxo é reduzido a zero com uma taxa uniforme em um segundo.

lúmen (lm) O *lúmen* é o fluxo luminoso emitido em um ângulo sólido igual a 1 estereorradiano por uma fonte pontual uniforme cuja intensidade é igual a 1 candela.

farad (F) O *farad* é a capacitância de um capacitor que possui uma diferença de potencial de 1 V entre suas placas quando ele é carregado por uma carga elétrica igual a 1 coulomb.

henry (H) O *henry* é a indutância de um circuito fechado no qual uma força eletromotriz de 1 V é produzida quando a corrente elétrica no circuito varia com uma taxa uniforme de 1 A por segundo.

radiano (rad) O *radiano* é o ângulo plano entre dois raios do círculo que cortam a circunferência formando um arco de comprimento igual ao raio.

estereorradiano (sr) O *estereorradiano* é um ângulo sólido que, possuindo seu vértice no centro de uma esfera, corta a superfície da esfera formando uma calota cuja área superficial é equivalente à área de um quadrado de lado igual ao raio da esfera.

Prefixos do SI Os nomes dos múltiplos e submúltiplos das unidades do SI podem ser formados usando-se a lista dos prefixos apresentados no Apêndice F.

APÊNDICE B

RELAÇÕES MATEMÁTICAS ÚTEIS

Álgebra

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{(x+y)} = a^x a^y \qquad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$$

Logaritmos: Se $\log a = x$, então $a = 10^x$. $\log a + \log b = \log(ab)$ $\log a - \log b = \log(a/b)$ $\log(a^n) = n\log a$
Se $\ln a = x$, então $a = e^x$. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\ln(a^n) = n\ln a$

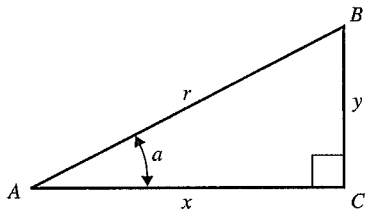
Equação do segundo grau: Se $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Série binomial

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots$$

Trigonometria

No triângulo retângulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.



Definições das funções trigonométricas: $\operatorname{sen} a = y/r$ $\quad \cos a = x/r$ $\quad \operatorname{tg} a = y/x$

Identidades:

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad \cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a \qquad \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(-a) = \cos a \qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a \pm \pi/2) = \pm\cos a \qquad \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b)\cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$\cos(a \pm \pi/2) = \mp\operatorname{sen} a \qquad \cos a + \cos b = 2\cos \tfrac{1}{2}(a+b)\cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$

Geometria

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$
Área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$
Volume de uma esfera de raio r: $V = 4\pi r^3/3$
Área da superfície de uma esfera de raio r: $A = 4\pi r^2$
Volume de um cilindro de raio r e altura h: $V = \pi r^2 h$

Cálculo diferencial e integral

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\text{sen}ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\text{sen}ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

Integrais:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \text{sen}ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\text{sen}ax$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Séries de potências (convergentes para os valores de x indicados):

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{todo } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{todo } x)$$

$$\text{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{todo } x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

APÊNDICE C

ALFABETO GREGO

Nome	Maiúscula	Minúscula	Nome	Maiúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Úpsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Ômega	Ω	ω

APÊNDICE D

TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

Grupo Periódico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 **H** 1.008																	2 **He** 4.003
2	3 **Li** 6.941	4 **Be** 9.012											5 **B** 10.811	6 **C** 12.011	7 **N** 14.007	8 **O** 15.999	9 **F** 18.998	10 **Ne** 20.180
3	11 **Na** 22.990	12 **Mg** 24.305											13 **Al** 26.982	14 **Si** 28.086	15 **P** 30.974	16 **S** 32.065	17 **Cl** 35.453	18 **Ar** 39.948
4	19 **K** 39.098	20 **Ca** 40.078	21 **Sc** 44.956	22 **Ti** 47.867	23 **V** 50.942	24 **Cr** 51.996	25 **Mn** 54.938	26 **Fe** 55.845	27 **Co** 58.933	28 **Ni** 58.693	29 **Cu** 63.546	30 **Zn** 65.409	31 **Ga** 69.723	32 **Ge** 72.64	33 **As** 74.922	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.904	36 **Kr** 83.798
5	37 **Rb** 85.468	38 **Sr** 87.62	39 **Y** 88.906	40 **Zr** 91.224	41 **Nb** 92.906	42 **Mo** 95.94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101.07	45 **Rh** 102.906	46 **Pd** 106.42	47 **Ag** 107.868	48 **Cd** 112.411	49 **In** 114.818	50 **Sn** 118.710	51 **Sb** 121.760	52 **Te** 127.60	53 **I** 126.904	54 **Xe** 131.293
6	55 **Cs** 132.905	56 **Ba** 137.327	71 **Lu** 174.967	72 **Hf** 178.49	73 **Ta** 180.948	74 **W** 183.84	75 **Re** 186.207	76 **Os** 190.23	77 **Ir** 192.217	78 **Pt** 195.078	79 **Au** 196.967	80 **Hg** 200.59	81 **Tl** 204.383	82 **Pb** 207.2	83 **Bi** 208.980	84 **Po** (209)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	103 **Lr** (262)	104 **Rf** (261)	105 **Db** (262)	106 **Sg** (266)	107 **Bh** (264)	108 **Hs** (269)	109 **Mt** (268)	110 **Ds** (271)	111 **Rg** (272)	112 **Uub** (285)	113 **Uut** (284)	114 **Uuq** (289)	115 **Uup** (288)	116 **Uuh** (292)	117 **Uus**	118 **Uuo**

Lantanídeos	57 **La** 138.905	58 **Ce** 140.116	59 **Pr** 140.908	60 **Nd** 144.24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150.36	63 **Eu** 151.964	64 **Gd** 157.25	65 **Tb** 158.925	66 **Dy** 162.500	67 **Ho** 164.930	68 **Er** 167.259	69 **Tm** 168.934	70 **Yb** 173.04
Actinídeos	89 **Ac** (227)	90 **Th** (232)	91 **Pa** (231)	92 **U** (238)	93 **Np** (237)	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)

Para cada elemento indica-se a massa atômica média da mistura dos isótopos do elemento que se encontram na natureza. Para os elementos que não possuem isótopos estáveis, indica-se entre parênteses a massa atômica média aproximada do elemento de maior duração. Para um elemento previsto, mas ainda não detectado, nenhuma massa atômica é indicada. As massas atômicas são expressas usando-se a unidade de massa atômica (1 u = 1,66053886(28) $\times 10^{-27}$), que equivale a grama por mol (g/mol).

APÊNDICE E

FATORES DE CONVERSÃO DAS UNIDADES

Comprimento
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0,6214 mi
1 m = 3,281 pol = 39,37 pol
1 cm = 0,3937 pol
1 pol = 2,540 cm
1 pol = 30,48 cm
1 yd = 91,44 cm
1 mi = 5280 pés = 1,609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milha náutica = 6080 pés
1 ano-luz = 9,461 × 10^{15} m

Área
1 cm^2 = 0,155 pol^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10,76 $pés^2$
1 pol^2 = 6,452 cm^2
1 pol = 144 pol^2 = 0,0929 m^2

Volume
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0,03531 $pé^3$ = 61,02 pol^3
1 $pé^3$ = 0,02832 m^3 = 28,32 litros = 7,477 galões
1 galão = 3,788 litros

Tempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86,400 s
1 a = 365,24 d = 3,156 × 10^7 s

Ângulo
1 rad = 57,30° = 180°/π
1° = 0,01745 rad = π/180 rad
1 revolução = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0,1047 rad/s

Velocidade
1 m/s = 3,281 pés/s
1 pé/s = 0,3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 pés/s
1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h
1 mi/h = 1,466 pés/s = 0,4470 m/s = 1,609 km/h

Aceleração
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3,281 $pés/s^2$
1 cm/s^2 = 0,01 m/s^2 = 0,03281 $pé/s^2$
1 $pé/s^2$ = 0,3048 m/s^2 = 30,48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1,467 $pés/s^2$

Massa
1 kg = 10^3 g = 0,0685 slug
1 g = 6,85 × 10^{-5} slug
1 slug = 14,59 kg
1 u = 1,661 × 10^{-27} kg
1 kg possui uma massa de 2,205 lb quando g = 9,80 m/s^2

Força
1 N = 10^5 dina = 0,2248 lb
1 lb = 4,448 N = 4,448 × 10^5 dina

Pressão
1 Pa = 1 N/m^2 = 1,450 × 10^{-4} lb/pol^2 = 0,209 $lb/pé^2$
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/pol^2 = 6895 Pa
1 $lb/pé^2$ = 47,88 Pa
1 atm = 1,013 × 10^5 Pa = 1,013 bar
= 14,7 lb/pol^2 = 2117 $lb/pés^2$
1 mm Hg = 1 torr = 133,3 Pa

Energia
1 J = 10^7ergs = 0,239 cal
1 cal = 4,186 J (com base em temperatura de 15°)
1 pé · lb = 1,356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 pés · lb
1 eV = 1,602 × 10^{-19} J
1 kWh = 3,600 × 10^6 J

Equivalência entre massa e energia
1 kg ↔ 8,988 × 10^{16} J
1 u ↔ 931,5 MeV
1 eV ↔ 1,074 × 10^{-9} u

Potência
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 pés · lb/s
1 Btu/h = 0,293 W

APÊNDICE F

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentais*

Nome	Símbolo	Valor
Velocidade da luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Módulo da carga do elétron	e	$1{,}60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Planck	h	$6{,}6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1{,}3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6{,}0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante dos gases	R	8,314472(15) J/mol · K
Massa do elétron	m_e	$9{,}1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p	$1{,}67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1{,}67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permissividade do vácuo	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8{,}854187817\ldots \times 10^{-12}$ C^2/N · m^2
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8{,}987551787\ldots \times 10^{9}$ N · m^2/C^2

Outras constantes úteis*

Equivalente mecânico do calor		4,186 J/cal (15° calorias)
Pressão da atmosfera padrão	1 atm	$1{,}01325 \times 10^{5}$ Pa
Zero absoluto	0 K	−273,15°C
Elétron-volt	1 eV	$1{,}60217653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidade de massa atômica	1 u	$1{,}66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Energia de repouso do elétron	$m_e c^2$	0,510998918(44) MeV
Volume de um gás ideal (0°C e 1 atm)		22,413996(39) litro/mol
Aceleração da gravidade (padrão)	g	9,80665 m/s^2

Fonte: National Institute of Standards and Technology* (http://physics.nist.gov/cuu**). Os números entre parênteses indicam as incertezas dos dígitos finais dos números principais; por exemplo, o número 1,6454(21) significa 1,6454 ± 0,0021. Os valores que não possuem incertezas são exatos.

Dados astronômicos[†]

Corpo	Massa (kg)	Raio (m)	Raio da órbita (m)	Período da órbita
Sol	$1{,}99 \times 10^{30}$	$6{,}96 \times 10^{8}$	—	—
Lua	$7{,}35 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$	$3{,}84 \times 10^{8}$	27,3 d
Mercúrio	$3{,}30 \times 10^{23}$	$2{,}44 \times 10^{6}$	$5{,}79 \times 10^{10}$	88,0 d
Vênus	$4{,}87 \times 10^{24}$	$6{,}05 \times 10^{6}$	$1{,}08 \times 10^{11}$	224,7 d
Terra	$5{,}97 \times 10^{24}$	$6{,}38 \times 10^{6}$	$1{,}50 \times 10^{11}$	365,3 d
Marte	$6{,}42 \times 10^{23}$	$3{,}40 \times 10^{6}$	$2{,}28 \times 10^{11}$	687,0 d
Júpiter	$1{,}90 \times 10^{27}$	$6{,}91 \times 10^{7}$	$7{,}78 \times 10^{11}$	11,86 a
Saturno	$5{,}68 \times 10^{26}$	$6{,}03 \times 10^{7}$	$1{,}43 \times 10^{12}$	29,45 a
Urano	$8{,}68 \times 10^{25}$	$2{,}56 \times 10^{7}$	$2{,}87 \times 10^{12}$	84,02 a
Netuno	$1{,}02 \times 10^{26}$	$2{,}48 \times 10^{7}$	$4{,}50 \times 10^{12}$	164,8 a
Plutão[‡]	$1{,}31 \times 10^{22}$	$1{,}15 \times 10^{6}$	$5{,}91 \times 10^{12}$	247,9 a

[†]*Fonte: NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group* (http://ssd.jpl.nasa.gov) e KENNETH SEIDELMANN, P. ed., *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac* (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), p. 704-706. Para cada corpo, o 'raio' é o seu respectivo raio no equador e o 'raio da órbita' é a distância média entre o corpo e o Sol (para os planetas) ou medida a partir da Terra (no caso da Lua).

[‡]Em agosto de 2006, o International Astronomical Union reclassificou Plutão e outros pequenos corpos na órbita do Sol como 'planetas anões'.

