



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

CAPÍTULOS 6 a 11

HENRIQUE LINDENBERG NETO

2006

Agradecimentos

Apresento os meus agradecimentos aos alunos Alexandre Gross, Guilherme Radwanski Stuart, Danilo Luiz Iasi Moura e João Paulo Cecilio Leite Ribeiro pela execução das figuras e pela composição deste texto, feitas com muita competência, seriedade e esmero. O aluno Alexandre encarregou-se do Capítulo 8, o aluno Guilherme, do Capítulo 7, o aluno Danilo, dos Capítulos 6 e 9, e o aluno João Paulo, dos Capítulos 10 e 11.

O aluno Alexandre Gross, atualmente no terceiro ano do curso de engenharia ambiental da Escola Politécnica da USP, é aluno-monitor da disciplina PEF-2200 "Introdução à mecânica das estruturas" desde outubro de 2005; o aluno Guilherme Radwanski Stuart foi aluno-monitor da disciplina PEF-2200 "Introdução à mecânica das estruturas" em 2004 e 2005, o aluno Danilo Luiz Iasi Moura, em 2000 e 2001, e o aluno João Paulo Cecilio Leite Ribeiro foi aluno-monitor da disciplina PEF-124 "Introdução à mecânica das estruturas" em 1999. A elaboração das figuras e a composição deste texto fazem parte das atividades por eles desenvolvidas nas suas monitorias.

São Paulo, maio de 2006

Henrique Lindenberg Neto

Capítulo 6: Linhas de influência

6.1 Introdução

Até o momento foram estudadas estruturas submetidas a carregamentos fixos, isto é, a carregamentos que não se movem ao longo da estrutura.

Há de fato inúmeros carregamentos que são fixos: o peso próprio de uma estrutura, o peso do revestimento de uma laje de piso, o peso de uma parede suportada por uma viga, etc. Estas cargas, que além de fixas são constantes, atuam sempre na estrutura, recebendo por isso o nome de cargas permanentes.

Além das cargas permanentes, as estruturas são submetidas a cargas variáveis, e que em determinados momentos da vida da estrutura nem mesmo atuam. É o caso dos veículos que passam por uma ponte, das pessoas que se utilizam de uma passarela, das pessoas e móveis que ocupam uma sala, dos automóveis deixados em um estacionamento, dos materiais estocados em um depósito, etc.

Algumas destas cargas são intrinsecamente móveis – o trem que passa por uma ponte, os torcedores em um estádio de futebol, os automóveis em uma garagem –, e outras podem se mover eventualmente – os livros e as estantes de uma biblioteca, os produtos e as estantes de um supermercado, o milho armazenado em um silo. Estas cargas móveis e variáveis recebem o nome de cargas acidentais.

No caso do projeto de edificações, é usual substituir as cargas móveis e variáveis por uma carga fixa uniformemente distribuída, cujo efeito se considera equivalente ao das cargas móveis e variáveis em sua combinação mais desfavorável.

Estas cargas distribuídas equivalentes às cargas móveis são determinadas estatisticamente, e são fixadas pelas normas de projeto de estruturas. No Brasil, são fixadas pela norma NBR 6120 "Cargas para o cálculo de estruturas de edificações", de 1980; alguns dos valores mínimos para as cargas verticais nela estipulados estão apresentados na Tabela 6.1.

Local		Carga (kN/m ²)
Arquibancadas		4
Cinemas	Platéia com assentos fixos	3
	Estúdio e platéia com assentos móveis	4
	Banheiro	2
Clubes	Sala de refeições e de assembléia com assentos fixos	3
	Sala de assembléia com assentos móveis	4
	Salão de danças e salão de esportes	5
	Sala de bilhar e banheiro	2
Edifícios residenciais	Dormitórios, sala, copa, cozinha e banheiro	1,5
	Dispensa, área de serviço e lavanderia	2
Garagens e estacionamentos	Para veículos de passageiros ou semelhantes com carga máxima de 25 kN por veículo	3
Ginásios de esportes		5
Hospitais	Dormitórios, enfermarias, sala de recuperação, sala de cirurgia, sala de raio X e banheiro	2
	Corredor	3
Lojas		4

Teatros	Palco Demais dependências: cargas iguais às especificadas para cinemas	5
---------	---	---

Tabela 6.1

Vários outros valores mínimos de cargas acidentais são fixados pela NBR 6120: para bancos, bibliotecas, escadas, escolas, laboratórios, restaurantes, etc.

Ao contrário das cargas acidentais que atuam nas edificações, as que atuam nas pontes e viadutos não ficam bem representadas por uma carga uniformemente distribuída equivalente.

As normas de projeto de pontes e viadutos fixam então cargas móveis de projeto, que recebem o nome de trens-tipo. Este nome, oriundo do projeto de obras ferroviárias, é também utilizado para designar as cargas das obras rodoviárias. No Brasil, as normas NBR 7188 "Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre", de 1984, e NBR 7189 "Cargas móveis para projeto estrutural de obras ferroviárias", de 1985, fixam os trens-tipo das estruturas rodoviárias e ferroviárias.

Os trens-tipo são determinados estatisticamente, e correspondem à carga mais desfavorável que se supõe que possa atuar na estrutura.

Os trens-tipo estipulados pela NBR 7188 para as pontes rodoviárias são constituídos por um caminhão pesado, circundado por veículos mais leves, como se mostra na Figura 6.1.

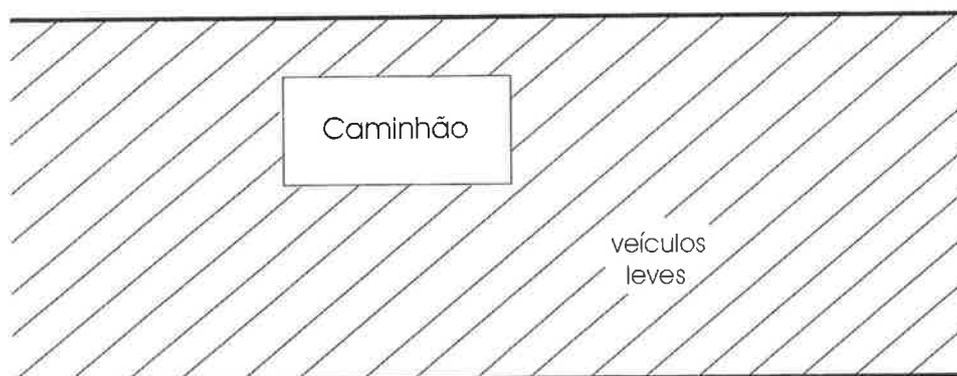


Figura 6.1

São definidas três classes de pontes, em função do peso dos caminhões que por elas trafegam: classe 45, classe 30 e classe 12, nas quais o caminhão-tipo tem respectivamente 450 kN (45 tf), 300 kN (30 tf) e 120 kN (12 tf) de peso total.

Para as pontes da classe 45, o caminhão-tipo estipulado pela NBR 7188 possui as dimensões apresentadas na Figura 6.2.

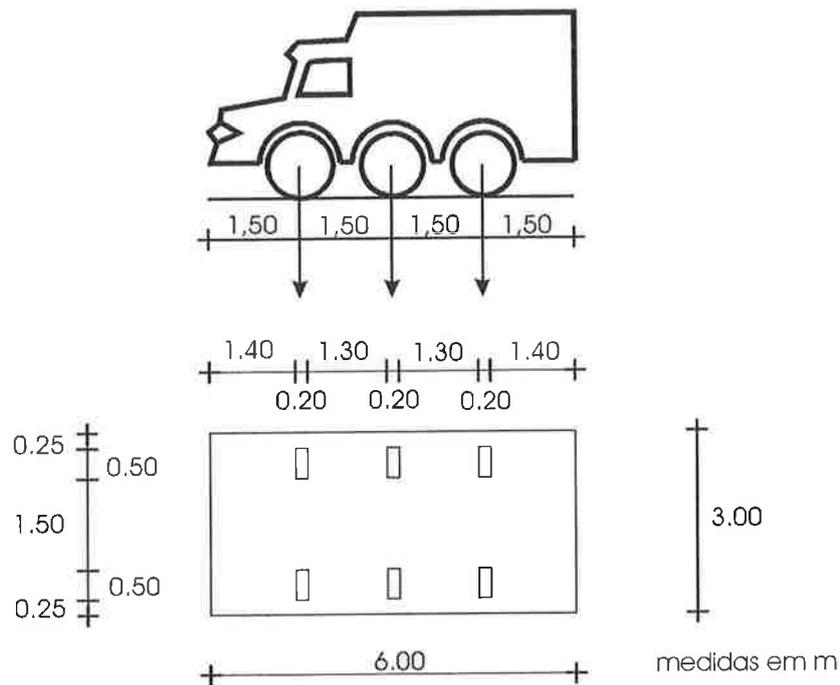


Figura 6.2

O peso de cada uma das rodas do caminhão-tipo das pontes da classe 45 é de 75 kN, aplicado de forma distribuída na área de contato do pneu com o tabuleiro da ponte, mostrada na Figura 6.2.

Ao se fazer o projeto das vigas principais de uma ponte, os pesos das rodas do caminhão-tipo podem ser considerados como cargas concentradas, devendo ser considerados como cargas distribuídas no projeto das lajes.

Para as três classes de pontes, a NBR 7188 estipula que o peso dos veículos leves que circundam o caminhão-tipo pode ser representado por uma carga uniformemente distribuída de 5 kN/m². Esta carga distribuída é usualmente chamada de carga de multidão.

Os trens-tipo das pontes ferroviárias são constituídos por composições formadas por uma locomotiva e vagões carregados e vazios.

A NBR 7189 define quatro classes de trens-tipo ferroviários, em função do peso dos trens que trafegam na linha: classe TB-360, classe TB-270, classe TB-240 e classe TB-170, para locomotivas respectivamente com 360 kN, 270 kN, 240 kN e 170 kN de peso por eixo.

O trem-tipo TB-360, que deve ser usado no projeto de estruturas de ferrovias utilizadas para o transporte de minério de ferro ou outros carregamentos equivalentes, é apresentado na Figura 6.3. As cargas concentradas correspondem ao peso da locomotiva, e as distribuídas aos pesos dos vagões carregados e descarregados.

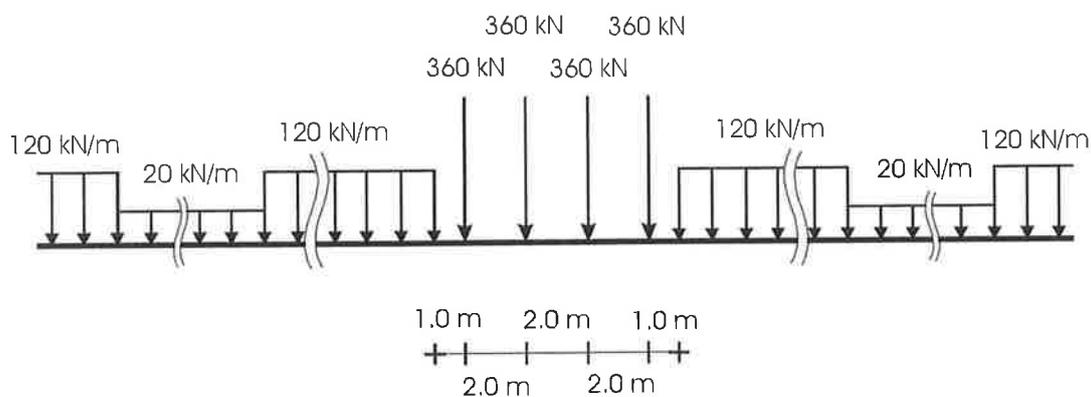


Figura 6.3

Existem estradas tanto rodoviárias como ferroviárias que são usadas para o transporte de cargas excepcionais, que excedem as cargas de projeto definidas pelas normas; nestes casos, as entidades responsáveis pela estrada devem definir o trem-tipo a ser utilizado no seu projeto.

Uma situação relativamente freqüente na prática é a de estradas que, tendo sido projetadas para um certo carregamento, em determinadas ocasiões são utilizadas para o transporte de cargas excepcionais muito maiores que as de projeto. É o que ocorreu, por exemplo, quando foi construída a barragem de Itaipu. Os caminhões que transportaram os geradores e turbinas da usina tinham um peso muito maior que o do caminhão-tipo utilizado no projeto das pontes e viadutos das estradas pelas quais passaram. Foram então projetados veículos especiais com um grande número de eixos e rodas para distribuir ao máximo a carga no tabuleiro, e foi feita a verificação das pontes e viadutos do trajeto para determinar se resistiriam com segurança à passagem destes caminhões; as que não apresentavam segurança adequada foram reforçadas. Além disto, a passagem dos caminhões era planejada em todos os seus detalhes: as pontes e viadutos foram vistoriados e fotografados antes da passagem dos veículos, foram fechados aos demais veículos para que apenas o veículo transportando a peça de peso excepcional estivesse passando por eles, o trajeto do veículo na ponte ou viaduto foi previamente determinado pelo engenheiro responsável pela verificação da obra, essa passagem foi feita de maneira lenta para diminuir os efeitos de impacto dinâmico, um engenheiro acompanhou o comportamento da estrutura durante a passagem do caminhão, as pontes e viadutos foram novamente vistoriados e fotografados após a passagem do veículo, tendo sido recuperados os que foram danificados.

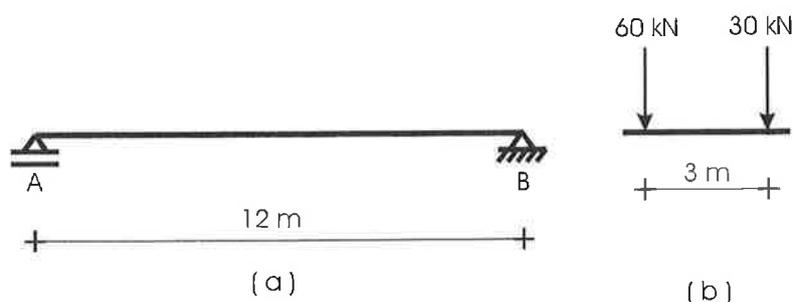


Figura 6.4

Como se acaba de ver, no projeto de pontes e viadutos deve-se considerar cargas móveis. Suponha-se, por exemplo, que se queira dimensionar a viga de ponte rodoviária da Figura 6.4 (a), submetida ao trem-tipo da Figura 6.4 (b) que, por simplicidade, se está supondo consistir apenas de um caminhão-tipo.

Surge, então, a seguinte pergunta, de importância fundamental para o projeto que se deseja fazer: que esforços solicitantes devem ser utilizados para dimensionar esta viga?

A resposta a esta pergunta é bastante intuitiva: à medida que o trem-tipo se desloca de uma extremidade à outra da viga – por exemplo, de A até B –, os esforços solicitantes nas diferentes seções transversais vão variando. É necessário então determinar, para cada seção transversal da viga, os valores dos esforços solicitantes máximos na seção e utilizá-los no dimensionamento da viga.

Considere-se, por exemplo, a seção S indicada na Figura 6.5. Faz-se agora outra pergunta: que posição do trem-tipo na ponte produzirá o maior momento fletor em S?

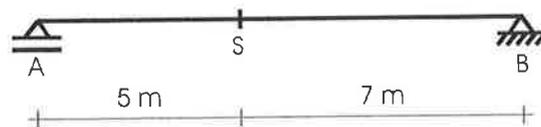


Figura 6.5

Embora a resposta exata a esta pergunta não seja intuitiva, uma resposta que surge naturalmente a esta indagação é: quando o trem-tipo estiver próximo de S. Não é muito claro se quando o eixo mais pesado estiver sobre S, se quando o centro de gravidade do trem-tipo estiver sobre S, mas percebe-se que será quando o trem-tipo estiver perto de S. Como se verá adiante, esta resposta natural é de fato correta.

É para responder a perguntas deste tipo, para determinar os esforços extremos produzidos pelos carregamentos móveis que as linhas de influência foram concebidas. Elas são diagramas que possibilitam a determinação dos esforços extremos produzidos por cargas móveis.

6.2 Linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada

Nesta seção estudam-se as linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada.

Inicialmente, o conceito de linha de influência será apresentado de forma qualitativa, mediante um exemplo.

Considere-se a viga simplesmente apoiada da Figura 6.6, sobre a qual se desloca uma carga unitária móvel, que a percorre em toda sua extensão, da extremidade esquerda à extremidade direita. Deseja-se agora responder a seguinte pergunta: que momentos fletores esta carga móvel irá produzir na seção S à medida que se deslocar de A até B? Imagine-se que se tenha colocado em S um instrumento que informa o valor do momento fletor em S produzido por um carregamento qualquer atuando na viga – estes instrumentos de fato existem. A resposta à pergunta acima é agora imediata, sendo fornecida pela leitura deste instrumento durante a passagem da carga unitária pela viga.

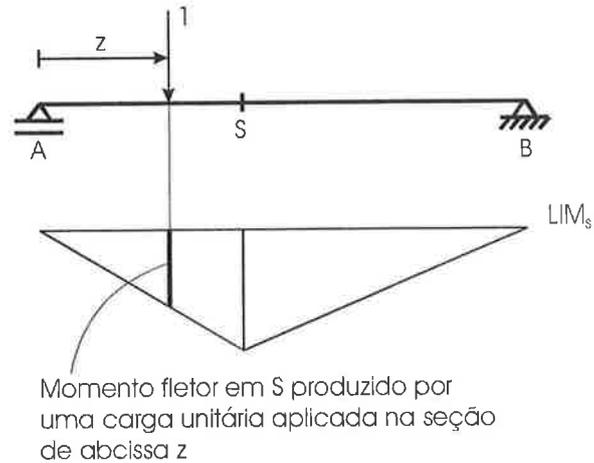


Figura 6.6

Os valores do momento fletor em S lidos no instrumento podem ser colocados no gráfico mostrado na Figura 6.6, em que sob a posição em que está a carga em um determinado instante se indica o valor do momento fletor por ela produzido em S. Pois bem, a linha de influência do momento fletor em S é exatamente este gráfico, que mostra como varia o momento fletor em S à medida que a carga unitária móvel percorre a viga.

É fundamental observar neste gráfico uma característica essencial das linhas de influência: nele são apresentados os **esforços solicitantes em uma única seção transversal** da viga – a **seção fixa S** – produzidos por uma **carga unitária móvel aplicada em todas as posições possíveis** da viga.

Nota-se, então, que as linhas de influência são completamente diferentes dos diagramas de esforços solicitantes estudados até aqui. Observe o Exemplo 5.18 do Capítulo 5, em que se determinaram os diagramas de esforços solicitantes de uma viga simplesmente apoiada carregada por uma força concentrada aplicada no meio do vão. O **carregamento** desta viga é **fixo**, não varia nem de intensidade nem de posição ao longo do tempo, e os diagramas de esforços solicitantes da Figura 5.85 mostram os **esforços solicitantes** que este carregamento fixo produz **em todas as seções transversais** da viga. São mostrados nos diagramas de esforços solicitantes os **esforços em todas as seções transversais** da viga produzidos por um **carregamento fixo**.

Já as linhas de influência apresentam o contrário: os **esforços em uma única seção** da viga produzidos por uma **carga unitária móvel aplicada em todas as posições** da viga.

Feita esta apresentação informal do conceito de linha de influência, pode-se agora passar a uma definição mais formal.

Definição 6.1

Linha de influência do esforço E_S na seção fixa S é o diagrama que fornece o valor de E_S produzido por uma carga unitária móvel adimensional que percorre toda a extensão da viga (Figura 6.7).

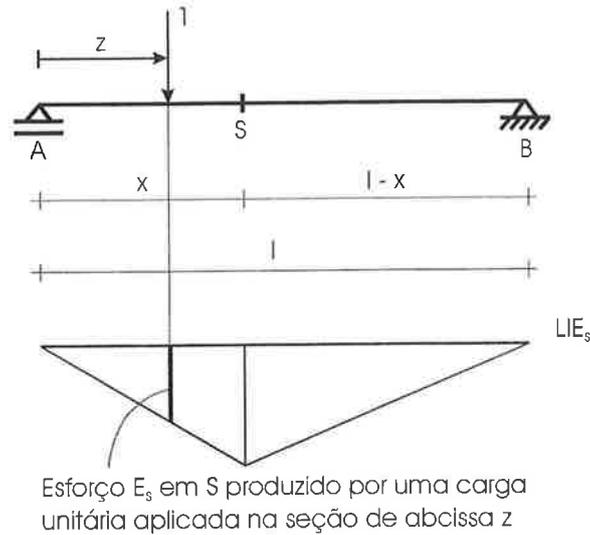


Figura 6.7

Observa-se nesta definição que as linhas de influência são determinadas para uma carga unitária móvel **adimensional**. Isto é feito para dar universalidade às linhas de influência, ou seja, para permitir que elas sejam utilizadas para determinar os esforços produzidos por quaisquer carregamentos móveis, independentemente da unidade de medida em que eles estejam definidos, seja ela o N, o kN, o kgf, a tf, etc. Mais adiante se mostrará com mais clareza porque a adoção de uma carga unitária móvel adimensional torna as linhas de influência universais.

Pode-se agora, utilizando a definição de linha de influência de um esforço E_s , obter as linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada. Basta para isso supor que uma força unitária esteja percorrendo a viga em toda sua extensão, determinar o valor do esforço E_s que ela produzirá em S quando estiver em uma posição qualquer da viga, e indicar graficamente sob a posição da carga o valor deste esforço E_s .

Serão determinadas:

1. A linha de influência da reação vertical do apoio da esquerda;
2. A linha de influência da reação vertical do apoio da direita;
3. A linha de influência da força cortante em uma seção fixa S;
4. A linha de influência do momento fletor na mesma seção fixa S.

Considere-se a viga simplesmente apoiada da Figura 6.8, sobre a qual se desloca uma força unitária móvel adimensional, de A até B. No instante mostrado na Figura 6.8, esta força encontra-se em uma posição genérica, caracterizada pela abscissa z.

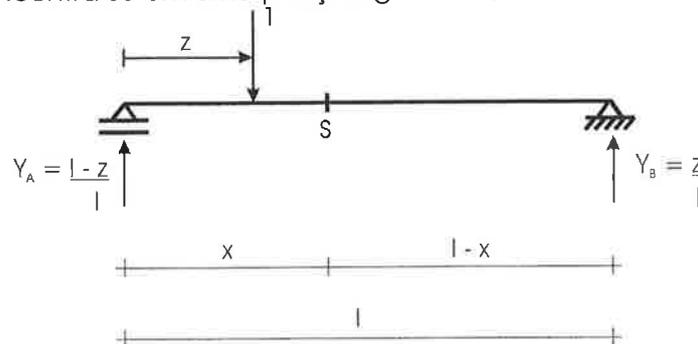


Figura 6.8

As reações verticais desta viga são

$$Y_A = \frac{l-z}{l}$$

e

(6.1)

$$Y_B = \frac{z}{l}$$

As linhas de influências das reações verticais em A e em B têm como equações

$$LIY_A = \frac{l-z}{l}$$

e

(6.2)

$$LIY_B = \frac{z}{l}$$

pois estes são justamente os valores da reação em A e da reação em B quando a força unitária se encontra na seção genérica de abcissa z . Variando z , obtêm-se as variações destas reações.

É intuitivo que, quando a força unitária estiver em A, toda a carga será absorvida pelo próprio apoio A, tendo-se então $Y_A = 1$ e $Y_B = 0$; analogamente, é intuitivo que, quando a carga unitária estiver em B, se terá $Y_A = 0$ e $Y_B = 1$; também é intuitivo que a reação em A diminua e a reação em B cresça à medida que a força unitária se desloque de A até B. As expressões (6.2) mostram que esta variação é linear.

Na Figura 6.9, abaixo do esquema da viga, estão traçadas as linhas de influência da reação vertical Y_A e da reação vertical Y_B , que nada mais são que os gráficos das funções (6.2). Elas mostram como variam as reações de apoio à medida que a carga unitária se desloca da extremidade A à extremidade B. Observa-se que as linhas de influência destas reações de apoio só apresentam valores positivos. A razão disto é muito simples: as reações verticais de apoio são consideradas positivas quando orientadas para cima e negativas quando orientadas para baixo. As reações Y_A e Y_B da viga simplesmente apoiada da Figura 6.8 são sempre para cima, qualquer que seja a posição da carga unitária, decorrendo deste fato os valores exclusivamente positivos das linhas de influência das reações Y_A e Y_B . Observa-se, também, que, como a carga na viga é adimensional, estas duas linhas de influência, sendo gráficos de forças, também são adimensionais, o que, como já se mencionou, lhes confere universalidade.

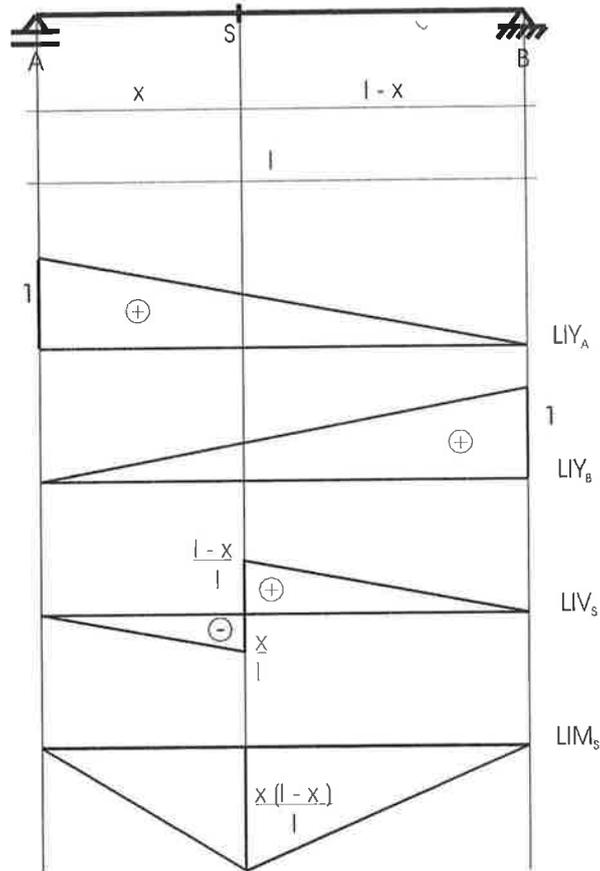


Figura 6.9

As linhas de influência das reações de apoio são importantíssimas, pois permitem a determinação das máximas cargas que irão atuar nos elementos de sustentação da viga, possibilitando, por exemplo, obter-se as cargas máximas nos pilares e nas respectivas fundações.

Passa-se agora à determinação da linha de influência da força cortante em S. Considere-se novamente a viga simplesmente apoiada da Figura 6.8, sobre a qual se desloca uma força unitária móvel adimensional, de A até B. No instante mostrado na Figura 6.8 esta força ainda não atingiu a seção S, encontrando-se à sua esquerda, em uma posição genérica caracterizada pela abcissa z.

Enquanto a força unitária estiver à esquerda de S, a força cortante em S será

$$V_S = -\frac{z}{l}, \quad (6.3)$$

logo a equação da linha de influência da força cortante em S para a carga unitária à esquerda desta seção é

$$LIV_S = -\frac{z}{l}, \quad 0 \leq z < x. \quad (6.4)$$

Este trecho da linha de influência da força cortante pode ser examinado na Figura 6.9, verificando-se que enquanto a força unitária estiver à esquerda de S a força cortante nesta seção será negativa, variando linearmente de 0 em A até $-x/l$ em uma seção imediatamente à esquerda de S.

Na Figura 6.10 mostra-se novamente a viga, agora em um instante em que a força unitária já ultrapassou a seção S , encontrando-se à sua direita. As reações da viga continuam sendo as dadas pelas expressões (6.1).

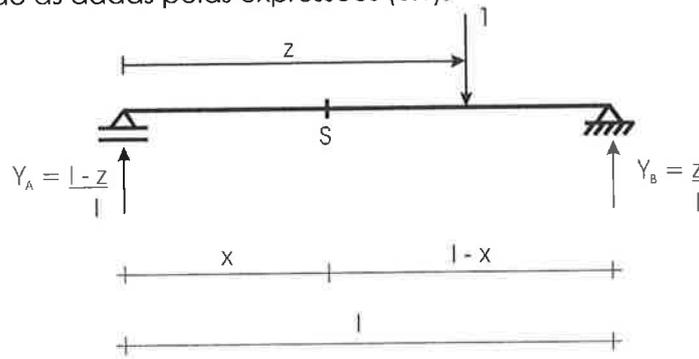


Figura 6.10

Observa-se que agora a força cortante em S não é mais a dada por (6.3), tendo-se

$$V_S = \frac{l-z}{l}. \quad (6.5)$$

A equação da linha de influência da força cortante em S para a força unitária à direita desta seção é então

$$LIV_S = \frac{l-z}{l}, \quad x < z \leq l; \quad (6.6)$$

este trecho da linha de influência da força cortante em S pode ser observado na Figura 6.9.

Examinando a linha de influência da força cortante mostrada na Figura 6.9, verifica-se que ela apresenta uma descontinuidade em S . Quando a força cortante está imediatamente à esquerda de S tem-se $V_s = -x/l$, e quando está imediatamente à direita de S tem-se $V_s = (l-x)/l$, isto é,

$$V_S(x_-) = -\frac{x}{l}$$

e

$$V_S(x_+) = \frac{l-x}{l},$$

(6.7)

Cabe agora uma pergunta: que valor toma linha de influência da força cortante em S quando a carga unitária se encontra em S ? Para responder a esta pergunta é preciso determinar o valor da força cortante produzida em S por uma força unitária aplicada nesta mesma seção. Como foi discutido no Exemplo 5.3 do Capítulo 5, a força cortante em uma seção em que é aplicada uma força concentrada perpendicular ao eixo da barra não fica definida. O valor da linha de influência da força cortante na própria seção S não fica então definido. A rigor, a linha de influência da força cortante deveria explicitar esta indefinição, tomando o aspecto mostrado na Figura 6.11.

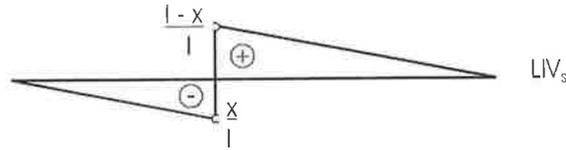


Figura 6.11

Na prática, entretanto, omite-se esta informação, traçando-se a linha de influência da força cortante como se fez na Figura 6.9, ficando subentendido que o seu valor em S não é definido.

Observa-se mais uma vez que sendo a linha de influência da força cortante em S o diagrama de uma força cortante produzida por uma carga adimensional ela também é adimensional.

O exame da linha de influência da força cortante em S mostrada na Figura 6.9 revela que a máxima e a mínima força cortante em S produzidas por uma força unitária que percorre a viga em toda sua extensão são respectivamente $(l-x)/l$ – para a força unitária aplicada imediatamente à direita de S – e $-x/l$ – para a força unitária aplicada imediatamente à esquerda de S . Observa-se que estes extremos são o máximo valor algébrico e o mínimo valor algébrico da força cortante em S .

As linhas de influência das forças cortantes são fundamentais para o dimensionamento de uma viga submetida a cargas móveis, por permitirem a determinação das forças cortantes extremas nas suas diversas seções transversais.

Falta agora determinar a linha de influência do momento fletor em uma seção transversal genérica S da viga simplesmente apoiada. Considere-se mais uma vez a viga da Figura 6.8, percorrida por uma força unitária móvel adimensional, que vai de A a B ; recorda-se que no instante mostrado na Figura 6.8 a força unitária ainda não atingiu a seção S , estando à sua esquerda.

Enquanto a força unitária estiver à esquerda de S , o momento fletor nesta seção será

$$M_s = \frac{z}{l} \cdot (l-x) , \quad (6.8)$$

logo a equação da linha de influência do momento fletor em S para a força unitária à esquerda desta seção é

$$LIM_s = \frac{z(l-x)}{l} , \quad 0 \leq z \leq x . \quad (6.9)$$

Este trecho da linha de influência do momento fletor em S pode ser visto na Figura 6.9. Ele é linear, variando de 0 para a força unitária em A a $x(l-x)/l$ para a força unitária em S .

Para completar a determinação da linha de influência do momento fletor em S , observe-se mais uma vez a Figura 6.10, em que se mostra a viga em um instante em que a força unitária já ultrapassou a seção S , encontrando-se à sua direita.

O momento fletor em S é agora

$$M_S = \frac{(l-z)}{l} \cdot x, \quad (6.10)$$

portanto a equação da linha de influência do momento fletor em S para a força unitária à direita desta seção é então

$$LIM_S = \frac{(l-z)x}{l}, \quad x \leq z \leq l; \quad (6.11)$$

este trecho da linha de influência pode ser observado na Figura 6.9. Ele é linear, e seu valor varia de $x(l-x)/l$ em S a 0 em B.

Como a linha de influência do momento fletor em S é o diagrama de um momento fletor produzido por uma força adimensional, ela tem a dimensão de um comprimento, não a de uma força multiplicada por um comprimento.

É importante observar que – como se pode ver na Figura 6.9 – a linha de influência do momento fletor em S não apresenta uma descontinuidade nesta seção, ao contrário do que ocorre com a linha de influência da força cortante em S. Isto decorre do fato de o momento fletor produzido em S por uma força aplicada nesta seção ser muito bem definido, ao contrário do que ocorre com a força cortante.

Observa-se também que o máximo momento fletor em S produzido na viga simplesmente apoiada por uma força unitária que a percorre em toda extensão é $x(l-x)/l$ – para a força unitária aplicada em S – e que o mínimo momento fletor em S é zero – para a força unitária aplicada em qualquer uma das extremidades da viga.

Antes de se passar à próxima seção, em que as linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada serão empregadas na determinação dos esforços solicitantes extremos de uma viga submetida a cargas móveis, serão apresentadas algumas regras práticas para a construção das linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada.

Como já se comentou no Capítulo 5 ao se apresentar a “regra do barbante” para a determinação da concavidade dos diagramas de momentos fletores produzidos por forças distribuídas, só se deve utilizar uma regra prática após se ter compreendido perfeitamente porque ela funciona.

Não é porque existem regras práticas que permitem que as linhas de influência de uma viga sejam determinadas de forma simples e imediata que não é preciso saber deduzí-las. É muito mais importante desconhecer as regras práticas e saber como deduzir as linhas de influência que o contrário.

É por serem muito simples e utilíssimas que convém apresentar estas regras práticas.

Regra 6.1 – Regra para o traçado da linha de influência da reação vertical do apoio esquerdo de uma viga simplesmente apoiada

Na Figura 6.12 apresentam-se os passos que devem ser seguidos para se traçar a linha de influência da reação vertical do apoio esquerdo de uma viga simplesmente apoiada:

1. Sob o esquema da viga, traça-se uma paralela a seu eixo;

- Na escala escolhida para indicar as ordenadas da linha de influência, traça-se um segmento unitário acima da extremidade esquerda do diagrama, determinando-se o ponto P;
- Traça-se um segmento de reta unindo os pontos P e E_B , obtendo-se assim a linha de influência procurada, como se pode verificar examinando a Figura 6.9.

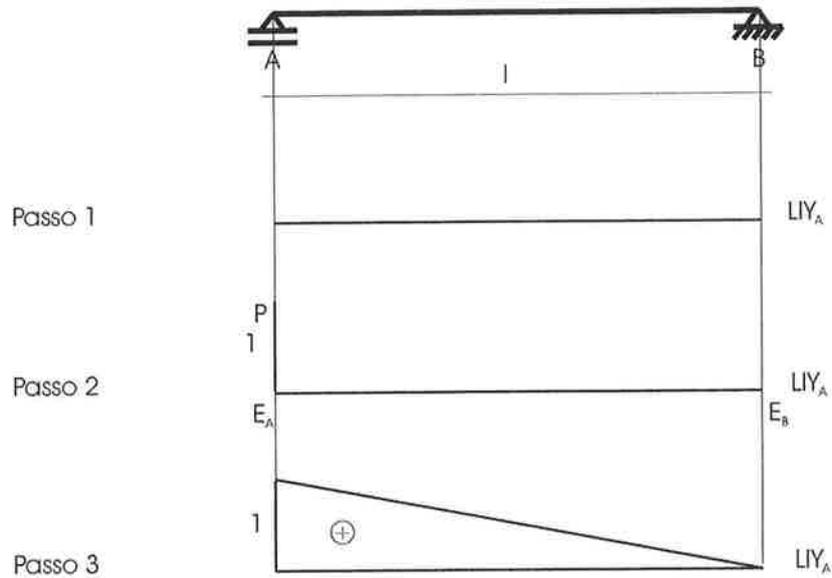


Figura 6.12

Regra 6.2 – Regra para o traçado da linha de influência da reação vertical do apoio direito de uma viga simplesmente apoiada

Esta regra é inteiramente análoga à anterior, e seus passos estão indicados na Figura 6.13.

