J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 4** 1 (2020): 23–28. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Teoria de Singularidades para leigos

Rodrigo Martins – Email: rmartins@uem.br

Resumo: A Teoria de Singularidades já é um ramo muito bem estabelecido da matemática que tem intercessão com praticamente todas as áreas da matemática, quer seja análise, álgebra, matemática aplica e a sua área mãe a Geometria e Topologia. Assim apresentamos uma breve ideia de como pode-se começar na singularidade por meio dos modelos singulares de funções.
Palavras-chave: Teoria de Singularidades, Teoria de Catástrofe, Classificação.

1. Introdução

A Teoria de singularidades, também nominada como Teoria de Catástrofes[1], tem seu início com o trabalho de Hassler Whitney (WHITNEY, 1955) que tratava sobre a classificação das singularidades de aplicações diferenciáveis do plano no plano.

Paralelamente o matemático francês René Thom, também produz artigos sobre as singularidades das aplicações diferenciáveis (THOM, 1956) e mais tarde publica uma série de artigos como (THOM, 1969) que envolve Teoria de Bifurcação[2] e Teoria de Singularidades em aplicações a outras áreas, que ele e outros matemáticos como Zeemam, chamaram de Teoria de Catástrofe.

Em linhas gerais, e por isso todas estas teorias são tratadas aqui como sendo a mesma coisa, elas tratam de sistemas que se alternam entre estados (vamos chamar de estáveis) com um certo ponto singular (ou uma região) entre eles (instável)[3]. O exemplo mais simples e que exploraremos neste artigo, imagine um gráfico de uma aplicação diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, nele teremos entre regiões de crescimento e decrescimento (regiões localmente estáveis) um ponto singular (ponto de instalabilidade).

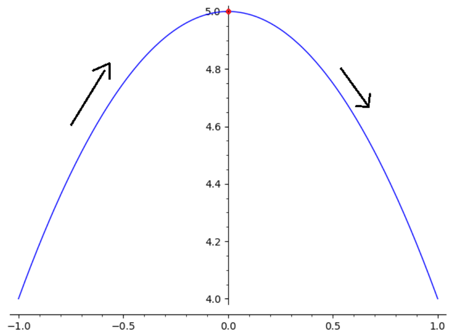
No livro de T. Posnton e I.Steart, (POSTON; STEWART, 1978), temos uma série de exemplos de aplicações as mais diversas áreas, por exemplo se um cão bravo ataca e com

[1]Durante as décadas de 70 e 80 houve uma discussão se eram as mesmas teorias e ao menos no Brasil o problema é resolvido chamando Teoria das Singularidades e Teoria das Catástrofes conforme a tabela do CNPq, 1.01.03.05-8, aqui usamos como sinônimos. Leia o artigo (GUCKENHEIMER, 1978).

[2]Esta teoria tenta entender situações de mudanças repentinas em certos sistemas quando submetido a pequenas variações.

[3]Essencialmente este era o trabalho iniciado por Whitney que buscava entender as singularidades das aplicações diferenciáveis.

Figura 1: Crescimento e descrescimento.