Prefixos para as potências de dez

Potência de dez	Prefixos	Abreviaturas
10^{-24}	locto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{3}	quilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zeta-	Z
10^{24}	iota-	Y

Exemplos:

1 femtômetro = 1 fm = 10^{-15} m

1 picossegundo = 1 ps = 10^{-12} s

1 nanocoulomb = 1 nC = 10^{-9} C

1 microkelvin = 1 μK = 10^{-6} K

1 milivolt = 1 mV = 10^{-3} V

1 quilopascal = 1 kPa = 10^{3} Pa

1 megawatt = 1 MW = 10^{6} W

1 gigahertz = 1 GHz = 10^{9} Hz

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES

Capítulo 21

21.1 (a) $2,0 \times 10^{10}$ (b) $8,58 \times 10^{-13}$
21.3 $2,10 \times 10^{28}$ elétrons, $3,35 \times 10^{9}$ C
21.5 $3,71 \times 10^{3}$ m
21.7 (a) $7,42 \times 10^{-7}$ C em cada esfera
(b) $3,71 \times 10^{-7}$ C em uma e $1,48 \times 10^{-6}$ C na outra
21.9 $1,43 \times 10^{13}$ afastados entre si
21.11 (a) $2,20 \times 10^{4}$ m/s
21.13 +0,750 nC
21.15 $1,8 \times 10^{-4}$ N, sentido $+x$
21.17 $x = -0,144$ m
21.19 $2,58 \times 10^{-6}$ N, sentido $-y$
21.21 (b) $F_x = 0$, $F_y = +2kqQa/(a^2 + x^2)^{3/2}$
(c) $2kqQ/a^2$, sentido $+y$
21.23 (b) $kq^2(1 + 2\sqrt{2})/2L^2$
21.25 (a) $4,40 \times 10^{-16}$ N (b) $2,63 \times 10^{11}$ m/s^2
(c) $2,63 \times 10^{5}$ m/s
21.27 (a) $3,31 \times 10^{6}$ N/C, para a esquerda
(b) $1,42 \times 10^{-8}$ s
(c) $1,80 \times 10^{3}$ N/C, para a direita
21.29 (a) $-21,9\ \mu C$ (b) $1,02 \times 10^{-7}$ N/C
21.31 (a) $8,75 \times 10^{3}$ N/C, para a direita
(b) $6,54 \times 10^{3}$ N/C, para a direita
(c) $1,40 \times 10^{-15}$ N, para a direita
21.33 (a) 364 N/C
(b) Não, 2,73 μm de cima para baixo
21.35 $1,79 \times 10^{6}$ m/s
21.37 (a) $mg = 8,93 \times 10^{-30}$ N;
$F_e = 1,60 \times 10^{-15}$ N; sim
(b) $1,63 \times 10^{-16}$ kg $= 1,79 \times 10^{14}\ m_e$
(c) Não
21.39 (a) $-\hat{j}$ (b) $(\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ (c) $-0,390\hat{i} + 0,921\hat{j}$
21.41 (a) $6,33 \times 10^{5}$ m/s (b) $1,59 \times 10^{4}$ m/s
21.43 (a) 0
(b) $E_x = -2kq(x^2 + a^2)/(x^2 - a^2)^2$, para $x < -a$;
$E_x = +2kq(x^2 + a^2)/(x^2 - a^2)^2$, para $x > +a$
21.45 (a) (i) 574 N/C, sentido $+x$; (ii) 268 N/C, sentido $-x$; (iii) 404 N/C, sentido $-x$
(b) (i) $9,20 \times 10^{-17}$ N, sentido $-x$;
(ii) $4,30 \times 10^{-17}$ N, sentido $+x$;
(iii) $6,48 \times 10^{-17}$ N, sentido $+x$
21.47 $1,04 \times 10^{7}$ N/C, para a esquerda
21.49 (a) $E_x = E_y = E = 0$
(b) $E_x = +2,66 \times 10^{3}$ N/C, $E_y = 0$;
$E = 2,66 \times 10^{3}$ N/C, sentido $+x$
(c) $E_x = +129$ N/C, $E_y = -510$ N/C;
$E = 526$ N/C, 284°, sentido horário do eixo $+x$
(d) $E_x = 0$, $E_y = E = +1,38 \times 10^{3}$ N/C, sentido $+y$
21.51 (a) $E_x = -4,79 \times 10^{3}$ N/C, $E_y = 0$;
$E = 4,79 \times 10^{3}$ N/C, sentido $-x$
(b) $E_x = +2,13 \times 10^{3}$ N/C, $E_y = 0$;
$E = 2,13 \times 10^{3}$ N/C, sentido $+x$
21.53 (a) $\vec{E} = \dfrac{2k\lambda}{x\sqrt{x^2/a^2 + 1}}\hat{i}$ (b) $\vec{E} = \dfrac{2k\lambda}{x}\hat{i}$
21.55 (a) $(7,0\ \text{N/C})\hat{i}$ (b) $(1,75 \times 10^{-5}\ \text{N})\hat{i}$
21.57 (a) 0 (b) 0
(c) σ/ϵ_0 orientado de cima para baixo
21.59 (a) Sim (b) Não
21.61 Um fio retilíneo infinitamente carregado possui um campo radial no plano que atravessa o fio, e constante no plano do fio, imagem espelhada em relação ao fio
21.63 (a) $1,4 \times 10^{-11}$ C · m de q_1 para q_2
(b) 860 N/C
21.65 (b) Também fornece a expressão correta para E_y, porque y aparece no denominador ao quadrado da expressão cheia, portanto os sinais estão corretos
21.67 (b) As cargas contrárias estão mais próximas, portanto os dipolos se atraem
21.69 (a) O torque é igual a zero quando $\vec{p}$ está alinhado no *mesmo* sentido de $\vec{E}$ ou em sentidos *contrários*
(b) A orientação estável ocorre quando $\vec{p}$ está alinhado no *mesmo* sentido de $\vec{E}$
21.71 1680 N da carga $+5,0\ \mu$C em direção à carga $-5,0\ \mu$C
(b) 22,3 N · m, no sentido horário
21.73 (a) $\sqrt{\dfrac{kqQ}{m\pi^2 a^3}}$
(b) acelerando ao longo do eixo y, afastando-se da origem
21.75 (b) $2,80 \times 10^{-6}$ C (c) 39,5°
21.77 (a) $2,09 \times 10^{21}$ N (b) $5,90 \times 10^{23}$ m/s^2
(c) Não
21.79 (a) $6kq^2/L^2$, afastando-se do vértice vazio
(b) $(3kq^2/2L^2)(1 + 2\sqrt{2})$, aproximando-se do centro do quadrado
21.81 (a) $6,0 \times 10^{23}$
(b) $F_g = 4,1 \times 10^{-31}$ N, $F_e = 5,1 \times 10^{5}$ N
(c) Sim para F_e e não para F_g
21.83 (a) $(2kq/x^2)[1 - (1 + a^2/x^2)^{-3/2}]$, sentido $-x$
(b) $3kqa^2/x^4$
21.85 (a) $3,5 \times 10^{20}$ (b) 1,6 C; $2,4 \times 10^{10}$ N
21.87 (a) $(mv_0^2\ \text{sen}^2\ \alpha)/2eE$
(b) $(mv_0^2\ \text{sen}^2\ 2\alpha)/eE$
(c) $h_{máx} = 0,418$ m, $d = 2,89$ m
21.89 (a) $E_x = \dfrac{kQ}{a}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{a + r}\right)$, $E_y = 0$
(b) $\dfrac{kqQ}{a}\left(\dfrac{1}{x - a} - \dfrac{1}{x}\right)\hat{i}$
21.91 (a) $-(7850\ \text{N/C})\hat{i}$ (b) Menor
(c) 18 cm
21.93 (a) $+(0,89\ \text{N/C})\hat{i}$ (b) Menor
(c) (i) 1,2%; (ii) 4,5%
21.95 (a) $F = \dfrac{2kqQ}{a}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right)$, sentido $-x$
(b) $F = \dfrac{kqQ}{a}\left(\dfrac{1}{x - a} - \dfrac{1}{x + a} - \dfrac{2}{x}\right)$, sentido $+x$
21.97 $E_x = E_y = 2kQ/a^2$
21.99 (a) $6,25 \times 10^{4}$ N/C, 225° medido no sentido anti-horário do eixo $+x$
(b) $1,0 \times 10^{-14}$ N, 45° medido no sentido anti-horário do eixo $+x$
21.101 (a) $1,19 \times 10^{6}$ N/C, para a esquerda
(b) $1,19 \times 10^{5}$ N/C, para a esquerda
(c) $1,19 \times 10^{5}$ N/C, para a direita
21.103 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\dfrac{x}{|x|}\hat{i} + \dfrac{z}{|z|}\hat{k}\right]$
21.105 (b) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$
(c) 0,844 μC (d) 56,2 N
21.107 (a) $\dfrac{kQ}{L}\left[\dfrac{1}{x + a/2} - \dfrac{1}{x + L + a/2}\right]$

Capítulo 22

22.1 (a) 1,75 N · m^2/C (b) Não (c) (i) 0; (ii) 90°
22.3 (a) $3,53 \times 10^{5}$ N · m^2/C (b) $3,13 \times 10^{-6}$ C
22.5 $\Phi = E\pi r^2$
22.7 (a) $2,71 \times 10^{5}$ N · m^2/C
(b) $2,71 \times 10^{5}$ N · m^2/C
(c) $5,42 \times 10^{5}$ N · m^2/C
22.9 (a) Zero
(b) $3,75 \times 10^{7}$ N/C radialmente para dentro
(c) $1,11 \times 10^{7}$ N/C radialmente para dentro
22.11 (b) Não
22.13 (a) $1,81 \times 10^{5}$ N · m^2/C (b) Não mudaria
22.15 (a) $4,5 \times 10^{4}$ N/C (b) $9,18 \times 10^{2}$ N/C
22.17 (a) $3,0 \times 10^{-7}$ C (b) $1,2 \times 10^{5}$ N/C
22.19 (a) $q = 3,27 \times 10^{-9}$ C (b) $n_e = 2,04 \times 10^{10}$
22.21 $8,06 \times 10^{5}$ N/C, no sentido da esfera com carga negativa
22.23 (a) $5,73 \times 10^{-6}$ C/m^2 (b) $6,48 \times 10^{5}$ N/C
(c) -5.65×10^{4} N · m^2/C
22.25 (a) $2,59 \times 10^{-7}$ C/m^3 (b) $1,96 \times 10^{3}$ N/C
22.27 (a) $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0$ (b) 0
22.29 (a) $\lambda = 2\pi r\sigma$ (b) $\sigma R/r\epsilon_0$
22.31 (a) Sim; $+Q$ (b) Não (c) Sim
(d) Não; não (e) Não; sim; não
22.33 (a) 750 N · m^2/C (b) 0
(c) 577 N/C
22.35 (a) $-5,98 \times 10^{-10}$ C
22.37 (a) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$, radialmente para fora
(b) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$, radialmente para fora
(d) Interna: $-\lambda$; externa: $+\lambda$
22.39 (a) (i) $\alpha/2\pi\epsilon_0 r$, radialmente para fora; (ii) 0; (iii) 0
(b) (i) $-\alpha$; (ii) 0
22.41 $\theta = 19,8°$
22.43 (a) $0 < r < R$, $E = 0$; $R < r < 2R$,
$E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, radialmente para fora; $r > 2R$,
$E = 2Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, radialmente para fora
22.45 (a) (i) 0; (ii) 0; (iii) $q/2\pi\epsilon_0 r^2$, radialmente para fora; (iv) 0; (v) $3q/2\pi\epsilon_0 r^2$, radialmente para fora
(b) (i) 0; (ii) $+2q$; (iii) $-2q$; (iv) $+6q$
22.47 (a) (i) 0; (ii) 0; (iii) $q/2\pi\epsilon_0 r^2$, radialmente para fora; (iv) 0; (v) $q/2\pi\epsilon_0 r^2$, radialmente para dentro
(b) (i) 0; (ii) $+2q$; (iii) $-2q$; (iv) $-2q$
22.49 (a) $Qq/4\pi\epsilon_0 r^2$, em direção ao centro da casca
(b) 0
22.51 (a) A carga σ dada está em ambos os lados, portanto E é duas vezes maior
(b) $\Phi = (\sigma A)/\epsilon_0$, mas $E_{ext} = \sigma/\epsilon_0$, portanto $E_{int} = 0$
22.53 $d = R/2$
22.55 (b) para $|x| \le d$: $\vec{E} = (p_0 x^3/3\epsilon_0 d^2)\hat{i}$;
para $|x| \ge d$: $\vec{E} = (p_0 d/3\epsilon_0)(x/|x|)\hat{i}$
22.57 (c) $E(r) = \dfrac{Q}{\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{r}{R} - \dfrac{3r^2}{4R^2}\right)$
(e) $E_{máx} = Q/3\pi\epsilon_0 R^2$ em $r = 2R/3$
22.59 (a) $\Phi = 4\pi Gm$ (b) $\Phi = -4\pi GM_{inte}$
22.61 $\rho\vec{B}/3\epsilon_0$
22.63 (a) $-(Q/16\pi\epsilon_0 R^2)\hat{i}$ (b) $(Q/72\pi\epsilon_0 R^2)\hat{i}$
22.65 (a) $Q(r) = Qe^{-2r/a_0}\,[2\,(r/a_0)^2 + 2\,(r/a_0) + 1]$
(b) $E = \dfrac{kQe^{-2r/a_0}}{r^2}[2(r/a_0)^2 + 2(r/a_0) + 1]$
22.67 (c) 0,807

Capítulo 23

23.3 $3,46 \times 10^{-13}$ J
23.5 (a) 12,5 m/s (b) 0,323 m
23.7 (a) 0,198 J
(b) (i) 26,6 m/s; (ii) 36,7 m/s; (iii) 37,6 m/s
23.9 (a) $-3,6 \times 10^{-7}$ J (b) $x = 0,0743$ m
23.11 $-q/2$
23.13 B: maior C: menor D: igual
23.15 7,42 m/s; mais rapidamente
23.17 (a) 0 (b) $+7,5 \times 10^{-4}$ J
(c) $-2,06 \times 10^{-3}$ J
23.19 (a) 2,5 mm (b) 7,49 mm
23.21 (a) −737 V (b) −704 V (c) $+8,2 \times 10^{-8}$ J
23.23 (b) 0 (d) 0
23.25 (b) $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{2}{|x - a|}\right)$
23.27 $1,02 \times 10^{7}$ m/s
23.29 (a) b (b) 800 V/m
(c) $-4,8 \times 10^{-5}$ J
23.31 (a) Aumento de 156 V
(b) Redução de 182 V
23.33 (a) Oscilatório (b) $1,67 \times 10^{7}$ m/s
23.35 (a) $\lambda = 9,51$ C/m (b) Não. Menor.
V diminui no sentido de $\vec{E}$. $\lambda > 0$:
V inversamente proporcional a r (c) 0
23.37 (a) $7,81 \times 10^{4}$ V (b) 0
23.41 (a) 8,0 kV/m (b) $1,92 \times 10^{-7}$ N
(c) $8,64 \times 10^{-7}$ J (d) $-8,64 \times 10^{-7}$ J
23.43 (b) −20 nC (c) Não

23.47 (a) $E_x = -Ay + 2Bx$, $E_y = -Ax - C$, $E_z = 0$
(b) $x = -C/A$, $y = -2BC/A^2$, qualquer valor de z

23.49 (a) (i) para $r < r_a$, $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

(ii) para $r_a < r < r_b$, $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}\right)$

(iii) para $r > r_b$, $V = 0$

(b) $V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

(c) para $r_a < r < r_b$, $E = \frac{V_{ab}}{\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) r^2}$

(d) $E = 0$

23.51 (a) cilindros concêntricos
(b) 10 V: $2{,}9 \times 10^{-2}$ m; 20 V: $4{,}2 \times 10^{-2}$ m

23.53 (a) $-2{,}15 \times 10^{-5}$ J (b) $W_E = +2829$ V
(c) $E = 3{,}54 \times 10^4$ V/m