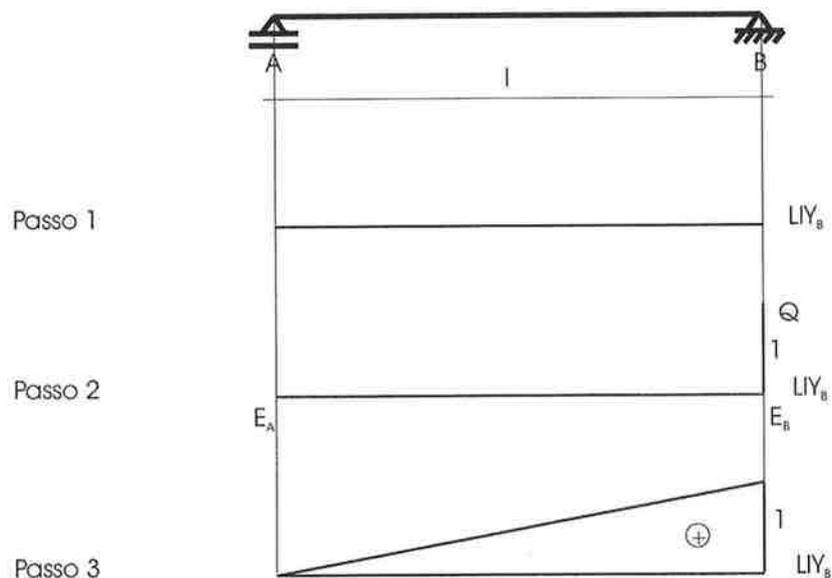
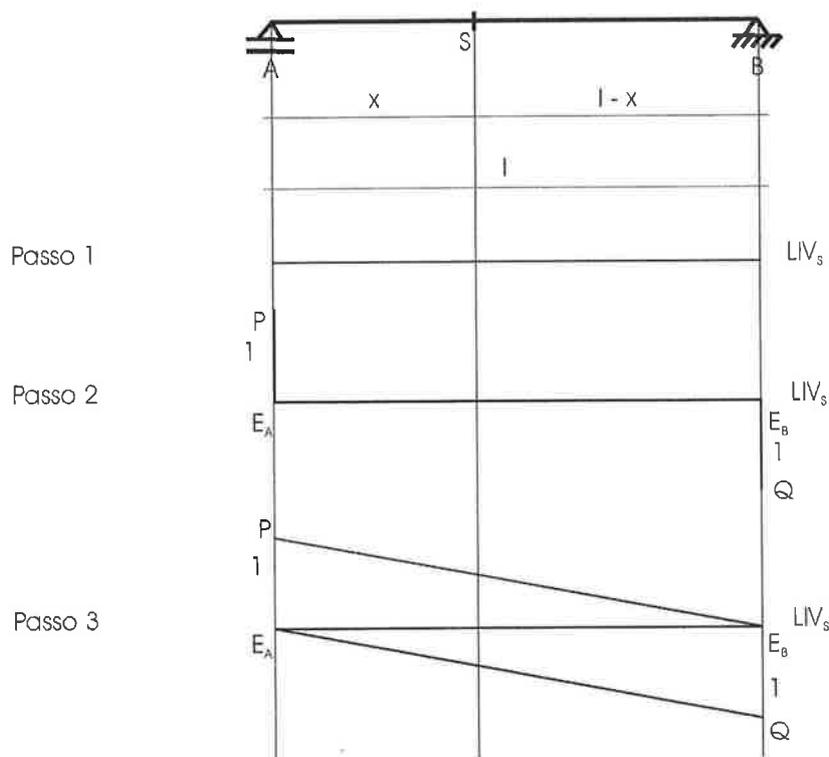


Figura 6.13

Regra 6.3 – Regra para o traçado da linha de influência da força cortante em uma seção transversal genérica de uma viga simplesmente apoiada

Os passos para a obtenção da linha de influência da força cortante em uma seção genérica S de uma viga simplesmente apoiada estão apresentados na Figura 6.14:

1. Sob o esquema da viga, traça-se uma paralela a seu eixo;
2. Na escala escolhida para indicar as ordenadas da linha de influência, traça-se um segmento unitário acima da extremidade esquerda do diagrama, determinando-se o ponto P , e um segmento unitário abaixo da extremidade direita do diagrama, determinando-se o ponto Q ;
3. Traça-se um segmento de reta unindo os pontos P e E_B , e um segmento de reta unindo os pontos E_A e Q ;
4. Baixa-se a partir da seção S da viga uma vertical que corta PE_B em R , E_AE_B em S e E_AQ em T ;
5. Os segmentos E_AT e RE_B determinam a linha de influência procurada – como mostra uma comparação com a Figura 6.9 –, pois aplicando uma regra de três verifica-se que o comprimento de RS é $(l-x)/l$ e que o de ST é x/l .



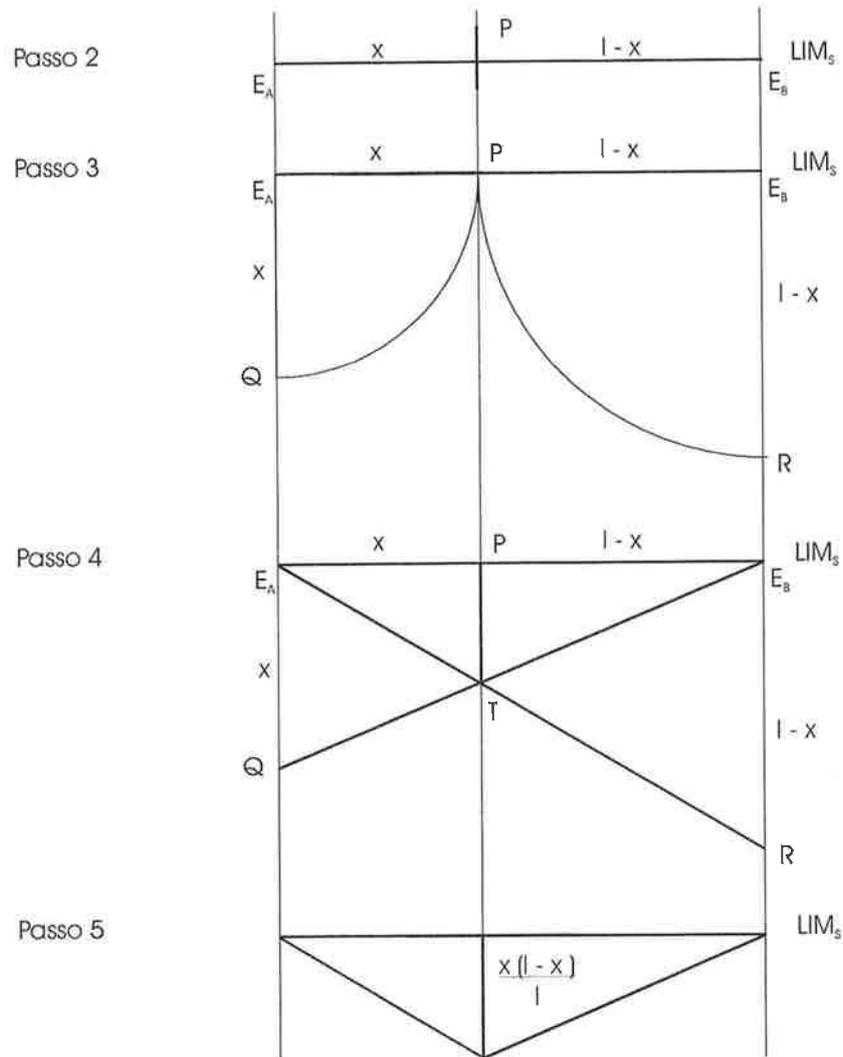
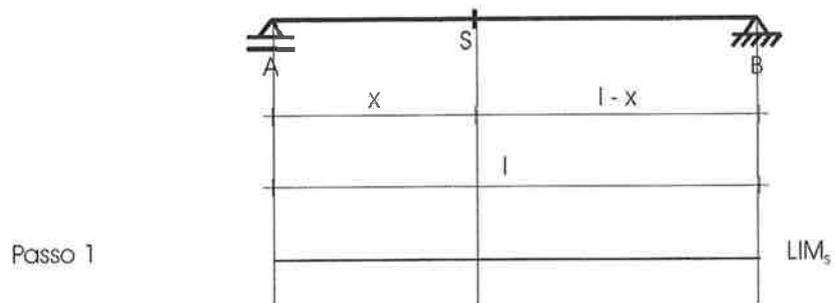


Figura 6.15

É interessante observar que o traçado da linha de influência do momento fletor em S pode ser obtido de maneira mais simples que a mostrada na Figura 6.15, sendo suficiente traçar apenas uma das circunferências com centro em uma das extremidades do diagrama. Na Figura 6.16 indica-se esta forma mais simplificada de obter a linha de influência do momento fletor em S .



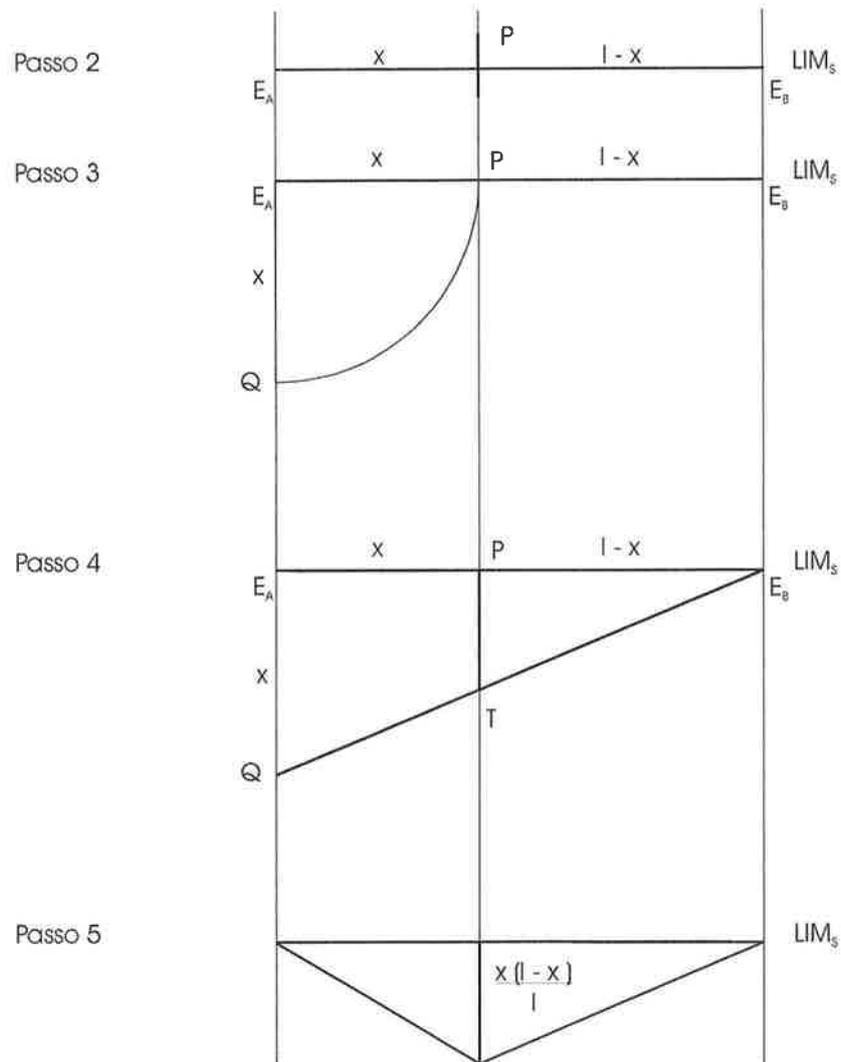


Figura 6.16

6.3 Diagramas de máximos e mínimos

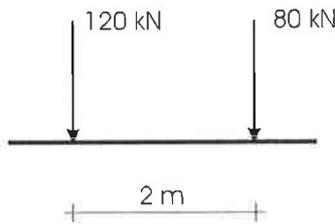
Como se comentou na Seção 6.1, a finalidade das linhas de influência é possibilitar a determinação dos esforços solicitantes e reativos extremos de uma estrutura submetida a cargas móveis, necessários para o dimensionamento ou para a verificação destas estruturas.

Nesta seção se mostrará como as linhas de influência são utilizadas na determinação destes esforços extremos. Isto será feito mediante a resolução de um exemplo.

Exemplo 6.1

Para a viga de ponte da Figura 6.17, solicitada pelo seguinte carregamento

- peso próprio: $g = 20 \text{ kN/m}$
- carga de multidão: $p = 10 \text{ kN/m}$
- veículo-tipo:



determinar:

- as reações de apoio extremas;
- os esforços solicitantes extremos em suas seções transversais.

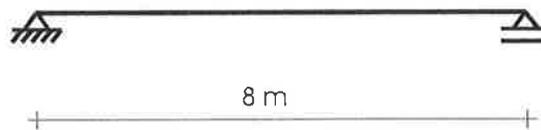


Figura 6.17

Nota 6.1

Antes de se passar à resolução deste exemplo, deve-se fazer uma observação com relação à carga de multidão. Como se comentou na Seção 6.1, a carga de multidão provém de veículos leves que circundam o veículo-tipo durante sua passagem pela ponte. Esta carga não pode ser constante ao longo de uma viga longitudinal da ponte, pois o veículo-tipo e um veículo leve não podem ocupar simultaneamente uma mesma região do tabuleiro, como se vê claramente na Figura 6.1. O efeito da multidão é maior na frente e atrás do veículo-tipo, e menor onde ele se encontra, como mostrado na Fig. 6.18; estes diferentes efeitos da multidão são de fato considerados no projeto de uma ponte. No caso particular deste exemplo, por razões didáticas, para simplificar sua resolução está-se admitindo que a carga de multidão seja constante ao longo de toda a viga.

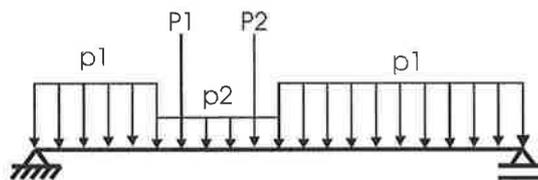


Figura 6.18

#

Para resolver este exemplo, deve-se determinar:

- as reações extremas (máxima e mínima) dos dois apoios da viga;
- as forças cortantes extremas (máxima e mínima) em todas as seções transversais da viga;
- os momentos fletores extremos (máximo e mínimo) em todas as seções transversais da viga.

Estes esforços solicitantes extremos costumam ser apresentados graficamente, por meio dos diagramas de máximos e mínimos das forças cortantes e dos momentos fletores.

Definição 6.2

Diagrama de máximos e mínimos das forças cortantes de uma viga é o diagrama em se representam graficamente o máximo e o mínimo valor da força cortante em todas as seções transversais de uma viga submetida a um carregamento móvel.

Analogamente, tem-se:

Definição 6.3

Diagrama de máximos e mínimos dos momentos fletores de uma viga é o diagrama em se representam graficamente o máximo e o mínimo valor do momento fletor em todas as seções transversais de uma viga submetida a um carregamento móvel.

Estes diagramas são determinados por pontos, interpolando-se linearmente os valores dos esforços entre estes pontos. No caso particular deste exemplo, serão determinados por meio dos cinco pontos indicados na Figura 6.19, igualmente espaçados um do outro.

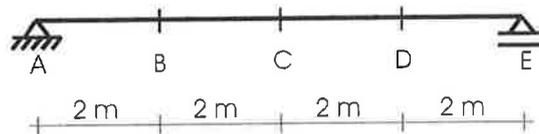


Figura 6.19

Examinando o carregamento que atua nesta viga, observa-se que ele é constituído por uma carga fixa – o peso próprio – e por duas cargas móveis – a carga de multidão e o veículo-tipo.

Pelo fato de o peso próprio não ser um carregamento móvel, os esforços produzidos por ele não variam, podendo ser determinados por meio dos diagramas de esforços solicitantes habituais; já os esforços decorrentes das cargas móveis, por serem variáveis, devem ser determinados por meio das linhas de influência.

A resolução deste exemplo será feita então em duas etapas, determinando-se separadamente os esforços produzidos pelo peso próprio e os produzidos pelas cargas móveis, que, somados, levarão aos esforços extremos procurados.

1. Esforços decorrentes do peso próprio

Na Figura 6.20 estão representados os diagramas de esforços solicitantes da viga solicitada exclusivamente pelo peso próprio.

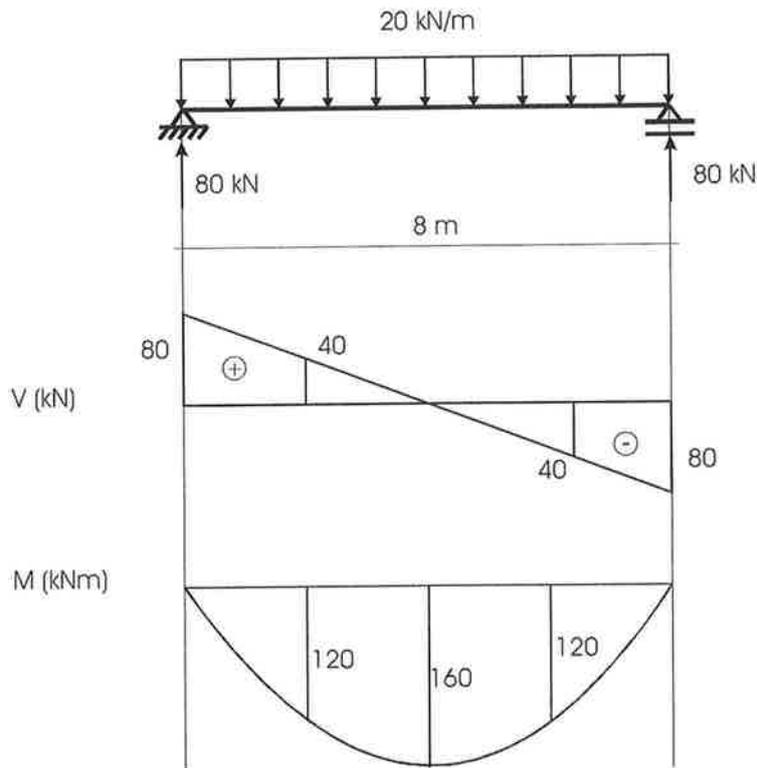


Figura 6.20

Têm-se as seguintes reações de apoio e os seguintes esforços solicitantes nas cinco seções particulares da viga da Figura 6.19:

	A	B	C	D	E
Reação vertical (kN)	80	-	-	-	80
Força cortante (kN)	80	40	0	- 40	- 80
Momento fletor (kNm)	0	120	160	120	0

Tabela 6.2 – Esforços devidos ao peso próprio

Estes esforços produzidos pelo peso próprio serão posteriormente somados aos produzidos pelas cargas móveis.

2. Esforços decorrentes do carregamento móvel e esforços extremos

2.1 Reações de apoio

Serão inicialmente determinadas as reações de apoio extremas.

Na Figura 6.21 indica-se a linha de influência da reação vertical do apoio A.

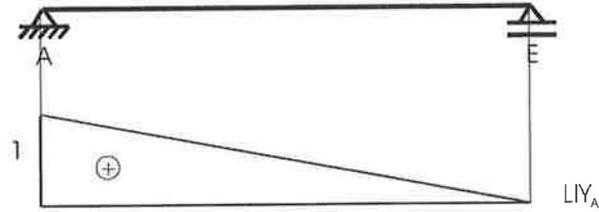


Figura 6.21

Para obter a reação máxima em A, deve-se determinar, dentre todas as combinações possíveis das cargas móveis, qual a que levará à máxima reação em A. Esta combinação mais desfavorável das cargas móveis pode ser facilmente encontrada examinando-se a linha de influência da reação vertical em A, e verificando para que região da ponte as cargas móveis têm maior influência sobre a reação em A. No caso particular deste exemplo, esta combinação mais desfavorável é a apresentada na Figura 6.22; ela corresponde a uma situação em que se tem tanto o veículo-tipo como carga de multidão atuando: o veículo-tipo iniciando sua passagem pela ponte, encontrando-se seu eixo mais pesado em A e o outro eixo em B, e carga de multidão em toda a extensão da ponte.

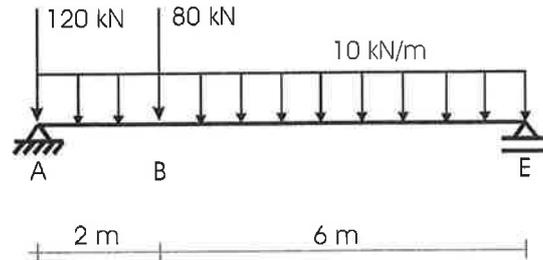


Figura 6.22

Na Fig. 6.23, sobre a linha de influência da reação vertical em A, está indicado o carregamento móvel que produz a máxima reação em A. Emprega-se a expressão "carregar a linha de influência" para designar este procedimento de se indicar o carregamento que leva a um esforço extremo sobre a linha de influência deste esforço, como se fez na Fig. 6.23.

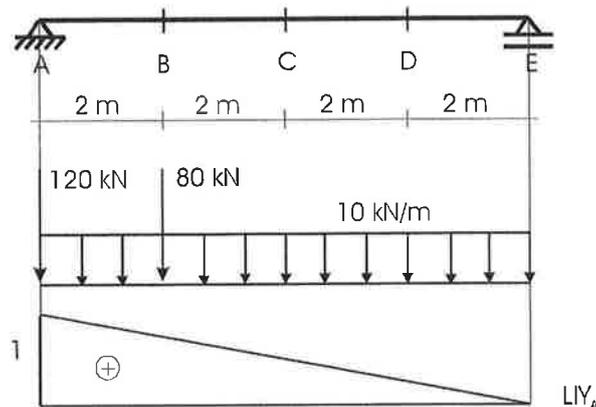


Figura 6.23

Nota 6.2

Antes de se passar à determinação da reação extrema em A produzida pelo carregamento móvel, serão feitas algumas considerações gerais sobre o uso das linhas de influência:

a) Obtenção dos esforços produzidos por cargas concentradas

Na Fig. 6.24(a) apresenta-se uma viga simplesmente apoiada solicitada por uma força unitária adimensional aplicada em uma seção genérica de abscissa z ; a linha de influência da reação vertical em A mostra que esta força unitária produz em A uma reação adimensional $Y_A = \eta(z)$. Na Fig. 6.24(b), a mesma viga é agora submetida a uma força P aplicada na mesma seção de abscissa z . Que reação esta carga produz em A?

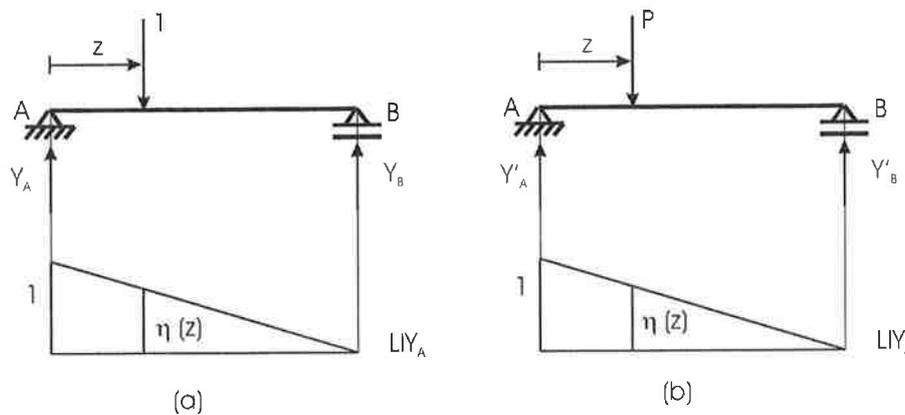


Figura 6.24

Como o modelo matemático que está sendo empregado para analisar esta viga é linear, tem-se a seguinte relação entre as reações das duas vigas da Fig. 6.24:

$$\frac{Y'_A}{Y_A} = \frac{P}{1} \quad (6.12)$$

logo

$$Y'_A = \frac{P \cdot Y_A}{1} = \frac{P \cdot \eta(z)}{1}, \quad (6.13)$$

isto é,

$$Y'_A = P \cdot \eta(z). \quad (6.14)$$

A expressão (6.14) é importantíssima, por mostrar como se utiliza uma linha de influência: a reação vertical em A produzida por uma força P aplicada em uma seção de abscissa z é igual ao produto desta força P pela ordenada adimensional $\eta(z)$ em z da linha de influência da reação vertical em A. Esta regra operacional, aqui apresentada para o caso particular de uma reação de apoio, se aplica aos demais esforços de uma viga.

Como exemplo, considere-se a determinação, na viga em estudo, da reação vertical em A produzida por uma força de 80 kN aplicada em B, como mostrado na Fig. 6.25.

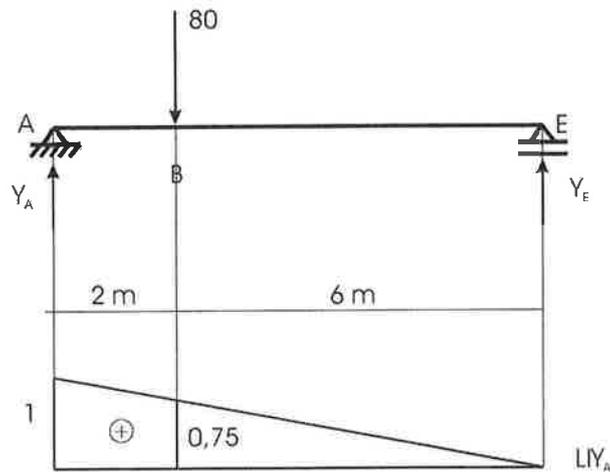


Figura 6.25

Tem-se:

$$Y_A = 80 \text{ kN} \cdot \eta(z) = 80 \text{ kN} \cdot 0,75 = 60 \text{ kN}. \quad (6.15)$$

Já se havia comentado que as linhas de influência são obtidas para uma força unitária **adimensional** para que sejam universais, aplicáveis qualquer que seja a unidade de medida das forças que atuam em uma estrutura. O exemplo acima mostra isso: como $\eta(z)$ é adimensional, a unidade da reação em A é o kN, pois esta é a unidade de medida da força aplicada em B; caso ela fosse a tf, a reação em A também teria como unidade a tf, etc.

b) Obtenção dos esforços produzidos por cargas uniformemente distribuídas

Na Fig. 6.26 mostra-se uma viga simplesmente apoiada parcialmente submetida a uma carga uniformemente distribuída. Deseja-se determinar a reação em A produzida por esta carga.

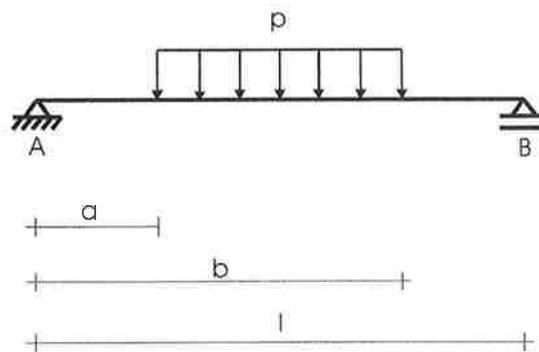


Figura 6.26

A reação em A produzida pela força elementar $p(z) dz$ mostrada na Fig. 6.27 é

$$dY_A = p(z) dz \eta(z) \quad (6.16)$$

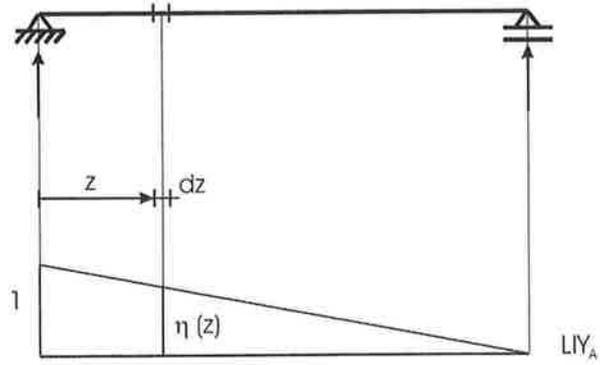


Figura 6.27

A reação procurada é então

$$Y_A = \int_a^b p(z) \eta(z) dz = p \int_a^b \eta(z) dz = p A, \quad (6.17)$$

sendo $p(z) = p$ o carregamento uniformemente distribuído da viga e $A = \int_a^b \eta(z) dz$ a área A da região hachurada na Fig. 6.28.

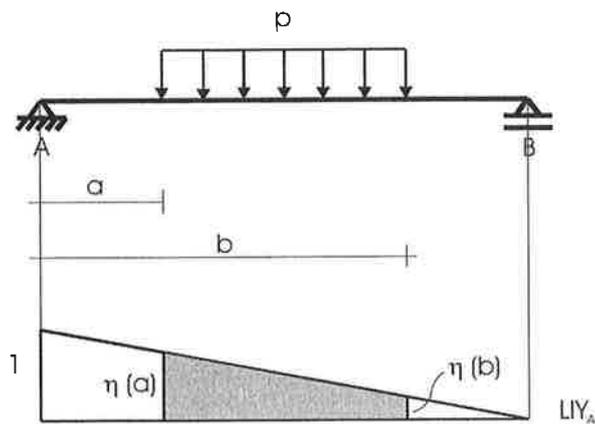


Figura 6.28

Chegou-se a uma outra expressão extremamente importante: a reação em A produzida por uma força uniformemente distribuída atuando em um trecho da viga é dada pelo produto da força distribuída p pela área A da região entre o eixo da viga e a linha de influência no trecho em que atua o carregamento distribuído.

Esta regra também se aplica aos demais esforços produzidos por um carregamento uniformemente distribuído.

Como exemplo, considere-se a viga da Fig. 6.29.

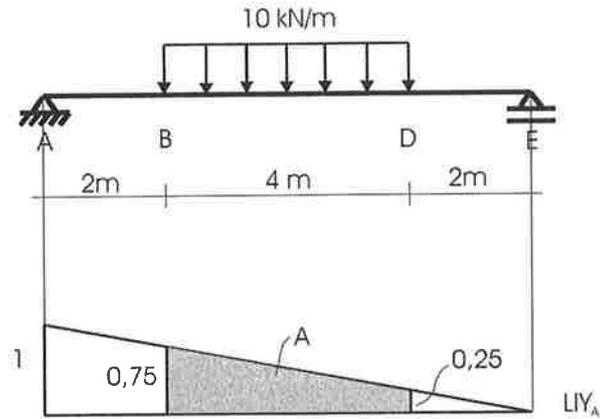


Figura 6.29

Tem-se

$$A = \frac{(0,75 + 0,25)}{2} \cdot 4 \text{ m} = 2 \text{ m} \quad (6.18)$$

e

$$Y_A = p \cdot A = 10 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m} = 20 \text{ kN} \quad (6.19)$$

Novamente comprova-se aqui a universalidade das linhas de influência, pois a unidade de Y_A depende apenas da unidade de p .

#

Feitos estes comentários, retorna-se à determinação da máxima reação em A produzida pelas cargas que carregam a linha de influência da Fig. 6.30.

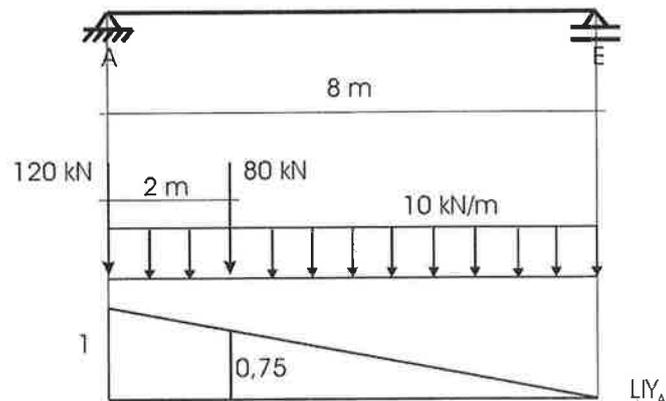


Figura 6.30

Empregando a sistemática discutida na Nota 6.2, chega-se à máxima reação em A produzida pelas cargas móveis:

$$\text{máx } Y_{A, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1}{2} = 220 \text{ kN} \quad (6.20)$$

Para obter a mínima reação em A produzida pelas cargas móveis deve-se examinar mais uma vez a linha de influência desta reação. Como suas ordenadas são todas positivas, qualquer carregamento móvel aplicado na viga levará a reações positivas, que se somarão às decorrentes do peso próprio. As menores reações da viga

ocorrerão, portanto, quando não houver carregamento móvel aplicado, estando a viga submetida exclusivamente ao peso próprio, tendo-se assim

$$\min Y_{A, \text{cargas móveis}} = 0. \quad (6.21)$$

Obtidas as reações extremas produzidas em A pelas cargas móveis, somando-as à reação em A produzida pelo peso próprio chega-se às reações extremas do apoio esquerdo da viga de ponte que vem sendo examinada.

Os resultados finais desta discussão sobre a reação vertical em A produzida pelas cargas que atuam na ponte estão apresentados na Tabela 6.3.

	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
Y_A	80	220	0	300	80

Tabela 6.3 – Reações verticais extremas do apoio esquerdo (kN)

Esta tabela mostra que, para a viga de ponte submetida ao carregamento descrito no enunciado deste exemplo, a reação Y_A – logo também a carga no apoio desta viga – irá variar entre 80 kN e 300 kN, podendo, para as infinitas combinações possíveis das cargas móveis, assumir todos os valores entre estes dois extremos.

A determinação das reações extremas do apoio da direita da viga se faz de maneira inteiramente análoga à que levou aos extremos de Y_A . Na Fig. 6.31 apresenta-se a linha de influência de Y_E carregada pelos esforços que levam à máxima reação em E: o veículo-tipo começando a voltar pela ponte, com o eixo mais pesado em E e o eixo mais leve em D, e multidão em toda a extensão da ponte.

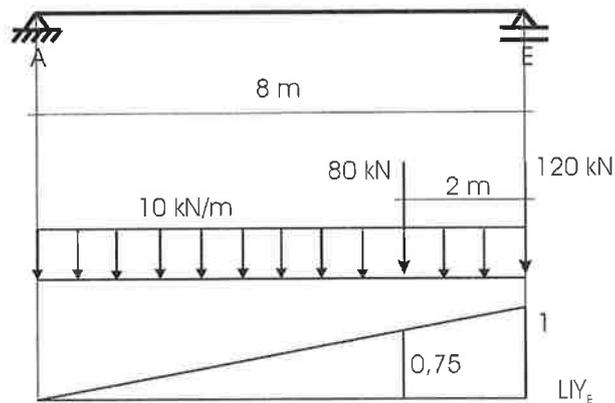


Figura 6.31

A máxima reação em E é

$$\max Y_{E, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1}{2} = 220 \text{ kN}. \quad (6.22)$$

Mais uma vez, vai-se ter a mínima reação quando não houver carregamento móvel na ponte, logo

$$\min Y_{E, \text{cargas móveis}} = 0. \quad (6.23)$$

As reações extremas em E estão na Tabela 6.4.

	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
Y_E	80	220	0	300	80

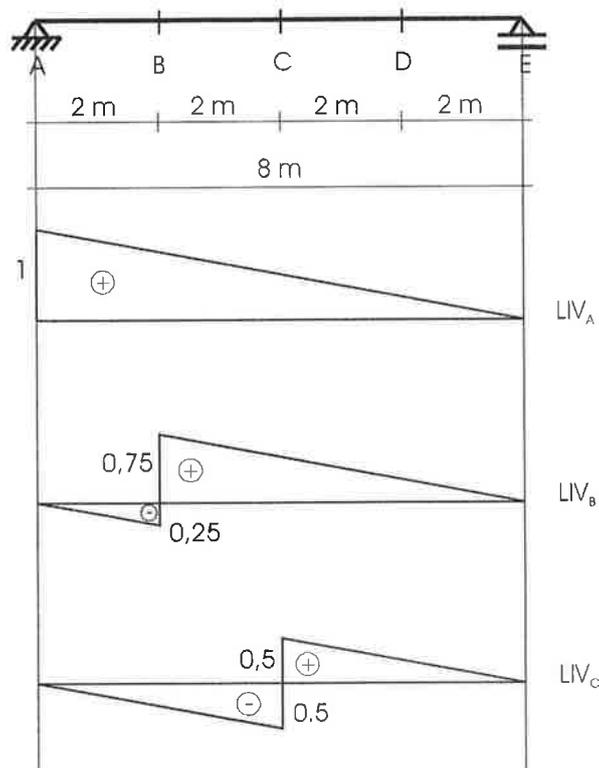
Tabela 6.4 – Reações verticais extremas do apoio direito (kN)

Observa-se que os dois apoios apresentam as mesmas reações extremas, o que decorre da simetria geométrica das vigas simplesmente apoiadas.

2.2 Forças cortantes

Serão determinadas agora as forças cortantes extremas decorrentes do carregamento móvel.

Na Fig. 6.32 apresentam-se as linhas de influência da força cortante nas cinco seções particulares que estão sendo empregadas para obter os diagramas de máximos e mínimos. Observa-se que a linha de influência da força cortante em A coincide com a da reação vertical em A, pois $V_A = Y_A$ (note que a reação em A é também a força cortante nesta seção, e que uma reação positiva – orientada para cima – leva a uma força cortante positiva – girando a barra no sentido horário). Já as linhas de influência da força cortante e da reação vertical em E são iguais em módulo, mas com sinais opostos, pois $V_E = -Y_E$ (note que a reação em E é também a força cortante nesta seção, e que uma reação positiva – orientada para cima – leva a uma força cortante negativa – girando a barra no sentido anti-horário).