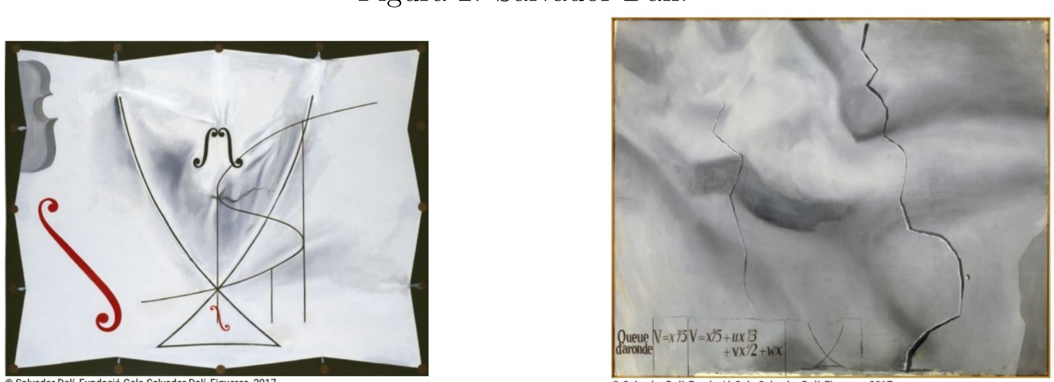


Ponto singular entre duas regiões regulares

medo foge, qual será a reação do cão se tiver exatamente a mesma quantidade de raiva e medo ?. E na década de 70 e 80 uma série de aplicações foram feitas deste modelo que acabou por tornar a Teoria de Catástrofe famosa (neste caso o nome Teoria de Catástrofe tem muito mais apelo midiático que outros nomes).

Artigo como (ZEEMAN, 1976) sobre modelos de efeito de álcool na dirigibilidade explodiram a popularidade da teoria neste período. Vários jornais e revistas (deste New York Times até jornais locais) fizeram publicações na época sobre a super nova teoria que poderia modelar "todos"os fenômenos catastróficos e situações limites do cotidiano. Um que ainda se encontra disponível foi feito pela revista New York Review of Books publicou em 1978 um artigo chamado "The Charms of Catastrophe"[4] (O Encanto da Catástrofe). O alcance da popularidade foi tão grande que o pintor espanhol Salvador Dalí chegou a fazer uma série de pinturas reunidas na Série de las Catastrophes além do quadro "El rapte topològic d'Europa", em homenagem a Rene Thom.

Figura 2: Salvador Dalí.



https://www.salvador-dali.org/

[4]Artigo escrito por Martin Gardner disponivel no site da revista https://www.nybooks.com/articles/1978/06/15/the-charms-of-catastrophe/

Esta nova teoria foi trazida para o Brasil pelo Professor Gilberto Francisco Loibel, que entre 1960 e 1962 fez pós-doutorado na Universidade da Califórnia, em Berkeley (EUA) e conheceu entre os seminários que assistiu por lá a nova teoria e de volta ao Brasil orientou, no mestrado, sua primeira aluna neste conteúdo a Professora Maria Aparecida Soares Ruas, cuja dissertação "Germes finitamente determinados"foi publicada em 1974. Esta por sua vez se tornou a maior disseminadora desta teoria no Brasil tendo como descendentes diretos cerca de 45 doutores[5], por isso são com certeza os responsáveis pela quantidade significativa de pesquisadores nesta área no Brasil.

A Teoria de Singularidades, portanto, pode se dedicar a variados questionamentos dentro da matemática, por exemplo quais são os modelos que existem com singularidades ? (Classificação), dado um modelo singular é o que acontece se o perturbarmos, elimina a singularidade ou mudar a singularidade ? (Resolução de Singularidade ou Teoria de Bifurcação), estes modelos singulares possuem estruturas algébricas, aproximações, como eles se comportam ou quão importante eles são no mundo de todos os modelos ?

Assim é possível muitos caminhos distintos para se estudar singularidades e muitas faces com as mais diversas áreas da matemática, apesar de (em teoria) ela pertença a grande área de Geometria e Topologia, pode-se estudar desde equações diferenciais a álgebra pura.

Para delimitar nosso trabalho veremos as aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

2. O caso real

Talvez possamos imaginar que aplicações de reais de valores reais sejam um modelo insignificante, mas não é. Podemos imaginar muitos e muitos caso onde este é o modelo ideal, por exemplo, ao tomar um remédio temos o modelo ao longo do tempo dos efeitos do remédio que podemos imaginar como sendo parabólico, isto é, a medida que o corpo absorve o remédio sua eficacia vai aumentando mas ao se dissolver completamente começa a ser expelido pelo corpo e portanto começa a diminuir seus efeitos (pesquise sobre biodisponibilidade de fármacos).

Assim vamos estudar uma aplicação de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável (para estudar suas singularidades) em alguns dos aspectos acima.