23.55 (a) $7{,}85 \times 10^4$ V/m$^{4/3}$
(b) $\vec{E} = (-1{,}0 \times 10^5 \text{ V/m}^{4/3})x^{1/3}\hat{\imath}$
(c) $\vec{F} = (3{,}13 \times 10^{-15} \text{ N})\hat{\imath}$

23.57 (a) $-1{,}46q^2/\pi\epsilon_0 d$

23.59 (a) $-8{,}62 \times 10^{-18}$ J (b) $2{,}87 \times 10^{-11}$ m

23.61 (a) (i) $V = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(b/a)$; (ii) $V = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(b/r)$; (iii) $V = 0$ (d) $(\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(b/a)$

23.63 (a) $1{,}76 \times 10^{-16}$ N, de cima para baixo
(b) $1{,}93 \times 10^{14}$ m/s, de cima para baixo
(c) 8,24 mm (d) 15,4° (e) 4,12 cm

23.65 (a) $9{,}71 \times 10^4$ V/m (b) $3{,}03 \times 10^{-11}$ C

23.67 (a) $r \le R$: $V = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\right)[1 - (r/R)^2]$;

$r \ge R$: $V = -\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right)\ln(r/R)$

23.69 $Q/4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}$

23.71 $Q^2/8\pi\epsilon_0 R$

23.73 (a) $Q/8\pi\epsilon_0 R$ (b) (i) Centro (c) (ii) Superfície

23.75 (b) Sim (c) Não

23.77 $Q/8\pi\epsilon_0 R$

23.79 (a) $(Q/4\pi\epsilon_0 a)\ln[1 + (a/x)]$
(b) $(Q/4\pi\epsilon_0 a)\ln\left[(a/y) + \sqrt{1 + (a/y)^2}\right]$
(c) Em (a), $(Q/4\pi\epsilon_0 x)$ em (b), $(Q/4\pi\epsilon_0 y)$

23.81 (a) 1/3 (b) 3

23.83 (a) $E = Q_1/4\pi\epsilon_0 R_1^2$; $V = Q_1/4\pi\epsilon_0 R_1$
(b) Esfera 1: $Q_1R_1/(R_1 + R_2)$; esfera 2: $Q_1R_2/(R_1 + R_2)$
(c) $V = Q_1/4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)$ para qualquer esfera
(d) Esfera 1: $E = Q_1/4\pi\epsilon_0 R_1(R_1 + R_2)$; esfera 2: $E = Q_1/4\pi\epsilon_0 R_2(R_1 + R_2)$

23.85 (a) $7{,}6 \times 10^6$ m/s (b) $7{,}3 \times 10^6$ m/s
(c) $2{,}3 \times 10^9$ K; $6{,}9 \times 10^9$ K

23.87 (a) $5{,}9 \times 10^{-15}$ m (b) $4{,}14 \times 10^{-11}$ J
(c) $2{,}55 \times 10^{25}$ núcleos

23.89 (a) $1{,}01 \times 10^{-12}$ m, $1{,}11 \times 10^{-13}$ m, $2{,}54 \times 10^{-14}$ m

23.91 (c) 3 elétrons, 0,507 μm

Capítulo 24

24.1 $1{,}82 \times 10^{-4}$ C

24.3 (a) 604 V (b) $9{,}1 \times 10^{-3}$ m^2
(c) $1{,}84 \times 10^6$ V/m
(d) $1{,}63 \times 10^{-5}$ C/m^2

24.5 (a) 120 μC (b) $C = \epsilon_0 A/d$ (c) 480 μC

24.7 2,8 mm

24.9 (a) $4{,}35 \times 10^{-12}$ F (b) 2,3 V

24.11 (a) $6{,}56 \times 10^{-11}$ F/m (b) $6{,}43 \times 10^{-11}$ C

24.13 (a) $1{,}5 \times 10^{-11}$ F (b) 3,08 cm
(c) $3{,}13 \times 10^4$ N/C

24.15 (a) $C_{eq} = 2{,}4$ μF; $Q_{total} = 6{,}72 \times 10^{-5}$ C; $Q_{12} = 2{,}24 \times 10^{-5}$ C; $Q_3 = 4{,}48 \times 10^{-5}$ C; $Q_1 = Q_2 = Q_{12} = 2{,}24 \times 10^{-5}$ C

24.17 (a) $Q_1 = 1{,}56 \times 10^{-5}$ C; $Q_1 = 2{,}6 \times 10^{-4}$ C
(b) 52,0 V

24.19 $V_2 = 50$ V; $V_3 = 70$ V

24.21 $C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A}{d_1 + d_2}$

24.23 57 μF

24.25 0,0283 J/m^3

24.27 19,6 J

24.29 (a) $Q^2x/2\epsilon_0 A$ (b) $(Q^2/2\epsilon_0 A)dx$
(c) $Q^2/2\epsilon_0 A$

24.31 Resolva de modo análogo ao Problema 24.29.

24.33 (a) 24,2 μC (b) $V = 220$ V: $Q_{35} = 7{,}7$ μC, $Q_{75} = 16{,}5$ μC (c) 2,66 mJ
(d) 35 nF: 0,85 mJ; 75 nF: 1,81 mJ
(e) 220 V para cada capacitor

24.35 (a) 1,6 nC (b) 8,0

24.37 (a) $U_{paralelo} = 4U_{série}$ (b) $Q_{paralelo} = 2Q_{série}$
(c) $E_{paralelo} = 2E_{série}$

24.39 (a) $6{,}2 \times 10^{-7}$ C/m^2 (b) 1,28

24.41 0,0135 m^2

24.43 (a) $2{,}3 \times 10^{-11}$ C^2/N · m^2 (b) 40 kV
(c) $\sigma = 4{,}6 \times 10^{-4}$ C/m^2, $\sigma_i = 2{,}8 \times 10^{-4}$ C/m^2

24.45 (a) 10,1 V (b) 2,25

24.47 (a) 3,6 mJ; 13,5 mJ
(b) Aumentou em 9,9 mJ

24.49 (a) $Q/k\epsilon_0 A$ (b) $Qd/k\epsilon_0 A$ (c) $k\epsilon_0 A/d$

24.51 (a) $2{,}4 \times 10^{-11}$ F (b) $2{,}9 \times 10^{-10}$ C
(c) $1{,}3 \times 10^3$ (d) $1{,}7 \times 10^{-9}$ J

24.53 (a) 421 J (b) $5{,}39 \times 10^{-9}$ F

24.55 para $d << r_a$: $C \approx \frac{\epsilon_0 A}{d}$

24.57 (a) $U_{total} = 158$ μJ (b) $U_{4,5} = 72{,}1$ μJ

24.59 (a) 2,5 μF (b) $Q_1 = 5{,}5 \times 10^{-4}$ C, $V_1 = 66$ V; $Q_2 = 3{,}7 \times 10^{-4}$ C, $V_2 = 88$ V; $Q_3 = 1{,}8 \times 10^{-4}$ C, $V_3 = 44$ V; $Q_4 = 1{,}8 \times 10^{-4}$ C, $V_4 = 44$ V; $Q_5 = 5{,}5 \times 10^{-4}$ C, $V_5 = 66$ V

24.61 (a) 76 μC (b) $1{,}4 \times 10^{-3}$ J
(c) 11 V (d) $1{,}2 \times 10^{-3}$ J

24.63 (a) 2,3 μF (b) $C_1 = 9{,}7 \times 10^{-4}$ C; $C_2 = 6{,}4 \times 10^{-4}$ C (c) 47 V

24.65 (a) 3,91 (b) 22,8 V

24.67 (c) 710 μF

24.69 (a) $6{,}5 \times 10^{-2}$ F
(b) $Q = 2{,}3 \times 10^4$ C (c) $4{,}0 \times 10^9$ J

24.71 $C_{eq} = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}\right)$

24.73 (b) 14 μF (c) 72,0 μF: 505 μC, 7,02 V; 28,0 μF: 259 μC, 9,24 V; 18,0 μF: 229 μC, 12,7 V; 27,0 μF: 276 μC, 10,2 V; 6,0 μF: 14,9 μC, 2,49 V

24.75 (a) $(\epsilon_0 LD)[L + (K - 1)x]$

24.77 (b) $2{,}38 \times 10^{-9}$ F

Capítulo 25

25.1 $3{,}89 \times 10^4$ C

25.3 (a) $3{,}13 \times 10^{19}$
(b) $J = 1{,}51 \times 10^6$ A/m^2
(c) $v_d = 1{,}11 \times 10^{-4}$ m/s
(d) J diminuiria; v_d diminuiria

25.5 (a) 110 min (b) 442 min (c) $v_d \propto 1/d$

25.7 (a) 329 C (b) 41,1 A (c) 1333 min

25.9 $5{,}86 \times 10^{28}$ e^-/m^3

25.11 (a) 1,216 Ω · m @ 20 °C

25.13 (a) Tungstênio $E = 5{,}16 \times 10^{-3}$ V/m
(b) Alumínio $E = 2{,}7 \times 10^{-3}$ V/m

25.15 (a) $E_{máx} = 1{,}21$ V/m
(b) $R = 1{,}45 \times 10^{-2}$ Ω
(c) $V_{máx} = 1{,}82 \times 10^{-1}$ V = 0,182 V

25.17 0,125 Ω

25.19 15 g

25.21 $1{,}53 \times 10^{-8}$ Ω

25.23 (a) $1{,}53 \times 10^{-8}$ Ω (b) $R = 2{,}4$ Ω

25.25 (a) 11,1 A (b) 3,13 V (c) 0,28 Ω

25.27 (a) 99,54 Ω (b) 0,0158 Ω

25.29 (a) $4{,}67 \times 10^{-8}$ Ω (b) $6{,}74 \times 10^{-4}$ Ω

25.31 (a) 0,219 Ω
(b) $P = 3422$ J/s, $E = 1{,}23 \times 10^7$ J

25.33 (a) $\mathcal{E} = 9{,}0$ V (b) $r = 4{,}5$ Ω

25.35 (a) $I = 0$ (b) $\mathcal{E} = 5{,}0$ V (c) 5,0 V

25.37 (a) $\mathcal{E} = 3{,}08$ V (b) $r = 0{,}067$ Ω (c) 1,8 Ω

25.39 (a) 1,41 A (b) –13,7 V (c) –1,0 V

25.41 (b) Sim; linear

25.43 (a) 144 Ω (b) $2{,}4 \times 10^2$ Ω
(c) lâmpada de 100 W, $I = 0{,}833$ A
(d) lâmpada de 120 W, $I = 0{,}5$ A

25.45 (a) 29,8 W (b) 0,248 A

25.47 (a) $P = JE$ (b) $p = J^2\rho$ (c) $p = E^2/\rho$

25.49 $2{,}59 \times 10^6$ J (b) 0,062 L (c) 1,6 h

25.51 12,3%

25.53 (a) 24 W (b) 4,0 W (c) 20 W

25.55 (a) 26,7 Ω (b) 4,5 A (c) 454 W

25.57 (a) $3{,}65 \times 10^{-8}$ Ω · m (b) 172 A
(c) $2{,}58 \times 10^{-3}$ m/s

25.59 0,06 Ω

25.61 (a) 2,5 mA (b) $2{,}14 \times 10^{-5}$ V/m
(c) $8{,}55 \times 10^{-5}$ V/m (d) $1{,}8 \times 10^{-4}$ V

25.63 (a) $R = \frac{\rho h}{\pi r_1 r_2}$ (b) $R = \frac{\rho L}{A}$

25.65 $I = \frac{Q}{\kappa\epsilon_0\rho}$

25.67 (a) 0,057 Ω (b) $3{,}34 \times 10^{-8}$ Ω · m
(c) 0,86 mm (d) $2{,}4 \times 10^{-3}$ Ω
(e) $1{,}1 \times 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$

25.69 (a) 0,2 Ω (b) 8,7 V

25.71 (a) 1000 Ω (b) 100 V (c) 10 W

25.73 1,42 A

25.75 (a) $I_A\left(1 + \frac{R_A}{r + R}\right)$ (b) 0,0425 Ω

25.77 (b) calibre 8 (c) 106 W (d) 66 W, 175 kWh, $19,25

25.79 (a) 0,4 A (b) 1,6 W (c) 4,8 W
(d) 3,2 W

25.81 (a) $\frac{a}{E}$ (b) $2{,}59 \times 10^6$ J
(c) $4{,}32 \times 10^5$ J (d) 0,96 Ω
(e) $1{,}73 \times 10^6$ J

25.83 (a) $I = \frac{v_0 A}{\rho_0 L(1 - e^{-1})}$
(b) $E(x) = \frac{v_0 e^{-x/L}}{L(1 - e^{-1})}$
(c) $V(x) = V_0\frac{(e^{-x/L} - e^{-1})}{(1 - e^{-1})}$

Capítulo 26

26.1 $\frac{3R}{4}$

26.3 (a) $R_q < R_1$ (b) $R_{eq} < R_1$

26.5 (a) $I = 3{,}5$ A (b) $I = 4{,}5$ A
(c) $I = 3{,}15$ A (d) $I = 3{,}25$ A

26.7 0,769 A

26.9 (a) 8,8 Ω (b) 3,18 A (c) 3,18 A
(d) $V_{2,4} = 7{,}64$ V; $V_{1,6} = 5{,}09$ V; $V_{4,8} = 15{,}3$ V

26.11 $R_{eq} = 5{,}0$ Ω; $I_{total} = 12{,}0$ A; $I_{12} = 3{,}0$ A; $I_4 = 9{,}0$ A; $I_3 = 8{,}0$ A; $I_6 = 4{,}0$ A

26.13 (a) $I_1 = 1{,}5$ A, $I_2 = I_3 = I_4 = 0{,}5$ A
(b) $P_1 = 10{,}1$ W, $P_2 = P_3 = P_4 = 1{,}12$ W
(c) $I_1 = 1{,}33$ A, $I_2 = I_3 = 0{,}667$ A
(d) $P_1 = 8{,}0$ W, $P_2 = P_3 = 2{,}0$ W
(e) $R_2 + R_3$ brilha mais; R_1 brilha menos

26.15 (a) 18,0 V; 3,0 A

26.17 (a) 0,1 A para cada
(b) 400 Ω lâmpada de: 4,0 W; 800 Ω lâmpada de: 8,0 W
c) 400 Ω lâmpada de: 0,3 A; 800 Ω lâmpada de: 0,15 A
(d) 400 Ω lâmpada de: 36,0 W; 800 Ω lâmpada de: 18,0 W; total: 54,0 W
(e) em série a 800 Ω lâmpada brilha mais; em paralelo, 400 Ω lâmpada brilha mais e o total de luz gerada é maior