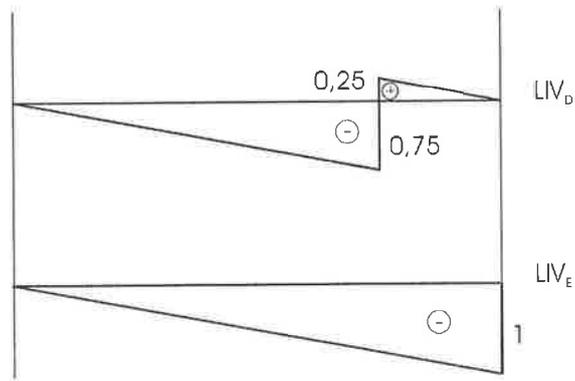
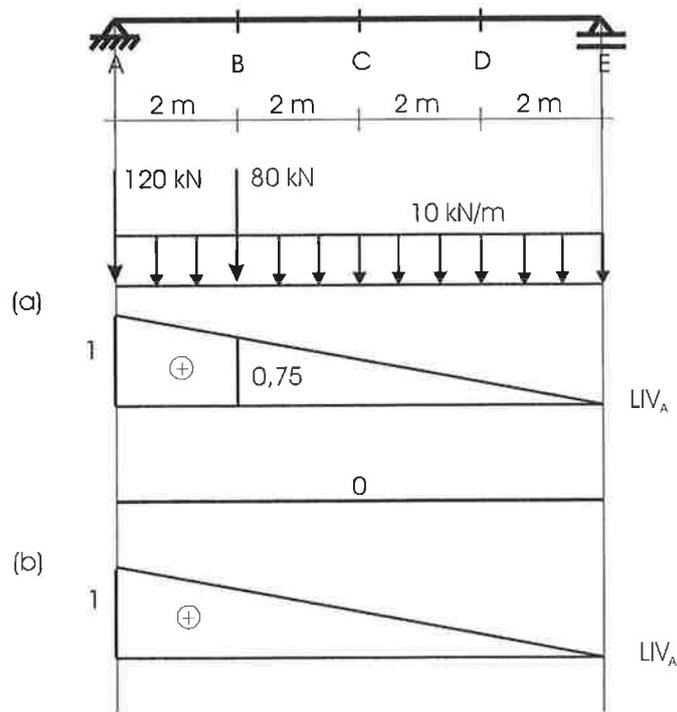


Figura 6.32

Na Fig. 6.33 apresentam-se as linhas de influência das forças cortantes nas seções A, B e C, carregadas pelos esforços móveis que levam à máxima força cortante – Figs. 6.33 (a), 6.33 (c) e 6.33 (e) – e à mínima força cortante nestas seções – Figs. 6.33 (b), 6.33 (d) e 6.33 (f). Observa-se que o máximo e o mínimo aqui considerados são extremos algébricos: a máxima força cortante em uma seção transversal é a maior força cortante positiva nesta seção – girando a barra no sentido horário – e a mínima força cortante é a maior força cortante negativa nesta seção – girando a barra no sentido anti-horário.

Como já se comentou anteriormente, a linha de influência da força cortante em uma seção transversal não se define para a força unitária aplicada na própria seção. Assim, nas Figs. 6.33 (a), 6.33 (c) e 6.33 (e) a força de 120 kN está aplicada em uma seção imediatamente à direita de A, B e C respectivamente, as seções A+, B+ e C+. Já nas Figs. 6.33 (d) e 6.33 (f) a força de 120 kN está aplicada em uma seção imediatamente à esquerda de B e C respectivamente, as seções B- e C-.



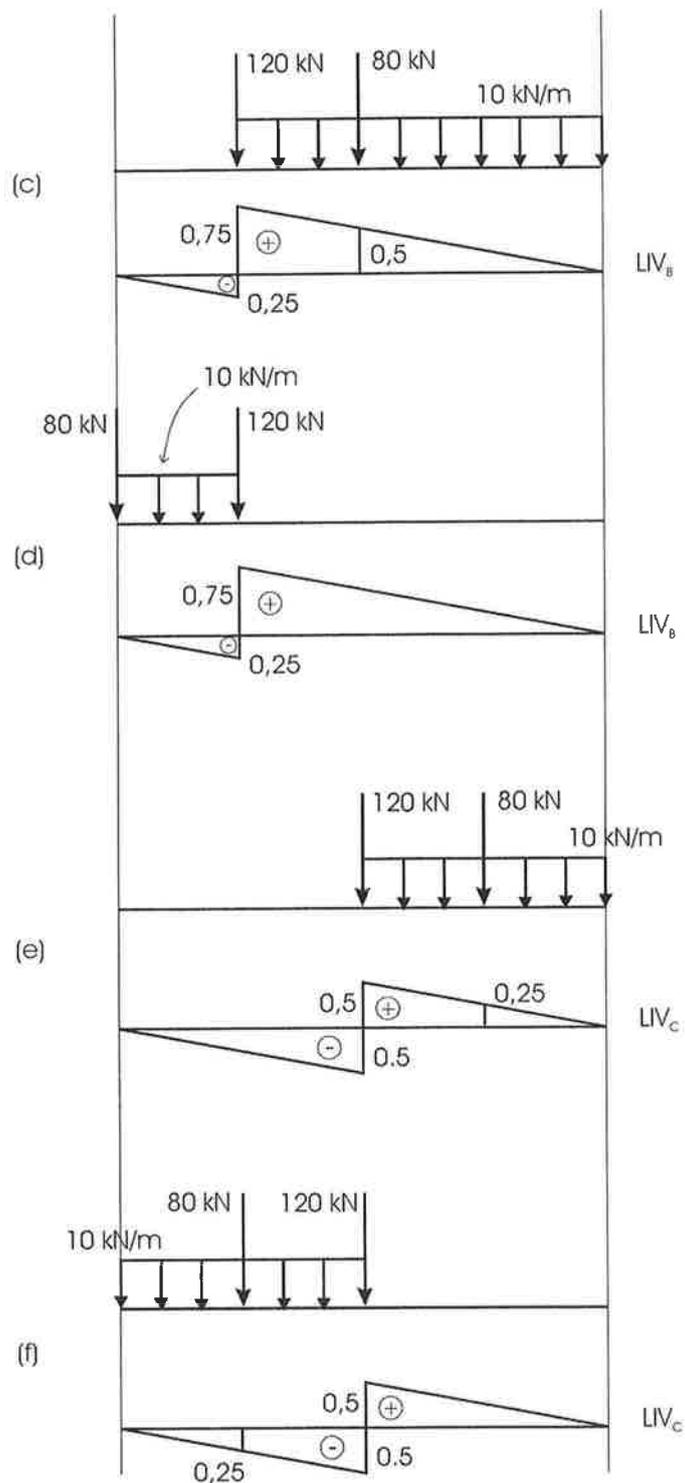


Figura 6.33

Obtém-se da Fig. 6.33:

$$\max V_{A, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1}{2} = 220 \text{ kN} \quad (6.24)$$

e

$$\min V_{A, \text{cargas móveis}} = 0; \quad (6.25)$$

$$\text{máx } V_{B, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 0,75 + 80 \cdot 0,5 + 10 \cdot \frac{6 \cdot 0,75}{2} = 152,5 \text{ kN} \quad (6.26)$$

e

$$\text{mín } V_{B, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot (-0,25) + 80 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{2 \cdot (-0,25)}{2} = -32,5 \text{ kN}; \quad (6.27)$$

$$\text{máx } V_{C, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,25 + 10 \cdot \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 90 \text{ kN} \quad (6.28)$$

e

$$\text{mín } V_{C, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot (-0,5) + 80 \cdot (-0,25) + 10 \cdot \frac{4 \cdot (-0,5)}{2} = -90 \text{ kN}. \quad (6.29)$$

De maneira análoga obtêm-se os valores extremos da força cortante nas seções D e E:

$$\text{máx } V_{D, \text{cargas móveis}} = 32,5 \text{ kN} \quad (6.30)$$

e

$$\text{mín } V_{D, \text{cargas móveis}} = -152,5 \text{ kN}; \quad (6.31)$$

$$\text{máx } V_{E, \text{cargas móveis}} = 0 \text{ kN} \quad (6.32)$$

e

$$\text{mín } V_{E, \text{cargas móveis}} = -220 \text{ kN}. \quad (6.33)$$

Determinadas as forças cortantes extremas produzidas pelo carregamento móvel, somando-as às decorrentes do peso próprio obtêm-se as forças cortantes extremas nas cinco seções particulares da viga de ponte que vem sendo analisada. Estas forças cortantes extremas estão na Tabela 6.5.

Seção	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
A	80	220	0	300	80
B	40	152,5	-32,5	192,5	7,5
C	0	90	-90	90	-90
D	-40	32,5	-152,5	-7,5	-192,5
E	-80	0	-220	-80	-300

Tabela 6.5 – Forças cortantes extremas nas seções A, B, C, D e E (kN)

A partir desta tabela pode-se obter o diagrama de máximos e mínimos valores da força cortante da viga deste exemplo, mostrado na Fig. 6.34; como já se havia comentado, este diagrama é traçado a partir dos valores determinados para as cinco seções particulares da Tabela 6.5, interpolando-se linearmente entre eles.

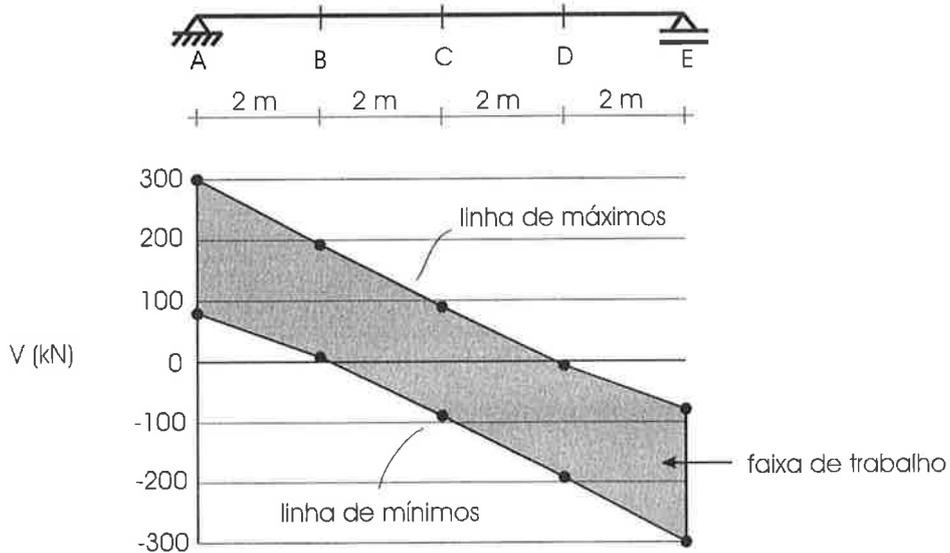


Figura 6.34

A faixa hachurada na Fig. 6.34, delimitada pela linha de máximos e pela linha de mínimos, recebe o nome de faixa de trabalho, pois todos os valores possíveis para as forças cortantes nas seções transversais desta viga encontram-se dentro desta faixa. Tomando como exemplo o da seção B, viu-se que há um carregamento que leva à força cortante mínima de 7,5 kN e um carregamento que leva à força cortante máxima de 192,5 kN; para os demais carregamentos possíveis da viga, a força cortante em B tomará todos os demais valores entre 7,5 kN e 192,5 kN.

A linha de máximos recebe também o nome de envoltória de máximos e a linha de mínimos, o de envoltória de mínimos, pois estas linhas envolvem todos os diagramas de forças cortantes possíveis para esta viga. Se forem traçados todos os diagramas de forças cortantes produzidos pelas infinitas combinações possíveis das cargas móveis, todos eles estarão dentro da faixa de trabalho, e as linhas que envolverão superior e inferiormente todos estes diagramas, isto é, as linhas que tangenciarão os seus extremos são a linha de máximos e a linha de mínimos. Na Fig. 6.35 mostram-se dois destes infinitos diagramas: o produzido pelo carregamento que leva à máxima força cortante em B e o produzido pela carga de multidão atuando em toda a ponte, encontrando-se o veículo-tipo fora da ponte.

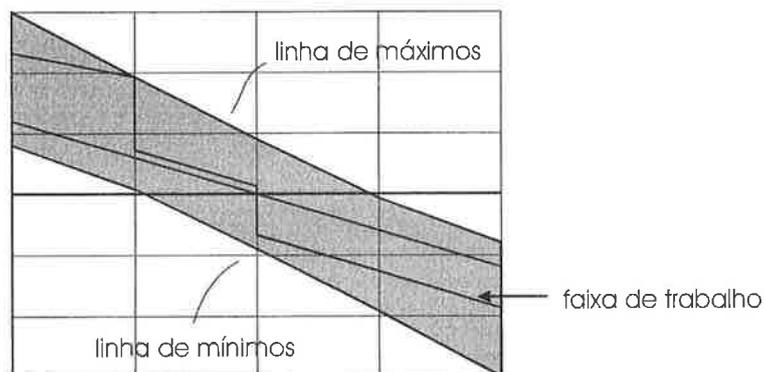


Figura 6.35

Finalizando esta seção, comenta-se que é muito importante saber interpretar corretamente as informações dadas pelo diagrama de máximos e mínimos. No caso particular desta viga, ele mostra que, por exemplo, na seção B a força cortante será sempre positiva, isto é, girando a barra no sentido horário, e que seu valor irá variar

de 7,5 kN a 192,5 kN. Já na seção C, a força cortante irá variar de - 90 kN, ou seja, girando a barra no sentido anti-horário, a 90 kN, girando a barra no sentido horário.

2.3 Momentos fletores

De forma análoga à feita para as forças cortantes, serão determinados agora os momentos fletores extremos produzidos pelo carregamento móvel, e, em seguida, o diagrama de máximos e mínimos momentos fletores.

Na Fig. 6.36 indicam-se as linhas de influência do momento fletor nas cinco seções transversais que estão sendo empregadas para obter o diagrama de máximos e mínimos momentos fletores.

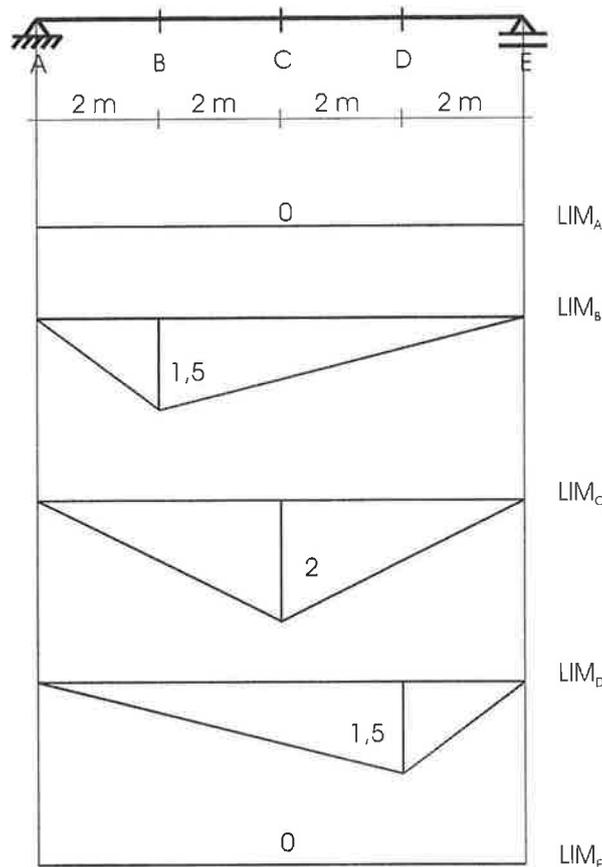


Figura 6.36

Observa-se que as linhas de influência do momento fletor nas extremidades da barra são nulas, pois, tratando-se de uma viga simplesmente apoiada, qualquer que seja a posição da força unitária adimensional aplicada na viga, os momentos fletores nestas extremidades serão sempre nulos. Pode-se verificar que o traçado gráfico da linha de influência do momento fletor anteriormente apresentado leva exatamente a estas linhas de influência nulas para as seções A e E.

Para as seções A e E tem-se, portanto,

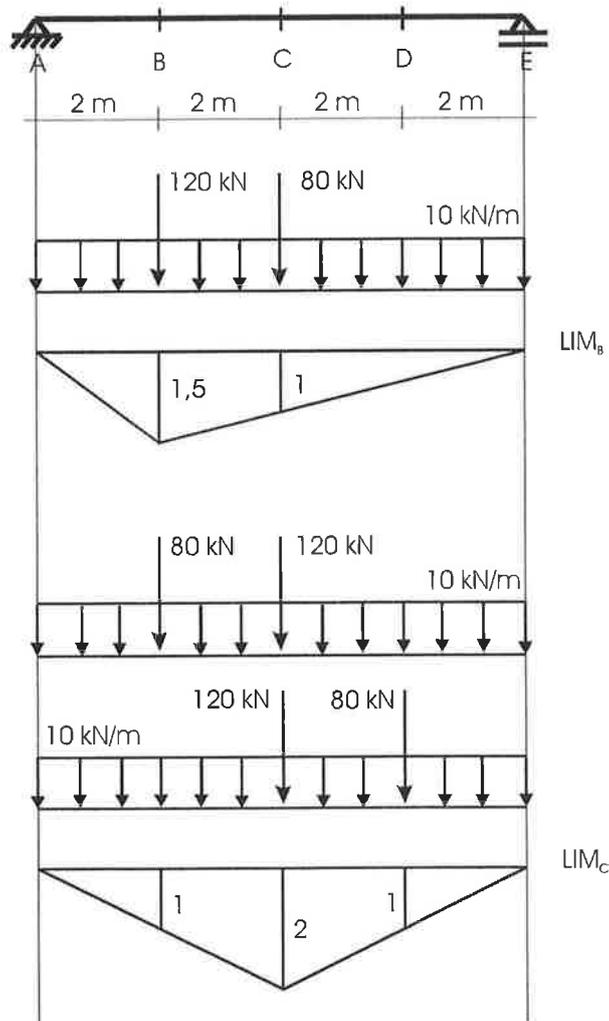
$$\text{máx } M_{A, \text{cargas móveis}} = \text{mín } M_{A, \text{cargas móveis}} = 0 \quad (6.34)$$

e

$$\text{máx } M_{E, \text{cargas móveis}} = \text{mín } M_{E, \text{cargas móveis}} = 0. \quad (6.35)$$

Examinando as linhas de influência das seções B, C e D mostradas na Fig. 6.36, observa-se que elas são sempre positivas. Conclui-se, portanto, que os menores momentos fletores nestas seções serão os que se terá quando não houver nenhum carregamento móvel na viga, que estará então submetida apenas ao peso próprio.

Na Fig. 6.37 apresentam-se as linhas de influência das seções B, C e D carregadas pelos esforços móveis que levam aos máximos momentos fletores. Pode-se demonstrar que, sendo estas linhas de influência lineares, o máximo momento fletor ocorrerá quando uma das cargas concentradas do veículo-tipo estiver sobre o ponto angular da linha de influência. Esta demonstração será apresentada no final desta seção. Observa-se ainda que, no caso da seção C, pela simetria da linha de influência, há duas situações em que o veículo-tipo leva ao mesmo momento extremo, ambas mostradas na Fig. 6.37.



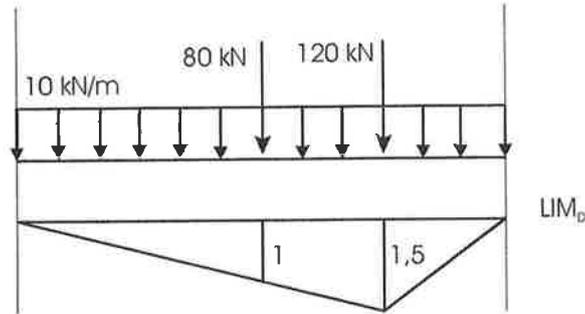


Figura 6.37

Tem-se então para as seções B e C:

$$\text{máx } M_{B, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1,5 + 80 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1,5}{2} = 320 \text{ kNm} \quad (6.36)$$

e

$$\text{mín } M_{B, \text{cargas móveis}} = 0; \quad (6.37)$$

$$\text{máx } M_{C, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 2 + 80 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 2}{2} = 400 \text{ kNm} \quad (6.38)$$

e

$$\text{mín } M_{C, \text{cargas móveis}} = 0. \quad (6.39)$$

Em decorrência da simetria da viga, os momentos fletores extremos na seção D são os mesmos da seção B.

Tendo-se os momentos fletores extremos produzidos pelo carregamento móvel, pode-se obter agora o momento fletor máximo e o momento fletor mínimo nas cinco seções particulares que vêm sendo analisadas.

Seção	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
A	0	0	0	0	0
B	120	320	0	440	120
C	160	400	0	560	160
D	120	320	0	440	120
E	0	0	0	0	0

Tabela 6.6 – Momentos fletores extremos nas seções A, B, C, D e E (kNm)

A partir desta tabela pode-se traçar o diagrama de máximos e mínimos momentos fletores, apresentado na Fig. 6.38.

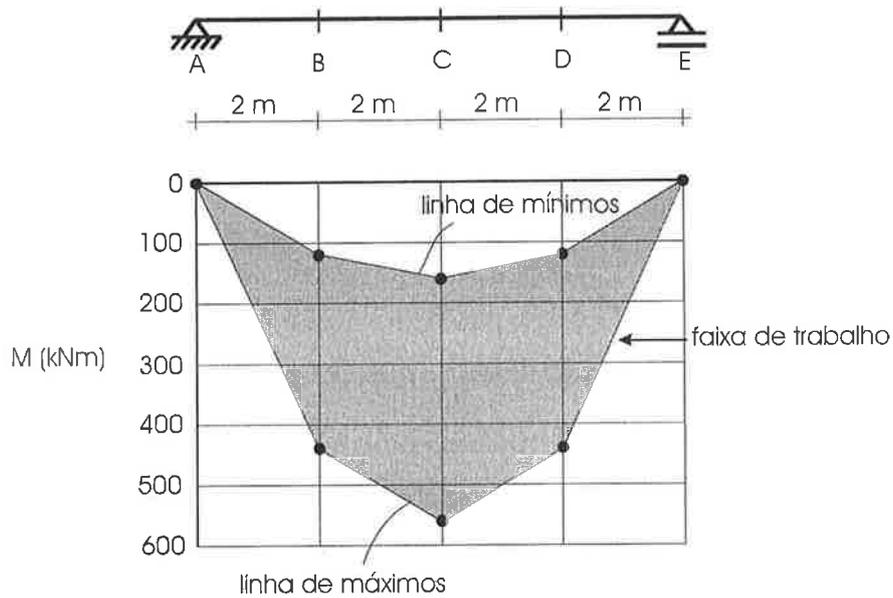


Figura 6.38

Observa-se que os mínimos momentos fletores em todas as seções desta viga ocorrem para a situação em que não se tem carregamento móvel na ponte; por esta razão, o diagrama de mínimos da Fig. 6.38 coincide com o diagrama dos momentos fletores produzidos pelo peso próprio, mostrado na Fig. 6.20.

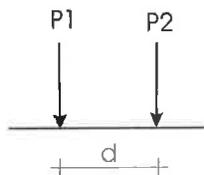
A faixa de trabalho dos momentos fletores é a faixa hachurada na Fig. 6.38.

Para finalizar esta seção, demonstra-se o seguinte teorema:

Teorema 6.1

Os esforços extremos E_s produzidos por um veículo-tipo em uma viga cuja linha de influência de E_s é linear e possui um ponto angular ocorrem para uma das cargas do veículo-tipo sobre o ponto angular da linha de influência ou sobre uma das extremidades da viga.

Para demonstrar este teorema, considere-se a viga simplesmente apoiada com dois balanços da Fig. 6.39, sobre a qual se desloca o seguinte veículo-tipo:



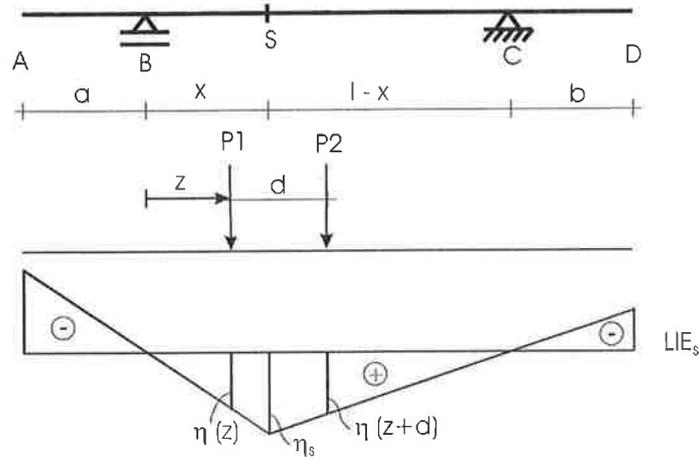


Figura 6.39

A linha de influência ilustrada na Fig. 6.39 é a do momento fletor em S , e será determinada em uma das próximas seções deste Capítulo.

Deve-se responder agora duas perguntas: que posição do veículo levará ao máximo esforço E_s ? E que posição do veículo levará ao mínimo esforço E_s ?

Quanto ao mínimo, é fácil verificar que será quando o eixo mais pesado do veículo estiver sobre uma das extremidades da viga; sobre qual das duas extremidades e se o outro eixo também estará sobre a ponte, dependerá de cada caso particular.

Quanto ao máximo esforço E_s , há duas posições do veículo naturalmente candidatas a levarem a este máximo: P_1 ou P_2 sobre S . E quando P_1 estiver à esquerda de S e P_2 à direita de S ? O máximo poderá se dar para esta situação? Como já se mencionou, pelo fato de a linha de influência de E_s ser linear, o máximo valor de E_s ocorrerá para um dos eixos sobre esta seção, isto é, para P_1 ou P_2 sobre S . É o que se demonstrará agora.

Na Fig. 6.39, abaixo da viga mostra-se a linha de influência do esforço E_s , carregada pelo veículo-tipo na situação sobre a qual se tem a dúvida: P_1 à esquerda de S e P_2 à sua direita.

Tem-se então

$$E_s = P_1 \cdot \eta(z) + P_2 \cdot \eta(z+d); \quad (6.40)$$

como

$$\eta(z) = \frac{z}{x} \eta_s \quad (6.41)$$

e

$$\eta(z+d) = \frac{(l-z-d)}{(l-x)} \eta_s, \quad (6.42)$$

chega-se a

$$E_s = P_1 \cdot \frac{z}{x} \eta_s + P_2 \cdot \frac{(l-z-d)}{(l-x)} \eta_s. \quad (6.43)$$

Esta expressão mostra que o esforço E_s varia linearmente com z ; conseqüentemente, os extremos de E_s ocorrerão para os extremos de z , ou seja, para $z = x - d$ – quando P_2 estará sobre S – ou para $z = x$ – quando P_1 estará sobre S – (para $z < x - d$ e para $z > x$ a situação não será a que está sendo analisada, pois o veículo estará com ambos os eixos ou à esquerda ou à direita de S). Está assim demonstrado que o máximo valor de E_s ocorrerá para um dos eixos do veículo-tipo – o eixo mais pesado – sobre o ponto anguloso da linha de influência. Dependerá de cada caso particular a posição do outro eixo, se à esquerda ou à direita de S .

Fica assim demonstrado o teorema. No caso particular desta viga, o mínimo vai se dar para o eixo mais pesado sobre uma das extremidades da viga e o máximo, para o eixo mais pesado sobre o ponto anguloso da linha de influência.

#

O teorema que acaba de ser demonstrado é o caso particular de um teorema mais geral:

Teorema 6.2

Os esforços extremos E_s produzidos por um veículo-tipo em uma viga cuja linha de influência de E_s é linear e possui pontos angulosos ocorrem para uma das cargas do veículo-tipo sobre um dos pontos angulosos da linha de influência ou sobre uma das extremidades da viga.

Este teorema, que também decorre da linearidade da linha de influência de E_s , é demonstrado de forma análoga à que se acaba de fazer; esta demonstração não será feita aqui.

Nota 6.3

Antes de passar ao estudo das linhas de influência de uma viga em balanço, convém fazer uma última observação.

A determinação dos esforços extremos nas seções transversais da viga do Exemplo 6.1 foi feita em duas etapas, tendo-se obtido separadamente os esforços decorrentes do peso próprio – que foram determinados sem utilizar as linhas de influência – e os esforços decorrentes do carregamento móvel – determinados por meio das linhas de influência. Estes esforços foram depois somados para se chegar aos extremos.

Alternativamente, a obtenção dos esforços extremos poderia ter sido feita em uma única etapa, carregando-se a linha de influência simultaneamente com o peso próprio e com as cargas móveis.

Na Fig. 6.40 a linha de influência da força cortante na seção C da viga do Exemplo 6.1 é carregada pelos esforços que levam à cortante máxima: o peso próprio atuando em toda a viga e as cargas móveis na posição mais desfavorável.

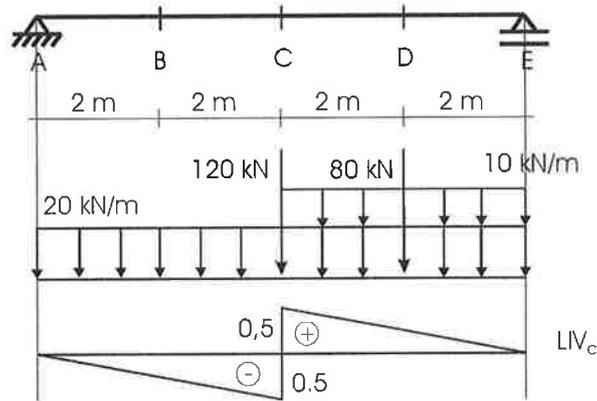


Figura 6.40

Tem-se então

$$\max V_C = 20 \cdot \left[\frac{4 \cdot (-0,5)}{2} + \frac{4 \cdot 0,5}{2} \right] + 120 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,25 + 10 \cdot \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 90 \text{ kN} . \quad (6.44)$$

Nesta expressão estão considerados os dois efeitos: o primeiro termo do lado direito é a cortante produzida pelo peso próprio e os demais termos são a cortante máxima produzida pelo carregamento móvel.

A opção por uma ou outra forma de obter o efeito do peso próprio é uma questão de preferência pessoal. Desejando-se determinar os extremos em várias seções, a opção pelos diagramas de esforços solicitantes é a menos trabalhosa; desejando-se os extremos em poucas seções, a opção pelas linhas de influência é a menos trabalhosa.

#

6.4 Linhas de influência de uma viga em balanço

Nesta seção serão determinadas as linhas de influência de uma viga em balanço. Será adotado o mesmo procedimento empregado na obtenção das linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada.

Considere-se a viga em balanço da Fig. 6.41. Serão determinadas as linhas de influência da reação vertical do apoio, do momento reativo, e as linhas de influência da força cortante e do momento fletor em uma seção genérica S da viga.

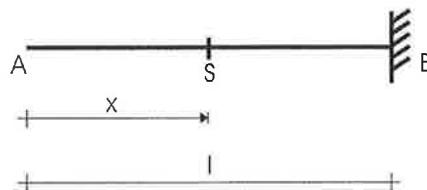


Figura 6.41

Na Fig. 6.42 a viga está submetida à força unitária adimensional que a percorre de uma extremidade à outra; na Fig. 6.42 (a), a força unitária encontra-se à esquerda de S, e, na Fig. 6.42 (b), encontra-se à direita desta seção.

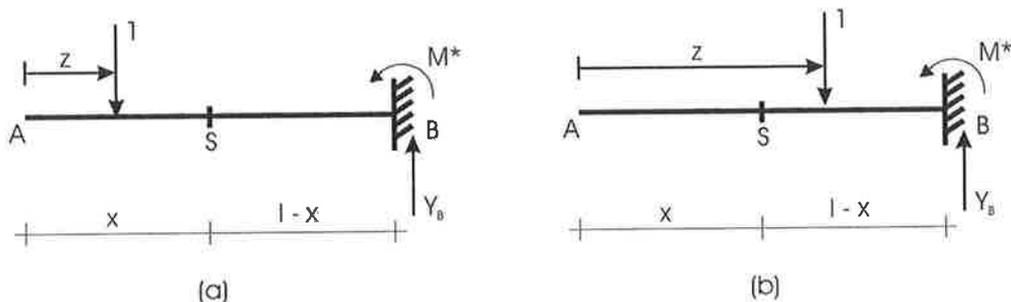


Figura 6.42

As linhas de influência procuradas têm então as seguintes expressões analíticas:

$$LIY_B = 1; \quad (6.45)$$

$$LIM^* = -(l - z); \quad (6.46)$$

$$LIV_S = -1, \quad 0 \leq z < x, \quad (6.47)$$

e

$$LIV_S = 0, \quad x < z \leq l; \quad (6.48)$$

$$LIM_S = -1 \cdot (x - z), \quad 0 \leq z \leq x, \quad (6.49)$$

e

$$LIM_S = 0, \quad x \leq z \leq l. \quad (6.50)$$

Estas linhas de influência estão traçadas na Fig. 6.43.

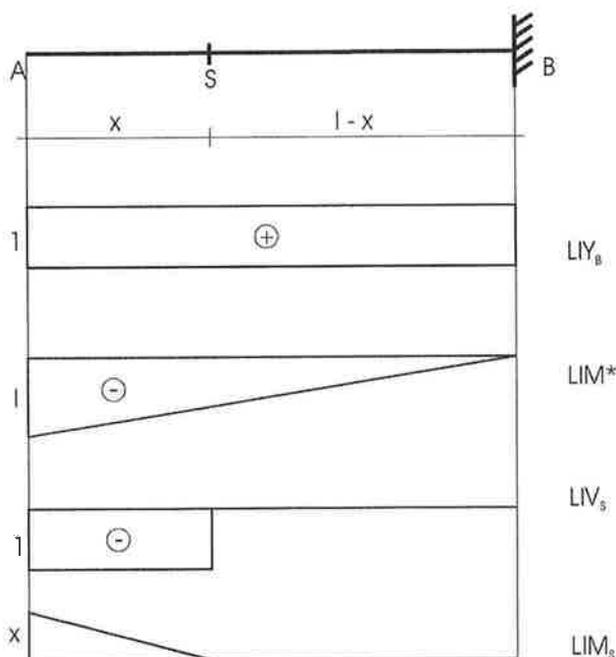


Figura 6.43

Assim como no caso das vigas simplesmente apoiadas, pode-se estabelecer regras práticas para o traçado das linhas de influência de uma viga em balanço mostradas na Fig. 6.43. Como estas regras são muito simples e podem ser facilmente estabelecidas a partir do exame da Fig. 6.43, elas não serão apresentadas aqui.

6.5 Linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada com dois balanços

Finalizando esta apresentação das linhas de influência das vigas simples isostáticas, nesta seção serão examinadas as linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada com dois balanços.

Considere-se a viga da Fig. 6.44. Desejam-se as linhas de influência das reações verticais dos apoios B e C e da força cortante e do momento fletor nas seções genéricas S_1 e S_3 dos balanços e na seção genérica S_2 do trecho simplesmente apoiado da viga.

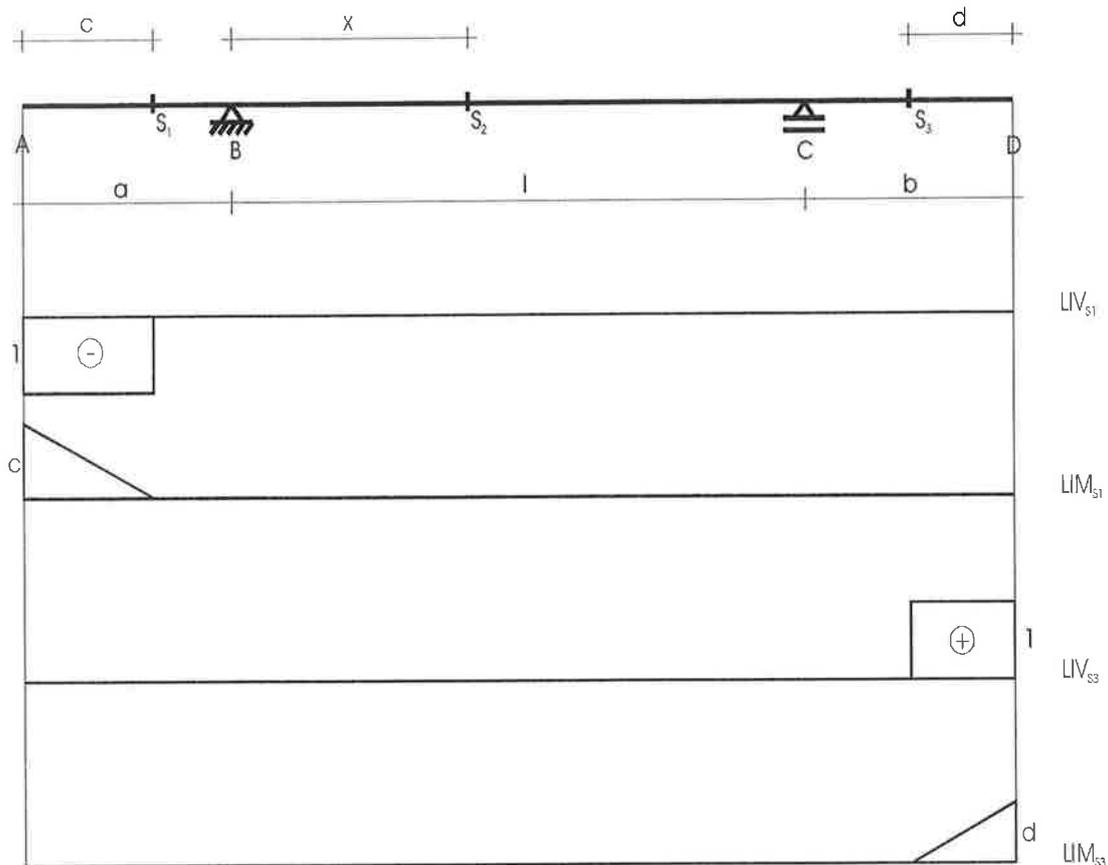


Figura 6.44

As linhas de influência da força cortante e do momento fletor nas seções S_1 e S_3 são muito simples. Observando, por exemplo, a seção S_1 do balanço esquerdo da viga, constata-se que só se terá força cortante e momento fletor nesta seção enquanto a força unitária adimensional estiver à sua esquerda. As linhas de influência da força cortante e do momento fletor em S_1 são então como as da seção S da viga em balanço analisada na seção anterior. Estas linhas de influência estão desenhadas na Fig. 6.44. As linhas de influência da força cortante e do momento fletor na seção S_3 do balanço da direita são obtidas de forma análoga, e também estão traçadas na Fig. 6.44; observa-se apenas que, enquanto a força cortante em S_1 é negativa, em S_3 ela é positiva.

