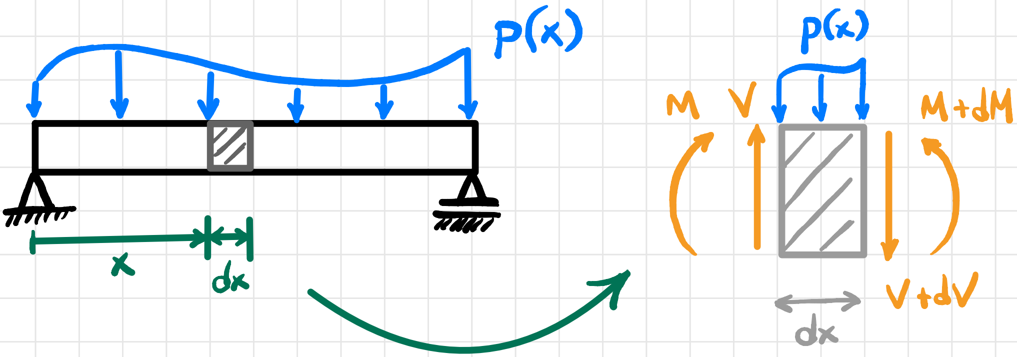
Cisalhamento na Flexão

Considere uma barra sob ação de um carregamento p(x):



Lembrando das equações diferenciais de equilíbrio pode-se escrever:

- $\dfrac{dV}{dx} = -p(x)$ (a partir do equilíbrio em y)

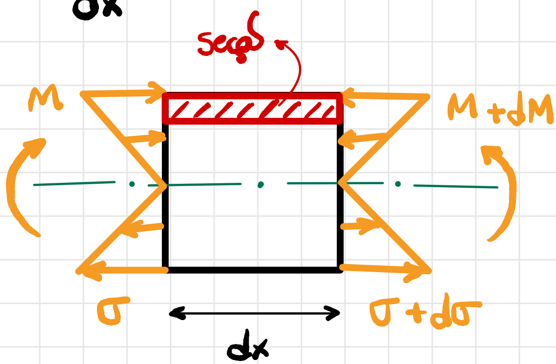
- $\dfrac{dM}{dx} = V(x)$ (a partir do equilíbrio de momentos)

Obtendo-se os esforços solicitantes a partir da integração das tensões atuantes nas áreas:

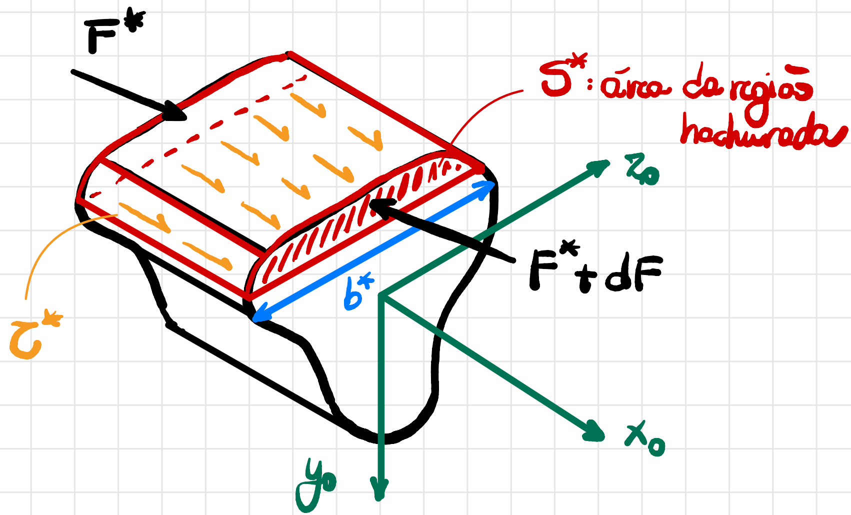
$\circ\ N = \int_S \sigma \, dA = 0 \qquad \circ\ V = \int_S \tau \, dA \qquad \circ\ M = \int_S \sigma y \, dA$

Assumindo uma cortante positiva (ou seja, uma taxa de variação de momentos positiva):