26.19 1010 s

26.21 (a) 2,0 A (b) 5,0 Ω (c) 42,0 V
(d) 3,5 A

26.23 (a) 8,0 A (b) $\mathcal{E}_1 = 36{,}0$ V, $\mathcal{E}_2 = 54{,}0$ V (c) 9,0 Ω
26.25 (a) 1,6 A, 1,4 *A*, 0,2 *A* (b) 10,4 V
26.27 (a) $\mathcal{E} = 36{,}4$ V (b) 0,5 A
26.29 (a) –2,14 V, *a* está em um potencial mais elevado (b) $I_{100} = 0{,}25$ A; $I_{75} = 0{,}2$ A; $I_A = 0{,}5$ A de cima para baixo; V = 0
26.31 (a) 0,641 Ω (b) 975 Ω
26.33 (a) 17,8 V (b) 22,7 V (c) 27,5%
26.35 (c) 3,34 V
26.37 (a) 543 Ω (b) 1,88 mA (c) 203 Ω
26.39 (a) $C = 8{,}49 \times 10^{-7}$ F (b) $\tau = 2{,}89$ s
26.41 (a) $t = 4{,}21 \times 10^{-3}$ s (b) $I = 0{,}125$ A
26.43 190 μC
26.45 $I = 13{,}6$ A.
26.47 (a) 0,938 A (b) 0,606 A
26.49 (a) $1{,}33 \times 10^{-4}$ C (b) $v_R = 9{,}12$ V, $v_C = 8{,}88$ V (c) $v_R = v_C = 8{,}88$ V (d) $6{,}75 \times 10^{-5}$ C
26.51 900 W
26.53 (a) 6,0 A, 720 W (b) 3,5 A, 420 W
26.55 (a) 13,6 μΩ = $1{,}36 \times 10^{-5}$ Ω (b) $2{,}14 \times 10^{-8}$ Ω
26.57 (a) 9,9 W (b) 16,3 W, brilho aumenta
26.59 (a) 18,7 Ω (b) 7,5 Ω
26.61 $I_1 = 0{,}848$ A, $I_2 = 2{,}14$ A, $I_3 = 0{,}171$ A
26.63 resistor de 2,0 Ω: 5,21 A; resistor de 4 Ω: 1,11 A; resistor de 5 Ω: 6,32 A
26.65 (a) 0,222 V (b) 0,464 A
26.67 12,7 V
26.69 (a) 186 V, terminal superior +
(b) 3,0 A do terminal – para o terminal +
(c) 20,0 Ω
26.71 (a) $P_1 + P_2$ (b) $\dfrac{P_1 P_2}{(P_1 + P_2)}$
26.73 (a) –12,0 V (b) 1,71 V (c) 4,2 V
26.75 $R_3 = 10{,}8$ Ω, $R_2 = 1{,}08$ Ω, $R_1 = 0{,}12$ Ω
26.77 (a) 114,4 V (b) 263 V (c) 266 V
26.79 (b) 1897 Ω
26.81 (a) 224 Ω resistor de: 24,8 V; 589 Ω: 65,2 V
(b) 3,87 kΩ (c) 62,6 V (d) Não

Capítulo 27

27.1 (a) $(-6{,}68 \times 10^{-4}\ \text{N})\hat{k}$
(b) $(+6{,}68 \times 10^{-4}\ \text{N})\hat{i} + (7{,}27 \times 10^{-4}\ \text{N})\hat{j}$
27.3 (a) Positivo (b) $5{,}05 \times 10^{-2}$ N
27.5 $9{,}47 \times 10^{6}$ m/s
27.7 (a) $\vec{B}_x = -0{,}175$ T, $\vec{B}_z = -0{,}256$ T
(b) Sim, $\vec{B}_y$ (d) Zero, 90°
27.9 (a) $\vec{B} = 1{,}46$ T a 40,0° do eixo +*x* para o eixo *z* no plano *xz* (b) $\vec{F} = 7{,}48 \times 10^{-16}$ N a 50° do eixo +*x* para o eixo +*z*
27.11 (a) $3{,}05 \times 10^{-3}$ Wb (b) $1{,}83 \times 10^{-3}$ Wb (c) 0
27.13 $-7{,}79 \times 10^{-4}$ Wb
27.15 (a) $1{,}6 \times 10^{-4}$ T para dentro da página
(b) $1{,}11 \times 10^{-7}$ s
27.17 $7{,}93 \times 10^{-10}$ N, sul
27.19 (a) $1{,}2 \times 10^{7}$ m/s (b) 0,1 T
27.21 (a) $8{,}35 \times 10^{5}$ m/s (b) $2{,}62 \times 10^{-8}$ s (c) 7,26 kV
27.23 (a) 107 T (b) Não
27.25 (a) $8{,}38 \times 10^{-4}$ T
27.27 (a) Não (b) 1,40 cm
27.29 $B = 4{,}45 \times 10^{-2}$ T
27.31 $1{,}29 \times 10^{-25}$ kg, 78
27.33 (a) $1{,}34 \times 10^{4}$ A (b) horizontal
27.35 $F = 0{,}724$ N a 63,4° abaixo do eixo +*x*
27.37 9,7 A
27.39 (a) 817 V (b) 113 m/s²
27.41 (a) $-(ILB)\hat{j}$ (b) Sim
27.43 (a) $1{,}5 \times 10^{-16}$ s (b)1,1 mA
(c) $9{,}3 \times 10^{-24}$ A · m²
27.45 (a) Gira em torno do eixo A_z
(b) $\alpha = 294$ rad/s²
27.47 – 2,42 J
27.49 (a) 1,13 A (b) 3,69 A (c) 98,2 V
(d) 362 W
27.51 (a) 4,7 mm/s
(b) $4{,}5 \times 10^{-3}$ V/m no sentido +*z*
(c) 53 μV
27.53 (a) F_2/qv_1 no sentido –*y* (b) $F_2/\sqrt{2}$
27.55 $\vec{B} = 3{,}68$ T a um ângulo reto em relação a v_i
27.57 (a) $8{,}9 \times 10^{-17}$ J = $5{,}5 \times 10^{5}$ eV
(b) $7{,}7 \times 10^{-8}$ s (c) 1,2 T
(d) Igual ao item (a)
27.59 4,46 A
27.61 (a) $-1{,}98 \times 10^{-6}$ C
(b) $(9{,}69 \times 10^{14}\ \text{m/s})(4\hat{i} + 3\hat{j})$
(c) $R = 5{,}69$ cm (d) $1{,}47 \times 10^{7}$ Hz
(e) (*R*, 0, 1,72 m)
27.63 9 τ
27.65 1,6 mm
27.67 (*Mg* tg θ/LB), da direita para a esquerda
27.71 (a) $8{,}46 \times 10^{-3}$ T (b) 0,271 m
(c) $2{,}14 \times 10^{-2}$ m
27.73 1,8 N para a esquerda
27.75 0,0242 T no sentido +*y*
27.77 (a) 0,0442 N · m no sentido horário
(b) Estendida (c) $7{,}98 \times 10^{-3}$ J
27.79 0,444 N no sentido –*y*
27.81 (b) lado (0, 0) a (0, L): $(B_0IL/2)\hat{i}$;
lado (0, L) a (L, L): $(-B_0IL)\hat{j}$;
lado (L, L) a (L, 0): $(-B_0IL/2)\hat{i}$;
lado (L, 0) a (0, 0): 0 (c) $(-B_0IL)\hat{j}$
27.83 2,52 m/s (b) 7,6 A (c) 0,197 Ω
27.85 (a) $\vec{\mu} = -IA\hat{k}$ (b) $B_x = 3D/IA$, $B_y = 4D/IA$, $B_z = -12D/IA$
27.87 $-\beta r/2$
27.89 (a) 5,14 m (b) $1{,}72 \times 10^{-6}$ s
(c) 6,09 mm (d) 3,04 cm

Capítulo 28

28.1 (a) $(-1{,}92 \times 10^{-5}\ \text{T})\hat{k}$ (b) 0
28.3 (a) $\vec{B} = 6{,}0 \times 10^{-10}$ T para fora do papel
(b) $\vec{B} = 1{,}2 \times 10^{-9}$ T para fora do papel
(c) 0
28.5 (a) 0
(b) $(-1{,}31 \times 10^{-6}\ \text{T})\hat{k}$ para fora do papel
(c) $(-4{,}62 \times 10^{-7}\ \text{T})\hat{k}$
(d) $(1{,}31 \times 10^{-6}\ \text{T})\hat{j}$
28.7 (a) De atração (b) $1{,}0 \times 10^{-6}$
28.9 (a) $4{,}0 \times 10^{-7}$ T para fora do papel
(b) $1{,}52 \times 10^{-8}$ T para fora do papel (c) 0
28.11 (a) $(5{,}0 \times 10^{-11}\ \text{T})\hat{j}$
(b) $(-5{,}0 \times 10^{-11}\ \text{T})\hat{i}$
(c) $(-1{,}77 \times 10^{-11}\ \text{T})\hat{k}$ (d) 0
28.13 $1{,}76 \times 10^{-5}$ T para dentro do papel
28.15 (a) $8{,}0 \times 10^{-4}$ T
(b) $4{,}0 \times 10^{-5}$ T, 20 vezes maior
28.17 (a) 10,0 A (b) Acima do fio
(c) Diretamente a leste do fio
28.19 (a) $(-1{,}0 \times 10^{-7}\ \text{T})\hat{i}$
(b) $(2{,}19 \times 10^{-6}\ \text{T})$, $\theta = 46{,}8°$ de *x* para *z*
(c) $(7{,}9 \times 10^{-6}\ \text{T})\hat{i}$
28.21 (a) 0 (b) $6{,}67 \times 10^{-6}$ T
(c) $7{,}53 \times 10^{-6}$ T para a esquerda
28.23 (a) 0 (b) 0 (c) $4{,}0 \times 10^{-4}$ T para a esquerda
28.25 (a) $6{,}0 \times 10^{-6}$ N de repulsão
(b) $2{,}4 \times 10^{-5}$ N
28.27 $4{,}6 \times 10^{-5}$ N/m de repulsão, porém desprezível
28.29 $\mu_0 I^2/2\pi\lambda g$
28.31 $m_0|I_1 - I_2|/4R,0$
28.33 (a) $9{,}42 \times 10^{-3}$ T (b) $1{,}34 \times 10^{-4}$ T
28.35 (a) 305 A (b) $-3{,}83 \times 10^{-4}$ T · m
28.37 (a) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
28.39 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$; $r = R/2$; $r = 2R$
28.41 (a) 1790 voltas/m (b) 63,0 m
28.43 (a) $3{,}72 \times 10^{6}$ A (b) $2{,}49 \times 10^{5}$ A
(c) 237 A
28.45 $1{,}11 \times 10^{-3}$ T
28.47 (a) 0,0725 A (b) 0,0195 A
28.49 (a) (i) $1{,}1 \times 10^{-3}$ T (ii) $4{,}7 \times 10^{-6}$ A/m (iii) 5,9 T
28.51 (a) $1{,}0 \times 10^{-6}$ T para dentro do papel
(b) $(7{,}49 \times 10^{-8}\ \text{N})\hat{j}$
28.53 (a) $1{,}1 \times 10^{13}$ m/s² afastando-se do fio
(b) 62,5 N/C afastando-se do fio
(c) $mg \approx 10^{-29}$ N desprezível
28.55 $5{,}75 \times 10^{-6}$ T; $2{,}21 \times 10^{-21}$ N perpendicular à linha *ab* e à velocidade
28.57 (a) ± 607 m/s (b) $9{,}2 \times 10^{-6}$ T
28.59 (a) 2,0 A para fora do papel
(b) $2{,}13 \times 10^{-6}$ T para a direita
(c) $2{,}06 \times 10^{-6}$ T
28.61 (a) $1{,}11 \times 10^{-5}$ N/m
(b) para fora do papel: $1{,}11 \times 10^{-5}$ N/m de baixo para cima
28.63 23,2 A
28.65 (a) $\mu_0\pi NN'II'a^2a'^2$ (sen θ)/$2x^3$
(b) $-\mu_0\pi NN'II'a^2a'^2$ (cos θ)/$2x^3$
28.67 (a) $(\mu_0 NIa^2/2)[((x + a/2)^2 + a^2)^{-3/2} + ((x - a/2)^2 + a^2)^{-3/2}]$ (c) $(\mu_0 NI/a)(4/5)^{3/2}$
(d) 0,0202 T (e) 0, 0
28.69 $\mu_0 I/8R$ para fora do papel
28.71 (a) $3I/2\pi R^3$ (b) (i) $\mu_0 Ir^2/2\pi R^3$; (ii) $\mu_0 I/2\pi r$
28.73 Zero
28.75 16*a*/3
28.77 (b) $\mu_0 I_0/2\pi r$ (c) $(I_0 r^2/a^2)(2 - r^2/a^2)$
(d) $(\mu_0 I_0 r/2\pi a^2)(2 - r^2/a^2)$
28.79 $\mu_0 I$
28.81 (a) $\mu_0 nI/2$ no sentido +*x*
(b) $\mu_0 nI/2$ no sentido –*x*
28.83 $7{,}73 \times 10^{-23}$ J/T = 0,0833 μ_B
28.85 (c) 6,15 mm
28.87 $\mu_0 Qn/a$