Passa-se agora às linhas de influência das reações de apoio e da força cortante e do momento fletor na seção S_2 . Na Fig. 6.45 mostra-se a viga em um instante em que a força unitária que a percorre se encontra no seu trecho central. Como os balanços

estão descarregados, tanto as reações de apoio como os esforços solicitantes em S_2 são os mesmos que foram determinados para a viga simplesmente apoiada da Fig. 6.8. As linhas de influência do trecho simplesmente apoiado desta viga com dois balanços são portanto as mesmas que foram determinadas para a viga simplesmente apoiada, traçadas na Fig. 6.9, estando indicadas na Fig. 6.46.

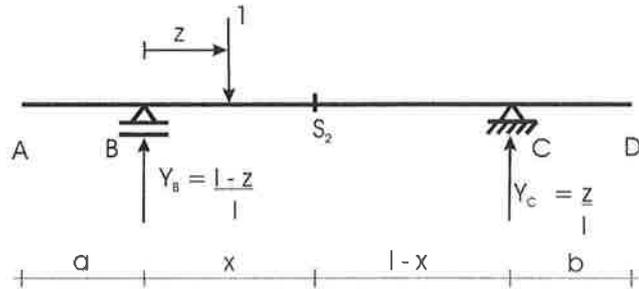
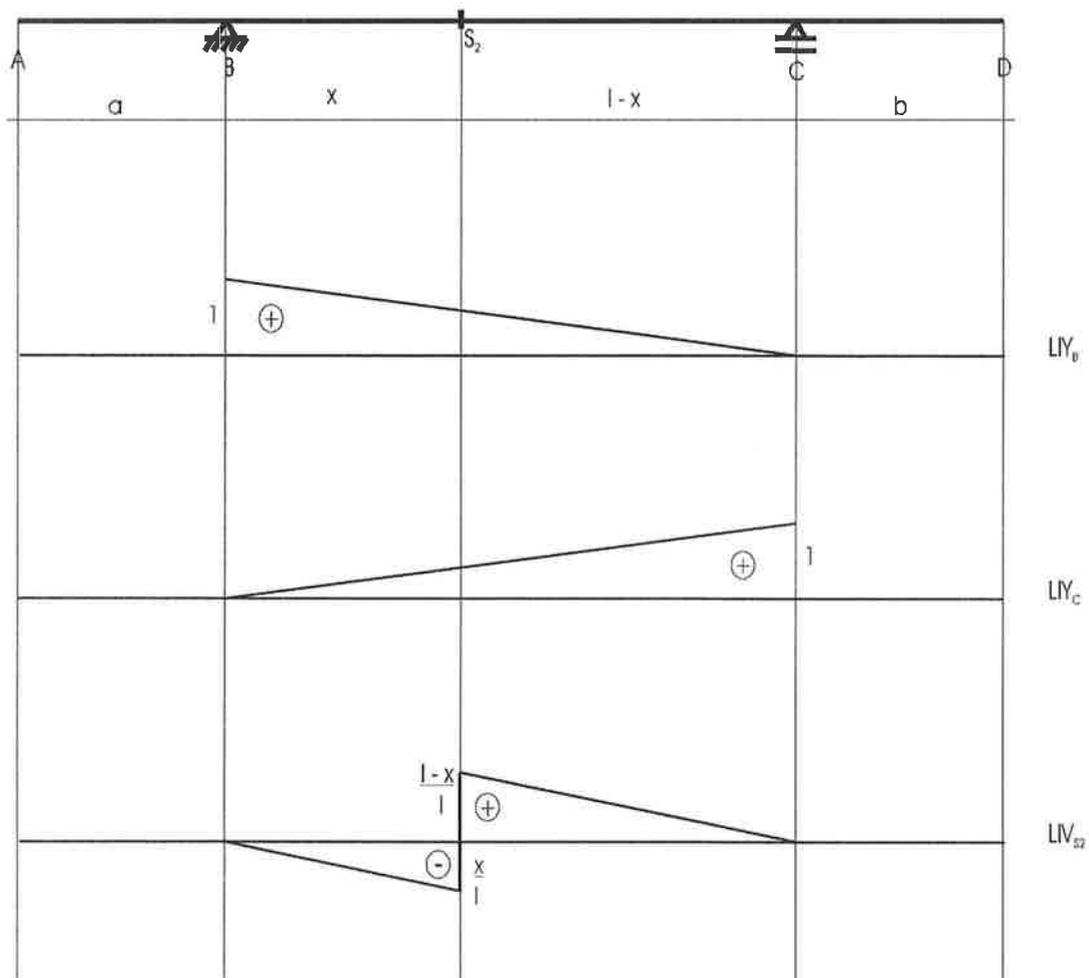


Figura 6.45



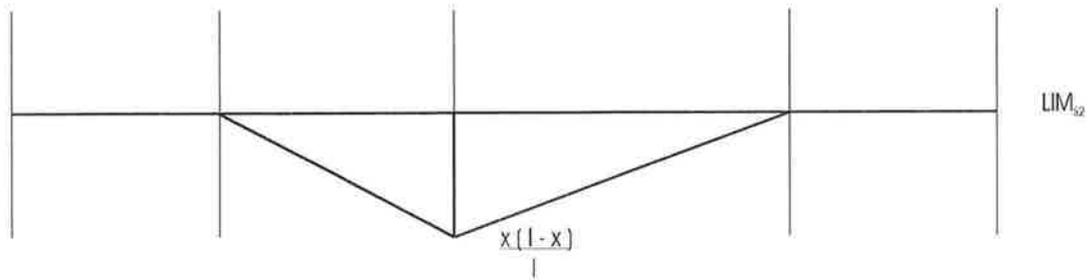


Figura 6.46

Na Fig. 6.47 mostra-se a viga em um instante em que a força unitária se encontra no balanço da esquerda. As reações dos apoios são neste caso

$$Y_B = 1 + \frac{a-z}{l} \quad (6.51)$$

e

$$Y_C = -\frac{a-z}{l} \quad (6.52)$$

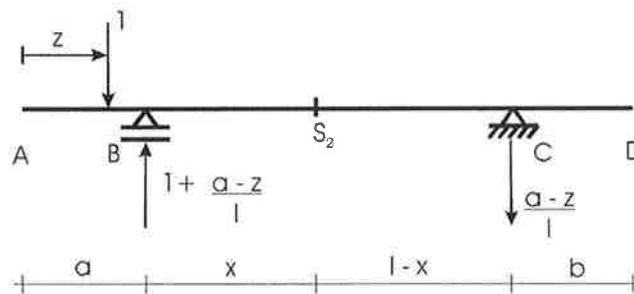


Figura 6.47

Tem-se então para a força unitária no balanço da esquerda:

$$LIY_B = 1 + \frac{a-z}{l} \quad (6.53)$$

e

$$LIY_C = -\frac{a-z}{l}; \quad (6.54)$$

$$LIV_{S_2} = \frac{a-z}{l}; \quad (6.55)$$

$$LIM_{S_2} = -\frac{a-z}{l} \cdot (l-x). \quad (6.56)$$

Na Fig. 6.48, as linhas de influência para a força unitária no balanço da esquerda estão acrescentadas às já traçadas na Fig. 6.46. Observa-se que elas são os prolongamentos das linhas de influência lineares obtidas para a força unitária entre os apoios da viga.

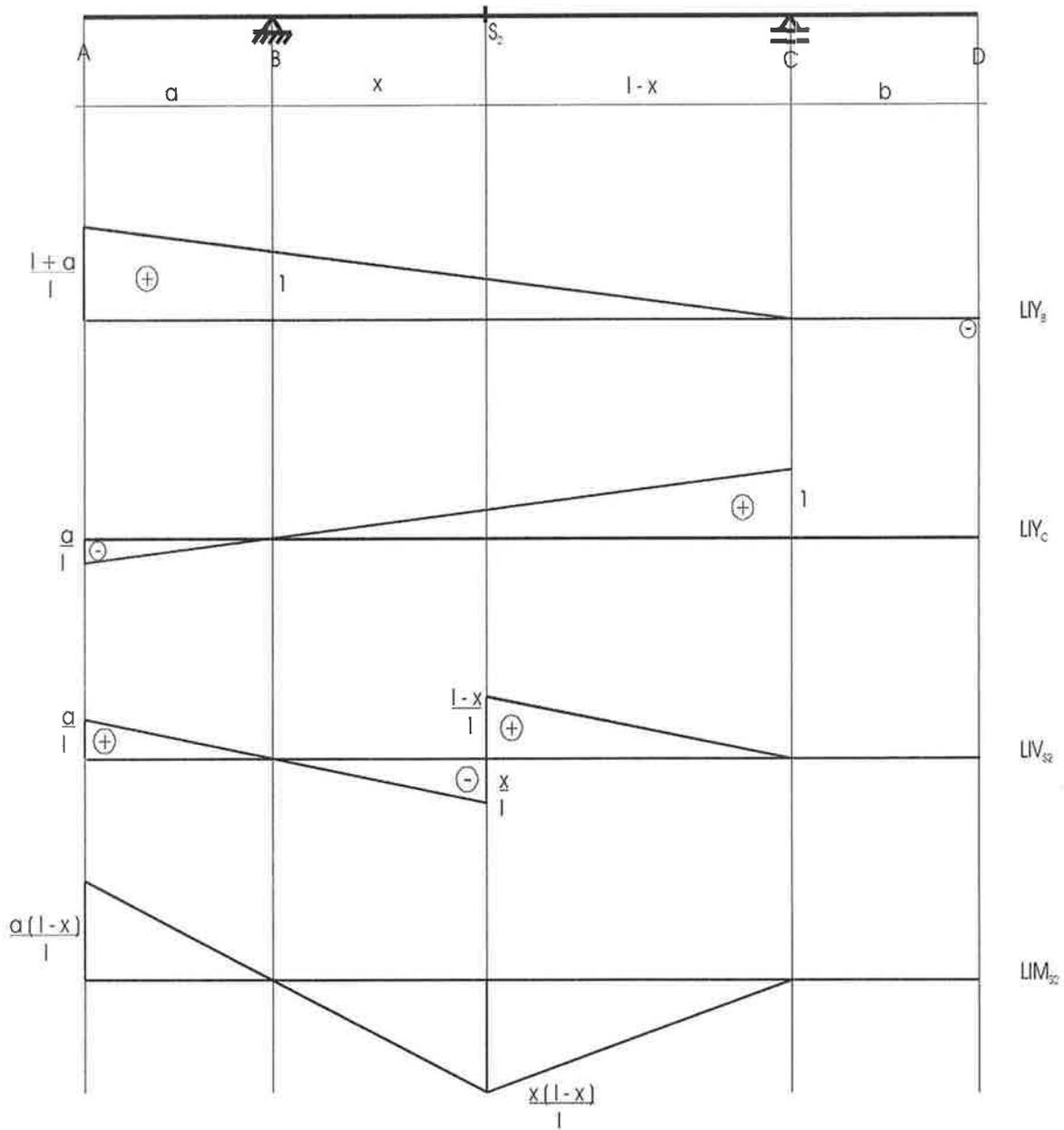


Figura 6.48

De forma inteiramente análoga chega-se às linhas de influência para a força unitária no balanço da direita; acrescentando-as às apresentadas na Fig. 6.48, chega-se às linhas de influência procuradas das reações dos apoios da viga e da força cortante e do momento fletor na seção S_2 . Estas linhas de influência completas estão apresentadas na Fig. 6.49.

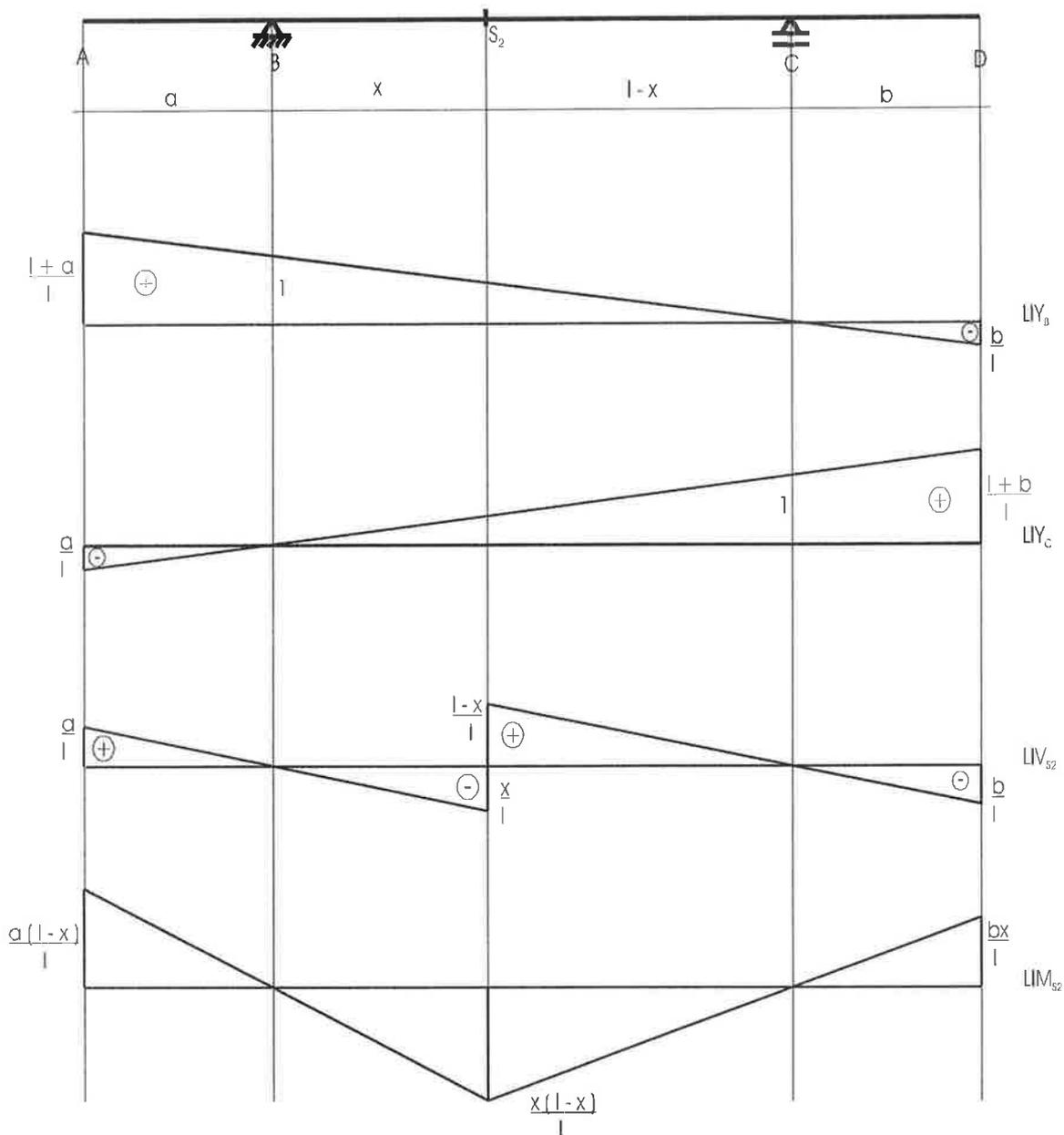


Figura 6.49

Examinando a Fig. 6.49, nota-se facilmente que as regras práticas para o traçado das linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada podem ser empregadas também para determinar as linhas de influência de uma viga simplesmente apoiada com dois balanços, já que basta prolongar nos balanços os trechos lineares das linhas de influência do trecho central da viga.

Nota 6.4

Para determinar as linhas de influência da Fig. 6.49, dividiu-se o problema em três etapas: a) a força unitária entre os apoios, b) a força unitária no balanço da esquerda e c) a força unitária no balanço da direita.

Esta divisão foi feita por razões didáticas, para deixar bem claro que esforços se tem na viga em cada uma das três situações.

A obtenção das linhas de influência das reações de apoio e dos esforços solicitantes em S_2 poderia ter sido feita, entretanto, de uma única vez. Na Fig. 6.50 mostra-se a viga nas três situações que se acaba de mencionar: com a força unitária entre os apoios, com a força unitária no balanço da esquerda e com a força unitária no balanço da direita.

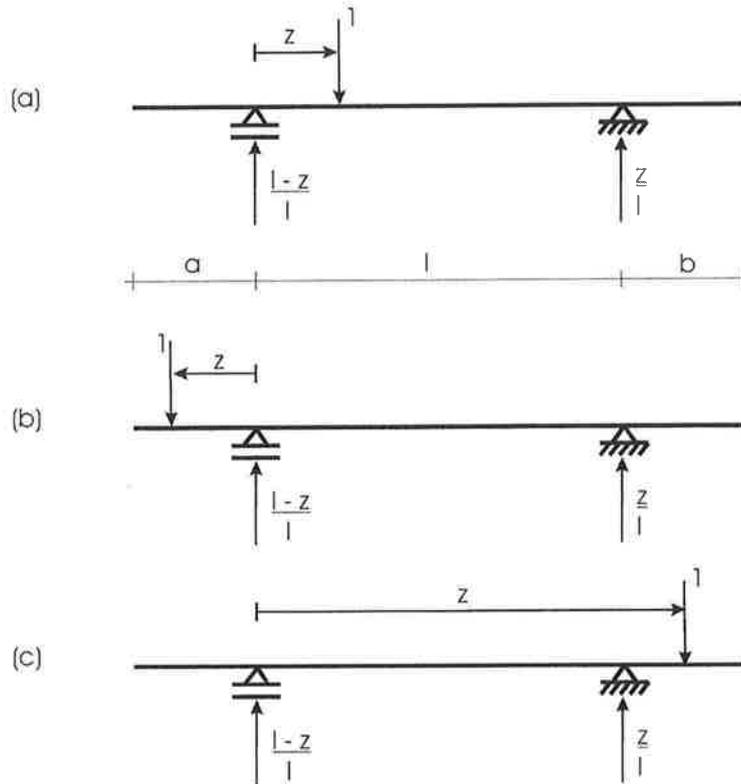


Figura 6.50

Utilizando a mesma abcissa z para caracterizar a posição da força unitária, as reações de apoio destas três vigas são dadas pelas mesmas expressões analíticas:

$$Y_B = \frac{l-z}{l} \quad (6.57)$$

e

$$Y_C = \frac{z}{l} .$$

Examinando estas expressões nos três casos, verifica-se que ambas as reações da viga da Fig. 6.50 (a) são para cima – pois $l-z > 0$ –, que a reação Y_B da viga da Fig. 6.50 (b) é para cima e que Y_C é para baixo – pois $z < 0$ –, e que a reação Y_B da viga da Fig. 6.50 (c) é para baixo e Y_C para cima – pois $z > l$.

As linhas de influência das reações de apoio da viga são dadas então pelas expressões

$$LIY_B = \frac{l-z}{l} \quad (6.58)$$

e

$$LIV_c = \frac{z}{l};$$

estas linhas de influência são as traçadas na Fig. 6.49.

As linhas de influência dos esforços solicitantes em S_2 dependem da posição da força unitária. Para a força unitária à esquerda de S_2 (Fig 6.51 (a)), tem-se

$$LIV_{S_2} = -\frac{z}{l}, \quad z < x \quad (6.59)$$

e

$$LIM_{S_2} = \frac{z}{l} \cdot (l - x), \quad z \leq x. \quad (6.60)$$

Para a força unitária à direita de S_2 (Fig. 6.51 (b)), tem-se

$$LIV_{S_2} = \frac{l - z}{l}, \quad z > x \quad (6.61)$$

e

$$LIM_{S_2} = \frac{l - z}{l} \cdot x, \quad z \geq x. \quad (6.62)$$

As linhas de influência dadas por estas expressões são as traçadas na Fig. 6.49.

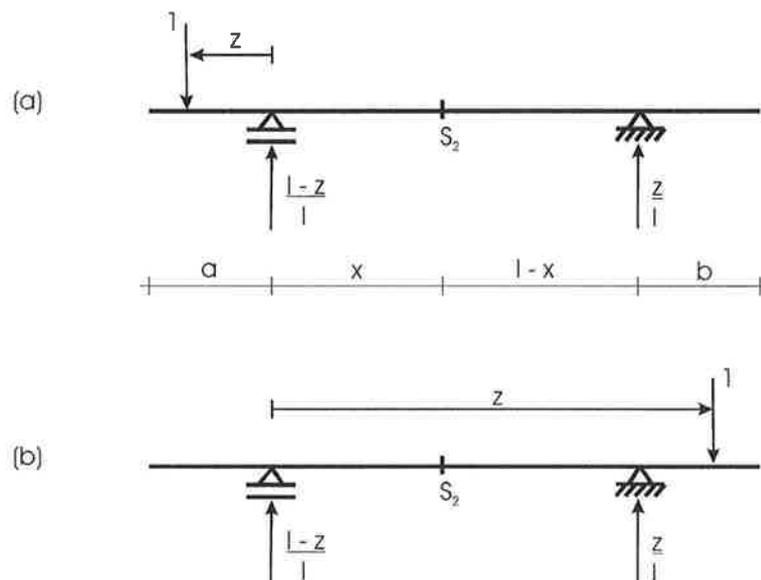


Figura 6.51

Esta forma de obter as linhas de influência, embora seja matematicamente mais elegante que a divisão do problema em três etapas, do ponto de vista físico é menos clara que esta última. É por esta razão que optou-se pela consideração das três etapas.

#

7. Treliças

Nos dois últimos capítulos, em que foram examinados os diagramas de esforços solicitantes de estruturas reticuladas e as linhas de influência de vigas simples, a preocupação maior foi com a apresentação destes conceitos e não com a análise do comportamento e do funcionamento das estruturas examinadas.

Neste e nos próximos capítulos desta apostila serão analisados diversos sistemas estruturais – treliças, pórticos triarticulados, arcos triarticulados, vigas Gerber e estruturas associadas –, com o objetivo não apenas de obter os esforços solicitantes das estruturas examinadas, mas, também, de estudar o comportamento de cada um destes tipos de sistemas estruturais.

Nestes capítulos, estar-se-á bem mais próximo da prática da atividade do engenheiro, examinando-se e analisando-se não mais estruturas de interesse principalmente acadêmico, mas estruturas que realmente fazem parte do dia-a-dia da engenharia.

7.1 Introdução

Na Figura 7.1 apresenta-se uma viga simplesmente apoiada: em (a) ela está descarregada, e em (b), submetida a uma força vertical, encurvando-se. O encurvamento desta viga decorre do fato de as fibras superiores se encurtarem e de as fibras inferiores se alongarem, o que leva a viga deformada a ter concavidade para cima.

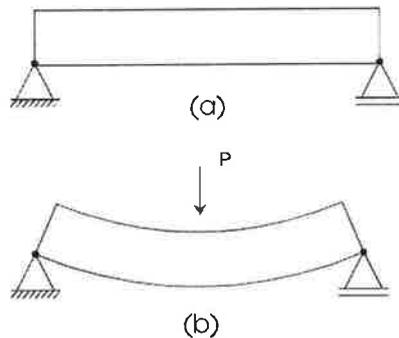


Figura 7.1

Como se verificou no Capítulo 2, as fibras longitudinais de uma barra diminuem de comprimento quando a barra é comprimida e aumentam de comprimento quando ela é tracionada. No caso da barra da Figura 7.1, as fibras superiores são comprimidas, encurtando-se, e as inferiores são tracionadas, alongando-se. Como se verá mais adiante no curso, as tensões normais na seção transversal desta barra variam linearmente ao longo da altura da viga, com se mostra na Figura 7.2.

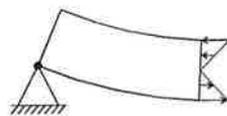


Figura 7.2

Observa-se nesta figura que o material da barra é bem solicitado junto às faces superior e inferior, onde as tensões são grandes, e pouco solicitado em sua parte central, onde as tensões são pequenas. Conclui-se, desta observação, que uma viga de seção transversal retangular não é a mais econômica para resistir à flexão, pois tem-se muito material na região central da viga que, como se viu, é pouco aproveitada, já que nela as tensões são baixas – observe na Figura 7.3 (a) as tensões normais na seção transversal de uma viga de seção retangular submetida à flexão. Já uma viga de seção I é muito adequada para resistir à flexão, pois nela o material se concentra nas regiões mais solicitadas da viga, tendo-se pouco material na sua região central, como se observa na Figura 7.3 (b).

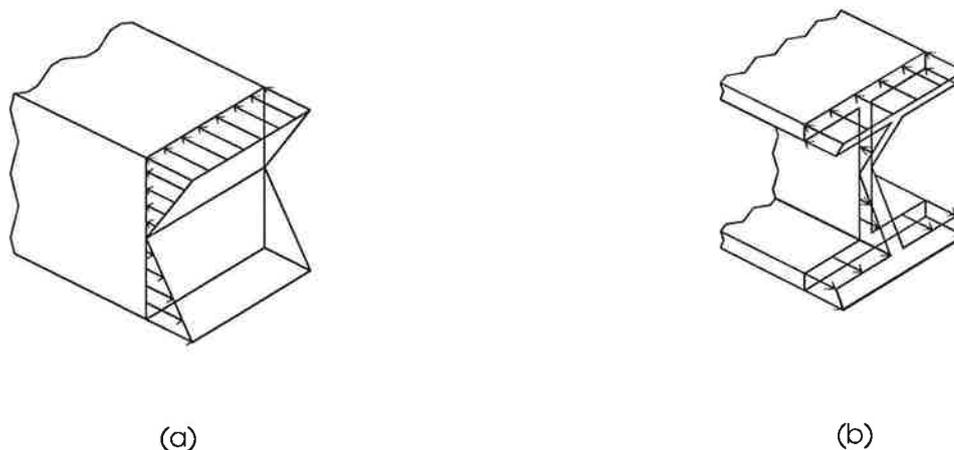


Figura 7.3

É justamente por permitir um bom aproveitamento da capacidade resistente do material que os perfis I e os perfis H são muitíssimo utilizados nas construções metálicas.

O passo seguinte no sentido de se aproveitar bem o material de uma viga fletida é eliminar material da região central em que ele é pouco aproveitado, concentrando-o nas regiões junto às faces da viga, como se vê na Figura 7.4 (a), em que se retirou material da parte central pouco aproveitada da viga.

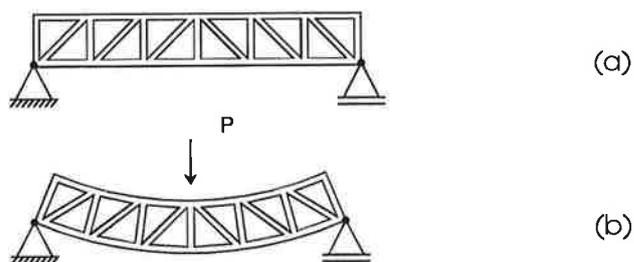


Figura 7.4

Na Figura 7.4 (b) mostra-se a deformação da viga produzida por uma força vertical, verificando-se que tem-se um banzo superior comprimido – os banzos são a barra superior e a barra inferior da viga – e um banzo inferior tracionado, ligados por montantes verticais e diagonais. É bastante intuitivo que os dois banzos tenham que ser unidos por elementos de ligação – neste caso, pelos montantes e diagonais –

para que toda a viga trabalhe conjuntamente como um elemento único, comprimido em cima e tracionado em baixo.

Um aperfeiçoamento desta idéia leva à viga da Figura 7.5, constituída por barras unidas entre si para formar uma viga de grande altura, com dois banzos unidos por montantes verticais e diagonais; vigas como esta são muito utilizadas nas construções, sendo muito empregadas em pontes ferroviárias. Esta viga é uma estrutura muito eficiente para resistir à flexão, pois possui dois banzos bastante afastados – como se verá à frente no curso, quanto mais alta for uma viga mais resistente ela será à flexão –, ligados entre si por poucos elementos. O consumo de material é bastante baixo, já que existem grandes vazios na alma da viga – dá-se o nome de alma de uma viga à região que une os seus banzos.

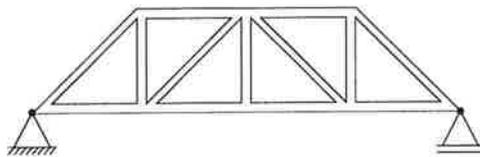


Figura 7.5

Vigas como a da Figura 7.5 recebem o nome de treliças, e a discussão que se acaba de fazer explica as razões que levam as treliças a serem elementos estruturais tão eficientes e tão utilizados: são leves, possuem grande resistência à flexão, permitem um grande aproveitamento da capacidade resistente do material e são muito econômicas. É por este motivo que as treliças são elementos estruturais tão freqüentes nas construções, por exemplo, como tesouras de telhado ou vigas laterais de pontes e passarelas. Na Figura 7.6 mostram-se algumas treliças da cidade de São Paulo.

Passarela na Estação da Luz

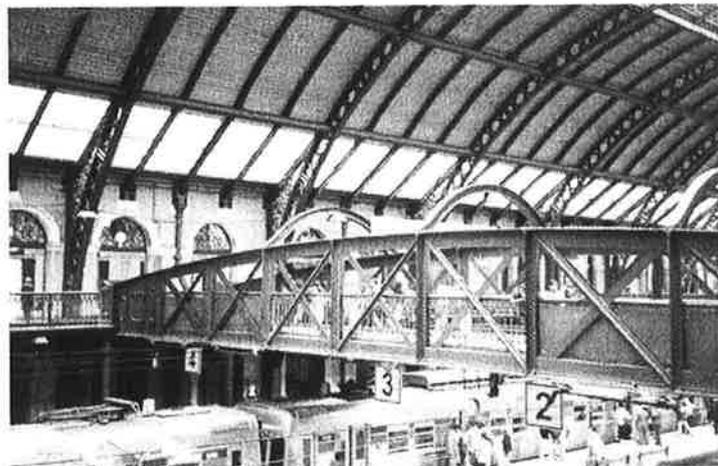


Foto tirada pela aluna Daniella Pinholi Cardoso

Trelliça utilizada na construção da ponte estaiada da linha 5 do metrô

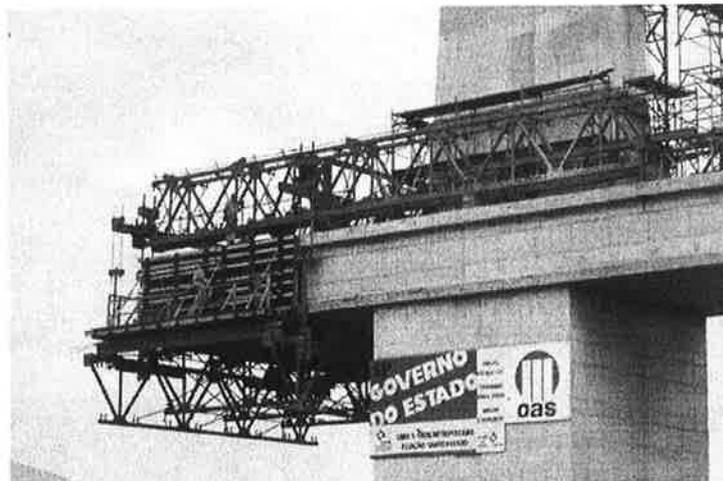


Foto tirada pelo aluno Anderson Glauco Benite

Edifício do Comando do 8º Distrito Naval



Foto tirada pelos alunos André Cunha e Carlos Takaoka

Passarela sobre a Avenida Eusébio Matoso

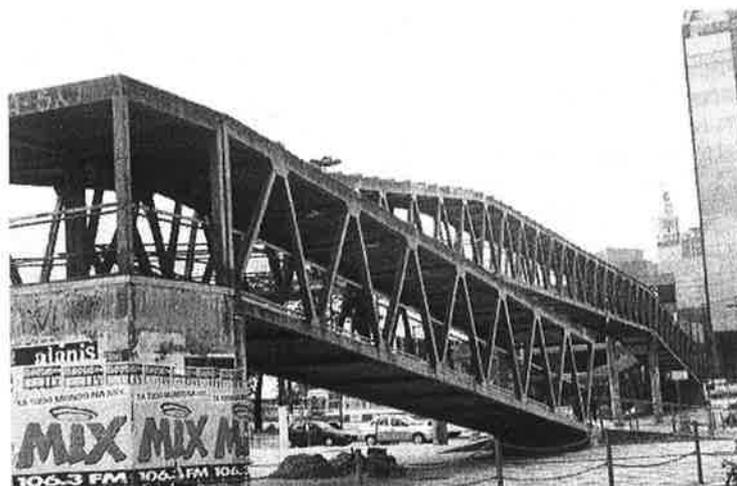


Foto tirada pelos alunos Agnes Kodo e Bianca Romero

Figura 7.6

Feita esta introdução informal do que é uma treliça, apresenta-se agora sua definição formal:

Definição 7.1

Treliças são estruturas:

- a) Formadas por barras articuladas nas suas extremidades;
- b) Solicitadas por forças externas aplicadas exclusivamente em seus nós.

Dá-se o nome de nó de uma treliça ao ponto de encontro de duas ou mais barras da treliça.

Na Figura 7.7 apresenta-se o modelo de uma treliça muito usada em telhados, verificando-se que ela satisfaz a definição acima. Nesta figura, os nós da treliça são identificados por letras e as barras, por números; esta é a notação usual para os nós e barras de uma treliça.

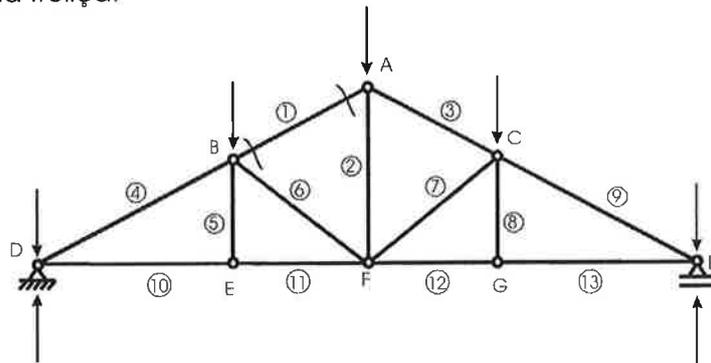


Figura 7.7

É muito fácil mostrar que nas barras de uma treliça o único esforço solicitante atuante é a força normal - de tração ou de compressão -, sendo nulos todos os demais esforços solicitantes.

Para comprovar esta afirmação, considere-se o equilíbrio da barra 1 da treliça da Figura 7.7, retirada da treliça por meio de dois cortes: um segundo uma seção imediatamente à direita de B e outro segundo uma seção imediatamente à esquerda de A, indicados na Figura 7.7.

Na Figura 7.8 indica-se a barra 1 retirada da treliça e os esforços que podem atuar em suas extremidades: uma força longitudinal e uma força transversal, pois, como as extremidades da barra são articuladas, nelas não atuam momentos.

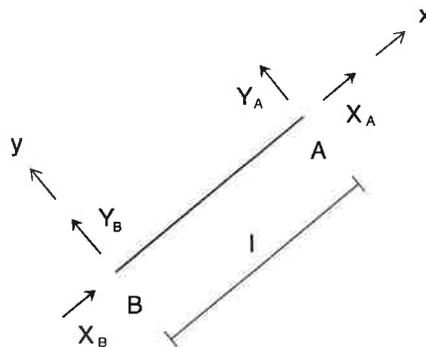


Figura 7.8

Como esta barra foi retirada de uma estrutura em equilíbrio, ela está em equilíbrio, logo as equações de equilíbrio da estática ficam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad \therefore \quad X_A + X_B = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad \therefore \quad Y_A + Y_B = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad \therefore \quad -Y_B \cdot l = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Destas equações, decorre:

$$\begin{aligned} X_A &= -X_B \\ Y_A &= Y_B = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Como tem-se $Y_A = Y_B = 0$, tanto as forças cortantes como os momentos fletores na barra 1 são nulos, tendo-se então nesta barra apenas forças normais de tração ou de compressão, como indicado na Figura 7.9.