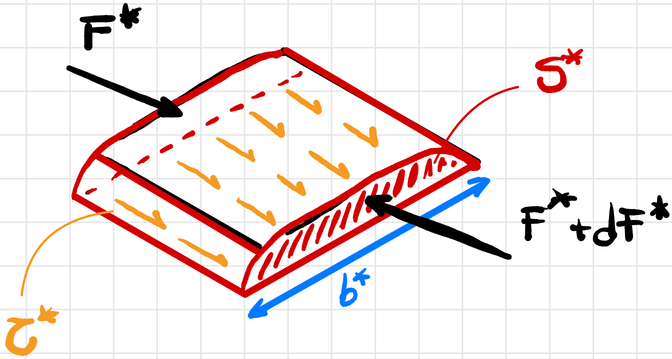
$$\frac{dM}{dx} = V > 0$$



Em uma vista 3D:



Onde τ^*, F^* e F^*+dF atuam no corte delimitado pela região hachurada. Isolando a região:



Fazendo o equilíbrio de forças na direção x_0:

$$F^* - (F^* + dF^*) + \tau^* . (b^* dx) = 0$$

$$\cancel{F^*} - \cancel{F^*} + \tau^* b^* dx = dF^*$$

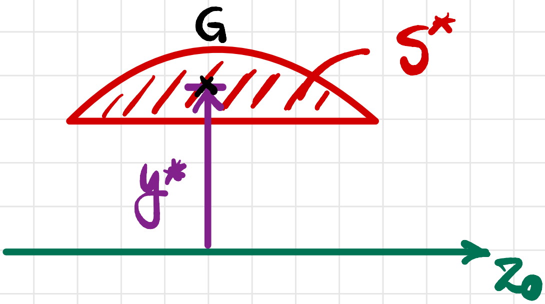
E portanto:

$$\boxed{\tau^* = \frac{1}{b^*}\frac{dF^*}{dx}}$$

Mas:

$$F^* = \int_{S^*} \sigma \, dA = \int_{S^*} \frac{M}{\underbrace{I_{z_0}}_{\text{constante na seção S}}} y \, dA = \frac{M}{I_{z_0}} \int_{S^*} y \, dA = \frac{M}{I_{z_0}} M_S^*$$

Onde M_S^* é o momento estático da área hachurada em relação ao eixo z_0. O cálculo desse momento pode ser feito da seguinte forma:



$$M_S^* = S^* . y^*$$

com S^*: área da região hachurada e y^*: distância do baricentro da área hachurada até o eixo z_0.

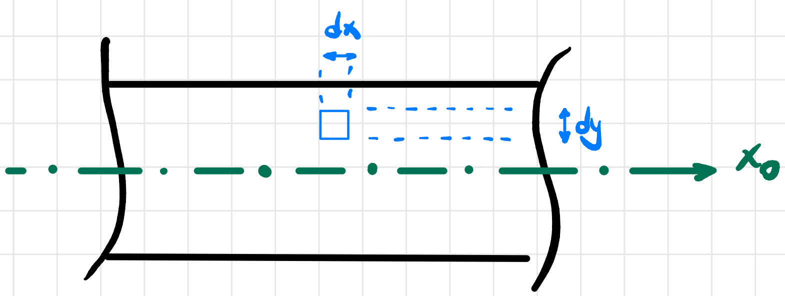
Derivando F^* em relação à x:

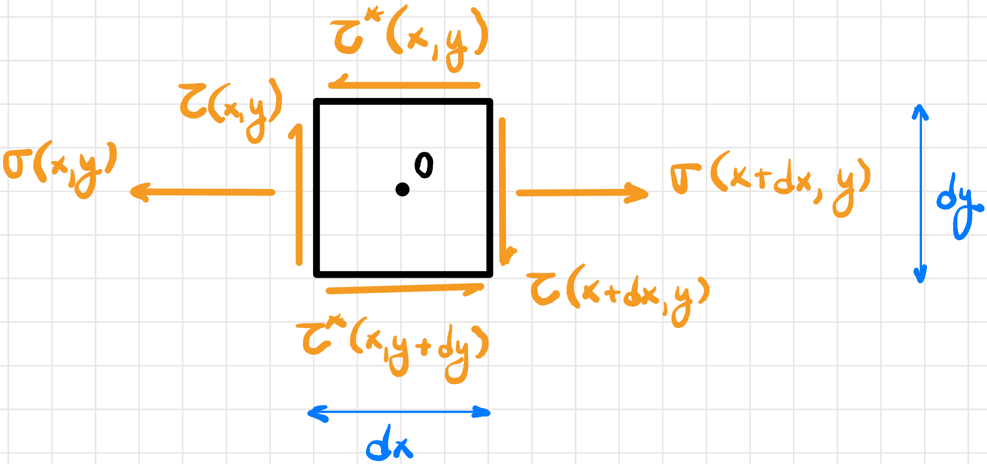
$$\frac{dF^*}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{I_{z_0}} \cdot M_S^*\right) = \frac{M_S^*}{I_{z_0}} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{V M_S^*}{I_{z_0}}$$