Para facilitar e como estamos interessados em estudar apenas na vizinhança de certos pontos vamos colocar no mesmo pacote todas as funções que são iguais numa vizinhança chamado de germe.

Definição 2.1 *Dizemos que duas funções $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas em intervalos abertos contendo a, tem o mesmo germe em a se existe um aberto $\Omega \subset U \cap V$, tal que $f|_\Omega = f|_\Omega$.*

[5]Informação disponível em https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php

A relação “ter o mesmo germe em a”é uma relação de equivalência e a classe que equivalência é chamada simplesmente de germe, cuja notação é $f : (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$. E neste caso ao estudar o que ocorre com f numa vizinhança de a o mesmo ocorre com g pois elas são idênticas em uma vizinhança.

Como estamos preocupados apenas com o comportamento da função em uma vizinhança de um ponto, podemos facilmente nos convencer que certas mudanças das funções não afeta o que buscamos.

Por exemplo, se efetuarmos uma translação no gráfico da função f, e chamarmos a transladada de g, teremos que ambas têm o mesmo comportamento nos pontos equivalentes, apesar de não serem a mesma função.

Mais especificamente como estamos estudando as singularidades de uma aplicação diferenciável teremos que algumas mudanças (difeomorfismos) na função nos dará uma função equivalente.

Definição 2.2 *Sejam U e V abertos da reta real e sejam t_1 e t_2 pontos de U e V respectivamente. Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$ são equivalentes à direita (escrevemos* **R***-equivalentes) se existirem intervalos abertos $t_1 \in \bar{U} \subset U$ e $t_2 \in \bar{V} \subset V$, um difeomorfismo $h : \bar{U} \to \bar{V}$ e uma certa constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(t_1) = t_2$ e $f(t) = g(h(t)) + c$, $\forall t \in \bar{U}$.*

Assim f, próximo de t_1, é obtido de g, próximo a t_2, por uma mudança de parâmetro e adicionando uma constante $c = f(t_1) - g(t_2)$. Mais precisamente temos o Lema de Hadamard que pode ser encontrado no livro (BRUCE; GIBLIN, 1992).

Teorema 2.3 (Lema de Hadamard) *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \to \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para todo p com $1 \leq p \leq k$. Então existe uma função $g : (\mathbb{R}, t_0) \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} g(t)$ para todo t em alguma vizinhança de t_0. Também se $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ então $g(t_0) \neq 0$.*

Corolário 2.4 *Sejam $f : (\mathbb{R}, t_0) \to \mathbb{R}$ diferenciável e $k \geq 0$. Suponha que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para todo $1 \leq p \leq k$, mas $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Então f é R-equivalente a $g : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \pm t^{k+1}$, onde temos $+$ ou $-$ de acordo com o sinal de $f^{(k+1)}(t_0)$.*

Demonstração:

Defina $h(t) = (t - t_0)(\pm g(t))^{\frac{1}{k+1}}$ onde o sinal $\pm$ depende de $f_1(t_0)$. Então $h(t_0) = 0$ e $h'(t_0) > 0$ logo, pelo teorema da aplicação inversa, h é um difeomorfismo sobre alguma vizinhança de t_0. (g é a função na qual f do teorema é dada pelo lema de Hadamard).

Finalmente $g(h(t)) = (t - t_0)^{k+1} g(t) = f(t) - f(t_0)$, onde g tem a forma pedida no teorema. Isto é facilmente checado, pois o sinal de $f_1(t_0)$ e $f^{(k+1)}(t_0)$ coincidem (realmente $f^{(k+1)}(t_0) = (k + 1)! f_1(t_0)$, usando apenas regras usuais do cálculo).