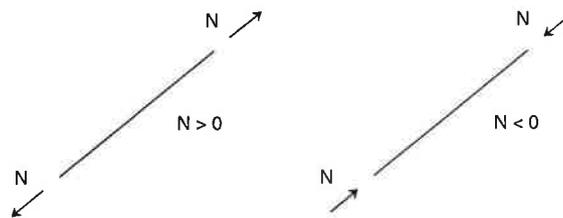


Figura 7.9

É claro que o raciocínio feito aplica-se a todas as demais barras da treliça da Figura 7.7, concluindo-se então que em todas elas só se tem forças normais, sendo nulas as forças cortantes e os momentos fletores.

Observando-se uma treliça real, verifica-se que ela não satisfaz exatamente as condições estipuladas na Definição 7.1 para que uma estrutura seja uma treliça:

- Normalmente as barras das treliças não são perfeitamente articuladas nas suas extremidades – exemplificando esta afirmação, mostram-se na Figura 7.10 duas treliças cujas barras não são perfeitamente articuladas em suas extremidades, tendo as barras do Esporte Clube Pinheiros sido concretadas monoliticamente e sendo as barras da treliça do IPT unidas por meio de solda a chapas de ligação.
- As forças externas que nelas atuam não são todas aplicadas nos nós, já que pelo menos o peso próprio é aplicado ao longo das barras.

Treliça do Esporte Clube Pinheiros

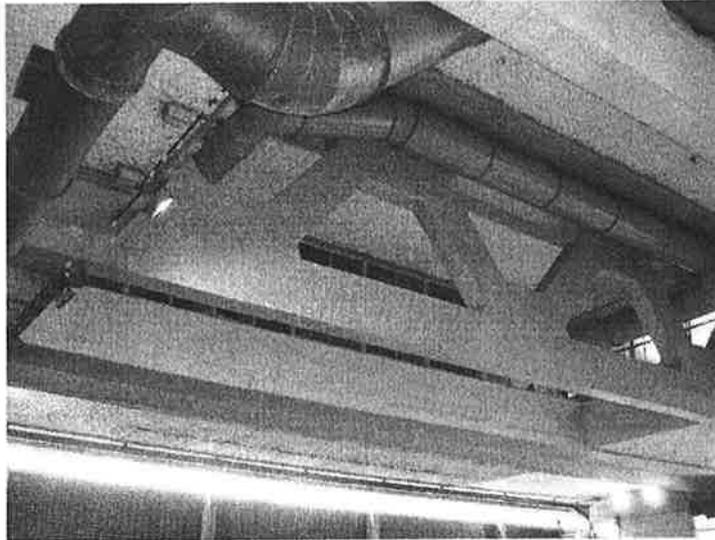
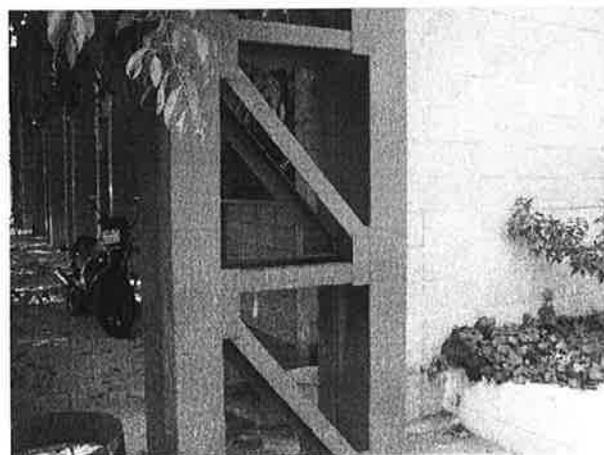


Foto tirada pelo aluno Guilherme Stuart

Treliça do Instituto de Pesquisas Tecnológicas



Fotos tiradas pelo aluno Guilherme Stuart

Figura 7.10

Ambos os fatos fazem com que se tenha forças cortantes e momentos fletores nas barras de uma treliça.

Considere-se novamente a barra 1 da treliça da Figura 7.7, mas agora também submetida a seu peso próprio, como se mostra na Figura 7.11.

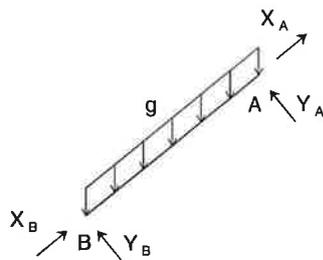


Figura 7.11

É muito fácil verificar que agora, além de forças normais, também se terá nesta barra forças cortantes e momentos fletores.

Com relação à influência do fato de não se ter articulações nas extremidades das barras da treliça, considere-se a treliça indicada na Figura 7.12. Trata-se de uma das treliças mais simples que se pode ter, um triângulo formado por barras articuladas em suas extremidades. Na Figura 7.12 (a) indica-se a treliça antes da aplicação da carga no nó A, e, na Figura 7.12 (b), a configuração deformada da treliça, após a aplicação da carga em A.

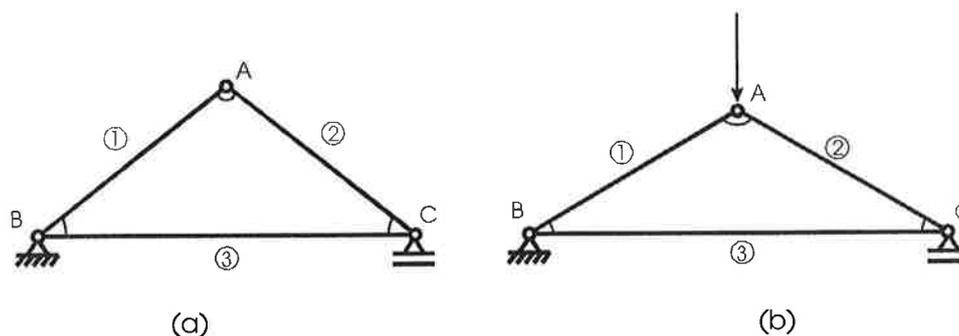
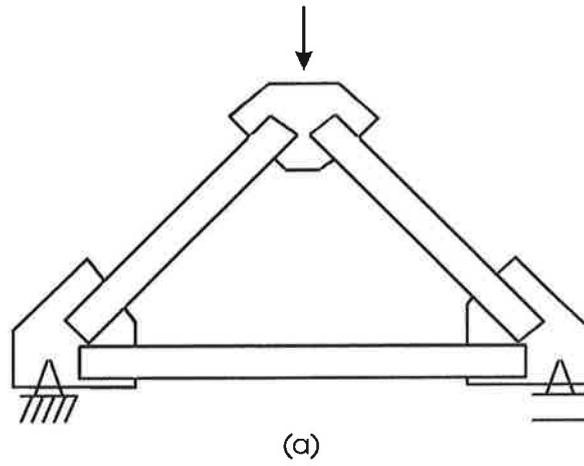


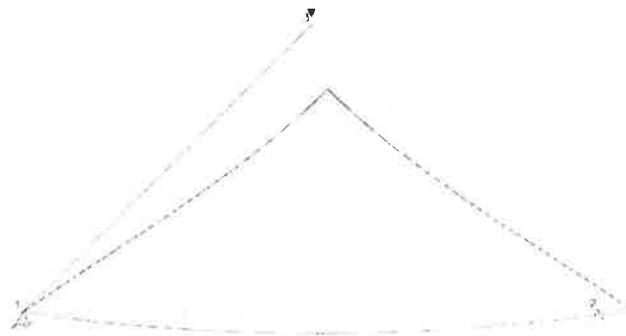
Figura 7.12

O comportamento e a deformação desta treliça são bastante intuitivos: as barras 1 e 2 ficam comprimidas e a barra 3, tracionada; todas as barras ficam retas, o ângulo entre as barras 1 e 2 aumenta e os ângulos entre as barras 1 e 3 e entre as barras 2 e 3 diminuem. É claro que, para que se pudesse ter este comportamento, foi fundamental o fato de todas as barras serem articuladas em suas extremidades, já que elas tiveram que girar em torno dos nós para que os ângulos entre elas pudessem se alterar.

O que aconteceria com a treliça da Figura 7.12 se suas barras não fossem articuladas em suas extremidades, como mostrado na Figura 7.13 (a), em que as barras são unidas por intermédio de chapas de ligação, a exemplo das treliças mostradas na Figura 7.14?



(a)



(b)

Figura 7.13

Tesoura da Creche Oeste (USP)

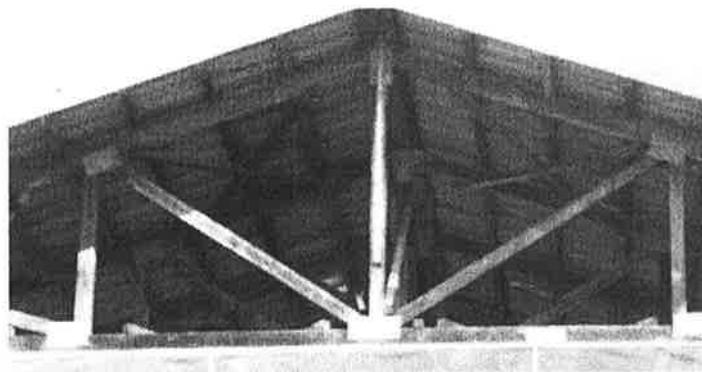


Foto tirada pelo aluno Guilherme Stuart

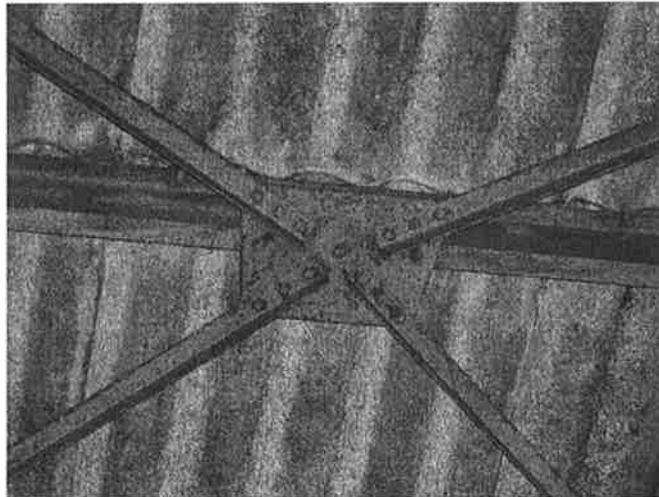


Foto tirada pelo aluno Guilherme Stuart

Figura 7.14

As barras 1 e 2 continuarão a ser comprimidas e a barra 3, tracionada, mas agora, como as barras não são mais articuladas em suas extremidades, os ângulos entre elas não mais poderão se alterar, o que levará à deformação mostrada na Figura 13 (b). Observa-se que, em lugar de permanecerem retas como no caso da treliça da Figura 7.12, as barras se encurvam, o que revela que nelas se tem momentos fletores e forças cortantes.

Tanto pelo fato de não possuírem todas as forças externas aplicadas em seus nós como pelo fato de não terem as suas barras perfeitamente articuladas em suas extremidades, as treliças reais não são submetidas apenas a forças normais, como as treliças ideais da Definição 7.1. Nelas também atuam forças cortantes e momentos fletores.

Nas treliças reais usualmente encontradas, entretanto, o peso próprio das barras é pequeno em face às demais cargas externas que atuam na treliça (e que são aplicadas em seus nós), e as barras são bastante flexíveis à flexão, o que faz com que as tensões decorrentes do fato de a treliça não ser ideal sejam pequenas.

Ao se fazer o projeto de uma treliça – assim como o de qualquer outra estrutura –, emprega-se um modelo matemático para representar a estrutura. Um bom modelo matemático é aquele que é simples e representa bem a estrutura, isto é, tal que as diferenças entre o comportamento previsto por ele e o comportamento da estrutura real sejam pequenas. Em termos quantitativos, um modelo matemático pode ser considerado bom se as diferenças entre as tensões, deslocamentos, etc., previstos por seu intermédio e os da estrutura real forem da ordem de 5%. Pois bem: calcular uma estrutura formada por barras perfeitamente articuladas em todas as suas extremidades e submetida exclusivamente a forças externas aplicadas em seus nós – uma treliça ideal – é muitíssimo mais simples do que calcular uma estrutura formada por barras não-articuladas em suas extremidades e submetida a esforços externos aplicados não apenas em seus nós, mas também ao longo de suas barras – uma treliça real –, e é por esta razão que se emprega o modelo de treliça ideal para se fazer o projeto das treliças reais. Pelo fato de ser um modelo matemático muito simples e que leva a erros pequenos ($\leq 5\%$) no projeto da estrutura.

Definição 7.2

Dá-se o nome de *tensões primárias* às tensões nas barras de uma treliça calculada como sendo ideal – as tensões decorrentes das forças normais nas barras da treliça – e de *tensões secundárias* às tensões adicionais produzidas na treliça pelo fato de ela não ser ideal – as tensões decorrentes dos momentos fletores e forças cortantes.

Sendo o peso próprio da treliça pequeno quando comparado com as demais forças externas que atuam na treliça (aplicadas em seus nós) e sendo os eixos das barras da treliça concorrentes em um único ponto nos nós, as tensões secundárias são muito menores que as tensões primárias, podendo-se então utilizar o modelo de treliça ideal ao se projetar uma treliça real. Ao se adotar este procedimento, considera-se o peso próprio das barras aplicado nos seus nós de extremidade, metade em cada um deles.

A esse respeito, é interessante comentar que no século XIX e mesmo no início do século XX era comum se construir treliças tendo as extremidades das barras perfeitamente articuladas, como se vê na Figura 7.15, em que são mostradas duas fotografias de uma treliça da cobertura da Gare du Nord (Estação do Norte) de Paris, inaugurada em 1866. Verificou-se, nestas treliças, que, com o passar do tempo, a sujeira acumulada nas articulações e a corrosão do material muitas vezes faziam com que as barras deixassem de ser perfeitamente articuladas nos nós e que nem por isso as estruturas ficavam comprometidas. Foi assim que se percebeu que as barras de uma treliça não precisavam ser articuladas em suas extremidades, o que levou a estruturas muito mais econômicas e fáceis de executar. Pode-se afirmar que, empiricamente, percebeu-se que as tensões secundárias eram muito menores que as tensões primárias.

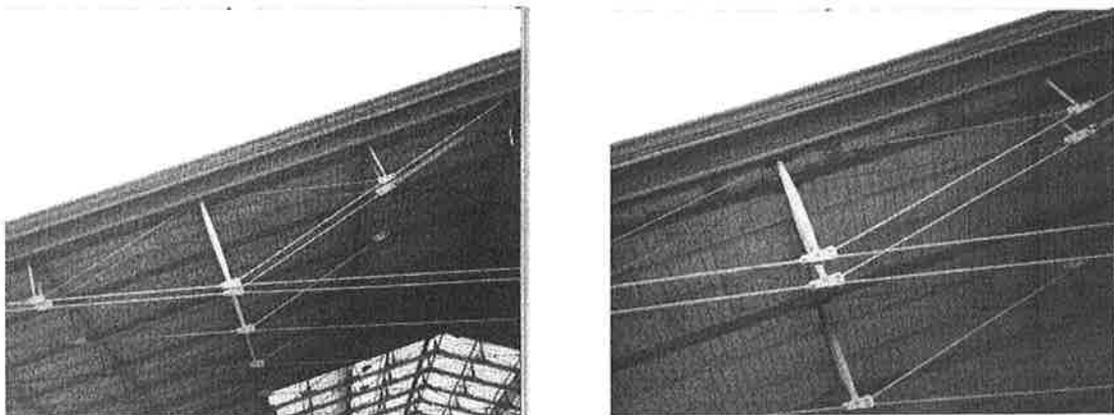
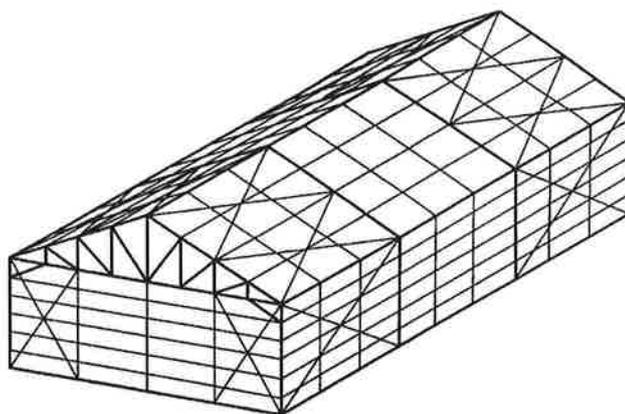


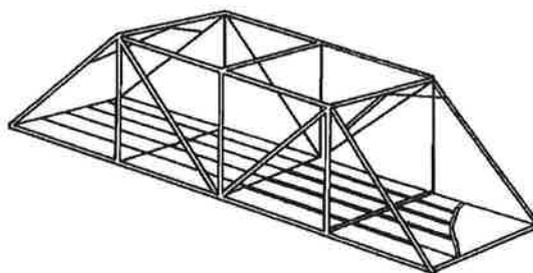
Figura 7.15

É importante ressaltar que, para que o modelo de treliça ideal represente bem uma treliça real, os eixos das barras devem se encontrar em um único ponto nos nós. Caso isto não ocorra, além dos momentos fletores introduzidos pelo peso próprio e pelo fato de as barras não serem articuladas nas extremidades, haverá a introdução de momentos nos nós decorrentes da excentricidade das forças normais neles aplicadas. Como as forças normais nas barras de uma treliça são grandes, mesmo que as excentricidades sejam pequenas, o fato de os eixos das barras não serem concorrentes em um único ponto poderá introduzir momentos significativos.

Ao se projetar e construir uma treliça deve-se então ter a preocupação de que os eixos de suas barras se cruzem em um único ponto nos nós e que as forças externas sejam aplicadas nos nós, a fim de que as tensões secundárias sejam realmente muito menores que as primárias. Na Figura 7.16 apresentam-se os esquemas de um galpão industrial e de uma ponte, em que estas duas condições são satisfeitas, observando-se que as terças do telhado do galpão da Figura 7.16 (a) se apóiam nos nós do banzo superior das tesouras e que as transversinas da ponte da Figura 16 (b) se apóiam nos nós do banzo inferior das treliças laterais da ponte.



(a)



(b)

Figura 7.16

7.2 Breve histórico das treliças

Não se sabe exatamente quando as treliças começaram a ser utilizadas nas construções, já que estes primeiros empregos das treliças não foram registrados em textos ou desenhos. Supõe-se que os gregos já utilizassem a mais simples de todas as treliças no apoio de seus telhados: um simples triângulo como o mostrado na Figura 7.17, construído em madeira.

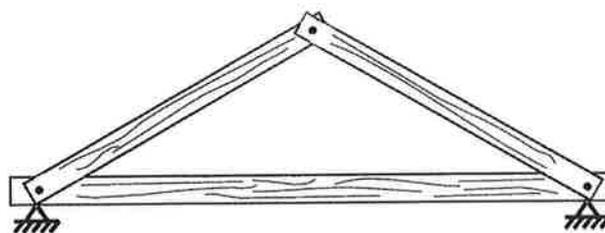


Figura 7.17

Os romanos seguramente usavam treliças de madeira nos seus telhados e pontes. No célebre tratado "Dez livros de arquitetura", escrito por Vitruvius (Marcus Vitruvius Pollio, c. 90 - 20 a.C.) no final do século I a.C., e o único registro escrito da arquitetura e

engenharia romanas que chegou aos nossos dias, são descritas algumas treliças de madeira usadas em coberturas. Infelizmente, os desenhos que ilustravam a obra de Vitrúvio se perderam, e as versões atuais de seu livro trazem desenhos reconstituídos a partir do texto que as descrevia. Nas Figuras 7.18, 7.19 e 7.20 mostram-se algumas treliças de cobertura que ilustram a tradução para o francês do livro de Vitrúvio feita em 1673 por Claude Perrault, que é também o autor das ilustrações.

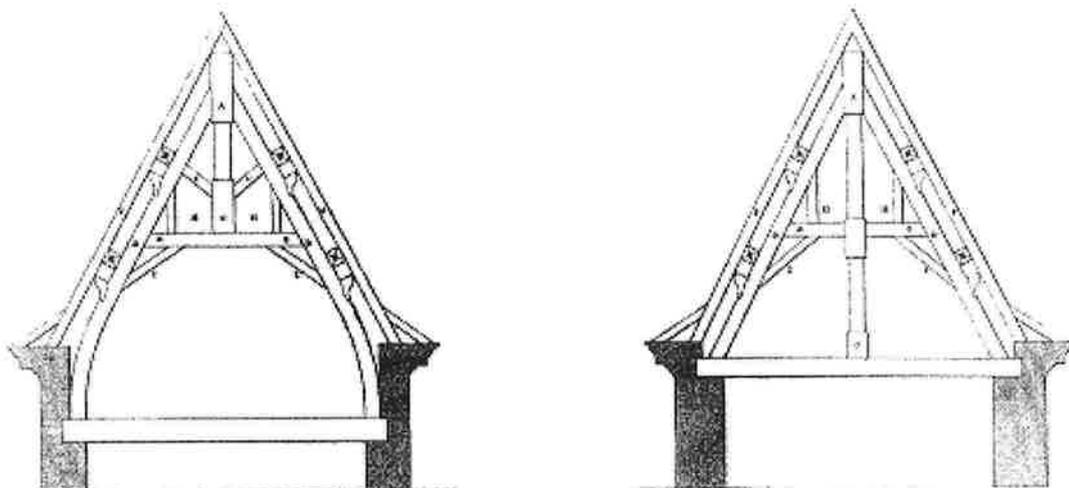


Figura 7.18

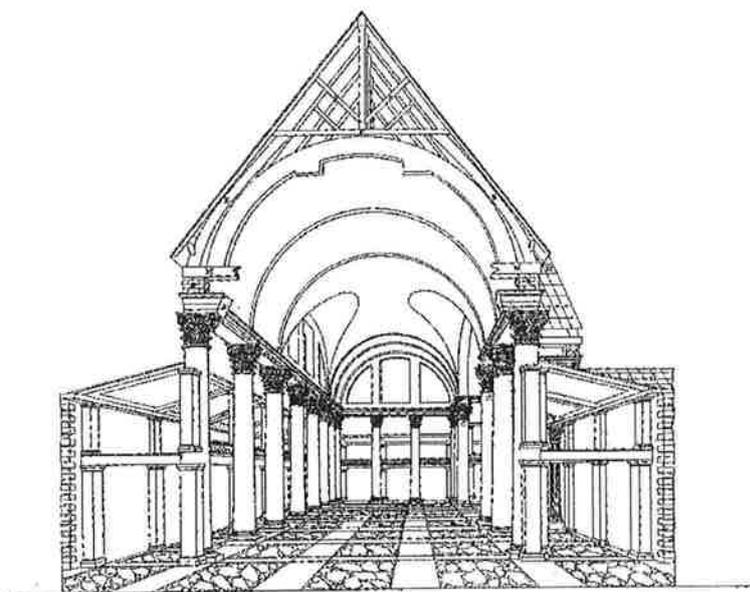
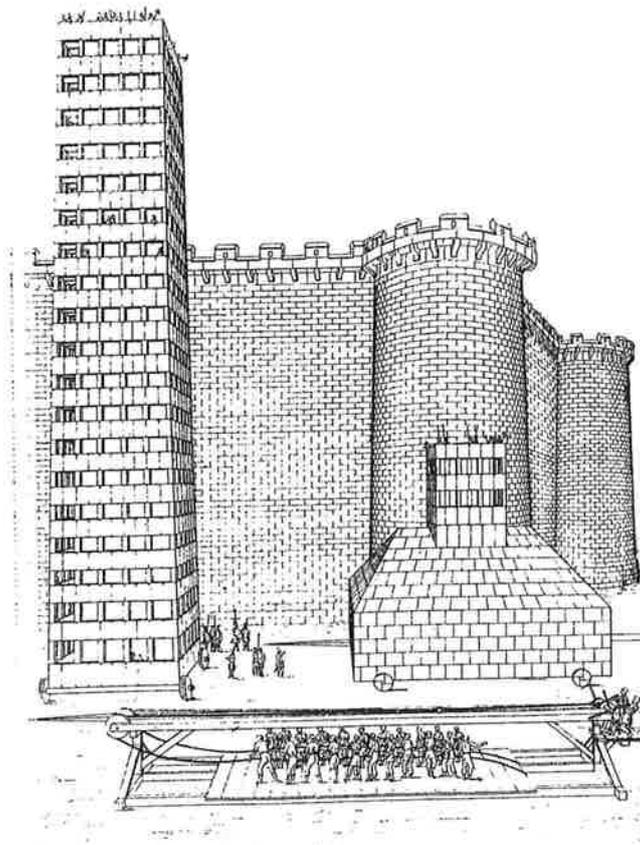
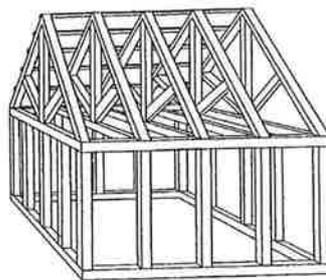


Figura 7.19

Na Figura 7.18, mostram-se duas tesouras de telhado descritas por Vitruvius; a Figura 7.19 apresenta o corte da Basílica de Fano, projetada pelo próprio Vitruvius; a Figura 7.20 é interessantíssima, mostrando uma máquina de guerra conhecida como a "tartaruga" (Figura 7.20 (a)) e a sua estrutura interna (Figura 7.20 (b)).



(a)



(b)

Figura 7.20

Como se verá mais adiante neste capítulo, as tesouras de telhado das Figuras 7.18 e 7.19 não são exatamente treliças, pois, para que fiquem em equilíbrio, as extremidades de algumas de suas barras necessitam transmitir momentos fletores. Apesar disto, entretanto, elas são muito próximas das verdadeiras treliças,

especialmente a tesoura de telhado da Basílica de Fano. Já as tesouras da cobertura da "tartaruga" são treliças verdadeiras, e a estrutura da Figura 7.20 (b) é surpreendentemente atual: poderia ser a estrutura de uma casa de madeira do século XXI!

Treliças de madeira como estas continuaram sendo utilizadas na Europa até a Idade Média, quando, com o surgimento do ferro forjado, material que possui boa resistência à tração, algumas das treliças de cobertura das igrejas passaram a ter peças de ferro forjado, como se mostra na Figura 7.21.

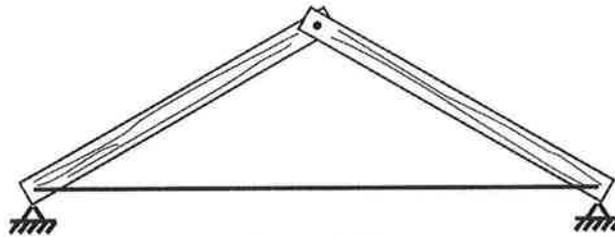


Figura 7.21

No Renascimento, Leonardo da Vinci e Andrea Palladio fizeram projetos de pontes de madeira em que utilizaram treliças muito semelhantes às hoje empregadas.

A ponte da Figura 7.22 foi projetada por Leonardo da Vinci por volta de 1490, e integra o Códice Ashburnham, hoje conservado no Institut de France, em Paris. É interessante observar que, como nas treliças modernas, os esforços externos são aplicados nos nós da treliça: o piso da ponte se apóia em transversinas, por sua vez apoiadas nos nós dos banzos inferiores das vigas laterais da ponte. Junto a este projeto, Leonardo escreveu: "Esta ponte será inquebrável se as vigas mestras *ab* e *cd* forem fortes e bem ligadas".

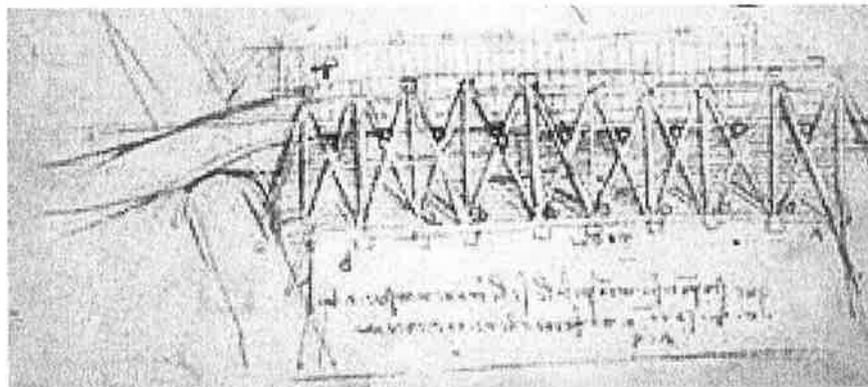


Figura 7.22

Em 1570, Andrea Palladio publicou em Veneza a obra "Os quatro livros de arquitetura", em que, no terceiro livro, apresenta quatro projetos de pontes de madeira em treliça. Dois destes projetos estão reproduzidos nas Figuras 7.23 e 7.24, podendo-se observar que estas treliças possuem todos os elementos que caracterizam as treliças modernas. Embora não se tenha notícia de que a ponte projetada por Leonardo da Vinci tenha sido construída, sabe-se que Palladio construiu pelo menos uma das pontes que projetou.

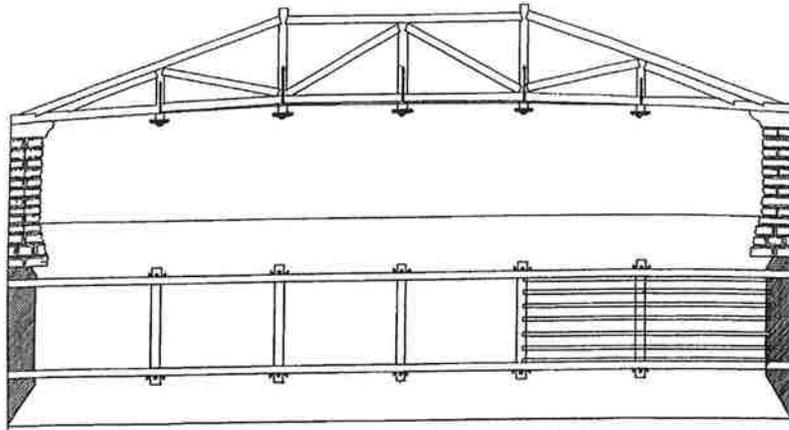


Figura 7.23

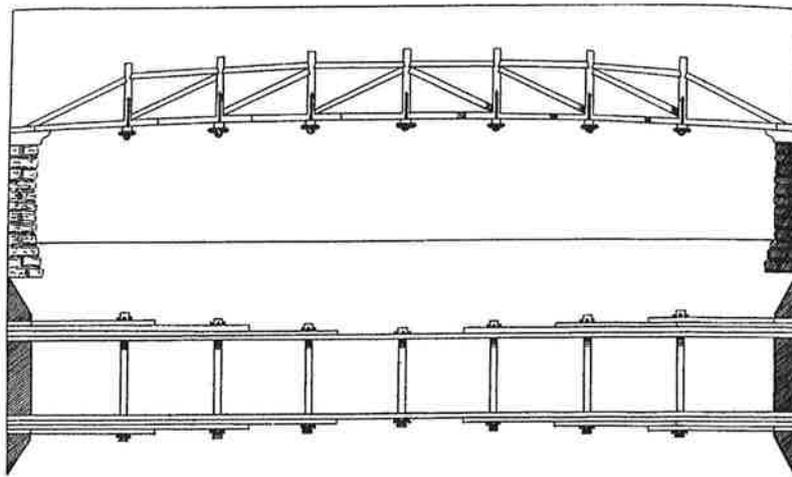


Figura 7.24

A ponte da Figura 7.23, com cerca de 30 m de vão, foi construída sobre o rio Cismone, próximo à cidade de Bassano, não muito longe da fronteira da Itália com a Áustria. Palladio comenta que seu proprietário, o Conde Giacomo Angarano, encomendou-a para substituir uma ponte que, por possuir pilares colocados no meio do rio, tinha que ser refeita todos os anos em decorrência da violência da corrente e do choque de pedras e troncos trazidos das montanhas pelo rio. A ponte que projetou, por não ter pilares dentro do rio, veio a resolver este problema. Em seu livro, Palladio comenta que este tipo de ponte poderia ser utilizado em outros locais em que se tivesse o mesmo problema, e que, em decorrência da maneira como eram construídas, estas pontes "são fortes, bonitas e eficientes: fortes, porque todas as suas partes mutuamente se suportam umas nas outras; bonitas, porque a textura das madeiras é muito agradável, e eficientes, porque são em nível e na mesma linha que o restante da rua."

Observa-se na Figura 7.23 que as pranchas do piso da ponte se apóiam em transversinas, que por sua vez se apóiam nos nós dos banzos inferiores das treliças laterais da ponte; desta forma, as forças externas são aplicadas nos nós da treliça. Observa-se, ainda, que o banzo inferior é preso aos montantes verticais por pregos de ferro.

Muito justamente, por ter projetado e construído pontes em treliça com todas as características das treliças modernas, Palladio é considerado o inventor das pontes em treliça.

O grande desenvolvimento das treliças ocorreu no século XIX, quando as estradas rodoviárias e, principalmente, as ferroviárias exigiram a construção de um grande número de pontes e viadutos. Na Europa, na construção das primeiras pontes e viadutos ferroviários foram empregados arcos de pedra, de tijolos e mesmo de ferro fundido, que combinavam com o ambiente mais urbano em que eram construídos. Já nos Estados Unidos e na Rússia, em que as ferrovias percorriam enormes distâncias, em regiões de baixa população, a preocupação maior era com a economia e a facilidade de construção, o que favoreceu o uso de treliças nas pontes e viadutos.

Nos Estados Unidos, Ithiel Town, de New Haven, Connecticut, patenteou em 1820 a treliça mostrada na Figura 7.25, construída de madeira. Esta foi a primeira treliça desde as de Palladio que transmitia apenas forças verticais aos apoios. É curioso comentar que Town ficou muito rico com sua invenção: sendo bom comerciante, cobrou "royalties" de US\$ 1,00 a US\$ 2,00 por pé (30,48 cm) de comprimento de todas as pontes deste tipo construídas na época.

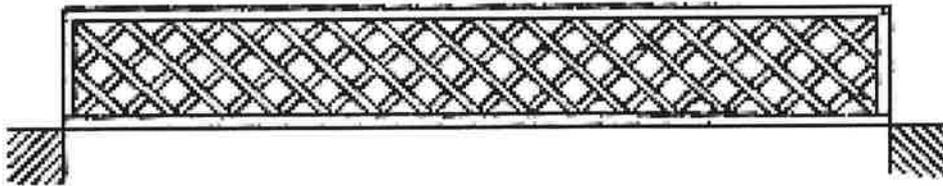


Figura 7.25

Este tipo de treliça, inicialmente de madeira e posteriormente de ferro forjado e de aço, foi amplamente utilizado em pontes rodoviárias e ferroviárias, inclusive no Brasil. Na Figura 7.26, mostra-se a ponte Imperial D. Pedro II, inaugurada em 1885, na Bahia, com uma estrutura semelhante à patenteada por Town; é uma ponte ferroviária, sobre o rio Paraguaçu, ligando as cidades de Cachoeira e São Félix. Esta ponte, que na época de sua inauguração era a maior ponte do Brasil, foi fabricada na Grã-Bretanha e começou a ser construída em 1883. Ela possui quatro tramos simplesmente apoiados de cerca de 90 m de vão cada um, tendo comprimento total de 365 m; suas enormes vigas laterais têm quase 8 m de altura.



Figura 7.26

Em 1840, William Howe, de Spencer, Massachusetts, patenteou a treliça mostrada na Figura 7.27 (a), com os montantes verticais tracionados de ferro forjado e os demais elementos de madeira; este tipo de treliça é hoje conhecido como treliça Howe. Em 1844, Caleb Pratt e Thomas Pratt, de Boston, pai e filho, patentearam a treliça da Figura 7.27 (b), com as diagonais e o banzo inferior de ferro forjado e os demais elementos de madeira; este tipo de treliça é hoje conhecido como treliça Pratt.

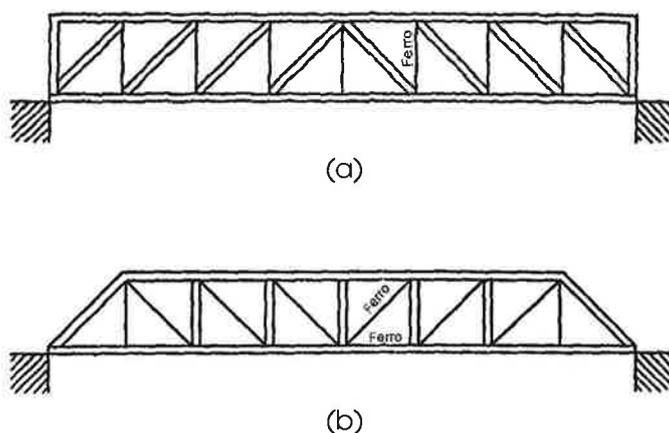


Figura 7.27

Em 1853, Squire Whipple, de Hardwick, Massachusetts, construiu a primeira treliça inteiramente metálica dos Estados Unidos, mostrada na Figura 7.28. Esta treliça, com 45 m de vão, foi empregada em uma ponte da ferrovia Rensselaer - Saratoga. Os elementos comprimidos desta treliça eram de ferro fundido e os tracionados, de ferro forjado.