Capítulo 29

29.1 (a) 4,5 Wb (b) 20,3 V
29.3 (a) $Q = NBA/R$ (b) Não
29.5 (a) +34 V (b) Sentido anti-horário
29.7 (a) $I = i{:}B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ para dentro da página
(b) $d\Phi_B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} L\, dr$
(c) $\Phi_B = \dfrac{\mu_0 iL}{2\pi} \ln(b/a)$
(d) $\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 L}{2\pi} \ln(b/a)\, \dfrac{di}{dt}$
29.9 (a) 5,44 mV (b) Sentido horário
29.11 (a) $\mathcal{E} = +Abv$ (b) Sentido horário
(c) $\mathcal{E} = -Abv$ (d) Sentido anti-horário
29.13 10,4 rad/s
29.15 (a) Sentido anti-horário (b) Sentido horário
(c) $I = 0$
29.17 (a) De *a* para *b* (b) De *b* para *a*
(c) De *b* para *a*
29.19 (a) Sentido horário (b) 0
(c) Sentido anti-horário
29.21 (a) $V_{ab} = 0{,}675$ V (b) De *b* para um potencial mais elevado que *a*
(c) $E = 2{,}25$ V/m de *b* para *a*
(d) *b* possui excesso de carga positiva
(e) (i) 0; (ii) 0
29.23 46,2 m/s; não
29.25 (a) 3,0 V (b) Sentido horário
(c) 0,8 N para a direita
(d) 6,0 W = $P_{mec} = P_{elé}$
29.27 (a) 4,23 V (b) 4,23 V (c) 0
(d) Para largura $w \ll L$, não importa.
$\mathcal{E} = 4{,}23$ V contanto que o eixo longitudinal da barra esteja no plano *xy*
29.29 (a) $\pi r_1^2 \dfrac{dB}{dt}$ (b) $\dfrac{r_1}{2}\dfrac{dB}{dt}$ (c) $\dfrac{R^2}{2r_2}\dfrac{dB}{dt}$ (e) $\dfrac{\pi R^2}{4}\dfrac{dB}{dt}$
(f) $\pi R^2 \dfrac{dB}{dt}$ (g) $\pi R^2 \dfrac{dB}{dt}$

29.31 9,21 A/s
29.33 $9,5 \times 10^{-4}$ V
29.35 $K = 2,34$
29.37 (a) $5,99 \times 10^{-10}$ C (b) $6,0 \times 10^{-3}$ A (c) $6,0 \times 10^{-3}$ A
29.39 (a) 0,15 V/m (b) 38 V/m · s (c) $3,4 \times 10^{-10}$ A/m^2 (d) $B_D = 2,38 \times 10^{-21}$ T, desprezível; $B_C = 5,33 \times 10^{-5}$ T
29.41 Para qualquer trajetória supercondutora contínua, $R_{total} = 0$
29.43 (a) $-(4,38 \times 10^4$ A/m)$\hat{i}$ (b) (15,0 T)$\hat{i}$
29.45 (a) 3,7 A (b) 54 μA (c) Sentido anti-horário
29.47 (a) $\dfrac{\mu_0 i \pi a}{2C}$ (c) $i = i_0 \exp(-2Rt/\mu_0 \pi a)$ (d) 45 μs
29.49 (a) $\mu_0 Iabv/2\pi r(a + r)$ (b) Sentido horário
29.51 191 rpm
29.53 (a) 0,126 V (b) De a para b
29.55 (b) FR/B^2L^2
29.57 1,2 V
29.59 $\dfrac{\mu_0 IW}{4\pi}$
29.61 (a) $(\mu_0 IV/2\pi)\ln((L + d)/d)$ (b) a (c) 0
29.63 (a) 0,165 V (b) 0,165 V (c) 0; 0,0142 V
29.65 (a) B^2a^2V/R
29.67 (a) $(qr/2)\dfrac{dB}{dt}$ para a esquerda
(b) $(qr/2)\dfrac{dB}{dt}$ de baixo para cima (c) 0
29.73 (a) $1,96 \times 10^{-4}$ A/m^2
(b) $3,0 \times 10^{-9}$ A/m^2
(c) $7,82 \times 10^6$ Hz
29.75 (b) $\dfrac{a}{2}\dfrac{dB}{dt}$ (c) $7,37 \times 10^{-4}$ A
(d) $1,75 \times 10^{-4}$ V
29.77 (a) De a para b (b) $v_t = \dfrac{Rmg \operatorname{tg}\theta}{L^2B^2\cos\theta}$
(c) $\dfrac{mg \operatorname{tg}\theta}{LB}$ (d) $\dfrac{Rm^2g^2(\operatorname{tg}\theta)^2}{L^2B^2}$
(e) igual ao item (d)

Capítulo 30

30.1 (a) 0,27 V, sim (b) 0,27 V
30.5 (a) 1,96 H (b) $7,12 \times 10^{-3}$ Wb
30.7 (a) 0,25 H (b) $4,5 \times 10^{-4}$ Wb
30.9 (a) 4,68 mV (b) a
30.11 $\dfrac{\mu_0 N^2 A}{l}$
30.13 2850
30.15 (a) $1,61 \times 10^{-1}$ T (b) $1,03 \times 10^4$ J/m^3 (c) 0,129 J (d) $4,03 \times 10^{-5}$ H
30.19 (a) 2,4 A/s (b) 0,8 A/s (c) 0,413 A (d) 0,75 A
30.21 (a) 17,3 μs (b) 30,7 μs
30.25 (a) 0,25 A (b) 0,137 A (c) 32,9 V, c (d) $4,62 \times 10^{-4}$ s
30.27 (a) $(4,5 \text{ W})[1 - \exp(-(3,2 \text{ s}^{-1})t)]$
(b) $(4,5 \text{ W})[1 - \exp(-(3,2 \text{ s}^{-1})t)]^2$
(c) $(4,5 \text{ W})[\exp(-(3,2 \text{ s}^{-1})t) - \exp(-(6,4 \text{ s}^{-1})t)]$
30.29 (a) 25,0 mH (b) $9,0 \times 10^{-8}$ C (c) $5,4 \times 10^{-7}$ J (d) 6,57 mA
30.31 (a) 105 rad/s, 59,6 ms (b) $7,2 \times 10^{-4}$ C (c) $4,32 \times 10^{-3}$ J (d) $-543\ \mu C$ (e) −49,9 mA (f) $2,45 \times 10^{-3}$ J, capacitor; $1,87 \times 10^{-3}$ J, indutor
30.33 (a) $f = 2,13 \times 10^3$ Hz (b) $V_E = 0,225$ J (c) $V_B = 0,223$ J
30.35 $U_C = (Q^2/2C)\cos^2(\omega t + \phi)$; $U_L = (Q^2/2C)\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$
30.37 $\sqrt{LC} = \sqrt{(\text{V} \cdot \text{s/A})(\text{A} \cdot \text{s/V})} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$
30.41 (a) 298 rad/s (b) 83,8 Ω
30.43 (a) $m = 4,8 \times 10^{-6}$ H (b) $\mathcal{E} = \pm 1,8 \times 10^{-4}$ V
30.49 (a) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ (b) $\left(\dfrac{\mu_0 i^2 l}{4\pi r}\right)dr$ (c) $\left(\dfrac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\right)\ln(b/a)$
30.51 (a) $L = 8,89$ H (b) $l = 56,3$ m; não
30.53 (a) 0,281 J (b) 0,517 J (c) 0,236 J
30.57 222 μF; 9,31 μH
30.59 2×10^4 m/s
30.61 (a) Solenóide (c) 50 V (d) 3,5 A (e) 4,3 Ω; 43 mH
30.63 (a) $V_1 = 40,0$ V; $A_1 = A_4 = 0,8$ A, todas as demais são iguais a zero (b) $V_1 = 24,0$ V, $V_2 = 0$, $V_3 = V_4 = V_5 = 16,0$ V; $A_1 = 0,48$ A, $A_2 = 0,16$ A, $A_3 = 0,32$ A, $A_4 = 0$ (c) 192 μC
30.65 (a) $A_1 = A_4 = 0,45$ A, $A_2 = A_3 = 0$ (b) $A_1 = 0,58$ A, $A_2 = 0,32$ A, $A_3 = 0,16$ A, $A_4 = 0,11$ A
30.67 (a) 60,0 V (b) a (c) 60,0 V (d) c (e) −96,0 V (f) b (g) −156 V (h) d
30.69 (a) $i_0 = 0$, $V_{ac} = 0$, $V_{cb} = 36,0$ V (b) $i_0 = 0,18$ A, $V_{ac} = 9,0$ V, $V_{cb} = 27,0$ V (c) $i_0 = (0,18 \text{ A})[1 - \exp(-(50,0 \text{ s}^{-1})t)]$, $V_{ac} = (9,0 \text{ V})[1 - \exp(-(50,0 \text{ s}^{-1})t)]$, $V_{cb} = 27,0 \text{ V} + (9,0 \text{ V})\exp(-(50,0 \text{ s}^{-1})t)$
30.71 (a) 0; 20 V (b) 0,267 A; 0 (c) 0,147 A; 9,0 V
30.75 (a) $i_1 = \mathcal{E}/R_1$, $i_2 = (\mathcal{E}/R_2)[1 - \exp(-R_2t/L)]$ (b) $i_1 = \mathcal{E}/R_1$, $i_2 = \mathcal{E}/R_2$ (c) $i = (\mathcal{E}/R_2)\exp(-(R_1 + R_2)t/L)$
30.77 (a) $d = [(L - L_0)/(L_F - L_0)]D$ (b) 0,63024 H, 0,63048 H, 0,63072 H, 0,63096 H (c) 0,63 H, 0,62999 H, 0,62999 H, 0,62998 H
30.79 $i_1 = (\mathcal{E}/R_1)[1 - \exp(R_1t/L)]$, $i_2 = (\mathcal{E}/R_2)\exp(-t/R_2C)$, $q_2 = C\mathcal{E}[1 - \exp(-t/R_2C)]$ (b) 0, 9,6 mA (c) 1,9 A, 0 (d) 1,6 ms (e) 9,4 mA (f) 0,22 s

Capítulo 31

31.1 (a) $I_{qm} = 0,34$ A (b) $I = 0,48$ A (c) 0 (d) $(i^2)_{méd} = 0,12$ A^2
31.3 (a) 31,8 V (b) 0
31.5 (a) 0,0132 A (b) 0,132 A (c) 1,32 A
31.9 (a) 1,51 kΩ (b) 0,239 H (c) 497 Ω (d) 16,6 μF
31.11 13,3 μF
31.13 (a) $i = (0,0253 \text{ A})\cos[(720 \text{ rad/s})t]$ (b) 180 Ω (c) $v_L = (-4,56 \text{ V})\operatorname{sen}[(720 \text{ rad/s})t]$
31.15 (b) $v = 20,5$ V, $v_r = 7,6$ V, $v_L = 12,9$ V (c) $v = -15,2$ V, $v_R = -22,5$ V, $v_L = 7,3$ V
31.17 (a) 696 Ω (b) 0,0431 A (c) $v_R = 8,62$ V, $v_c = 28,7$ V (d) −73,3°
31.19 (a) 601 Ω (b) 49,9 mA (c) −70,6° atrasada (d) $v_R = 9,98$ V, $v_L = 4,99$ V, $v_c = 33,3$ V
31.21 (a) 113 Hz; 15 mA (b) 7,61 mA atrasada
31.23 50,0 V
31.25 (a) $P_{máx} = 40,0$ W (b) $I_{qm} = 0,167$ A (c) $R = 7,20 \times 10^2$ Ω
31.29 (a) +45,8°, 0,697 (b) 344 Ω (c) 155 V (d) 48,6 W (e) 48,6 W (f) 0 (g) 0
31.31 (a) 150 V (b) 150 V, 1290 V, 1290 V (c) 37,5 W
31.33 (a) 1,0 (b) 75,0 W (c) 75,0 W
31.35 (a) $Z = 115\ \Omega$ (b) $Z = 146\ \Omega$ (c) $Z = 146\ \Omega$
31.37 (a) 10 (b) 2,4 A (c) 28,8 A (d) 500 Ω
31.39 (a) $N_2 = \frac{1}{2}N_1$ (b) 13 A (c) 9,0 Ω
31.41 0,124 H
31.43 (a) $t_1 = \pi/2\omega$, $t_2 = 3\pi/2\omega$ (b) $2I/\omega$ (c) $I_{rm} = 2I/\omega$
31.45 (a) Indutor (b) 0,133 H
31.47 (a) $I = 1,15$ A, $V_L = 31,6$ V, $V_R = 57,5$ V, $V_C = 14,7$ V (b) $I = 0,860$ A, $V_L = 47,3$ V, $V_R = 43,0$ V, $V_C = 5,47$ V
31.49 $\sqrt{(R^2 + \omega^2L^2)/[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]}$
31.53 (b) $V_B = LV^2/4[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]$, $V_E = V^2/4\omega C[R^2 + \omega L - 1/\omega C)^2]$
(d) $\omega = 0$; $U_B = 0$; $U_E = CV^2/4$; $\omega \to \infty$; ambos U_B e $U_E \to 0$; $U_B = U_E$ em $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
31.57 (a) $I_R = V/R$, $I_L = V/\omega L$, $I_C = \omega CV$ (c) $\omega = 0$: $I_L \to \infty$, $I_C \to 0$; $\omega \to \infty$: $I_L = 0$, $I_C \to \infty$ (d) 159 Hz (e) 0,5 A (f) $I_R = 0,50$ A, $I_L = I_C = 0,05$ A
31.59 (a) 102 Ω (b) 0,882 A (c) 270 V
31.61 (a) 0,75 A (b) 160 Ω (c) 619 Ω, 341 Ω (d) 341 Ω
31.63 $i_{méd} = 0$, $i_{am} = I_0/\sqrt{3}$
31.65 (a) ω_0 diminui de $\frac{1}{2}$ (b) X_C dobra (c) X_C diminui de $\frac{1}{2}$ (d) Não
31.67 (a) L e C (b) fator de $\frac{1}{2}$
31.69 (a) $V/\sqrt{R^2 + 9L/4C}$
(b) $[2V/\sqrt{R^2 + 9L/4C}]\sqrt{L/C}$
(c) $[V/2\sqrt{R^2 + 9L/4C}]\sqrt{L/C}$
(d) $2LV^2/(R^2 + 9L/4C)$
(e) $LV^2/2(R^2 + 9L/4C)$
31.73 (a) $V_R/2$ (b) 0 (c) 0
31.75 (a) 0,4 A (b) 36,9° (c) $Z_{cpx} = (400\ \Omega) - i(300\ \Omega)$, $Z = 500\ \Omega$ (d) $I_{cpx} = (0,32 \text{ A}) - i(240 \text{ A})$