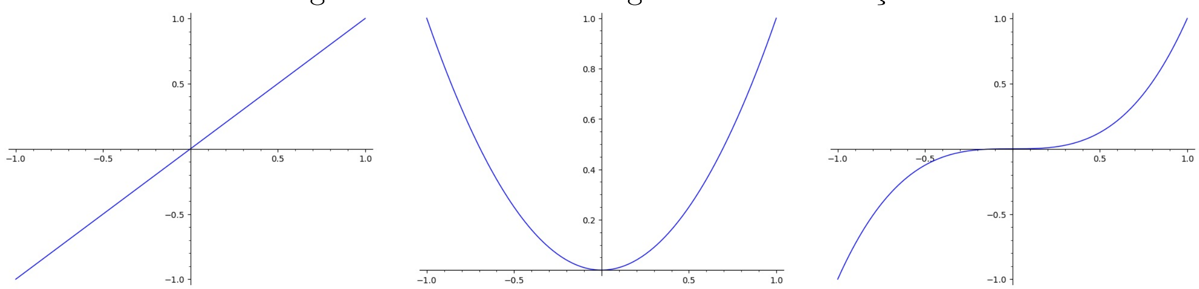
Portanto f e g sãp realmente R-equivalentes como queríamos.

■

Definição 2.5 *Suponha que* $f : (\mathbb{R}, t_0) \to \mathbb{R}$ *é* R*-equivalente a* $\pm t^{k+1}$*, para* $k \geq 0$*, dizemos que* f *tem tipo* A_k *em* t_0*, ou uma singularidade tipo* A_k *em* t_0*. Deste modo tipo* A_0 *significa justamente que* $f'(t_0) \neq 0$*. Também dizemos que* f *tem tipo* $A_{\geq k}$ *quando* $f^{(p)}(t_0) = 0$ *para* $1 \leq p \leq k$ *e neste caso* f *tem tipo* A_l *para algum* $l \geq k$ *ou todas as derivadas de* f *se anulam em* t_0*.*

Assim podemos observar que temos três formatos principais de singularidades em funções:

Figura 3: Modelos de Singularidade de Função



A_0 A_{2k} A_{2k+1}

Mas isto não exaure as possibilidades de estudos mesmo no caso de funções.

3. Conclusão

Como vimos os modelos de singularidades de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são a reta, a cubica e a parábola, porém as singularidades de tipo A_k, apesar do mesmo formato podem dar novas informações, por exemplo $f(x) = x^8$ tem formato de parábola mas é uma parábola mais "achatada"no eixo x, dizemos que ela tem um "contato"de ordem superior com a reta, abrindo um novo ramo da Teoria de Singularidade chamada Teoria de Contato.

Ainda, o conjunto dos germes ou dos difeomorfismos possuem várias estruturas algébricas, como por exemplo de grupos ou anéis, abrindo uma gama enorme de possibilidades de estudos em álgebra (geometria algébrica, álgebra comutativa, etc).

Finalmente os modelos matemáticos que envolvem singularidades são bem mais ajustados ao mundo real onde os eventos costumam conter singularidades o tempo todo, assim vale a pena conhecer mais desta teoria.

Referências

1 BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities**. 1. ed. Boston, EUA: Cambrigde University press, 1992.

2 GUCKENHEIMER, J. The Catastrophe Controversy. **The Mathematical Intelligencer**, EUA, v. 1, n. 1, p. 15–20, 1978.

3 POSTON, T.; STEWART, I. **Catastrophe Theory and its Applications**. 1. ed. Boston, EUA: Pitman, 1978. p. 491.

4 THOM, R. Les singularités des applications différentiables. **Ann. Inst. Fourier**, Grenoble, France, v. 1, n. 6, p. 43–87, 1956.

5 ________. Topological models in biology. **Topology**, Grenoble, France, v. 8, n. 3, p. 313–335, 1969.

6 WHITNEY, Hassler. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. **Ann. of Math.**, EUA, v. 65, n. 2, p. 374–410, 1955.

7 ZEEMAN, E.C. A mathematical model for conflicting judgements caused by stress, apllied to possible misestimantions os speed caused by alcohol. **J. Math. Statit. Psych.**, EUA, v. 28, n. 1, p. 19–31, 1976.