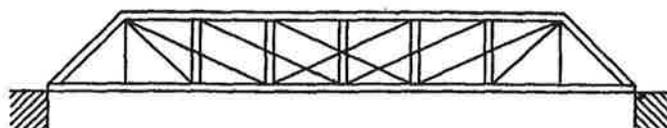


Figura 7.28

Em 1848, dois ingleses, James Warren e Willoghby Theobald Monzani, patentearam a treliça mostrada na Figura 7.29, hoje conhecida como treliça Warren. A primeira destas treliças foi construída em 1850, na Estação da Ponte de Londres da ferrovia "South Eastern".

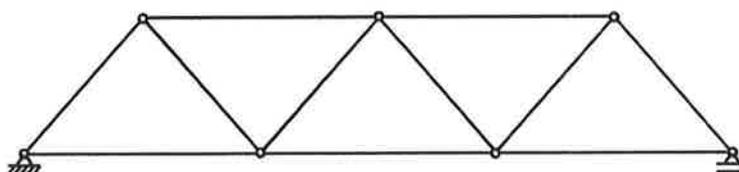


Figura 7.29

Como se verá mais adiante, os processos de resolução das treliças isostáticas, isto é, de determinação das forças normais nas barras da treliça, são muito simples, baseando-se apenas nas equações de equilíbrio da estática. Apesar disto, entretanto, até o meio do século XIX não havia sido ainda obtido um processo de determinação das forças normais nas barras de uma treliça, que eram então desenhadas e dimensionadas com base na intuição e na experiência dos engenheiros que as projetavam.

Foi em 1847 que o americano Squire Whipple, no livro "Essay on Bridge Building" (Ensaio sobre a Construção de Pontes), mostrou como se podia obter as forças normais nas barras de uma treliça, apresentando o processo hoje conhecido como processo do equilíbrio dos nós, que será examinado na Seção 7.4.1 deste Capítulo. Pouco depois de Whipple, e aparentemente de forma independente uns dos outros, vários outros engenheiros propuseram processos para a resolução de treliças: o americano Herman Haupt, em 1851, no livro "General Theory of Bridge Construction" (Teoria Geral de Construção de Pontes), o escocês Robert H. Bow, também em 1851, no livro "Treatise on Bracing" (Tratado sobre Contraventamento), os ingleses William Thomas Doyne e William Bindon Blood, em 1852, em "Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers" (Minutas dos Anais do Instituto dos Engenheiros Civis).

É muito curioso observar que, nesta época, outros problemas muito mais complexos da engenharia de estruturas já se encontravam resolvidos: em 1826, o francês Claude Louis Marie Henri Navier, professor da École des Ponts et Chaussées, havia publicado as notas de aula de seu curso, "Resumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines" (Resumo das aulas dadas na Escola das Pontes e Estradas sobre a aplicação da mecânica à manufatura das construções e das máquinas), em que resolvera de forma completa o problema da flexão de vigas, e, mais surpreendentemente ainda, em 1744 o suíço Leonard Euler havia publicado o livro "Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti" (Método de obter linhas curvas que gozam de propriedade de máximo ou de mínimo ou solução de problemas isoparamétricos considerados em sentido amplo), em que determinara a carga de flambagem de um pilar engastado em sua base!

7.3 Classificação das treliças

7.3.1 Classificação quanto à disposição espacial das barras

Quanto à disposição espacial de suas barras, as treliças podem ser classificadas em planas ou espaciais.

Definição 7.3

Treliças planas são as que possuem os eixos de todas as suas barras em um mesmo plano, no qual também se situam todas as forças externas que as solicitam.

Na Figura 7.30 mostra-se uma tesoura de telhado, que é uma treliça plana.

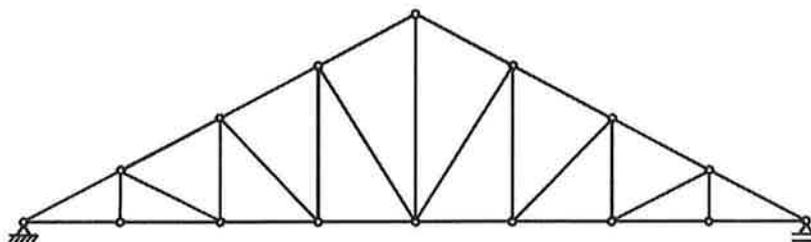


Figura 7.30

A treliça que está sendo apresentada na Figura 7.30 é uma das tesouras do telhado do galpão mostrado na Figura 7.16 (a). Observa-se claramente na Figura 7.16 (a) que na realidade tanto o galpão como seu telhado são estruturas espaciais: para simplificar a análise da estrutura, entretanto, as tesouras estão sendo consideradas como sendo estruturas planas. Isto, por que é muito mais fácil analisar uma estrutura plana que uma espacial. É mais uma situação em que se está utilizando um modelo matemático simples para representar uma estrutura que, na realidade, é bem mais complexa. Podem atuar neste telhado esforços ortogonais às tesouras, provenientes, por exemplo, da ação do vento e da chuva, de escadas que eventualmente venham a ser apoiadas nas tesouras, etc., mas, como estes esforços são pequenos, estão sendo desprezados no modelo matemático que se decidiu adotar para o cálculo das tesouras, considerando-as como sendo estruturas planas. Observando com atenção o galpão da Figura 7.16 (a) irá se notar, entretanto, a presença de barras de contraventamento em forma de X ligando longitudinalmente as duas primeiras tesouras do telhado; a função deste contraventamento é de exatamente resistir a estes esforços longitudinais pequenos, que, embora não estejam sendo considerados no modelo de treliça plana adotado para o cálculo das tesouras, atuam no telhado e devem ser resistidos adequadamente.

Observações totalmente análogas a estas poderiam ser feitas com relação às treliças laterais da ponte da Figura 7.16 (b), que, para efeitos de projeto, podem ser consideradas como treliças planas.

Definição 7.4

Treliças espaciais são as que não possuem os eixos de todas as suas barras situados em um mesmo plano.

Este é caso das torres de transmissão de energia elétrica, das antenas de televisão, das coberturas dos postos de gasolina, da cobertura do pavilhão de exposições do Anhembi, em São Paulo, etc. Na Figura 7.31, mostram-se algumas treliças espaciais da cidade de São Paulo.

Torre da TV Globo na Av. Paulista



Foto tirada por Luis Alberto Tello Arévalo

Suporte de placa de trânsito da marginal Pinheiros

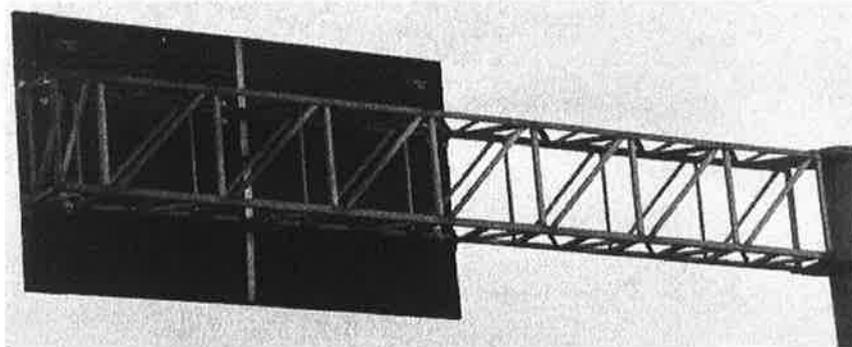


Foto tirada pelos alunos Pablo A. Leite e Uirá Falseti

Cobertura da Estação da Sé do metrô



Foto tirada pelo aluno André Hiroshi de Oliveira Nishina

Figura 7.31

Nesta disciplina serão estudadas apenas treliças planas; por este motivo, as próximas categorias de classificação serão apresentadas apenas para as treliças planas.

7.3.2 Classificação quanto ao grau de estaticidade

Quanto ao grau de estaticidade, as treliças são classificadas em hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas.

Definição 7.5

Treliças hipostáticas são aquelas que podem apresentar movimento de corpo rígido, quer da treliça como um todo, quer de qualquer uma de suas partes.

Na Figura 7.32 apresentam-se duas treliças hipostáticas: na Figura 7.32 (a), uma treliça que pode apresentar movimento global de corpo rígido e, na Figura 7.32 (b), uma treliça em que três barras podem apresentar movimento de corpo rígido.

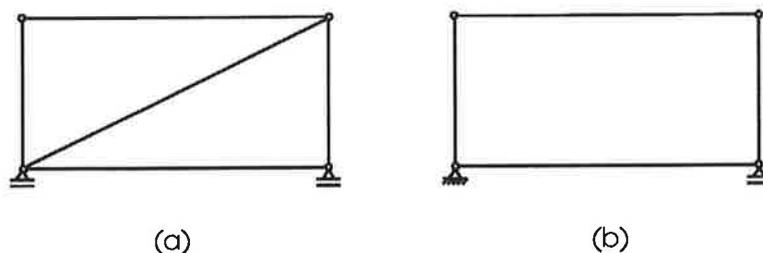


Figura 7.32

Observa-se que na treliça da Figura 7.32 (a) os vínculos introduzidos pelos apoios não são suficientes para impedir o movimento de corpo rígido global da estrutura; por esta razão, diz-se que treliças como esta são externamente hipostáticas. Já os apoios da treliça da Figura 7.32 (b) introduzem vínculos que impedem o movimento de corpo rígido global da estrutura; é a falta de vínculos internos – de ligações internas – por meio de barras que possibilita o movimento de corpo rígido de algumas de suas

barras; por esta razão, diz-se que treliças como esta são internamente hipostáticas. É claro que os dois tipos de falta de vínculos podem ocorrer simultaneamente, e uma treliça ser hipostática interna e externamente, como se verifica na Figura 7.33.

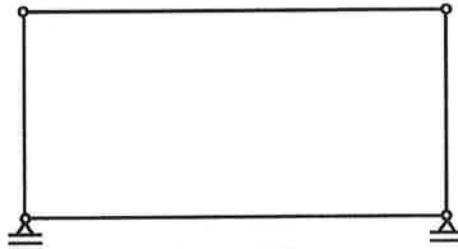


Figura 7.33

Definição 7.6

Treliças isostáticas são aquelas que não apresentam movimento de corpo rígido, mas que passam a poder apresentar movimento de corpo rígido se qualquer um de seus vínculos – externo ou interno – for suprimido.

Na Figura 7.34 apresenta-se uma treliça isostática: ela não apresenta movimento de corpo rígido, mas poderá passar a apresentar movimento de corpo rígido se qualquer um de seus vínculos for suprimido. Em outras palavras, ela se tornará hipostática se qualquer um de seus vínculos for suprimido.

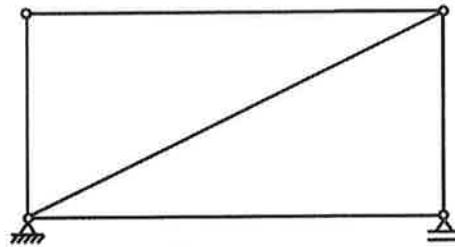


Figura 7.34

Por exemplo, transformando-se o apoio articulado fixo desta treliça em apoio articulado móvel, como se mostra na Figura 7.35 (a), ela se torna hipostática externamente; retirando-se a barra diagonal, como mostrado na Figura 7.35 (b), ela se torna hipostática internamente.

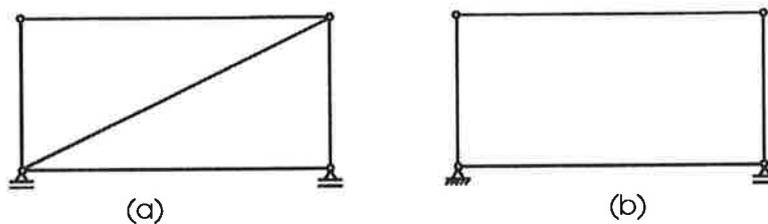


Figura 7.35

Definição 7.7

Treliças hiperestáticas são aquelas que não apresentam movimento de corpo rígido e que podem ter vínculos suprimidos sem vir a poder apresentar movimento de corpo rígido, isto é, sem se tornar hipostáticas.

Na Figura 7.36 apresentam-se duas treliças hiperestáticas: a da Figura 7.36 (a) pode ter qualquer um dos seus apoios articulados fixos transformado em apoio articulado móvel, tornando-se então isostática; a da Figura 7.36 (b) pode ter qualquer uma de suas barras suprimidas, tornando-se então isostática.

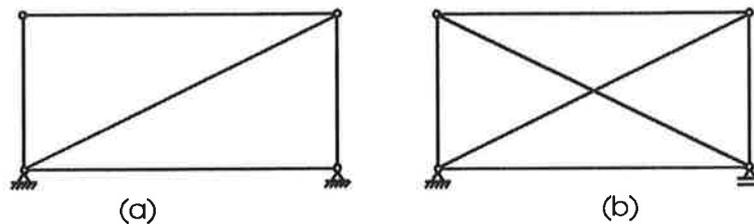


Figura 7.36

Na Seção 1.6.3 do Capítulo 1 desta apostila foi feita uma apresentação geral do conceito de estruturas planas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas, e tudo o que lá foi apresentado se aplica às treliças planas que estão sendo agora examinadas.

Assim, diz-se que as duas estruturas da Figura 7.36 são estruturas uma vez hiperestáticas, ou seja, possuem grau de hiperestaticidade 1, já que podem ter apenas um de seus vínculos suprimido sem se tornar hipostáticas, passando a apresentar movimento de corpo rígido se dois de seus vínculos forem suprimidos. Já a treliça da Figura 7.37 é duas vezes hiperestática, como se pode facilmente constatar.

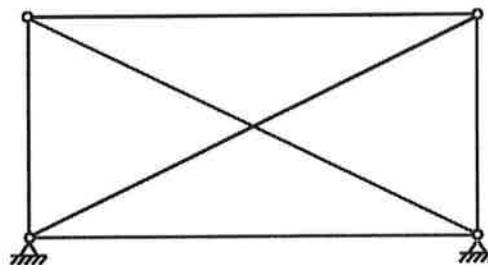


Figura 7.37

Na Seção 1.6.3 foram apresentadas várias propriedades relativas às estruturas planas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas; como elas se aplicam às treliças que ora estão sendo analisadas, sugere-se que o leitor volte a examiná-las.

A classificação das treliças em hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas é muito importante, pois os métodos de resolução das treliças dependem desta classificação: as treliças hipostáticas são mecanismos que podem apresentar movimento de corpo rígido e não são utilizadas nas construções da engenharia civil; as treliças isostáticas podem ter os seus esforços determinados apenas com a consideração das equações de equilíbrio da estática; para a determinação dos esforços das treliças hiperestáticas, as equações de equilíbrio não são mais suficientes, devendo-se, além das equações de equilíbrio da estática, utilizar equações de compatibilidade de deslocamentos.

Nesta disciplina serão examinadas apenas as treliças isostáticas; por exigirem a consideração de equações de compatibilidade de deslocamentos para sua resolução, o estudo das treliças hiperestáticas será feito mais adiante no curso, quando se estudarem as deformações das estruturas.

7.3.3 Classificação quanto à lei de formação

Quanto à lei de formação, as treliças planas podem ser classificadas em simples ou compostas.

Definição 7.8

Treliças simples são as formadas a partir de um triângulo inicial, ao qual, para cada novo nó, se adicionam duas novas barras.

Na Figura 7.38 mostra-se a formação de uma treliça simples utilizada em tesouras de telhado; parte-se do triângulo inicial da Figura 7.38 (a), ao qual vai-se sucessivamente adicionando duas novas barras para cada novo nó, como se mostra nas Figuras 7.38 (b) a 7.38 (d).

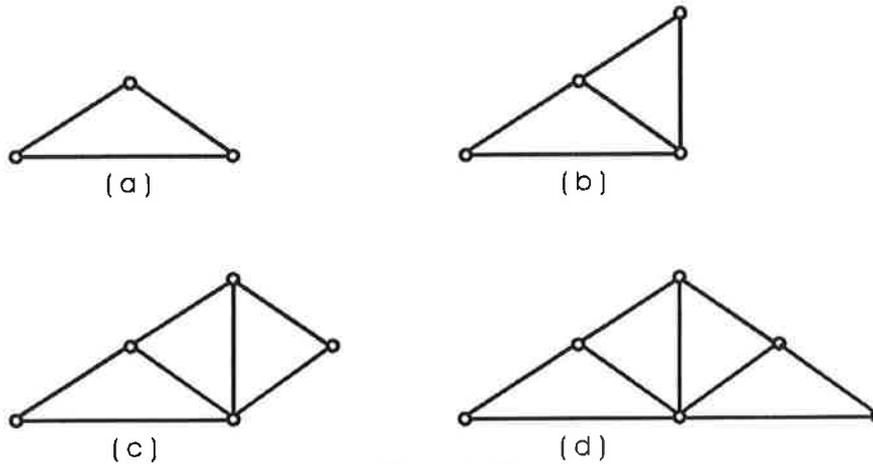


Figura 7.38

Uma treliça simples será sempre isostática se os seus apoios forem os suficientes para impedir os movimentos de corpo rígido da estrutura, como, por exemplo, os apoios que vinculam a treliça da Figura 7.39.

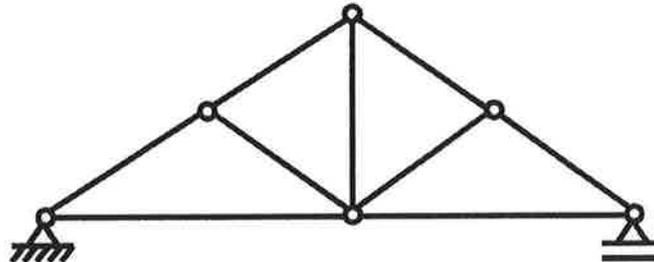


Figura 7.39

Definição 7.9

Treliças compostas são as formadas pela união de duas treliças simples por meio de um nó comum e de uma barra ou então por meio de três barras não paralelas e não concorrentes em um mesmo ponto.

Na Figura 7.40 (a) apresenta-se uma treliça composta formada pela união de duas treliças simples por meio de um nó comum e de uma barra (mostrados em traço mais forte no desenho), e, na Figura 7.40 (b), uma treliça composta formada pela união de duas treliças simples por meio de três barras não paralelas e não concorrentes em um mesmo ponto (mostradas em traço mais forte no desenho).

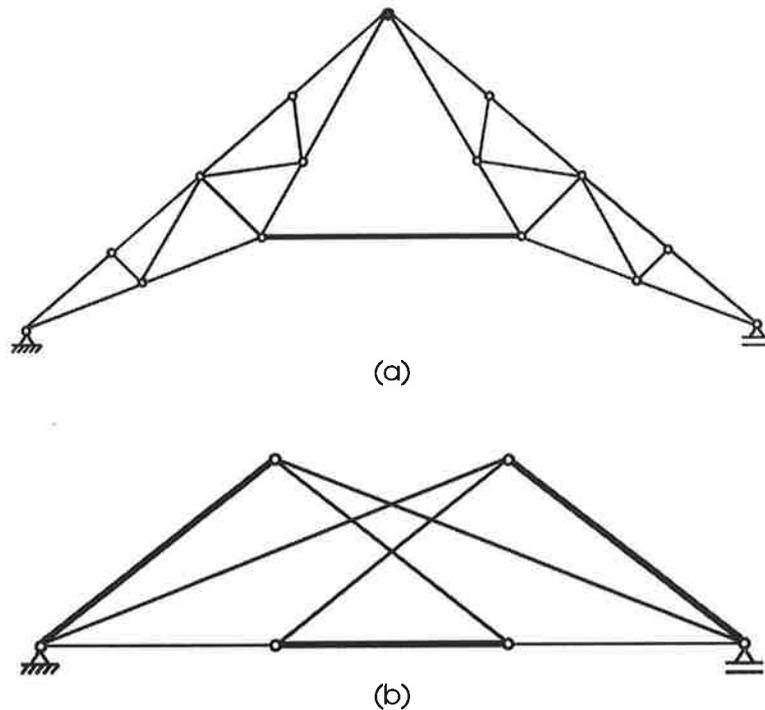


Figura 7.40

Da mesma forma que as treliças simples, as treliças compostas serão sempre isostáticas se os seus apoios forem os suficientes para impedir os movimentos de corpo rígido da estrutura; é o que ocorre com as duas treliças compostas da Figura 7.40, que são ambas isostáticas.

A classificação das treliças planas em simples ou compostas é muito importante, pois os processos de resolução das treliças dependem de serem simples ou compostas.

7.4 Processos de resolução das treliças simples

Resolver uma treliça significa determinar as forças normais em todas as suas barras e as reações de seus apoios. Neste curso, serão vistos dois processos de resolução de treliças simples: o processo do equilíbrio dos nós e o processo de Ritter ou das seções.

7.4.1 Processo do equilíbrio dos nós

O processo do equilíbrio dos nós de resolução de uma treliça simples se baseia na seguinte propriedade: *se uma estrutura está em equilíbrio, então cada uma de suas partes está em equilíbrio.*

No caso das treliças, pode-se portanto dizer: se uma treliça está em equilíbrio, então cada um de seus nós está em equilíbrio.

É nesta propriedade que se baseia o processo do equilíbrio dos nós, que será apresentado por meio de um exemplo.

Exemplo 7.1

Determinar as forças normais e as reações de apoio da treliça da Figura 7.41.

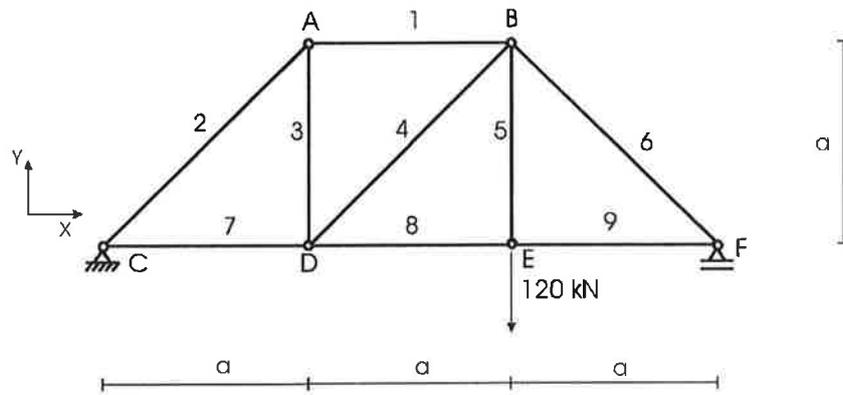


Figura 7.41

As incógnitas deste problema, ou seja, os esforços que se deseja determinar são:

- a) as forças normais N_1 a N_9 nas barras da treliça;
- b) as reações de apoio X_C , Y_C e Y_F mostradas na Figura 7.42.

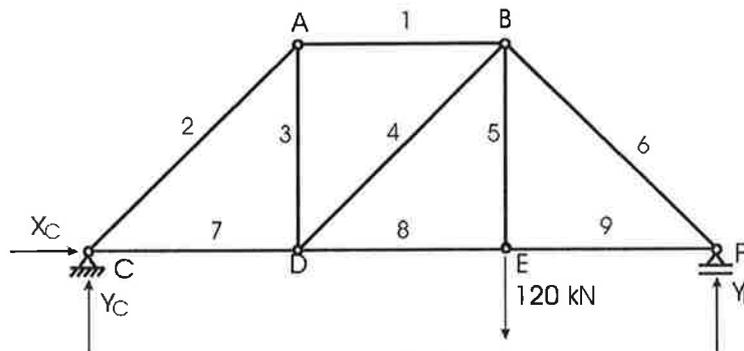


Figura 7.42

Tem-se assim neste problema 12 incógnitas a determinar: 9 forças normais e 3 reações de apoio.

Como já se comentou, este processo se baseia na propriedade de que, estando esta treliça em equilíbrio, cada um de seus nós está em equilíbrio.

Vai-se, assim, analisar o equilíbrio de cada um dos nós da treliça, retirando-os da treliça por meio de cortes apropriados. Por exemplo, para retirar o nó A da treliça, cortam-se as barras 1, 3 e 2, como mostrado na Figura 7.43.

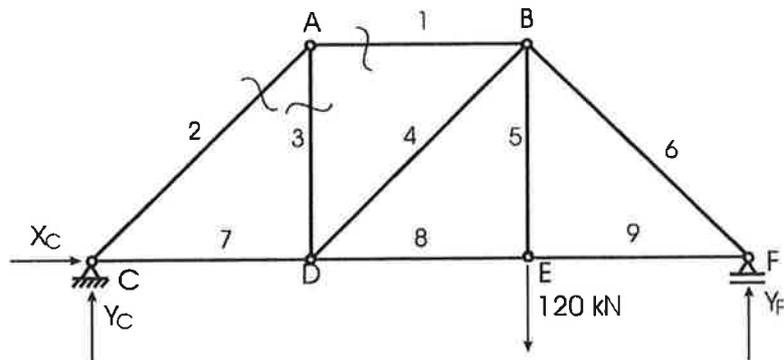


Figura 7.43

Na Figura 7.44 (a) mostra-se o nó que se acaba de retirar da treliça; como se sabe, nas barras desta treliça atuam forças normais, e, para que este nó esteja nas

mesmas condições em que se encontra quando integra a treliça, deve-se aplicar no nó da Figura 7.44 (a) os esforços aplicados pelas barras que foram cortadas. Estes esforços estão mostrados na Figura 7.44 (b); como ainda não foram determinados, não se sabe se são de tração ou de compressão. Observa-se na Figura 7.44 (b) que por ora optou-se por considerá-los como sendo de tração; a razão para esta escolha ficará clara mais adiante.

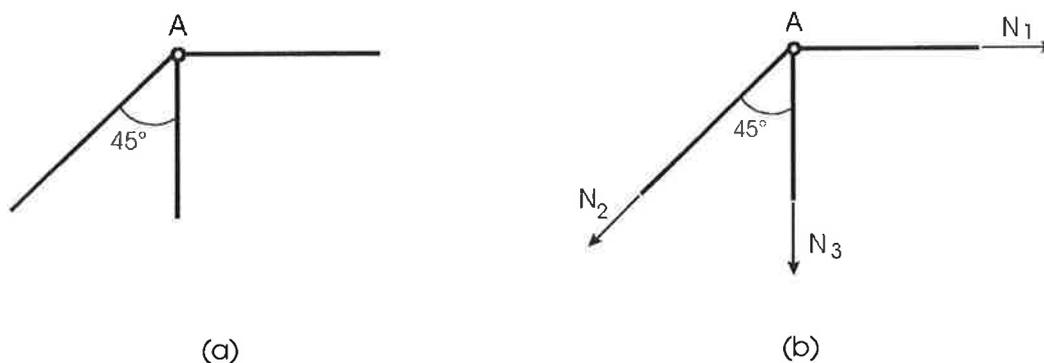


Figura 7.44

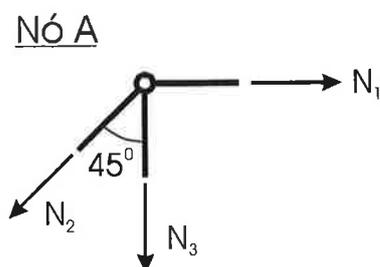
Como o nó A está em equilíbrio, a resultante das forças que nele atuam é nula, logo a soma das componentes horizontais e a soma das componentes verticais destas forças são nulas, tendo-se então

$$\sum X = 0 \quad N_1 - N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.3)$$

$$\sum Y = 0 \quad -N_3 - N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.4)$$

É importante observar que, ao se escrever as equações de equilíbrio do nó A, não se fez nenhuma consideração com relação ao equilíbrio dos momentos dos esforços que nele atuam. Isto, porque, como no nó A só atuam forças, nele não havendo momentos aplicados, o fato de a resultante destas forças ser nula implica em o momento delas ser nulo em relação a qualquer ponto do espaço. A equação de equilíbrio de momentos, então, fica automaticamente satisfeita uma vez satisfeitas as equações (7.3) e (7.4). Por esta razão, pelo fato de a equação de equilíbrio de momentos não trazer nenhuma informação adicional às equações (7.3) e (7.4), não se irá considerá-la.

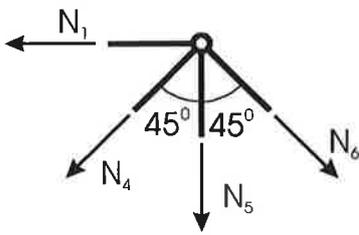
Os raciocínios feitos com relação ao equilíbrio do nó A aplicam-se aos equilíbrios de todos os demais nós da treliça, e, a seguir, apresentam-se as equações de equilíbrio de todos os nós da treliça que está sendo examinada, rerepresentando-se as do nó A:



$$N_1 - N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.3)$$

$$-N_3 - N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.4)$$

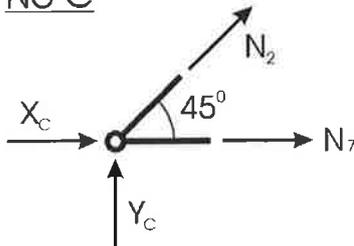
NÓ B



$$-N_1 + N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.5)$$

$$-N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_5 - N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.6)$$

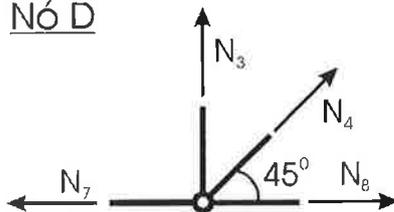
NÓ C



$$X_C + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_7 = 0 \quad (7.7)$$

$$Y_C + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.8)$$

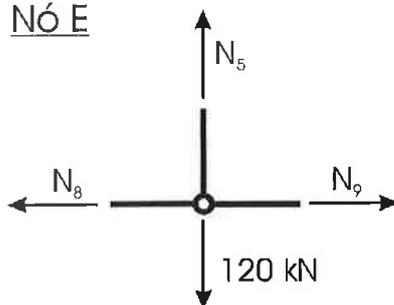
NÓ D



$$-N_7 + N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_8 = 0 \quad (7.9)$$

$$N_3 + N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.10)$$

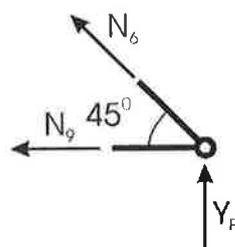
NÓ E



$$-N_8 + N_9 = 0 \quad (7.11)$$

$$N_5 - 120 = 0 \quad (7.12)$$

NÓ F



$$-N_9 - N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.13)$$

$$Y_F + N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.14)$$

Observa-se que, ao se escrever as equações acima, utilizou-se um procedimento padronizado: para se escrever as equações de equilíbrio relativas aos esforços horizontais, os nós foram contornados no sentido horário, e as componentes horizontais das forças encontradas foram sendo colocadas na equação; o mesmo procedimento foi depois empregado ao se escrever as equações referentes ao equilíbrio dos esforços verticais. Este procedimento foi empregado para ordenar a montagem das equações e evitar que um esforço viesse a ser eventualmente esquecido.

Como já se havia comentado, tem-se neste problema 12 incógnitas: as 9 forças normais nas barras da treliça e as 3 reações de apoio; tem-se também 12 equações de equilíbrio, as equações (7.3) a (7.14) de equilíbrio dos 6 nós da treliça. Este sistema de 12 equações permite a determinação de todas as incógnitas do problema, ou seja, permite a resolução da treliça.

Embora, em princípio, o problema de se determinar as forças normais nas barras da treliça e as reações de seus apoios esteja equacionado, obter a solução do sistema acima de 12 equações a 12 incógnitas não é tarefa nada fácil se não se utilizar um programa de computador para resolvê-lo.

Para contornar esta dificuldade, optar-se-á por utilizar o processo do equilíbrio dos nós para resolver a treliça, mas de uma forma mais sistematizada, que se mostra a seguir.

7.4.2 Processo do equilíbrio dos nós - resolução sistematizada

A resolução sistematizada pelo processo do equilíbrio dos nós consiste em:

- determinar inicialmente as reações de apoio da treliça por meio das equações de equilíbrio da estática;
- em seguida, obter as forças normais nas barras da treliça, partindo-se de um nó em que se tenha apenas duas forças normais a determinar, depois passando-se a outro nó em que se tenha apenas duas incógnitas e assim por diante, até se encontrar as forças normais em todas as barras da treliça.

Novamente se utilizará a treliça da Figura 7.41 para apresentar o processo.

Na Figura 7.45, reapresenta-se a treliça e as suas reações de apoio.

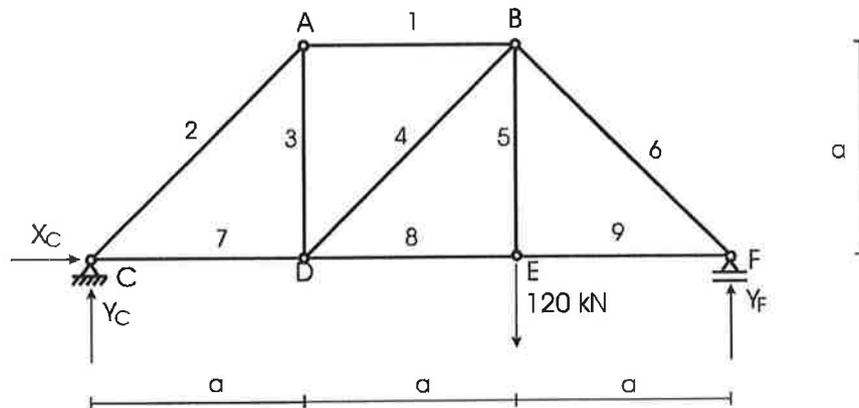


Figura 7.45

Etapa a) - A etapa a) da resolução sistematizada consiste na obtenção das reações de apoio por meio das equações de equilíbrio da estática.

Como a treliça está em equilíbrio, os esforços externos que nela atuam - a força externa ativa de 120 kN aplicada no nó E e as reações de apoio X_C , Y_C e Y_F - satisfazem as três equações de equilíbrio da estática abaixo:

$$\sum X = 0 \quad X_C = 0 \quad (7.15)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_C - 120 + Y_F = 0 \quad (7.16)$$

$$\sum M_C = 0 \quad -120 \cdot 2a + Y_F \cdot 3a = 0 \quad (7.17)$$

A resolução deste sistema leva às reações de apoio da treliça:

$$X_C = 0 \quad (7.18)$$

$$Y_C = 40 \text{ kN} \quad (7.19)$$

$$Y_F = 80 \text{ kN} \quad (7.20)$$

Etapa b) - A etapa b) da resolução sistematizada consiste na obtenção das forças normais nas barras por meio da análise do equilíbrio de nós em que se tem apenas duas incógnitas, ou seja, apenas duas forças normais desconhecidas a determinar.

Observando a Figura 7.46, em que estão indicadas as reações de apoio que se acaba de obter, verifica-se que há apenas dois nós em que se tem apenas duas forças normais a determinar: o nó C, em que chegam as barras 2 e 7, e o nó F, em que chegam as barras 6 e 9.

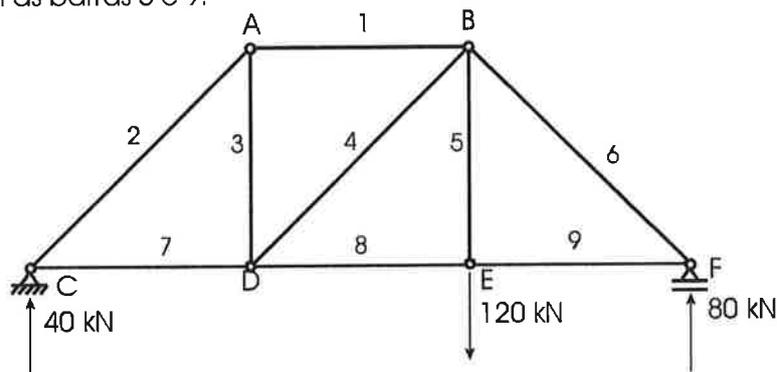


Figura 7.46

Pode-se então iniciar a resolução sistematizada por qualquer um destes dois nós: opta-se aqui por começá-la pelo nó C, que é então retirado da estrutura, como se mostra na Figura 7.47.

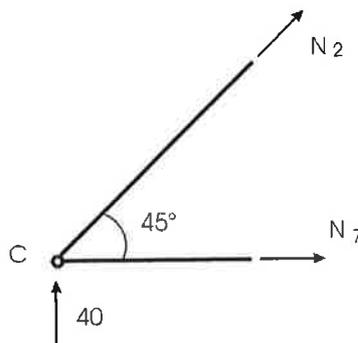


Figura 7.47

As equações de equilíbrio deste nó estão escritas abaixo; como tem-se duas incógnitas a determinar - as forças normais nas barras 2 e 7 - e duas equações de equilíbrio, a resolução do sistema leva às duas forças normais procuradas. É

exatamente neste fato que se baseia a resolução sistematizada: como para cada nó de uma treliça tem-se duas equações de equilíbrio, elas levarão à obtenção das forças normais nas barras que chegam no nó desde que se tenha no máximo duas forças normais desconhecidas a determinar.