Capítulo 32

32.1 (a) 1,28 s (b) $8,15 \times 10^{15}$ km
32.3 (a) $6,0 \times 10^4$ Hz (b) $6,0 \times 10^7$ Hz (c) $6,0 \times 10^{13}$ Hz (d) $6,0 \times 10^{16}$ Hz
32.5 (a) $f = 6,94 \times 10^{14}$ Hz (b) $E_{máx} = 375$ V/m
32.7 $\vec{E}(z, t) = (1,74 \times 10^5 \text{ V/m})\hat{i} \times \cos[(1,28 \times 10^7 \text{ rad/m})z - (3,83 \times 10^{15} \text{ rad/s})t]$; $\vec{B}(z, t) = (5,8 \times 10^{-4} \text{ T})\hat{j} \times \cos[(1,28 \times 10^7 \text{ rad/m})z - (3,83 \times 10^{15} \text{ rad/s})t]$
32.9 (a) No sentido $+y$ (b) $7,11 \times 10^{-4}$ m (c) $\vec{B}(y, t) = (-1,03 \times 10^{-2} \text{ T})\hat{i} \times \operatorname{sen}[(8,84 \times 10^3 \text{ rad/m})y - (2,65 \times 10^{12} \text{ rad/s})t]$
32.11 (a) 361 m (b) 0,0174 rad/m (c) $5,22 \times 10^6$ rad/s (d) 0,0144 V/m
32.13 (a) 381 nm (b) 526 nm (c) 1,38 (d) 1,91
32.15 (a) 330 W/m^2 (b) 500 V/m; 1,7 μT
32.17 $1,33 \times 10^{-8}$ T, sentido $+y$
32.19 (a) $1,1 \times 10$ W/m^2 (b) $3,0 \times 10^{-10}$ T (c) 840 W; supondo transmissão isotrópica
32.21 $2,5 \times 10^{25}$ J
32.23 $E_{máx} = 12,0$ V/m, $B_{máx} = 4,0 \times 10^{-8}$ T
32.25 $8,5 \times 10^5$ W
32.27 (a) $8,68 \times 10^{-15}$ kg/m$^2 \cdot$ s (b) $2,6 \times 10^{-6}$ kg/m$^2 \cdot$ s^2
32.29 $S = \epsilon_0 cE^2$
32.31 (a) 7,1 mm (b) 3,55 mm (c) $1,56 \times 10^8$ m/s
32.33 (a) 4,38 mm (b) 1,38 mm (c) 4,38 mm
32.35 (a) $L = 30,5$ cm (b) $f = 2,46 \times 10^9$ Hz (c) $L = 35,5$ cm: $f = 2,11 \times 10^9$ Hz
32.39 (a) $I = 0,00602$ W/m^2 (b) 2,13 N/C, $7,10 \times 10^{-9}$ T (c) $1,2 \times 10^{-12}$ N
32.41 (a) $E_{máx} = 701$ V/m, $B_{máx} = 2,34 \times 10^{-6}$ T (b) $\mu_E = \mu_B = 1,09 \times 10^{-6}$ J/m^3 (c) $1,07 \times 10^{-11}$ J
32.43 (a) $r = R$: $I = 6,4 \times 10^7$ W/m^2, $p_{rad} = 0,21$ Pa; $r = R/2$: $I = 2,6 \times 10^8$ W/m^2, $p_{rad} = 0,85$ Pa
32.45 $7,78 \times 10^{-13}$ rad/s
32.47 (a) $I\rho/\pi a^2$ no sentido da corrente (b) Corrente fora da página: $\mu_0 I/2\pi a$, sentido horário (c) $I^2\rho/2\pi^2a^3$, radialmente para dentro (d) $I^2\rho l/\pi a^2 = I^2R$
32.49 0,0368 V
32.51 (a) 23,6 h (b) Arremessá-la
32.53 (a) $2,66 \times 10^7$ m (b) 0,0673 s (c) $6,50 \times 10^{-23}$ Pa (d) 0,19 m
32.55 (a) $4\pi R^3\rho Gm^3/3r^2$ (b) $LR^2/4r^2c$ (c) $1,9^{-7}$ m, independente de r
32.57 (b) $1,4 \times 10^{-11}$ s^{-1} (c) $2,6 \times 10^{-8}$ s^{-1}

ÍNDICE REMISSIVO

A

aceleração da gravidade, 13, 69, 235
alternadores, 288, 297
amortecimento crítico, 335
ampère, 8, 138, 142, 152, 157, 158, 206, 208, 243, 245, 250, 251, 252, 268, 269, 272, 319, 385
  definição de, 137, 252
amperímetro(s), 148, 149, 150, 155, 158, 160, 161, 162, 164, 165, 178, 179, 180, 181, 182, 190, 191, 193, 195, 196, 199, 201, 252, 343, 344, 350
  com diversas escalas, 199
  combinação de, e voltímetros, 180
  não-ideal, 165
amplitude da voltagem, 319, 348, 350, 351, 353, 354, 355, 357, 359, 360, 352, 363, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377
amplitude de corrente, 353, 360, 361, 363, 369, 372, 376, 377
anel carregado, 20, 21, 86, 87, 92, 93, 100, 102
ângulo de fase, 332, 352, 353, 354, 358, 359, 360, 362, 363, 364, 369, 370, 371, 373, 376, 377
anodo, 96, 98, 143, 217
arraste do elétron, 139, 231, 245
assíntota, 184
átomos
  definição de, 3
auto-indutância, 317, 320-324, 326, 336, 337, 338, 339, 341, 342, 346. *Veja também* indutância
axônios, 201

B

Balança, 237, 252, 298
  de torção, 7, 8, 58
Biot e Savart, lei de, 247, 248, 253, 264, 267, 268, 269, 270, 302
blindagem eletrostática, 59
bomba eletromagnética, 244

C

cabo coaxial, 66, 341
cadeia atenuadora, 201
cálculo da capacitância, 105-107
calibre do fio, 165, 166
campo(s) elétrico(s)
  como fonte geradora de um campo magnético, 297
  como grandeza vetorial, 29, 91, 206
  da Terra, 33, 61
  de um anel carregado, 20, 92
  definição de, 01
  densidade de corrente e, 158
  exposições de seres humanos a, 30
  induzidos, 284, 295-298, 305, 310
  mapas de, 24, 212
  módulo de, 14, 268
  no interior de um átomo de hidrogênio, 70
  radial, 91
  superposição dos, 17, 18, 20, 27, 29, 30, 106, 246, 247, 267, 269
  uniformes, 237, 394
campo(s) magnético(s), 199-202
  campos elétricos e, 217, 258, 301, 378, 379, 382, 384, 388, 396
  da Terra, 202, 205, 206, 210, 214, 215, 235, 237, 240, 248, 255, 267, 269, 272, 295, 306, 307, 309, 312, 313, 342, 401
  de solenóides, 262
  de um cilindro condutor longo, 259
  de um condutor retilíneo transportando uma corrente, 248-251, 272
  de um elemento de corrente, 246-248, 271
  de uma carga em movimento, 243-246, 267, 270
  de uma espira circular, 211, 227, 253-255, 273
  definição de, 204
  determinação do módulo de um, 287
  estratégias para a solução de problemas, 389
  fontes de, 224, 243-279, 301
  força entre condutores paralelos, 251-253, 273
  lei de Ampère e, 255-258
  materiais magnéticos e, 262-267, 274
  movimento em, 214
  não-uniformes, 214, 226, 227, 242, 304
  superposição dos, 246, 247, 251, 269
campos
  eletrostáticos, 190
  gravitacionais
    campo elétrico e, 13
campo
  não-eletrostáticos, 297, 305
  uniformes, 72, 214, 260, 339
  vetoriais, 14, 29, 206
canhão de elétrons, 208, 239
capacitância
  cálculo da, 105-109
  definição de, 104
  dielétricos e, 104-134
  equivalente, 109, 110, 111, 112, 117, 124, 125, 127, 128, 131, 132, 170
  unidade SI de, 105, 124
capacitor(es)
  aplicações de, 113
  armazenamento de energia em, 112-115, 128, 129
  carregando, 182, 185
  circuitos com, 114, 347
  com placas paralelas, 106, 107, 108, 109, 113, 114, 118, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 164, 300, 306
  de alarme contra roubo, 201
  definição de, 16
  descarregando, 184, 185
  efeitos indesejáveis dos, 113
  em paralelo, 109-112, 117, 124, 125, 170, 362, 365
  em série, 109-112, 124
  energia potencial de, 112
  no vácuo, 105, 107, 114, 117
  nos diagramas de circuitos, 105
  transferência de carga e de energia entre, 114
  valor de voltagem máxima dos, 120
carga
  de teste, 12, 13, 14, 15, 17, 21, 29, 41, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 83, 84, 85, 88, 92, 93, 102, 208
  elétrica, 1-39, 40, 41, 42, 46, 47, 49, 50, 53, 61, 65, 71, 86, 87, 96, 100, 102, 104, 115, 173, 206, 207, 212, 230, 243, 306, 379, 383
    conservação da, 4, 173
    estrutura da matéria e, 2-4
    lei de Gauss e, 40-41
  em movimento, 204, 220, 243, 244, 267, 270
  induzida, 6, 29, 30, 66, 117, 118, 119, 121, 123
carga(s) elétrica(s)
  conservação de, 147
  em condutores, 57-58, 65
  em movimento, campo magnético de uma, 207
  módulo da, 4-5
  negativa, 3, 4, 61, 230
  positiva, 3, 4, 34, 230
  quantizada, 1, 4
cargas
  ligadas, 121, 122, 124, 125, 134
  livres, 14, 121, 124, 125, 134, 137, 138, 166, 381
  puntiformes
    definição de, 7
    energia potencial elétrica de duas, 73-75
    força elétrica entre duas, 7, 10
    lei de Coulomb e, 7-12
    negativas, 34, 41
    positivas, 11, 32, 36, 41, 96, 271
    sistema de, 77
catodo, 96, 98, 143, 216, 217
choques, 5, 31, 89, 94, 165, 188, 192, 374, 400
ciclotron, 95, 214, 239

circuito
R-C, 182-186, 190, 192, 200, 330, 373
aberto, 148, 159, 188, 294
com uma única malha, 175
completo, 139, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 154, 158, 165, 176, 177, 247, 293, 394
L-C, 330-334, 335, 336, 337, 339, 340, 342, 364, 381
R-L, 326-330, 331, 338, 373
circuitos, 72, 105, 113, 132, 135, 140, 141, 146-151, 153, 155, 158, 159, 161, 168, 169, 173, 182, 187, 189, 200, 251, 311, 317, 318, 319, 326, 336, 353, 356, 361, 363, 374. *Veja também* circuitos elétricos
'ponte', 173, 177
de corrente alternada (ca), 106, 321, 336
fiação doméstica, 188-189, 190, 322
de corrente contínua (cc), 168-201, 359
uso de, 359
elétricos, 76, 78, 135, 137, 139, 144, 151, 152, 162, 174, 182, 280, 319, 333, 348. *Veja também* circuitos de corrente alternada (ca); circuitos de corrente contínua (cc)
curto-circuitos, 184
definição de, 168
diagramas de circuitos, 148, 199, 348
força eletromotriz e, 146-151
incompletos, 146
números complexos em, 377
R-C, 182-186, 190, 192, 196, 200, 330, 373
relações de potência e de energia em, 151
resistência interna, 148
R-L-C
em paralelo, 354, 375, 376
em série, 334-336, 337, 341, 356-359, 360, 362, 364, 365, 366, 370, 371, 373
cloreto de sódio, 25, 36, 99, 138, 161, 264
cobre
fios de, 159, 165
tempo livre médio no, 157
coeficiente de temperatura da resistividade, 141, 144, 157, 158, 161, 164, 165, 167, 197
comutador, 228, 232, 289
condutores de eletricidade, 400
conservação da carga elétrica, princípio da, 4
constante
de Curie, 264, 275
de Planck, 263
de proporcionalidade, 8, 244, 318
de tempo, 184, 185, 186, 190, 191, 192, 196, 200, 313, 328, 329, 330, 337, 340, 342
dielétrica, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 123, 124, 125, 126, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 164, 310, 315, 390, 391, 401
contador Geiger, 99
coroa anular, 39
corrente(s)
alternada, 104-106, 139, 143, 168, 186, 190, 288, 298, 306, 317, 319, 321, 333, 336, 338, 347-377
atrasada, 362
de deslocamento, 278, 299-303, 305, 306, 310, 311, 315, 354, 379, 390, 400, 405
de Foucault, 298-299, 305, 306, 368
de fuga, 117, 164
instantânea, 183, 184, 328, 332, 338, 348, 349, 352, 354, 359, 360, 361, 369
medida de, 178
persistente, 293
quadrática média, 349, 369, 370, 372
retificada média, 349, 370, 372
senoidal, 348, 349, 350, 351, 369, 372, 374
coulomb
por segundo, 8, 137, 152, 157, 208
por volt, 105
curto-circuito, 120, 150, 155, 159, 167, 181, 187, 237, 344
curva de
resposta, 365
ressonância, 365

D

declinação magnética, 205
deflexão, 100, 178, 179, 180, 181, 190, 195, 196, 199, 209, 218, 267, 342, 401
densidade
de carga, 34, 64, 65, 67, 68, 69, 86, 90, 97, 98, 105, 106, 108, 117, 118, 123, 126, 129, 132, 134, 138
de corrente, 138-139, 142, 143, 144, 145, 146, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 164, 219, 230, 231, 244, 260, 277, 278, 300, 310, 314
de deslocamento, 300, 310
densidade de energia
definição de, 113
dielétricos e, 115-121
do campo, 115, 120, 132, 326, 338, 341
para ondas eletromagnéticas, 385, 389, 390, 398, 402
magnética, 325, 326, 336, 337, 338
de momento linear, 395
de fluxo magnético, 210, 232
determinação do campo elétrico, 15, 17-23, 34, 91, 93, 255
diagramas
de circuitos
capacitores nos, 105
símbolos usados nos, 148
de fasores, 348, 356, 372
diamagnetismo
definição de, 265
dielétricos
carga induzida e, 117
corrente de deslocamento em um, 310
corrente de fuga em um, 164
estratégias para a solução de problemas, 389
lei de Gauss em, 122-124
ondas eletromagnéticas em um, 390
polarização de, 117
vetor de Poynting em, 393
diferença de potencial, 77, 81, 126
deflexão do galvanômetro e, 178
deslocamento através de uma, 83
diminuição da corrente, 155, 183, 329
dínamo baseado no disco de Faraday, 295
diodos, 348, 349, 367
dipolo magnético, 223, 224, 225, 226, 227, 232, 254, 262, 263, 264, 265, 267, 279
dipolos elétricos, 19, 25, 28, 29, 35, 121, 265
disjuntores, 187, 188, 189, 190
dispositivo para medir volume, 345
distribuição de cargas, 10, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 38, 40, 41, 43, 50, 51, 52, 56, 57, 59, 62, 63, 68, 69, 73, 76, 79, 83, 84, 86, 87, 90, 91, 92, 98, 100, 101, 102, 134, 206, 249, 297, 302
domínios magnéticos, 265, 269