E assim:

$$\tau^* = \frac{1}{b^*} \cdot \frac{dF^*}{dx} \longrightarrow \boxed{\tau^* = \frac{V \cdot M_S^*}{b^* \cdot I_{z_0}}}$$

Porém, essa tensão ocorre no corte da seção e não na seção transversal propriamente dita. Voltando à barra:





Fazendo o equilíbrio de momentos em O e usando que:

$$\tau(x+dx,y) = \tau(x,y) + \frac{d\tau}{dx}.dx$$

$$\tau^*(x,y+dy) = \tau^*(x,y) + \frac{d\tau^*}{dy}.dy$$

Então:

$$\circlearrowleft + \sum M_0 = 0: -\tau(x,y).dy.\frac{dx}{2} + \tau^*(x,y).dx.\frac{dy}{2} -$$

$$-\tau(x+dx,y).dy.\frac{dx}{2} + \tau^*(x,y+dy)\,dx.\frac{dy}{2} = 0$$

Omitindo o (x,y) para simplificar a notação:

$$-\tau\, dy \frac{dx}{2} + \tau^{*} dx \frac{dy}{2} - \left(\tau + \frac{d\tau}{dx} \cdot dx\right) dy \cdot \frac{dx}{2} +$$

$$+ \left(\tau^{*} + \frac{d\tau^{*}}{dy} \cdot dy\right) dx \frac{dy}{2} = 0$$

Assim:

$$-\tau\, dy \frac{dx}{2} + \tau^{*} dx \frac{dy}{2} - \tau\, dy \frac{dx}{2} - \frac{d\tau}{dx} \cdot dy \cdot \frac{dx^{2}}{2} +$$

$$+ \tau^{*} dx \frac{dy}{2} + \frac{d\tau^{*}}{dy} \cdot dx \frac{dy^{2}}{2} = 0$$

Desprezando os termos de ordem superior:

$$-\tau\, dx\, dy + \tau^{*} dx\, dy = 0$$

Logo:

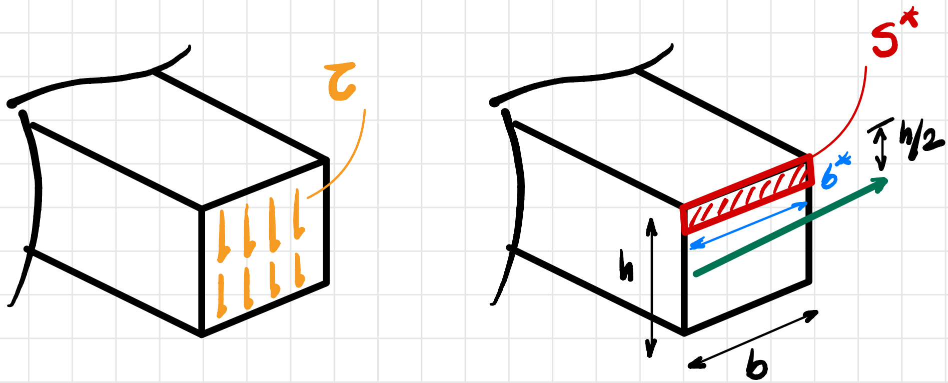
$$\tau = \tau^{*}$$

E assim:

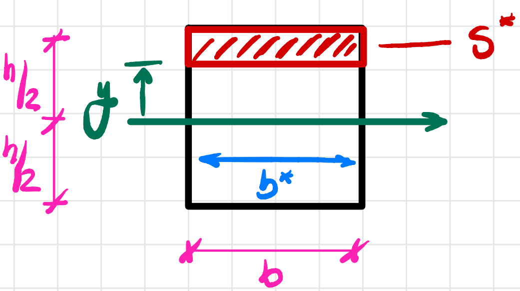
$$\boxed{\tau = \frac{V \cdot M_s^{*}}{b^{*} I_{zo}}}$$

Seção Retangular

Para exemplificar e compreender como a tensão de cisalhamento se distribui, os cálculos serão feitos para uma seção retangular:



Observando a seção transversal e calculando o momento estático da área hachurada:



$$M_s^* = \int_{S^*} y \, dA$$

$$M_s^* = \int_y^{h/2} y \, b \, dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_y^{h/2} = \frac{b}{2}\left[\frac{h^2}{4} - y^2\right]$$