Tem-se para o nó C:

$$\sum X = 0 \quad N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_7 = 0 \quad (7.21)$$

$$\sum Y = 0 \quad 40 + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.22)$$

de onde decorrem:

$$N_2 = -\frac{80}{\sqrt{2}} = -\frac{80\sqrt{2}}{2} = -40\sqrt{2} \quad (7.23)$$

e

$$-40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_7 = 0 \Rightarrow N_7 = 40 \quad (7.24)$$

Tem-se assim uma força normal de compressão de $40\sqrt{2} \text{ kN}$ na barra 2 e uma força normal de tração de 40 kN na barra 7.

Comentou-se na p. 76 que, nos esquemas mostrando os nós retirados da treliça, as forças normais desconhecidas seriam admitidas como sendo de tração. A razão para este fato pode ser agora explicada; para isso, utiliza-se o equilíbrio do nó C que se acaba de fazer.

A equação (7.23) indica que a força normal na barra 2, sendo negativa, tem sentido contrário ao admitido previamente, sendo então de compressão; já a equação (7.24) indica que a força normal na barra 7, sendo positiva, tem o sentido admitido inicialmente, sendo então de tração. O fato de ter-se admitido de início que todas as forças normais nas barras fossem de tração leva aquelas que são de tração a terem sinal positivo e aquelas que são de compressão a terem sinal de negativo, o que coincide com a convenção de sinais que vem sendo empregada para as forças normais. É por esta razão que opta-se por supor de início que as forças normais desconhecidas sejam de tração.

Uma vez determinadas as forças normais nas barras 2 e 7, passa-se à análise de um outro nó em que se tenha só duas incógnitas a determinar. Os nós contíguos ao nó C são os nós A e D: em A há duas forças normais a determinar – N_1 e N_3 – e em D há três forças normais a determinar – N_3 , N_4 e N_8 . Para dar continuidade à resolução sistematizada passa-se, então, à análise do equilíbrio do nó A.

O nó A está representado na Figura 7.48; a força normal na barra 2 já foi obtida ao se analisar o nó C, e ela é então indicada na Figura 7.48 com o sentido e a intensidade obtidos: uma força de compressão de $40\sqrt{2} \text{ kN}$.

É fundamental ressaltar a importância do que se acaba de fazer: a análise do nó C mostrou que a força normal na barra 2 é de compressão, de $40\sqrt{2} \text{ kN}$; ao se passar para a análise do nó A é essencial que se considere a mesma força normal atuando na barra 2: uma força de compressão de $40\sqrt{2} \text{ kN}$. Caso isto não seja feito, a barra 2 não ficará em equilíbrio.

Para mostrar melhor o que se está afirmando, considere-se a Figura 7.49, em que a barra 2 foi retirada da treliça por meio de dois cortes próximos aos nós A e C. Na Figura 7.49 (a) indicam-se as forças que a barra 2 aplica nos nós A e C; na Figura 7.49 (b), as forças que os nós A e C aplicam na barra 2. Como era de se esperar, estes esforços mostram que na barra 2 tem-se uma compressão de $40\sqrt{2} \text{ kN}$. Observa-se, ainda, que a força aplicada pela barra 2 no nó C tem sentido contrário ao da força que ela aplica no nó A, o que é uma decorrência do princípio de ação e reação.

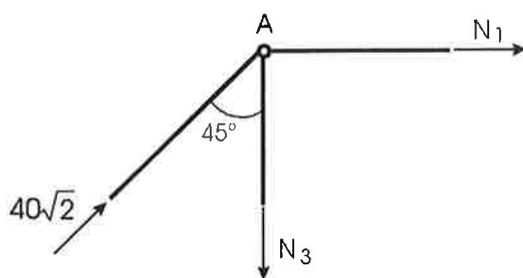
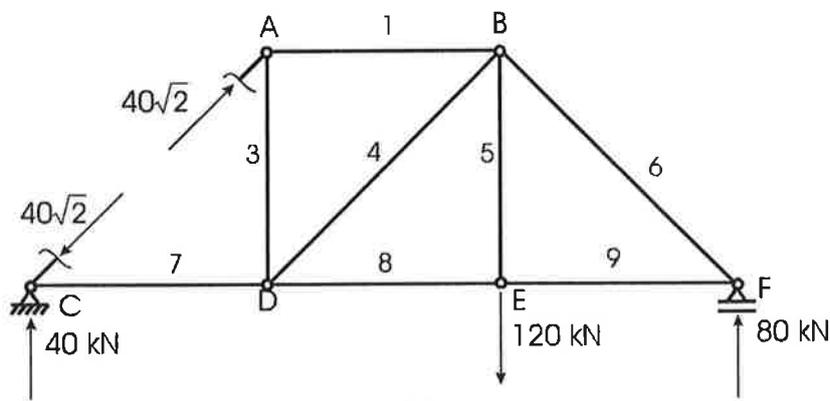
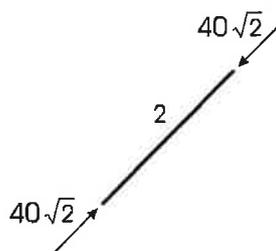


Figura 7.48



(a)



(b)

Figura 7.49

As equações de equilíbrio do nó A são

$$\sum X = 0 \quad N_1 + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.25)$$

$$\sum Y = 0 \quad -N_3 + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.26)$$

tendo-se então

$$N_1 + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = -40 \text{ kN} \quad (7.27)$$

e

$$-N_3 + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_3 = 40 \text{ kN} \quad (7.28)$$

Passa-se agora à análise do equilíbrio do nó D:

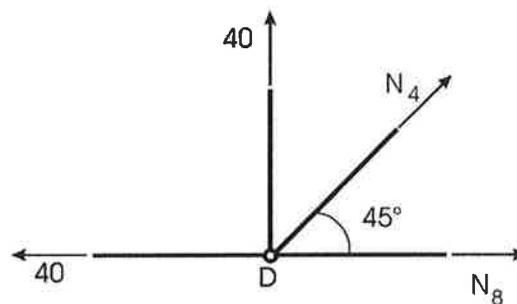


Figura 7.50

Na Figura 7.50, as forças normais nas barras 3 e 7 são indicadas com os seus sentidos e intensidades já obtidos: uma força de tração de 40 kN tanto na barra 3 como na barra 7.

As equações de equilíbrio do nó D são

$$\sum X = 0 \quad -40 + N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_8 = 0 \quad (7.29)$$

e

$$\sum Y = 0 \quad 40 + N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.30)$$

de onde decorrem

$$40 + N_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_4 = -\frac{80}{\sqrt{2}} = -\frac{80\sqrt{2}}{2} = -40\sqrt{2} \text{ kN} \quad (7.31)$$

e

$$-40 - 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_8 = 0 \Rightarrow N_8 = 80 \text{ kN} \quad (7.32)$$

Analisa-se agora o nó B, mostrado na Figura 7.51.

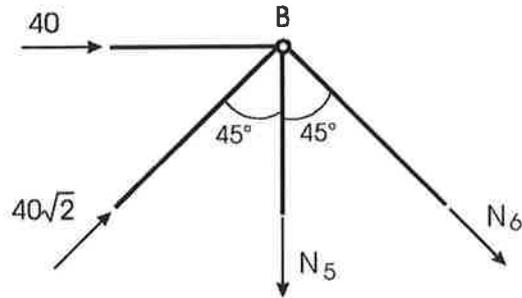


Figura 7.51

As equações de equilíbrio do nó B são:

$$\sum X = 0 \quad 40 + N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.33)$$

e

$$\sum Y = 0 \quad -N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_5 + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.34)$$

de onde tem-se

$$40 + N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_6 = -80\sqrt{2} \text{ kN} \quad (7.35)$$

e

$$80\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_5 + 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_5 = 120 \text{ kN} \quad (7.36)$$

Passa-se agora à análise do nó E, indicado na Figura 7.52.

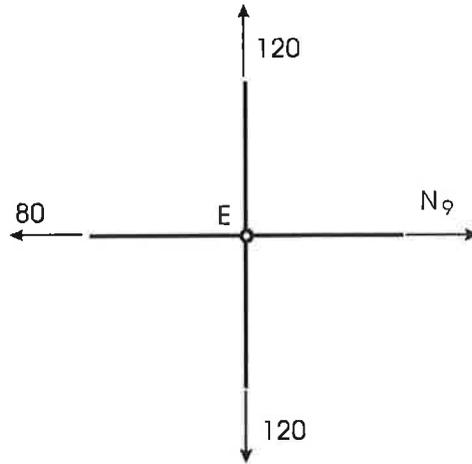


Figura 7.52

As equações de equilíbrio do nó E são:

$$\sum X = 0 \quad -80 + N_9 = 0 \quad (7.37)$$

e

$$\sum Y = 0 \quad 120 - 120 = 0 \quad (7.38)$$

Observa-se que, ao contrário do que ocorreu nos demais nós, no nó E há apenas uma incógnita: a força normal na barra 9, que é obtida a partir de (7.37):

$$-80 + N_9 = 0 \Rightarrow N_9 = 80 \text{ kN} \quad (7.39)$$

A equação (7.38), que é uma identidade, serve para verificar se os esforços obtidos anteriormente estão corretos. Caso não se tivesse verificado a identidade, isto indicaria que algum erro foi cometido na determinação das reações de apoio ou nas forças normais nas barras 1 a 8.

Todas as incógnitas já foram obtidas: as 3 reações de apoio e a 9 forças normais nas barras 1 a 9. Há, entretanto, um nó cujo equilíbrio ainda não foi analisado, e que também pode ser utilizado para uma verificação suplementar dos valores anteriormente obtidos.

A razão pela qual todas as incógnitas foram determinadas sem a necessidade de se utilizar três das equações de equilíbrio dos nós – a soma das forças verticais que atuam no nó E e a soma das forças horizontais e verticais que atuam no nó F – é muito simples. Tinha-se 12 incógnitas a determinar e foram utilizadas 12 equações de equilíbrio para obtê-las: as 3 equações (7.15) a (7.17) de equilíbrio global da treliça na determinação das 3 reações de apoio X_c , Y_c e Y_f e as 9 equações (7.21), (7.22), (7.25), (7.26), (7.29), (7.30), (7.33), (7.34) e (7.37) de equilíbrio dos nós da treliça na determinação das 9 forças normais N_1 a N_9 .

Na resolução desta treliça pelo método do equilíbrio dos nós não sistematizado também se tinha um sistema de 12 equações a 12 incógnitas: as 12 equações de equilíbrio dos nós (7.3) a (7.14).

A diferença entre as duas resoluções reside no tipo de sistema que se obtém. Na resolução não sistematizada tem-se um sistema de 12 equações a 12 incógnitas que necessitam ser resolvidas simultaneamente, o que dificulta muito sua solução; na resolução sistematizada, o sistema de 12 equações a 12 incógnitas é particionado e é resolvido aos poucos: inicialmente, um sistema de 3 equações a 3 incógnitas possibilita a determinação das reações de apoio, e, em seguida, as análises dos equilíbrios dos nós vão possibilitando a determinação das forças normais nas barras, duas a duas.

É claro que, como tem-se apenas 12 incógnitas a determinar, as 15 equações de equilíbrio que se acaba de mencionar - as 3 equações de equilíbrio global (7.15) a (7.17) e as 12 equações de equilíbrio dos nós (7.3) a (7.14) - são linearmente dependentes, sendo apenas 12 delas independentes.

De fato, pode-se facilmente constatar que as equações de equilíbrio global da treliça podem ser obtidas a partir das equações de equilíbrio dos nós:

$$(7.15) = (7.3) + (7.5) + (7.7) + (7.9) + (7.11) + (7.13) \quad (7.40)$$

$$(7.16) = (7.4) + (7.6) + (7.8) + (7.10) + (7.12) + (7.14) \quad (7.41)$$

$$(7.17) = - (7.3) \cdot a - (7.5) \cdot a + (7.4) \cdot a + (7.6) \cdot 2a + (7.10) \cdot a + (7.12) \cdot 2a + (7.14) \cdot 3a \quad (7.42)$$

É por esta razão que, na resolução sistematizada, 3 das equações de equilíbrio dos nós não são necessárias para a determinação das incógnitas procuradas, podendo então ser utilizadas para verificar a solução obtida.

Uma destas verificações já foi feita, a equação (7.38) de equilíbrio das forças verticais que atuam no nó E, tendo-se verificado que, como deveria ocorrer, ela é uma identidade.

As outras duas equações suplementares são as equações de equilíbrio do nó F, que serão examinadas agora. O nó F está indicado na Figura 7.53.

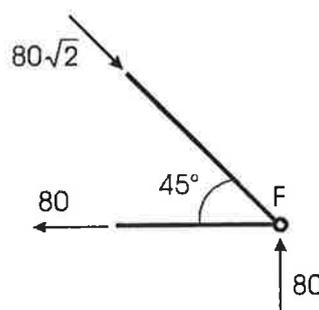


Figura 7.53

Como se pode ver, todas as forças que atuam neste nó já foram determinadas; suas equações de equilíbrio são:

$$\sum X = 0 \quad - 80 + 80 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.43)$$

e

$$\sum Y = 0 \quad 80 - 80 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.44)$$

Observa-se que, como se esperava, estas duas equações são identidades; caso estas identidades não tivessem sido verificadas, isto indicaria que algum erro foi cometido na obtenção das reações de apoio ou das forças normais nas barras.

A treliça encontra-se agora resolvida; na Tabela 7.1, indicam-se as forças normais em todas as suas barras.

Tabela 7.1

Barra	Força normal (kN)
1	- 40
2	- 40 $\sqrt{2}$
3	40
4	- 40 $\sqrt{2}$
5	120
6	- 80 $\sqrt{2}$
7	40
8	80
9	80

No caso das treliças, como o único esforço solicitante que se tem em suas barras são as forças normais, sendo os demais esforços solicitantes nulos, não se costuma traçar diagramas de esforços solicitantes como os vistos no Capítulo 5, empregando-se tabelas como a acima para indicar os esforços solicitantes na treliça.

Na Figura 7.54, mostram-se as barras tracionadas e as barras comprimidas da treliça: as tracionadas com traços finos e as comprimidas com traços grossos.

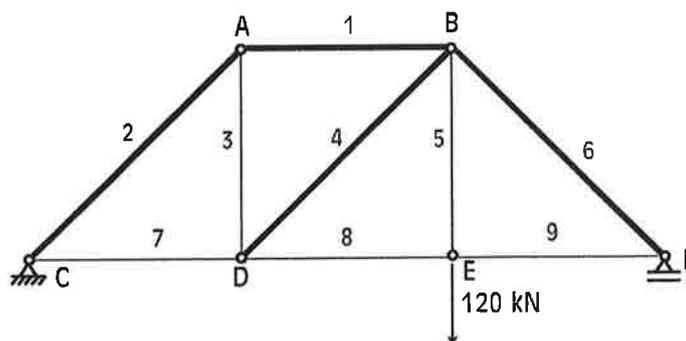


Figura 7.54

A Figura 7.54 permite que se compreenda como é o funcionamento da treliça que vem sendo analisada:

- A única força externa ativa aplicada na treliça - no nó E - deve caminhar até os apoios C e F, onde será transmitida às estruturas que sustentam a treliça;

- b) A força externa aplicada em E sobe até o nó B pela barra 5, que fica tracionada;
- c) Parte da força que subiu ao nó B é transferida ao nó D pela barra 4, que fica comprimida, e parte é transferida ao apoio F pela barra 6, que também fica comprimida;
- d) A força que foi transferida ao nó D sobe até o nó A pela barra 3, que fica tracionada;
- e) A força que subiu ao nó A é transferida ao apoio C pela barra 2, que fica comprimida;
- f) Neste processo, a barra 1 fica comprimida e as barras 7, 8 e 9 ficam tracionadas.

Comentou-se no início da Introdução deste Capítulo que uma treliça se comporta de forma semelhante a uma viga não vazada de mesma vinculação e carregamento.

Na Figura 7.55 apresenta-se uma viga não vazada com a mesma vinculação e carregamento que a treliça estudada: em (a), mostra-se a viga em sua configuração indeformada e em (b) mostra-se a configuração deformada da viga. Observa-se que a viga se encurva, com concavidade para cima. Esta deformação decorre dos momentos fletores positivos que atuam na viga, tracionando as fibras inferiores e comprimindo as fibras superiores, levando-a a encurvar-se com concavidade para cima.

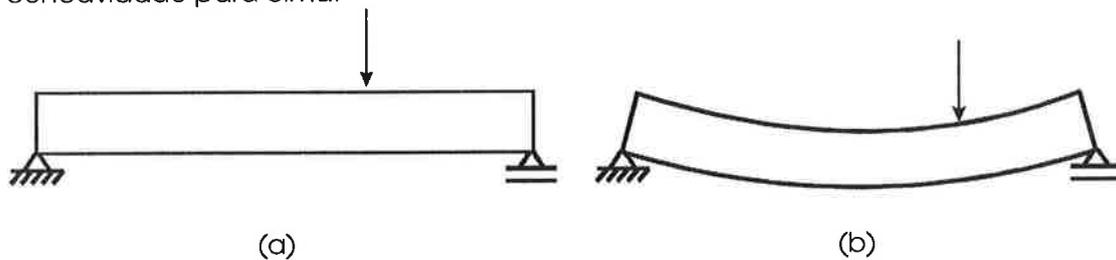


Figura 7.55

Como se comentou, a treliça se comporta de forma semelhante à viga não vazada, tendo então seu banzo inferior tracionado - barras 7, 8 e 9 - e seu banzo superior comprimido - barra 1. Na Figura 7.56, mostra-se a deformada da treliça que se está estudando, verificando-se que, como era de se esperar, ela se encurva, com concavidade para cima.

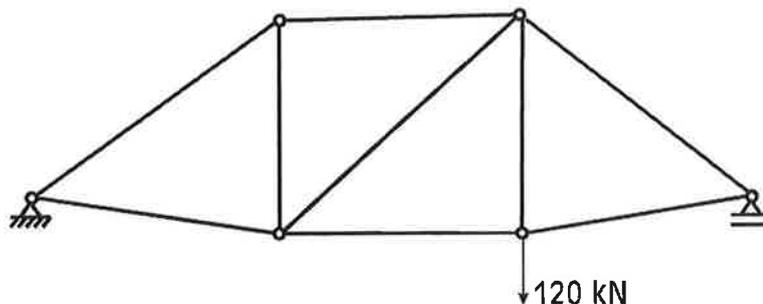


Figura 7.56

■

Para mostrar melhor como funciona uma treliça, apresentar-se-á mais um exemplo de uma treliça de ponte.

Exemplo 7.2

Considere-se a treliça Warren da Figura 7.57, submetida a uma única força externa ativa aplicada na extremidade de seu balanço.

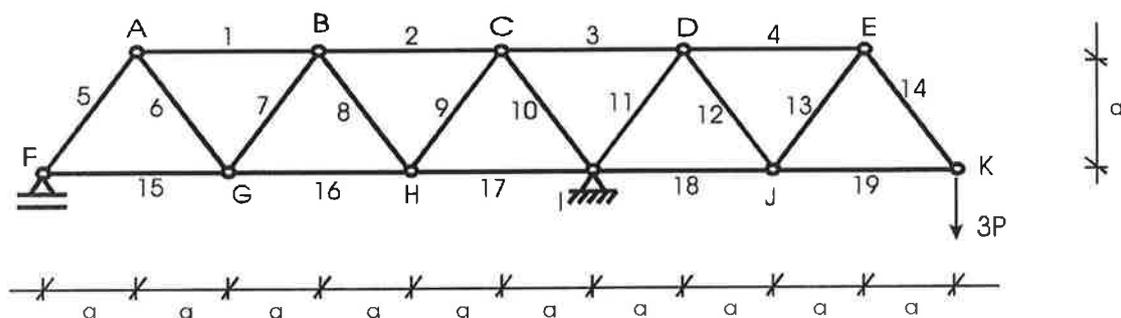


Figura 7.57

Como o objetivo deste exemplo é discutir o comportamento estrutural da treliça e não apresentar o método do equilíbrio dos nós que já foi examinado, a treliça não será aqui resolvida, apresentando-se diretamente suas reações de apoio na Figura 7.58 e as forças normais em suas barras na Tabela 7.2.

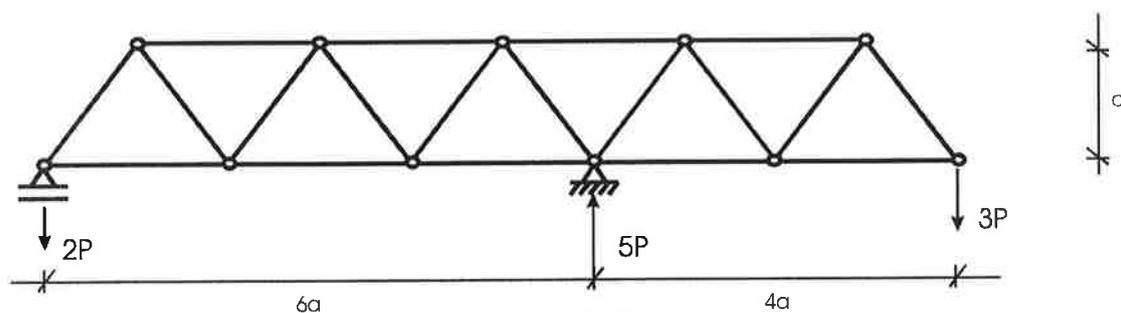
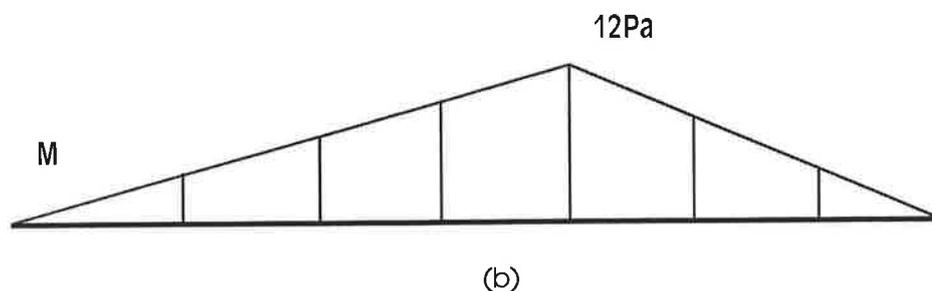
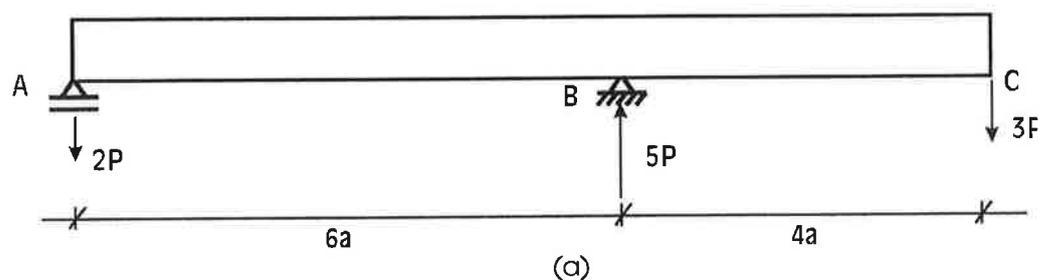


Figura 7.58

Na Figura 7.59, apresenta-se uma viga não vazada de mesma vinculação e carregamento que a treliça da Figura 7.57. Em (a), mostram-se a viga e suas reações de apoio; em (b), o diagrama de momentos fletores e em (c), a deformada da viga.



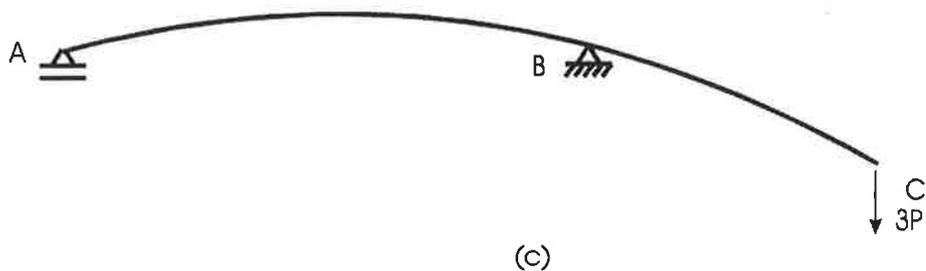


Figura 7.59

O diagrama de momentos fletores e a deformada desta viga mostram que ela é tracionada em sua parte superior e comprimida em sua parte inferior; o mesmo deve então ocorrer com a treliça, que deve ter seu banzo superior tracionado e seu banzo inferior comprimido. É exatamente isso que ocorre, como mostra a Tabela 7.2.

Tabela 7.2

Barra	Força normal
1	$4 P$
2	$8 P$
3	$12 P$
4	$6 P$
5	$2 P \sqrt{2}$
6	$-2 P \sqrt{2}$
7	$2 P \sqrt{2}$
8	$-2 P \sqrt{2}$
9	$2 P \sqrt{2}$
10	$-2 P \sqrt{2}$
11	$-3 P \sqrt{2}$
12	$3 P \sqrt{2}$
13	$-3 P \sqrt{2}$
14	$3 P \sqrt{2}$
15	$-2 P$
16	$-6 P$
17	$-10 P$
18	$-9 P$
19	$-3 P$

Na Figura 7.60, mostram-se as barras tracionadas e comprimidas, as tracionadas com traços finos e as comprimidas com traços grossos.

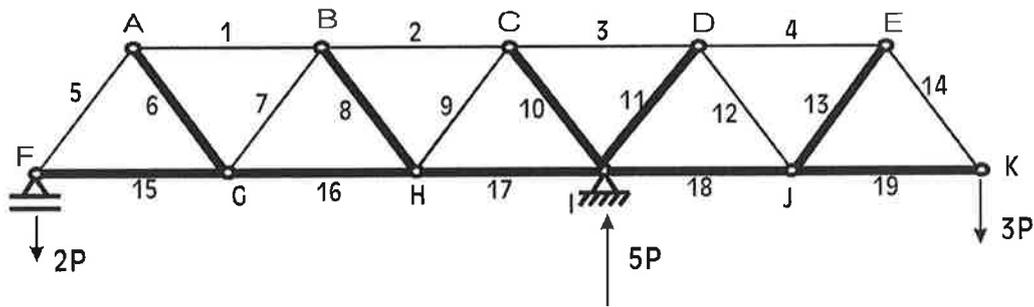


Figura 7.60

Pode-se agora examinar como se comporta esta treliça:

- A força $3P$ aplicada em K tende a levantar o apoio F , e, para impedir seu deslocamento vertical, a articulação móvel aí existente introduz uma reação vertical para baixo $2P$; para impedir que a treliça se desloque para baixo, a articulação fixa em I introduz uma reação vertical $5P$ para cima ficando a treliça em equilíbrio;
- A força externa ativa $3P$ aplicada em K caminha até o apoio I : sobe de K a E pela barra 14 , desce para J pela barra 13 , sobe para D pela barra 12 e finalmente desce para I pela barra 11 ; as barras 14 e 12 ficam tracionadas e as barras 13 e 11 , comprimidas;
- A força reativa aplicada em F também caminha até o apoio I , de forma completamente análoga à que se acaba de examinar: ela sobe para A , desce para G , sobe para B , desce para H , sobe para C e finalmente desce para I ; neste percurso, ela traciona as barras 5 , 7 e 9 e comprime as barras 6 , 8 e 10 ;
- Como já se comentou, como esta viga é tracionada em cima e comprimida em baixo, as barras 1 , 2 , 3 e 4 ficam tracionadas, e as barras 15 , 16 , 17 , 18 e 19 , comprimidas.

■

Antes de se passar para o próximo item, vale a pena observar que, muitas vezes, o equilíbrio dos nós de uma treliça pode ser facilmente feito de maneira gráfica. É o que ocorre com a treliça do Exemplo 7.1, já que os ângulos entre suas barras são de 45° ou 90°

Ao se resolver esta treliça por meio da resolução sistematizada, iniciou-se a análise do equilíbrio dos nós pelo nó C , representado na Figura 7.61 (a).

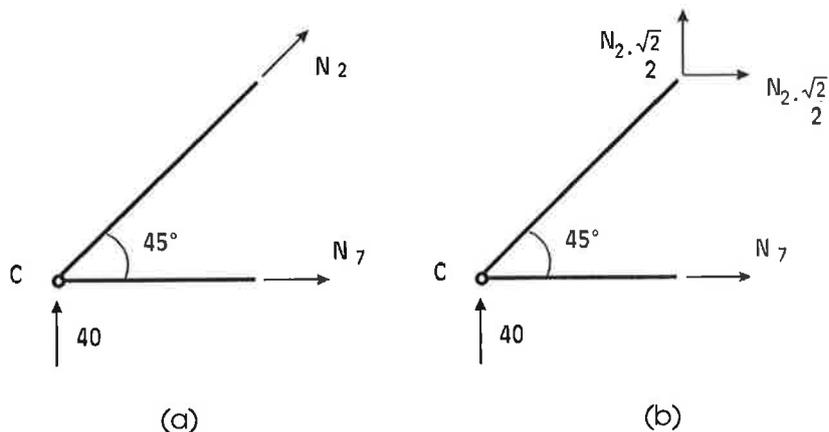


Figura 7.61

Como o ângulo entre as barras 2 e 7 é de 45° , tanto a componente vertical como a horizontal da força na barra 2 são iguais a $N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, como se vê na Figura 7.61 (b). O equilíbrio das forças verticais que atuam neste nó pode então ser facilmente escrito:

$$\sum Y = 0 \quad 40 + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{80}{\sqrt{2}} = -\frac{80\sqrt{2}}{2} = -40\sqrt{2} \quad (7.45)$$

As componentes horizontal e vertical desta força podem agora ser aplicadas no nó C, como se mostra na Figura 7.62.

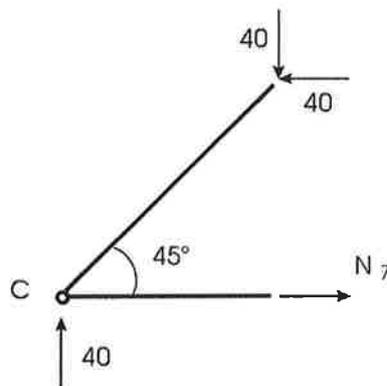


Figura 7.62

É muito fácil ver agora que o equilíbrio horizontal das forças aplicadas neste nó leva à imediata determinação de N_7 :

$$\sum X = 0 \quad -40 + N_7 = 0 \Rightarrow N_7 = 40 \quad (7.46)$$

Determinada a força na barra 2, pode-se agora passar ao equilíbrio do nó A e determinar N_1 e N_3 . Na Figura 7.63, aplicam-se as componentes de N_2 no nó A:

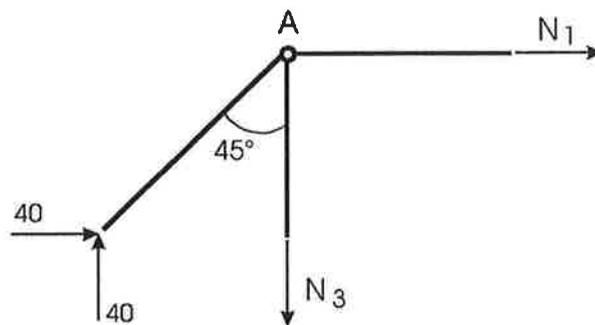


Figura 7.63

É imediato ver que se tem então

$$N_1 = -40 \text{ kN} \quad (7.47)$$

e

$$N_3 = 40 \text{ kN} \quad (7.48)$$

Da mesma forma, podem ser facilmente obtidas as forças normais nas demais barras da treliça.

É claro que este processo gráfico de se escrever as equações de equilíbrio nodais pode ser aplicado qualquer que seja a treliça; ele é vantajoso, entretanto, quando for muito fácil determinar as componentes horizontal e vertical das forças normais das barras, como no caso deste exemplo.

Sugere-se que, como exercício, os leitores concluam a obtenção das forças normais nas barras desta treliça por via gráfica, comparando-se os valores encontrados com os da Tabela 7.1.

7.4.3 Processo de Ritter ou das seções

O processo de Ritter, também conhecido como processo das seções, foi proposto pelo professor alemão August Ritter em seu livro "Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen" (Teoria elementar e cálculo de construções de telhados e pontes metálicas), publicado em 1862. Ritter, engenheiro formado em Göttingen, foi professor da Escola Politécnica de Hannover e professor de mecânica e engenharia mecânica da Universidade Técnica de Aachen.

O processo de Ritter, que como o processo do equilíbrio dos nós se baseia nas equações de equilíbrio, será apresentado por meio de um exemplo.

Exemplo 7.3

Determinar as forças normais nas barras 3, 10, 11, 17 e 18 da treliça da Figura 7.64.

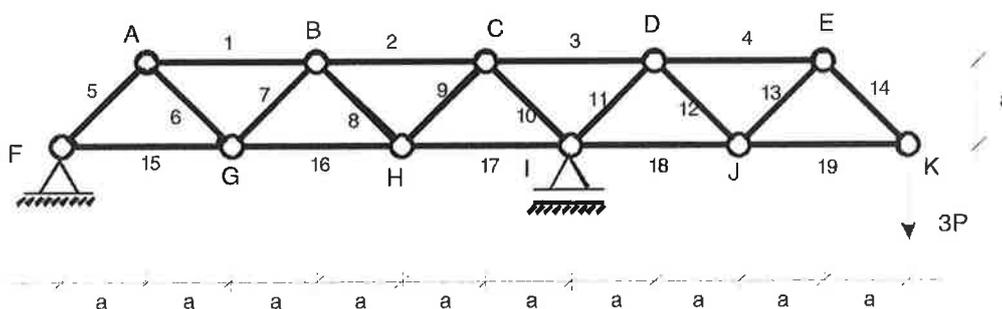


Figura 7.64

Esta é a treliça já examinada no Exemplo 7.2, só que agora, em lugar de se buscar as forças normais em todas as barras da treliça, desejam-se as forças normais em apenas cinco destas barras.

Esta é uma situação que surge, por exemplo, em uma fase de pré-dimensionamento da estrutura, em que não se deseja ainda determinar as dimensões de todas as barras de uma treliça, mas ter-se apenas uma idéia dos esforços que atuarão nas barras mais solicitadas.

Como já se comentou, esta treliça tem um comportamento qualitativamente semelhante ao da viga não vazada da Figura 7.59 (a), de mesma vinculação e carregamento que a treliça da Figura 7.64. Observa-se no diagrama de momentos fletores da viga não vazada mostrado na Figura 7.59 (b) que a região mais solicitada da viga é a do apoio B, logo em uma pré-análise das barras mais solicitadas da treliça são exatamente as barras localizadas nesta região – as barras 3, 10, 11, 17 e 18 – que devem ser examinadas.

O processo do equilíbrio dos nós que acaba de ser visto poderia ser empregado para determinar as forças normais que se deseja obter, mas, para isso, teriam que ser determinadas também as forças normais em várias outras barras da treliça. Por exemplo, poder-se-ia partir do nó K, determinar sucessivamente as forças normais nas barras 14, 19, 4, 13 e 12, e então obter as forças normais procuradas nas barras 18, 3, 11, 10 e 17. Como se pode observar, embora permita a determinação das forças normais procuradas, o emprego do processo do equilíbrio dos nós exige a obtenção de várias outras forças normais que não se estava buscando.

A grande vantagem do processo de Ritter é exatamente a de evitar a determinação de forças normais desnecessárias e possibilitar a obtenção apenas das forças normais procuradas.

O processo de Ritter se baseia na mesma propriedade que o processo do equilíbrio dos nós: a de que se uma estrutura está em equilíbrio então cada uma de suas partes também está em equilíbrio.

Da mesma forma que no processo do equilíbrio dos nós sistematizado, o primeiro passo do processo de Ritter é a determinação das reações de apoio da treliça. Na Figura 7.65 indicam-se as reações de apoio da treliça que está sendo examinada.

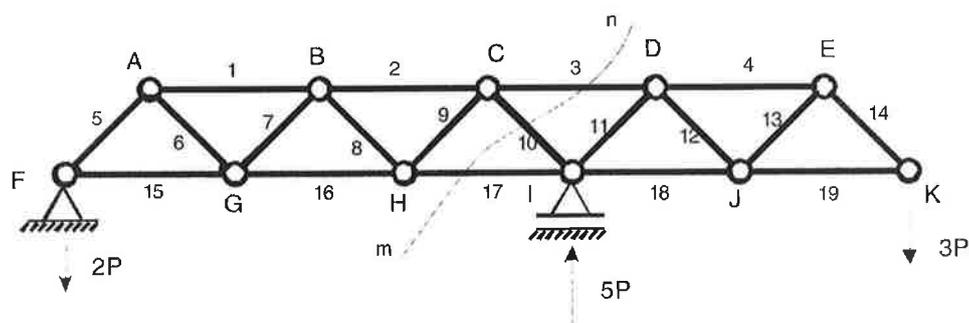


Figura 7.65

Serão determinadas inicialmente as forças normais nas barras 3, 10 e 17 da treliça. Para isso, separa-se a treliça em duas partes por meio do corte mn indicado na Figura 7.65.