E

efeito
Hall, 230-231, 232, 234, 239, 252, 291
Meissner, 303, 304
eletricidade estática, 85
eletrodos, 96, 98, 120, 161, 316
eletromagnetismo, 1, 40, 206, 221, 302, 378, 379, 382
definição de, 1
equações de Maxwell para o, 301-302
eletrômetro, 59, 116
elétron(s)
carga do, 3, 4, 16, 37, 61, 80, 102, 158, 166, 217, 218, 230
definição de, 3
em um campo elétrico, 16
massa do, 3, 4, 33, 98, 99, 156, 217, 218
módulo da carga de um, 9, 37
movimento de, em um forno de microondas, 215
trajetória de um, 17, 234
velocidade dos, 217, 218

livres, 6, 31, 51, 59, 99, 136, 139, 140, 155, 156, 157, 160, 161 ,163, 164, 239
elétron-volt, 80-81, 93, 23
eletrostática, 1, 2, 6, 8, 9, 14, 27, 28, 29, 36, 37, 57, 58, 59, 68, 76, 133, 146, 147, 148, 152, 153, 174, 243, 258, 284, 294, 302, 305, 322, 379
encurvamento, 55
energia
armazenada em um indutor, 324-325, 330, 340, 342, 375
do campo magnético, 317, 324-326, 330, 332, 336, 338, 339, 340, 341, 342, 371
em ondas eletromagnéticas, 334, 392-394
do campo elétrico, 113-115
elétrica
distribuição de, 135, 141, 186, 188, 347, 348, 350, 362, 366
em circuitos, 151
potencial
de um capacitor descarregado, 112
de uma bobina em um campo magnético, 226
definição de, 30
elétrica, 35, 71-78, 79, 83, 85, 88, 92, 93, 95, 98, 104, 112, 114, 115, 135, 146
armazenamento de, em capacitores, 112-115
variação total da, em circuitos completos, 151
relativa, 103
enrolamentos, 268, 366
equação de onda, 382, 385-387, 397, 400, 403, 405
equações de Maxwell, 206, 281, 299, 303, 305, 306, 310, 378-382, 383, 384, 399, 400
equilíbrio
força elétrica e, 68
escoamento radial da corrente, 145
espectro eletromagnético, 302, 381-382, 399, 400
espectrômetro de massa, 218, 232, 237, 240, 241
espiras
de corrente, 226, 227, 232, 262, 265, 270
fechadas, 321
excesso de carga, 4, 32, 51, 57, 61, 63, 66, 85, 97, 121, 233, 293, 309

F

farad, 105, 106, 113, 118, 124, 125, 184
fasores
corrente alternada e, 369
fator de potência, 362, 363, 370, 371, 373, 374, 375, 377
feixes de elétrons, 71
fonte de alimentação, 119, 141, 229, 239, 327, 333, 339, 340, 365, 369, 377
ferromagnetismo, 262, 265
filtro
passa-alto, 355, 375
passa-baixo, 353, 375
fio
com tensão, 186, 188
neutro, 186, 187, 188, 189
terra, 188
fissão nuclear, 102
fluxo
de energia eletromagnética, 392-394
elétrico, 40-43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 107, 126, 211, 231, 300, 301, 302, 306, 310, 383, 384, 386
carga interna e, 50
definição de, 42
determinação do, 43-47, 64
magnético, 210-213, 231, 235, 236, 249, 256, 281, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 310, 311, 312, 313, 318, 319, 320, 321, 323, 336, 339, 341, 344, 366, 367, 383, 386
fem induzida e, 284
fonte
ca, 352, 370, 375, 377
de força eletromotriz (fem), 158, 293
força conservativa
energia potencial elétrica e, 92
trabalho realizado por uma, 72
força eletromotriz (fem)
auto-induzida, 320, 321, 322, 323, 324, 326, 336, 337, 338, 339, 351, 353, 355
do movimento, 293, 294, 295, 305, 309
fonte de, 146, 147, 148, 149, 151, 154, 155, 158, 167, 171, 181, 182, 196, 197, 198, 200, 228, 229, 280, 282, 288, 295, 326, 329, 335, 337
Hall, 230, 231, 239
mutuamente induzida, 319
produzida por indutância mútua, 320
sentido da, 287, 290, 291, 294, 324
força eletromotriz (fem) induzida
definição de, 229
em uma espira, 284, 304, 310
gerador com haste deslizante e, 289, 290, 291, 292
sentido da, 284, 285-286, 287, 298, 305, 339
força magnética
características da, 206
sobre um condutor transportando uma corrente, 219-222, 237
sobre um segmento de fio, 220
sobre uma espira de corrente, 222-227, 232, 238, 242
força nuclear, 3, 28, 236
força(s) elétrica(s)
sobre dipolos elétricos, 25-26
sobre uma carga puntiforme, 13, 68
soma vetorial para, 11
unidades SI para, 13
forças
eletrostáticas, 27, 174, 322
não-eletrostáticas, 152, 153
frente da onda, 382, 400
freqüência
angular
da oscilação, 332
de ressonância, 364, 365, 370, 374, 376
ciclotrônica, 214, 232, 240
de ressonância, 364, 365, 366, 370, 371, 374, 375, 376, 381
função dielétrica, 391
funções de onda
vetoriais, 390
superposição para a, 396
fusão nuclear, 101, 102, 113, 236
fusíveis, 187, 189, 190

G

gaiola de Faraday, 59
galvanômetros de d'Arsonval, 181
gás de elétrons, 155
gauss, 208
gaussímetros, 208
gerador Van de Graaff, 59, 65, 147
geradores, 146, 151, 262, 266, 281, 291, 304
GFI (interruptor de falha da terra), 188
gradiente, 91
de potencial, 90-92, 97, 107

H

henry, 291, 319, 321, 336
hertz, 381, 389
hidrogênio
campo elétrico no interior de um átomo de, 70
modelo de Bohr do átomo de, 98, 238, 270
histerese, 266, 368

I

ímãs, 204, 205, 206, 207, 221, 227, 228, 232, 243, 262, 268, 297, 310, 312
impedância, 357, 358, 359, 364, 365, 366, 368, 370, 371, 373, 374, 376, 377
índice de refração, 390, 401

indução eletromagnética, 212, 281-316, 319
indutância, 317-345, 351, 353, 364, 366, 371, 372, 374, 376, 377. *Veja também* auto-indutância
demonstração do efeito da, 345
mútua, 317-320, 321, 336, 337, 338, 339, 341, 346, 366
indutores
definição de, 321
e auto-indutância, 320-324
em circuitos, *328*
como elementos do circuito, 321
e capacitadores, 351, 357, 361, 362
aplicações de, 322
energia armazenada em, 324, 340
resistores e, 326
instrumentos de medidas elétricas, 178-182, 195
integração, 18, 21, 22, 49, 51, 54, 82, 87, 91, 183, 247, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 269, 278, 296, 298, 315, 340, 379
integrais de linha, 256, 258
integral de superfície, 45, 50, 61, 62, 212, 301
intensidade
de onda estacionária, 398
da onda senoidal, 393
definição de, 393
interações elétricas, 1, 4, 5, 15, 28, 71, 206
interruptor de falha da terra, 188
íons, 3, 25, 30, 36, 51, 76, 99, 136, 138, 141, 142, 145, 155, 161, 218, 219, 231, 233, 237, 240
isolantes
material, 7, 63, 68, 104, 105, 109, 115, 116, 124
resistividade de um, 139
isótopos, 218, 232, 240, 241, 242

J

joule por coulomb, 78, 152

L

lâmpadas, 139, 159, 163, 168, 171, 172, 173, 186, 188, 189, 191, 192, 193, 194, 197, 288, 317, 322, 402
largura da ressonância, 376
laser
campos de um feixe de, 389
lei das malhas de Kirchhoff, 173, 182, 183, 184, 190, 321, 322, 326, 327, 329, 332, 335, 345, 356
circuitos *R-L* e, 338
lei de Ampère, 255-258, 259, 260, 261, 262, 264, 268, 269, 270, 274, 277, 278, 299, 300, 302, 305, 306, 315, 341, 379, 382, 384, 386, 389, 390, 397, 399, 400
lei de Coulomb, 1, 7-12, 14, 15, 29, 31, 47, 53, 58, 59, 61, 65, 73, 244, 245, 284, 302
lei de Curie, 264, 275
lei de Faraday da indução, 280, 284-291, 294, 296, 297, 301, 302, 304, 305, 306, 307, 309, 312, 315, 318, 321, 322, 366, 371, 379, 382, 383, 384, 386, 389, 390, 397, 399, 400
da indução, 312
definição de, 280
indução eletromagnética e, 281
lei de Gauss, 40-70, 75, 84, 90, 102, 106, 107, 108, 122-124, 130, 211, 212
aplicações da, 51-57, 65
carga em condutores, 57-61
definição da, 40
do magnetismo, 212, 231, 243, 249
em dielétricos, 122-124
forma geral da, 49
para a gravitação, 69
teste experimental da, 58-60
lei de Lenz, 286, 291-293, 294, 295, 298, 304, 305, 306, 308, 309, 312, 319, 321, 324, 327
correntes de Foucault e, 298-299
indutância mútua, 319, 320, 336, 338, 341
lei de Ohm, 139, 140, 141, 142, 143, 148, 149, 151, 157, 158, 162, 165, 167, 178, 180, 182, 351
resistividade, 139-142
leis de Kirchhoff, 168,173-178, 190, 194, 200, 326, 327, 359
ligações em paralelo
fiação doméstica, 188, 190, 322
resistores em, 168-173
ligações em série
fiação doméstica e, 188, 190, 322
resistores em, 1668-173
linha de corrente, 24
linha reta com cargas, 21
linhas
de campo elétrico, 24, 25, 29, 35, 51, 54, 67, 88, 89, 97, 98, 210, 306, 389
superfícies equipotenciais e, 88
de campo magnético, 210, 231, 233, 245, 256, 258, 260, 270
de contorno, 87, 89
de força de um campo elétrico, 23-28, 35
de transmissão, 160, 273, 306, 359, 362, 366
luz
monocromática, 381, 402
visível, 299, 378, 381, 382, 393, 402
comprimento de onda da, 399
definição de, 378

M

magnetismo, 204-206
efeito Hall, 230-231
interações magnéticas, 206, 231
lei de Gauss do, 212, 231, 243, 249
motor de corrente contínua, 228-229, 238, 289
natureza fundamental do, 204
magnetização, 247, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 275, 279, 300, 304, 305, 311, 318, 323
magneton de Bohr, 262, 263, 265, 269, 270
magnetron, 214, 215, 236
malhas, 158, 173, 174, 175, 176, 177, 182, 183, 184, 190, 191, 321, 322, 324, 327, 329, 332, 335, 338, 345, 356
mapas
do campo, 24
topográficos, 87
massa
de elétrons, 3, 4, 33, 99, 156, 217, 218
de isótopos, 237
reduzida, 103
de teste, 13
matéria
estrutura da, 2-4
ondas eletromagnéticas na, 390-391
materiais magnéticos, 226-227, 243, 257, 262-267, 268, 274
diamagnetismo, 262, 265
ferromagnetismo, 262, 265-263
magneton de Bohr, 262, 263, 265, 270
paramagnetismo, 262, 263-267
material isolante, 7, 63, 68, 104, 105, 109, 115, 116, 124
megaohm, 142
microampères, 137
microcoulomb, 9, 10
microfarad, 106, 116, 118
miliampères, 137
modelo de Bohr
do átomo de hidrogênio, 98, 238, 270
moléculas de água
como um dipolo elétrico, 25
momento de dipolo de, 30
de amônia, 35
polares, 121, 126
momento
angular atômico, quantizado, 263
de dipolo
elétrico, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 35, 223
magnético, 223, 224, 225, 227, 232, 254, 262, 263, 264, 267, 279

magnético, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 232, 233, 238, 243, 244, 254, 255, 261, 264, 265, 267, 279
monopolo magnético, 206, 212, 232, 249, 269
motor de corrente contínua (cc), 228-229, 238, 289
shunt, 178, 179, 190, 195, 229, 236, 239
movimento
harmônico amortecido, 334, 337
helicoidal de uma partícula, 216
multímetros, 350

N

nanocoulomb, 9, 10, 18
nêutron(s)
definição de, 3
massa do, 3, 4
modelo de Quark para, 243
newton por coulomb, 13, 107
nodos, 201
de Ranvier, 201
número
atômico, 4, 30, 31, 32, 33, 101
de onda, 388, 390, 401
números complexos, 377

O

ohm, 8, 139, 140, 141, 142, 143, 148, 149, 151, 157, 158, 162, 164, 165, 167, 178, 180, 182, 184, 319, 341, 351, 352, 354, 357
vezes metro, 139
ondas
planas, 382, 387, 388
refletidas, 399
eletromagnéticas, 104, 114, 215, 236, 245, 281, 297, 299, 301, 302, 325, 378-405
senoidais, 387, 389, 393, 394
onda transversal, 383, 388
oscilação
amortecida, 333, 335, 337
elétrica, 330
freqüência angular da, 331, 335, 364

P

paramagnetismo, 262, 263
partículas carregadas, 1, 4, 7, 10, 17, 31, 59, 78, 135, 136, 138, 157, 213, 214, 215, 216-219, 231, 235, 236, 243, 245, 246, 269
percurso de integração, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 269, 296
perda de energia, 142, 331, 368
permeabilidade, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 274, 275, 318, 323, 325, 337, 345, 366, 379, 390, 391, 392, 393, 401, 405
permissividade, 118, 119, 120, 123, 124, 125, 129, 300, 310, 379
picoampères, 137
picofarad, 106, 201
placas defletoras, 37, 100, 127
plano antinodal, 397, 398, 399, 400, 402
plano nodal, 397, 399, 400, 402
poeira cósmica, 404
polarização, 6, 24, 26, 31, 104, 117, 122, 124, 385, 400, 401
de dielétricos, 117, 122
definição de, 6, 24, 104
pólos magnéticos, 205, 206, 207, 211, 239
ponte de Wheatstone, 199
ponto
da fonte, 14, 15, 16, 18, 30, 244, 247, 269
de ramificação ou função, 173
do campo, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 28, 30, 33, 53, 56, 210, 244, 247, 248, 251, 254, 259, 267, 268, 269
potência
em circuitos de corrente alternada, 361-369, 373
em um curto-circuito, 155
instantânea, 200, 324, 361, 362, 363, 373, 377
máxima, 143, 152, 163, 193, 197, 198
média, 189, 362, 363, 369, 370, 373, 374, 375, 376, 377, 394, 396, 402
relações de, e de energia em circuitos elétricos, 151
potencial de ação, 201
potenciômetros, 181
pressão da radiação, 395-396, 400, 402, 403, 404
princípio da superposição
das forças, 9, 18, 29
dos campos elétricos, 18, 27, 29, 106
dos campos magnéticos, 251, 267
propriedades de simetria, 40, 51, 52, 54, 243
próton(s)
definição de, 3
massa do, 3, 4, 102, 216, 236
módulo da carga de um, 9
movimento helicoidal de uma partícula, 216