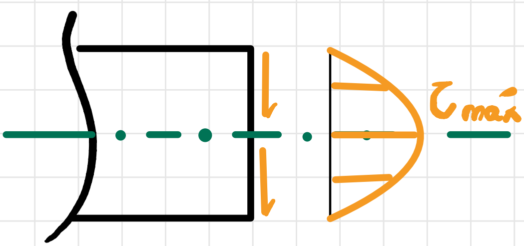
Da figura: $b = b^*$. Assim, a tensão de cisalhamento pode ser calculada por:

$$\tau = \frac{V.M_s^*}{b^*.I_{zo}} = V.\frac{\cancel{b}}{2}\left[\frac{h^2}{4} - y^2\right].\frac{1}{\cancel{b}}.\frac{12}{bh^3}$$

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}.\frac{h^2}{4}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}$$

Fazendo um diagrama das tensões:

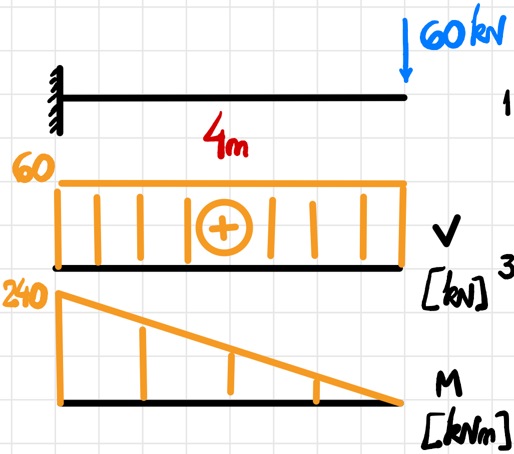


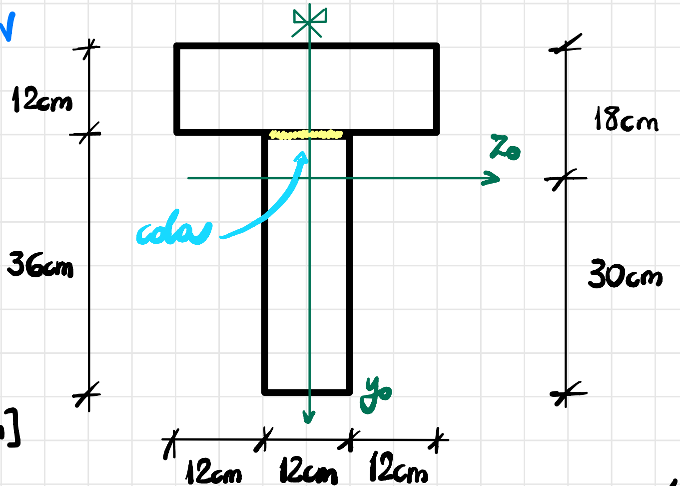
$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3}{2}\tau_{médio}$$

$$\tau_{máx} = f.\tau_{médio}$$

fator de correção para τ.

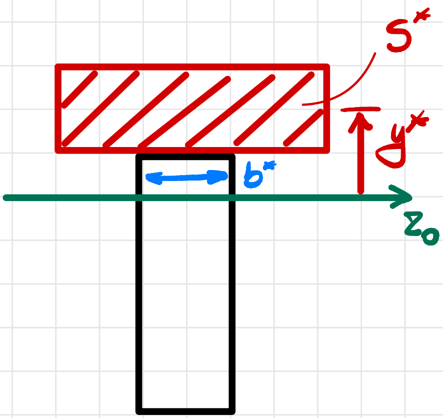
Exemplo: Determinar a máxima tensão de ruptura de cisalhamento na cola para que o fator de segurança seja 2.





$I_{z_0} = 176.256\,cm^4$

A cortante é constante para o problema.



$b^* = 12\,cm$; $S^* = 432\,cm^2$; $y^* = 12\,cm$

$M_S^* = S^* y^* = 432 \cdot 12 = 5184\,cm^3$

$$\tau^* = \frac{60 \cdot 5184}{12 \cdot 176.256} = 0{,}147\,\frac{kN}{cm^2} = 1{,}47\,MPa$$

Para $s = 2$:

$$\frac{\tau_R}{s} = \bar{\tau} \rightarrow \tau_R = s \cdot \bar{\tau} = 2 \cdot 1{,}47 = 2{,}94\,MPa$$

Assim $\tau_R \cong 3\,MPa$.