Q

quarks, 3, 243
quiloohm, 142
quilowatt-hora, 165, 166, 189

R

raio de Bohr, 70
raios solares, 395
reatância
capacitiva, 354, 355-356, 358, 359, 364, 365, 70, 371, 372, 376
indutiva, 352, 353, 354, 359, 364, 365, 369, 371, 372, 376
regra da mão direita
para o cargo magnético, 244, 246, 249, 254, 269

resistência
interna, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 171, 175, 176, 177, 181, 182, 190, 192, 193, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 229, 232, 307, 313, 325, 327, 329, 339, 340, 342, 343, 344, 345
medida de, 180
pura, 152, 362, 363, 373
e resistividade, 142
resistência equivalente de resistores conectados em série, 168, 170
resistividade
em função da temperatura, 141
resistência e, 142
resistor(es)
do shunt, 178
em paralelo, 170, 171, 173, 189, 190
em série, 168, 169, 170, 173, 189, 190, 192
ressonância
definição de, 336
em circuitos de corrente alternada, 363-369
rigidez dielétrica, 84, 120, 121, 124, 125, 126, 129
ruptura dielétrica, 120-121, 124, 125, 126, 128, 129, 157

S

segmentos de fio, 221
seletor de velocidade, 214, 217, 218, 219, 231, 233, 237, 241
semicondutores, 140, 141, 220, 230, 231
efeito Hall, 230
resistividade de materiais, 141
simetria esférica, 52, 53, 56, 57, 121, 123, 260
sistemas de distribuição de potência, 186-189, 197
solenóides, 224, 243
no vácuo, 262
no ar, 262
pelas extremidades, 269
toroidais, 339
soluções iônicas, 6, 220
supercondutividade, 141, 303-304, 311
supercondutores, 141, 142, 164, 303, 304
eletroímãs, 253, 304
tipos de, 253

superfícies
equipotenciais, 87-90, 93, 94, 97, 98
condutores e, 89-90
definição de, 87
superfícies gaussianas *versus*, 90
fechadas, 43, 47, 50, 64
gaussianas, 49, 51, 52, 55, 65, 90
suscetibilidade magnética, 264, 265, 269, 270, 275, 311, 345

T

Temperatura
resistividade e, 141-142
crítica, 141, 303, 304
Tempo
de relaxação, 184, 190
livre médio, 156, 157, 158, 163
tensão senoidal, 348
teorema
de Earnshaw, 68
de Pitágoras, 357
terceira lei de Newton
a força elétrica, 10
lei de Coulomb e, 29
termistor, 141, 165
tesla, 208, 231, 232, 235, 319, 320
toróides, 339
torque
sobre um dipolo elétrico, 25-27, 30, 35, 224, 225
sobre um dipolo magnético, 224, 225
sobre uma espira de corrente, 222-227, 238, 242
trabalho
e potência no gerador, 290
por unidade de carga, 78, 152
trajetória cicloidal, 244
transformadores, 186, 262, 266, 280, 298, 304, 319, 366-369, 370, 371, 374, 379
tubo de raios catódicos, 100, 208, 209
tweeter, 356, 374

U

unidades SI
capacitância, 105
corrente, 137, 157
de carga elétrica, 8, 29
de indutância mútua, 319, 336
urânio, 64, 65, 102, 264, 267, 269

V

Valor
eficaz, 349, 350, 358, 363, 365, 366, 367, 368, 369, 372, 374, 376, 377, 402
valor quadrático médio da voltagem, 186
variação magnética, 205
velas
de ignição, 324
solares, 324
velocidade
de arraste, 136, 137, 138, 139, 156, 157, 158, 159, 160, 219, 220, 230, 231, 239, 247
em um fio, 139
terminal, 103, 306, 313, 315, 316
vetor
área, 44, 45, 212, 223, 285, 286, 287, 288, 296, 383
campo elétrico, 48
de Poynting, 392, 393, 394, 396, 398, 399, 400, 402, 404
densidade de corrente, 138
volt, 8, 78, 81, 93, 105, 113, 142, 152, 158, 180, 285, 319
por metro, 80, 107
voltagem
definição de, 71
fase da, 352, 358, 364, 369, 373
nos terminais, 131, 148, 150, 154, 155, 159, 162, 165, 166, 172, 176, 179, 189, 197, 198, 200, 289, 327, 369, 372, 376
Hall (fem Hall), 230, 232
instantânea, 351, 352, 354, 355, 356, 360, 361, 369, 371, 375
voltímetro(s)
com diversas escalas, 199
combinação de amperímetros e, 180
definição de, 78
ideal, 148, 149, 160, 162, 163, 179, 191
projeto de um, 179

W

watt, 8, 152, 393
weber, 212, 231, 232, 285, 319
woofer, 356, 374

CRÉDITOS DAS FOTOS

Capítulo 21 Abertura: Ilja C. Hendel/The Image Works; Figura 21.5: Journal- Courier/The Image Works; Figura 21.8a: Richard Megna/Fundamental Photographs; Figura 21.30a: imagem reproduzida da *PSSC Physics*, 2ª ed. (1965), D.C. Heath & Company e Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; Figura 21.31b: Tony Craddock/Photo Researchers.

Capítulo 22 Abertura: Department of Energy/Photo Researchers; Figura 22.10: AKGLondon Ltd.; Figura 22.28b: Russ Kinne/Comstock.

Capítulo 23 Abertura: Ted Kurihara/Getty Images; Figura 23.9: NASA/JPL/Caltech; Figura 23.11: **COPYRIGHT** Lester V. Berman/Corbis: Figura 23/13: Fermilab Visual Media Services; Figura 23.18: Hulton Archive/Keystone/Getty Images; Figura 23.23: U.S. Geological Survey, Denver.

Capítulo 24 Abertura: Digital Vision/Agefotostock; Figura 24.3: Design Pics/Indexstock; Figura 24.4: Andrew Lambert/ Photo Researchers; Figura 24.7: Paul Silverman/Fundamental Photographs; Figura 24.11: Sandia National Laboratories; Figura 24.17: Stanford Linear Accelerator/Science Photo Library/Photo Researchers.

Capítulo 25 Abertura: David Sacks/Getty Images; Figura 25.4: Fundamental Photographs; Figura 25.5: PhotoDisc/Getty Images; Figura 25.8: Mitch Wojnarowicz/The Image Works; Figura 25.13: Doug Scott/Agefotostock.

Capítulo 26 Abertura: Maximilian Stock/Photo Researchers; Figura 26.2: Corbis; Figura 26.5: John P. Surey; Figura 26.13: John P. Surey; Figura 26.18: Richard Megna/Fundamental Photographs; Figura 26.20: Mehau Kulyk/Photo Researchers; Figura 26.26a: Banana Stock/Alamy; Figura 26.26b: Wikipedia.

Capítulo 27 Abertura: Simon Fraser/Photo Researchers; Figura 27.2b: Bill Aron/PhotoEdit Inc.; Figura 27.20: Cenco; Figura 27.20b: Paul McCormick/Getty Images; Figura 27.21: Lawrence Berkeley National Laboratory; Figura 27.40: Jeremy Burgess/Photo Researchers.

Capítulo 28 Abertura: David Parker/Photo Researchers; Figura 28.8: Definitive Stock; Figura 28.11: Jeremy Walker/ Photo Researchers; Teste sua compreensão, Página 976: Fotografia de Mark Antman/The Image Works.

Capítulo 29 Abertura: James Leynse/Corbis; Figura 29.9: Maximilian Stock Ltd./Photo Researchers; Figura 29.18a: Photodisc Red/Getty Images; Figura 29.18b: Toyota/AP Wide World; Figura 29.18c: CIRRUS Design Corporation; Figura 29.20b: NASA/JPL/Caltech; Figura 29.26: Ken Gatherum, Boeing Computer Services.

Capítulo 30 Abertura: Martin Barraud/Getty Images; Figura 30.7: Photodisc/Getty Images; Figura 30.10: John Walsh/ Photo Researchers.

Capítulo 31 Abertura: John P. Surey & Caroline J. Robillard; Figura 31.5: Rubberball/
Getty Images; Figura 31.14: Lawrence Migdale/Photo Researchers; Figura 31.22: John P. Surey; Figura 31.23: Roger A. Freedman.

Capítulo 32 Abertura: David Davis Photoproductions; 32.1: Bettmann/Corbis; Figura 32.2a: Peter Barrett/Masterfile; Figura 32.2b: Malcolm Fife/Getty Images; Figura 32.16: The Image Bank/Getty Images; Figura 32.18: Volker Steger/ Photo Researchers; Figura 32.20: NASA/JPL-Caltech/E. Churchwell (University of Wisconsin-Madison); Figura 32.23: Michael Porsche/Corbis.

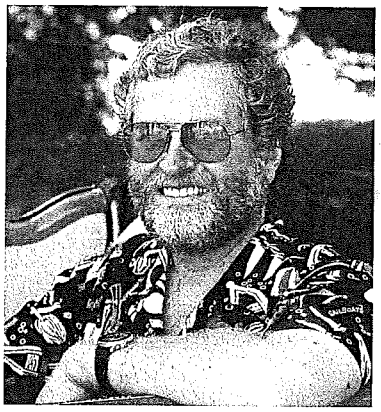
Sobre os autores Hugh D. Young; John P. Surey.

SOBRE OS AUTORES

Hugh D. Young é professor emérito de física na Universidade Carnegie-Mellon em Pittsburgh, PA. Ele estudou na Carnegie-Mellon tanto na graduação quanto na pós-graduação, obtendo o título de Ph.D. na teoria de partículas fundamentais, sob a orientação do professor Richard Cutkosky. Young começou a trabalhar na Faculdade Carnegie-Mellon em 1956 e atuou durante um ano como professor visitante na Universidade da Califórnia, em Berkeley.

A carreira do professor Young foi centralizada inteiramente no ensino de graduação. Ele escreveu diversos livros de física em nível de graduação e, em 1973, tornou-se co-autor, com Francis Sears e Mark Zemansky, dos famosos livros de introdução à Física. Depois que Sears e Zemansky faleceram, ele assumiu toda a responsabilidade das edições consecutivas desses livros, sendo que a oitava edição do livro *University Physics* é uma das mais recentes.

O professor Young é um entusiasta esquiador, alpinista e excursionista. Ele também foi organista associado durante diversos anos na Catedral de St. Paul, em Pittsburgh, e nessa cidade fez inúmeros recitais de órgão. O professor Young e sua mulher, Alice, normalmente viajam no verão para a Europa e para o deserto do Canyon no sul de Utah.



Roger A. Freedman é conferencista de física na Universidade da Califórnia, Santa Bárbara. Ele fez a graduação no campus da Universidade da Califórnia em San Diego e Los Angeles, e suas pesquisas para a tese de doutorado versaram sobre teoria nuclear, na Universidade de Stanford, sob a orientação do professor J. Dirk Walecka. O dr. Freedman ingressou na UCSB em 1981 depois de ter trabalhado em pesquisa e ensino de física na Universidade de Washington.

Na UCSB, lecionou no Departamento de Física, bem como na College of Creative Studies, um setor da universidade destinado a alunos de graduação altamente motivados e competentes. Ele publicou trabalhos de pesquisa em teoria nuclear, física das partículas elementares e física do laser. Também ajudou a desenvolver métodos computacionais para o ensino da física e da astronomia.

O dr. Freedman obteve licença de piloto comercial e, quando não está ensinando nem escrevendo, está voando com sua mulher, Caroline.

A. Lewis Ford é professor de física na Universidade A&M do Texas. Ele recebeu o grau de B.A. da graduação na Universidade Rice em 1968 e o título de Ph.D. em físico-química na Universidade do Texas, em Austin, em 1972. Depois de um pós-doutorado de um ano na Universidade de Harvard, ele começou a trabalhar na faculdade de física da Universidade A&M do Texas, em 1973, e ali permanece até hoje. Suas pesquisas versam sobre física atômica teórica, com especialização em colisões atômicas. Na Universidade A&M do Texas, lecionou diversos cursos de graduação e de pós-graduação, porém se dedicou mais à física básica.

SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA III

ELETROMAGNETISMO

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Definitivamente o mais completo conteúdo para o estudo de física, esta 12ª edição do 'Sears' é uma obra de didática inovadora. Com excelente abordagem educacional, este livro proporciona estratégias para a solução de problemas e exemplos resolvidos, com ferramentas visuais e conceituais pioneiras e didaticamente comprovadas, além de recursos eficazes para o aprendizado, como ilustrações com comentários, testes de compreensão, questões para discussão e uma biblioteca de problemas com mais de 800 novos exercícios.

O que há de novo nesta edição

Estratégias para a solução de problemas e Exemplos resolvidos. Todas as seções de estratégia para a solução de problemas seguem a abordagem ISEE (do inglês *Identify, Set Up, Execute and Evaluate* — Identificar, Preparar, Executar e Avaliar). Essa abordagem ajuda o estudante a saber como começar a tratar uma situação aparentemente complexa, identificar os conceitos relevantes de física, decidir quais recursos são necessários para solucionar o problema, executar a solução e depois avaliar se o resultado faz sentido.

O poder didático das figuras. O poder instrutivo das figuras é potencializado por meio da comprovada técnica de anotação (comentários no estilo quadro-negro integrados às figuras, para orientar o estudante em sua interpretação) e do uso eficiente de detalhes.

Questões e exercícios. Ao final de cada capítulo há um conjunto de questões para discussão destinadas a aprofundar e ampliar a assimilação conceitual pelo aluno. Logo após vêm os exercícios e os problemas desafiadores, desenvolvidos para estimular os melhores estudantes.

www.aw.com/young_br

O site de apoio oferece: para professores, manual de soluções em inglês e apresentações em PowerPoint com figuras e os principais conceitos do livro (protegidos por senha); para estudantes, exercícios de múltipla escolha, para ajudar na fixação de conceitos, animações (em inglês) com os principais temas das aulas.

Companion Website

PEARSON Addison Wesley

www.pearson.com.br

ISBN 978-85-88639-34-8

9 788588 639348