As duas partes em que ficou separada a treliça estão apresentadas na Figura 7.66, em que se indicam as forças normais nas três barras que foram cortadas para separar a treliça: as barras 3, 10 e 17. Observa-se que, mais uma vez e pelos motivos anteriormente apresentados, está-se admitindo que as forças normais que se deseja determinar sejam de tração. Ressalta-se ainda que, para que o equilíbrio seja respeitado, as forças normais que atuam nos dois lados do corte são iguais e de sentido contrário.

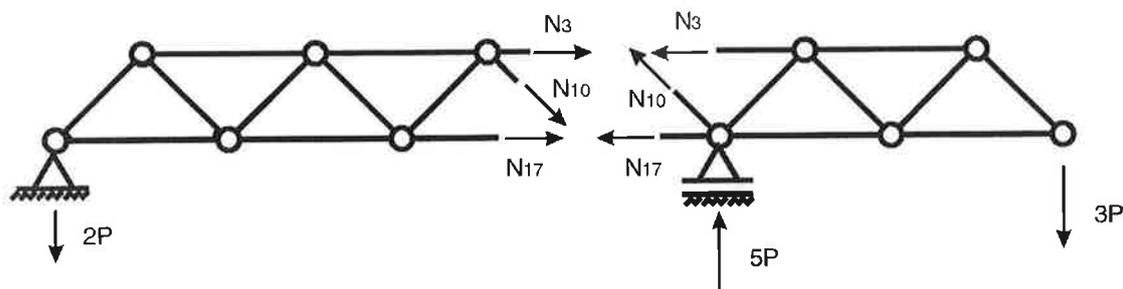


Figura 7.66

Como foi dito, estando a treliça em equilíbrio, cada uma das partes indicadas na Figura 7.66 está em equilíbrio, e é a consideração deste equilíbrio que permite a obtenção das forças normais procuradas nas barras 3, 10 e 17.

Considere-se o equilíbrio da parte da treliça à esquerda do corte, redesenhada na Figura 7.67. As forças externas que nela atuam satisfazem as equações de equilíbrio da estática, o que permite determinar as forças normais desconhecidas:

$$\sum X = 0 \quad N_3 + N_{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{17} = 0 \quad (7.49)$$

$$\sum Y = 0 \quad -2P - N_{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_{10} = -2\sqrt{2} P \quad (7.50)$$

$$\sum M_C = 0 \quad 2P \cdot 5a + N_{17} \cdot a = 0 \Rightarrow N_{17} = -10 P \quad (7.51)$$

Substituindo na equação (7.49) os valores de N_{10} e N_{17} encontrados, obtém-se N_3 :

$$N_3 - 2\sqrt{2} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 P = 0 \Rightarrow N_3 = 12 P \quad (7.52)$$

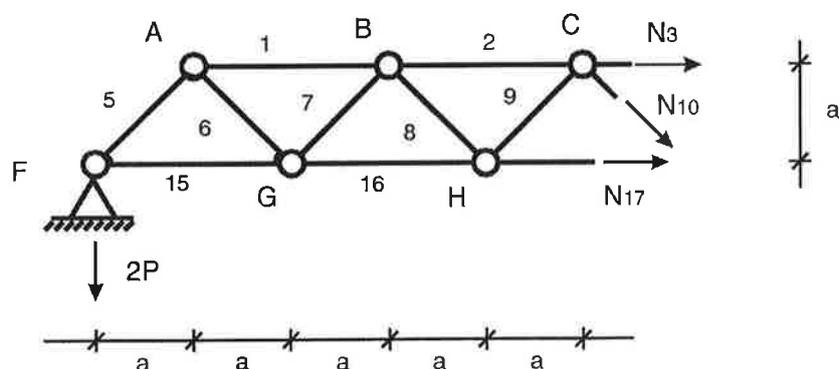


Figura 7.67

As forças normais nas barras 3, 10 e 17 são então $N_3 = 12 P$, $N_{10} = -2\sqrt{2} P$ e $N_{17} = -10 P$. Pode-se verificar que estas são as mesmas forças normais que já haviam sido obtidas pelo processo do equilíbrio dos nós, indicadas na Tabela 7.2.

Estas forças foram obtidas por meio da análise do equilíbrio do trecho da treliça à esquerda do corte mn ; é claro que elas também poderiam ter sido encontradas estudando-se o equilíbrio do trecho da treliça à direita do corte mn .

Falta ainda determinar as forças normais nas barras 11 e 18. Isto pode ser feito pelo processo de Ritter, separando-se a treliça em dois trechos por meio de um corte que secciona as barras 3, 11 e 18, ou então pelo processo do equilíbrio dos nós, analisando-se o equilíbrio do nó I. Ambas as resoluções serão aqui apresentadas.

Na Figura 7.68 (a) rerepresenta-se a treliça com suas reações de apoio e o corte op que secciona as barras 3, 11 e 18, e na Figura 7.68 (b), as duas partes em que ficou

separada a treliça pelo corte op , nele já estando indicada a força na barra 3 que acaba de ser determinada.

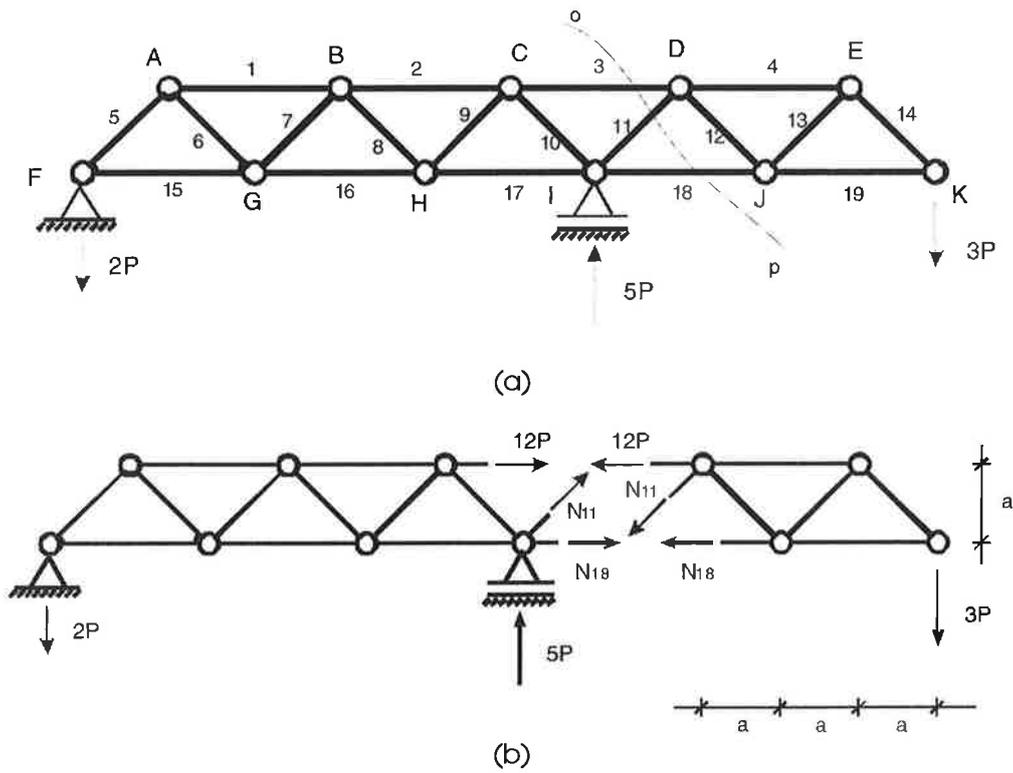


Figura 7.68

A obtenção das forças normais procuradas fica mais simples se se analisar o equilíbrio do trecho da treliça à direita do corte, pois nele atuam menos forças externas ativas que no trecho à esquerda do corte. As equações de equilíbrio das forças verticais e de momentos em relação ao ponto D permitem a obtenção de N_{11} e de N_{18} :

$$\sum Y = 0 \quad - N_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3P = 0 \Rightarrow N_{11} = -3\sqrt{2}P \quad (7.53)$$

$$\sum M_D = 0 \quad - N_{18} \cdot a - 3P \cdot 3a = 0 \Rightarrow N_{18} = -9P \quad (7.54)$$

Estão assim determinadas todas as forças normais que se procurava: $N_3 = 12P$, $N_{10} = -2\sqrt{2}P$, $N_{11} = -3\sqrt{2}P$, $N_{17} = -10P$ e $N_{18} = -9P$.

Como se comentou, as forças normais nas barras 11 e 18 também podem ser obtidas por meio do processo do equilíbrio dos nós, analisando-se o equilíbrio do nó I. Na Figura 7.69, representa-se o nó I retirado da treliça, no qual já estão indicados os esforços anteriormente determinados: $Y_I = 5P$, $N_{10} = -2\sqrt{2}P$ e $N_{17} = -10P$.

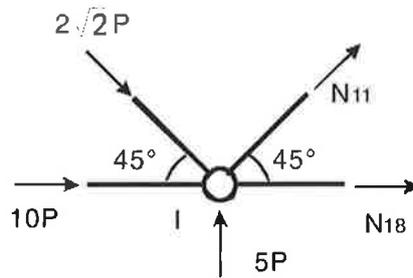


Figura 7.69

As equações de equilíbrio deste nó permitem a obtenção das forças normais procuradas:

$$\sum Y = 0 \quad 5P - 2\sqrt{2} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_{11} = -3\sqrt{2}P \quad (7.55)$$

$$\sum X = 0 \quad 10P + 2\sqrt{2} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{18} = 0 \Rightarrow N_{18} = -9P \quad (7.56)$$

Observa-se que na equação (7.56) já foi utilizado o valor da força normal na barra 11 obtido por meio de (7.55).



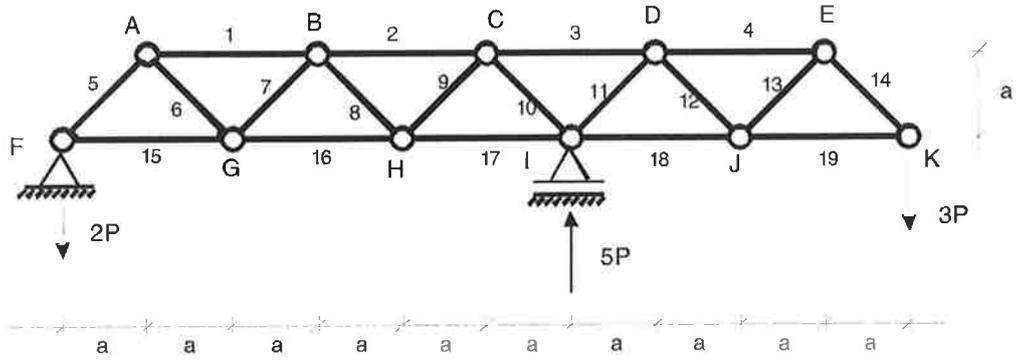
Como se acaba de verificar, a determinação das forças normais nas barras de uma treliça pode ser feita pelo processo do equilíbrio dos nós, pelo processo de Ritter ou então por uma combinação destes dois processos, como se acaba de fazer ao determinar as forças normais nas barras 3, 10 e 17 pelo processo de Ritter e as forças normais nas barras 11 e 17 pelo processo do equilíbrio dos nós. As opções para a resolução de uma treliça são muitas, devendo-se então empregar aquela que for a mais adequada por dar menos trabalho e ser menos sujeita a erros.

Como já foi discutido, o processo de Ritter é muito eficiente quando se deseja obter as forças normais em algumas barras da treliça, sendo, entretanto, desaconselhado quando se quer determinar as forças normais em todas as barras da treliça, situação em que o processo do equilíbrio dos nós ou mesmo uma combinação dos dois processos passa a ser o procedimento mais interessante.

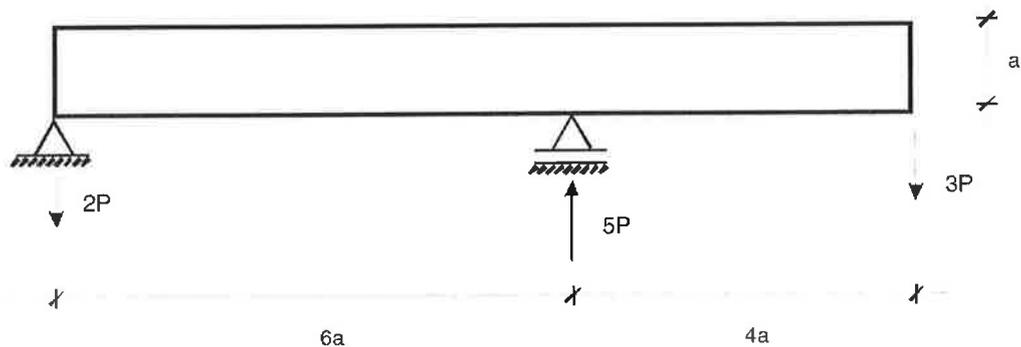
Antes de se passar a mais um exemplo do emprego do processo de Ritter para determinar as forças normais nas barras de uma treliça, será traçado mais um paralelo entre as treliças e as vigas não vazadas de que derivam.

Mostrou-se, na Introdução deste capítulo, que a treliça analisada neste último exemplo – rerepresentada na Figura 7.70 (a) – pode ser obtida a partir da viga não vazada da Figura 7.70 (b) retirando-se material pouco solicitado de sua região central. É exatamente por esta razão que a treliça e a viga das Figuras 7.70 (a) e (b) apresentam comportamentos estruturais semelhantes.

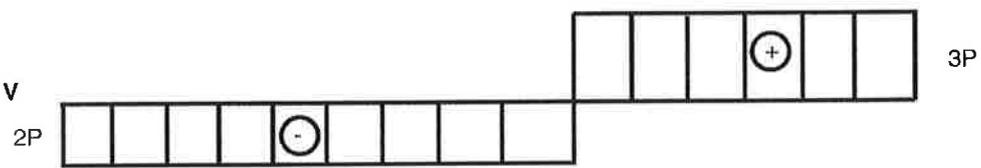
Sabe-se que na viga da Figura 7.70 (b) atuam forças cortantes e momentos fletores, cujos diagramas são indicados nas Figuras 7.70 (c) e (d). É então interessante verificar como as forças normais nas barras da treliça se relacionam com os esforços solicitantes da viga não vazada de que ela deriva.



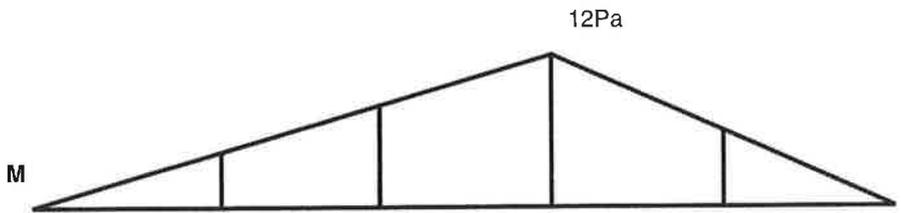
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.70

Na Figura 7.71 mostram-se a treliça e a viga não vazada cortadas segundo uma seção imediatamente à esquerda do nó B da treliça. Em ambas as estruturas, o trecho à esquerda do corte transmite para o trecho à direita do corte uma força vertical $2P$ orientada para baixo e um momento $10Pa$ orientado no sentido anti-horário, como se indica na Figura 7.71 (b). Como se sabe, estes esforços são a força cortante $V = -2P$ e o momento fletor $M = -10Pa$ na seção da viga não vazada em que se fez o corte, conforme os diagramas de esforços solicitantes das Figuras 7.70 (c) e (d).

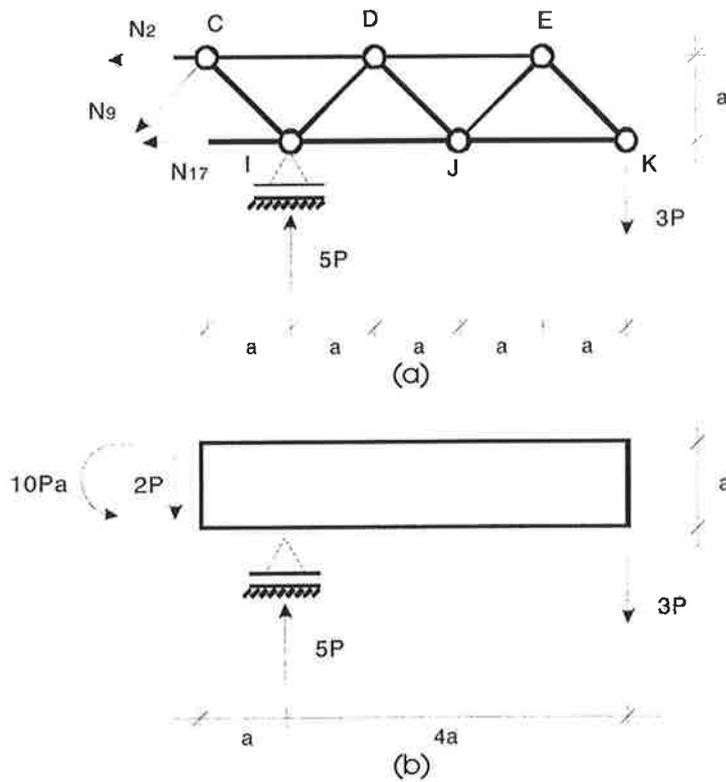


Figura 7.71

Observando a treliça, verifica-se que única barra que pode transmitir a força vertical é a barra 9, pois ela é a única barra cuja força normal possui componente vertical. A relação entre a força cortante da viga não vazada e a força normal na barra 9 é então a seguinte:

$$N_9 = -V \cdot \sqrt{2} \quad (7.57)$$

O sinal negativo na expressão (7.57) decorre do fato de que uma força cortante positiva na viga leva a uma força de compressão na barra 9, como se mostra na Figura 7.72.

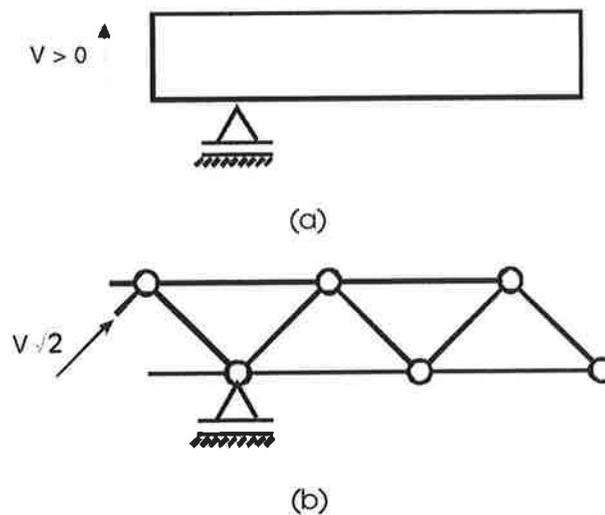


Figura 7.72

Aplicando a expressão (7.57) à treliça que vem sendo examinada, como a força cortante na seção em que se cortou a viga não vazada é $V = -2P$, tem-se

$$N_9 = -V \cdot \sqrt{2} = -(-2P) \cdot \sqrt{2} \Rightarrow N_9 = 2\sqrt{2}P \quad (7.58)$$

Quanto ao momento na seção do corte da treliça, ele será transferido pelo binário constituído pela força normal na barra 17 e pela resultante da força normal na barra 2 e da componente horizontal da força normal na barra 2, tendo-se as seguintes relações entre o momento fletor na viga e as forças normais nas barras da treliça:

$$N_{17} = \frac{M}{a} \quad (7.59)$$

e

$$N_2 + N_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{M}{a} \quad (7.60)$$

Os sinais das equações (7.59) e (7.60) decorrem do fato de que um momento fletor positivo na viga leva a uma força de tração no banzo inferior da treliça e a uma força de compressão no banzo superior da treliça, como mostrado na Figura 7.73.

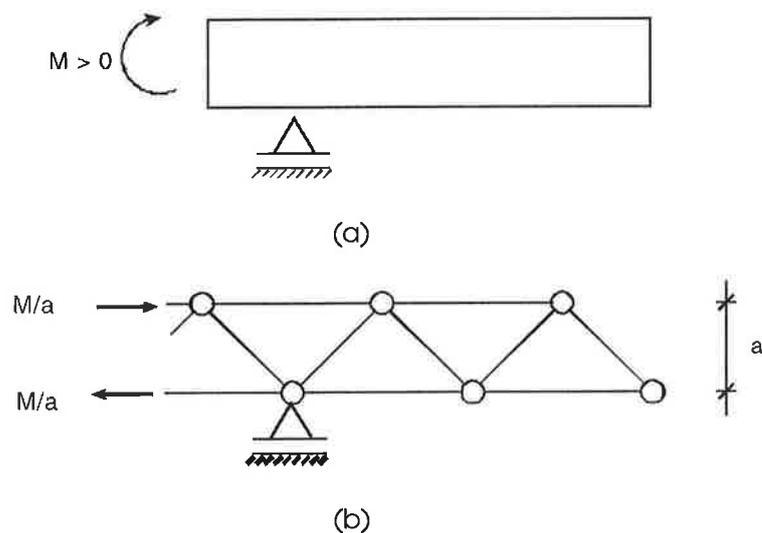


Figura 7.73

Empregando as expressões (7.59) e (7.60) à treliça da Figura 7.71 (a), como o momento fletor na viga é $M = -10Pa$, tem-se:

$$N_{17} = \frac{M}{a} = \frac{-10Pa}{a} = -10P \quad (7.61)$$

e

$$N_2 + N_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{-10Pa}{a} \Rightarrow N_2 = 8P \quad (7.62)$$

Esta análise mostra que a força cortante da viga não vazada é transferida na treliça pela barra 9, e que o momento fletor da viga não vazada é transferido pelo binário

constituído pela força normal na barra 17 e pela resultante da força normal na barra 2 e da projeção horizontal da força normal na barra 9.

Estes raciocínios que levaram à determinação das forças normais nas barras 2, 9 e 17 a partir dos esforços solicitantes da viga não vazada são uma outra maneira de obter as forças normais nas barras da treliça, constituindo-se, na verdade, em uma outra forma de empregar o processo de Ritter.

Exemplo 7.4

Determinar as forças normais nas barras 3, 12, 25 e 34 da treliça da Figura 7.74.

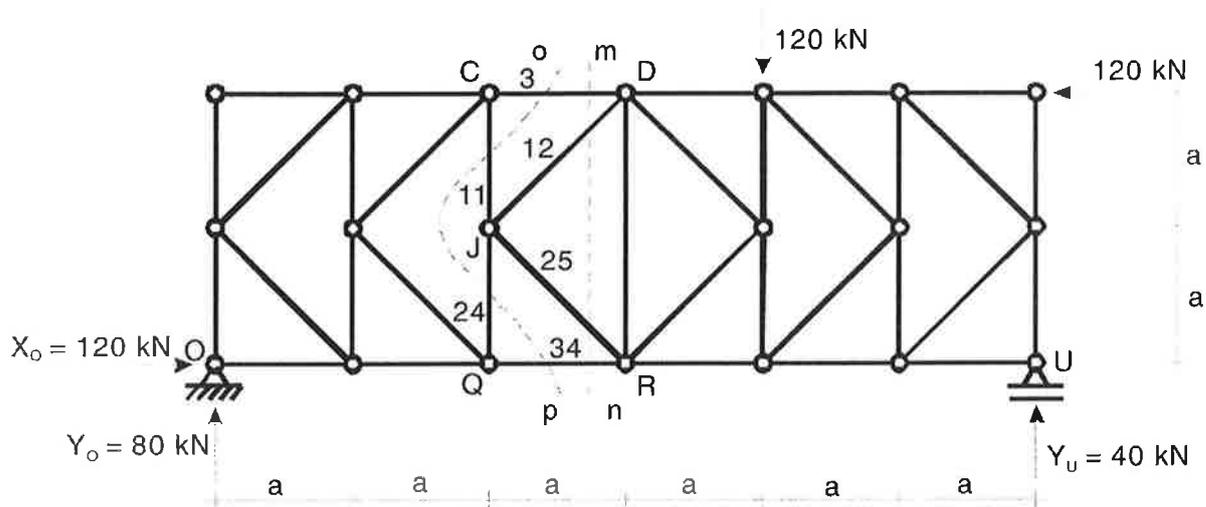


Figura 7.74

Como neste exemplo só estão sendo procuradas as forças normais em algumas barras da treliça, o processo mais adequado à resolução do problema é o processo de Ritter. É mesmo interessante notar que na Figura 7.74 só foram identificadas as barras e os nós da região em que se localizam as barras que se pretende estudar, por já se saber que as forças normais nas demais barras não precisarão ser obtidas.

Como comentado anteriormente, o processo de Ritter se inicia com a determinação das reações de apoio da treliça, já indicadas na Figura 7.74.

O próximo passo é a separação da treliça em duas partes por meio de um corte que seque as barras cujas forças normais se deseja obter. Como estão sendo procuradas as forças normais nas barras 3, 12, 25 e 34, nada mais natural do que separar a treliça por meio do corte *mn* que seque estas quatro barras, indicado na Figura 7.74. O trecho da treliça à esquerda deste corte está mostrado na Figura 7.75.

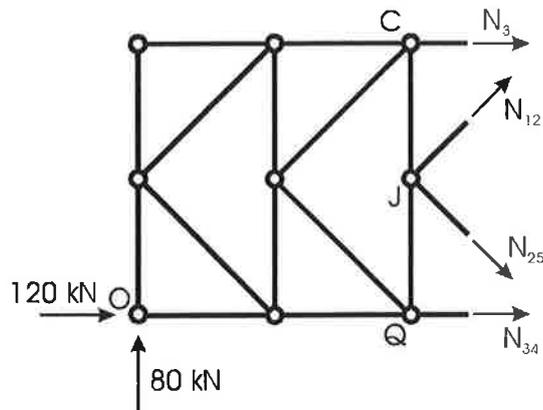


Figura 7.75

Não é difícil constatar que as equações de equilíbrio deste trecho da treliça não serão suficientes para determinar as forças normais em todas as barras que foram cortadas. Isto, porque tem-se quatro forças normais a determinar - N_3 , N_{12} , N_{25} e N_{34} - e apenas três equações de equilíbrio linearmente independentes, visto tratar-se de uma estrutura plana, logo com três graus de liberdade.

Um único corte, portanto, não é suficiente para resolver o problema, devendo-se então separar a treliça por meio de mais um corte. Para solucionar o problema, vai-se separar a treliça por meio do corte *op* indicado na Figura 7.74, que secciona as barras 3, 11, 24 e 34.

Na Figura 7.76, mostra-se o trecho da treliça à esquerda do corte *op*.

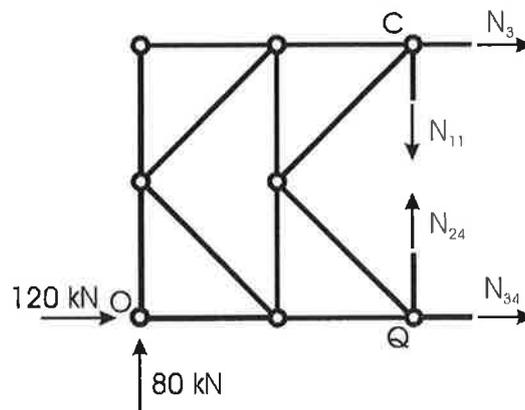


Figura 7.76

Mais uma vez, as equações de equilíbrio deste trecho da treliça não são suficientes para a determinação das forças normais nas barras seccionadas, pois novamente tem-se quatro forças normais desconhecidas - N_3 , N_{11} , N_{24} e N_{34} - e apenas três equações de equilíbrio linearmente independentes.

O conjunto das seis equações de equilíbrio dos trechos da treliça indicados nas Figuras 7.75 e 7.76 é, entretanto, suficiente para resolver o problema, pois nestas duas estruturas tem-se um total de seis forças normais desconhecidas: N_3 , N_{11} , N_{12} , N_{24} , N_{25} e N_{34} . Embora o segundo corte tenha introduzido duas novas incógnitas - N_{11} e N_{24} -, tendo-se então um total de seis incógnitas nos dois cortes, ele introduziu

também três novas equações de equilíbrio, que possibilitam a resolução do problema.

O procedimento para resolver uma treliça como a que está sendo examinada é então cortar a estrutura mais de uma vez e de forma a obter um mesmo número total de barras cortadas e de equações de equilíbrio.

Ressalta-se que, embora as barras 11 e 24 tenham sido cortadas, a obtenção das forças normais nestas barras não é estritamente necessária, pois elas não estão entre as que se deseja conhecer. Elas surgiram somente pelo fato de ter sido necessário fazer um segundo corte da treliça, possuindo então uma função auxiliar.

Passa-se agora à obtenção das forças normais procuradas: N_3 , N_{12} , N_{25} e N_{34} .

O exame do trecho da treliça à esquerda do corte op revela que as forças normais nas barras 3 e 34 podem ser imediatamente obtidas por meio das equações de equilíbrio de momentos em relação aos nós Q e C, respectivamente. Uma vez determinadas N_3 e N_{34} , pode-se utilizar as equações de equilíbrio do trecho da treliça à esquerda do corte mn para obter N_{12} e N_{25} .

Faz-se então a determinação das forças normais nas barras 3 e 34 por meio das equações de equilíbrio de momentos em relação aos pontos Q e C da estrutura da Figura 7.76:

$$\sum M_Q = 0 \quad -80 \cdot 2a - N_3 \cdot 2a = 0 \Rightarrow N_3 = -80 \text{ kN} \quad (7.63)$$

$$\sum M_C = 0 \quad -80 \cdot 2a + 120 \cdot 2a + N_{34} \cdot 2a = 0 \Rightarrow N_{34} = -40 \text{ kN} \quad (7.64)$$

Alternativamente, após a obtenção de N_3 , poder-se-ia ter utilizado a equação de equilíbrio de forças horizontais para determinar N_{34} :

$$\sum X = 0 \quad 120 + N_3 + N_{34} = 0 \Rightarrow 120 + (-80) + N_{34} = 0 \Rightarrow N_{34} = -40 \text{ kN} \quad (7.65)$$

Para obter N_{12} , pode-se empregar a equação de equilíbrio de momentos em relação ao ponto R do trecho da treliça à esquerda do corte mn mostrado na Figura 7.77, em que estão indicadas as forças normais já obtidas para as barras 3 e 34.

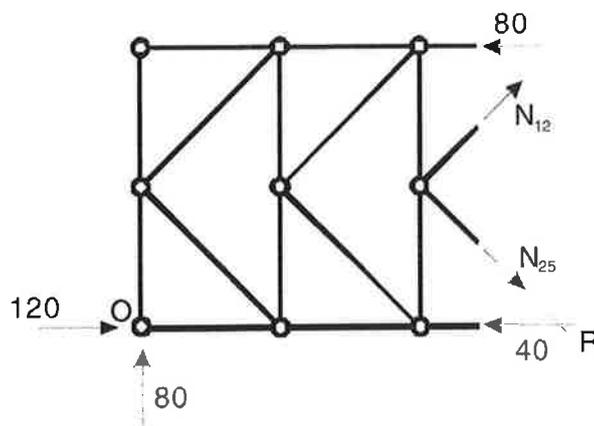


Figura 7.77

Tem-se então:

$$\sum M_R = 0 \quad -80 \cdot 3a + 80 \cdot 2a - N_{12} \cdot a \cdot \sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{12} = -40\sqrt{2} \text{ kN} \quad (7.66)$$

Para obter N_{25} , pode-se utilizar, por exemplo, a equação de equilíbrio das forças horizontais na estrutura da Figura 7.77:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 \quad 120 - 80 + N_{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0 \Rightarrow \\ 120 - 80 + (-40\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0 \Rightarrow N_{25} = 40\sqrt{2} \text{ kN} \quad (7.67) \end{aligned}$$

As forças normais procuradas agora estão todas determinadas: $N_3 = -80 \text{ kN}$, $N_{12} = -40\sqrt{2} \text{ kN}$, $N_{25} = 40\sqrt{2} \text{ kN}$ e $N_{34} = -40 \text{ kN}$.

Das três equações de equilíbrio do trecho da treliça indicado na Figura 7.77, duas foram empregadas para obter N_{12} e N_{25} . Pode-se utilizar a terceira equação como um elemento de verificação das forças normais encontradas.

Utilizar-se-á nesta verificação a equação de equilíbrio das forças verticais:

$$\sum Y = 0 \quad 80 + N_{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 80 + (-40\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7.68)$$

Como se esperava, a identidade é verificada. ■

7.5 Processos de resolução das treliças compostas

Embora o processo do equilíbrio dos nós possa ser empregado para resolver as treliças compostas, a forma mais eficiente de resolvê-las é mediante o emprego do processo do equilíbrio dos nós combinado com o processo de Ritter. Estas duas formas de resolver as treliças compostas serão discutidas a seguir.

7.5.1 Processo do equilíbrio dos nós

Da mesma forma que no caso das treliças simples, o processo do equilíbrio dos nós para a resolução das treliças compostas será apresentado por meio de um exemplo.

Considere-se a treliça composta da Figura 7.78, formada pela união de duas treliças simples – a treliças FAGDB e a treliça LHCEB – por meio de um nó comum – o nó B – e de uma barra – a barra 14. Na Figura 7.78, estes elementos de ligação das duas treliças simples estão indicados com traços mais grossos.

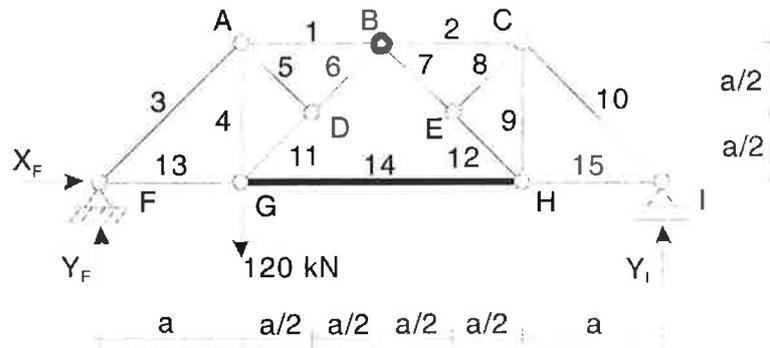


Figura 7.78

A resolução desta treliça consiste na determinação das seguintes incógnitas: as reações de apoio X_F , Y_F e Y_I , e as forças normais nas barras 1 a 15. Tem-se assim 18 incógnitas a determinar: 3 reações de apoio e 15 forças normais nas barras da treliça.

Como esta treliça possui 9 nós e cada um deles deve satisfazer duas equações de equilíbrio, tem-se um total de 18 equações de equilíbrio dos nós da treliça.

O emprego do processo do equilíbrio dos nós leva, portanto, a um sistema de 18 equações a 18 incógnitas, cuja solução permite determinar todos os esforços procurados.

Como já se comentou quando se apresentou o processo do equilíbrio dos nós para a resolução das treliças simples, embora este sistema de 18 equações a 18 incógnitas permita a resolução do problema, a obtenção da solução de um sistema desta dimensão é extremamente difícil e trabalhosa.

Foi por esta razão que no caso das treliças simples foi introduzida a resolução sistematizada pelo processo do equilíbrio dos nós, que leva a resolver-se o grande sistema de equações de equilíbrio aos poucos, subdividindo-o em uma série de sistemas menores.

No caso das treliças compostas, entretanto, em decorrência da lei de formação destas treliças, a resolução sistematizada pelo processo do equilíbrio dos nós não pode ser feita de forma integral, e não se consegue evitar a resolução de um sistema de equações de grande dimensão, o que, como já se disse, dificulta enormemente a solução.

Para ilustrar esta afirmação, tentar-se-á empregar a resolução sistematizada pelo processo do equilíbrio dos nós à treliça da Figura 7.78.

A primeira etapa da resolução sistematizada consiste na obtenção das reações de apoio da treliça por meio das equações de equilíbrio global da treliça.

Para a treliça em estudo, estas equações são

$$\sum X = 0 \quad X_F = 0 \quad (7.69)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_F - 120 + Y_I = 0 \quad (7.70)$$

$$\sum M_F = 0 \quad -120 \cdot a + Y_I \cdot 4a = 0 \quad (7.71)$$

e a resolução do sistema leva às reações de apoio da treliça, indicadas na Figura 7.79:

$$X_F = 0 \quad (7.72)$$

$$Y_F = 90 \text{ kN} \quad (7.73)$$

$$Y_I = 30 \text{ kN} \quad (7.74)$$

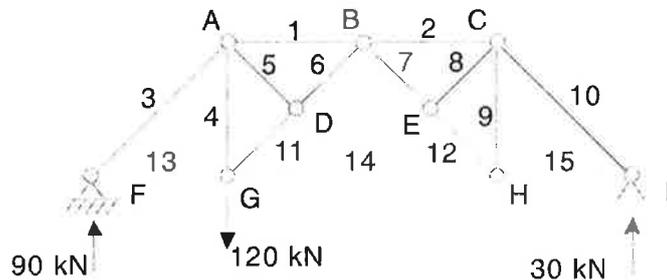


Figura 7.79

A próxima etapa da resolução sistematizada consiste em identificar um nó em que se tenha apenas duas incógnitas a determinar, e por ele iniciar a resolução. Examinando a treliça da Figura 7.79, verifica-se que há dois nós em que se tem apenas duas incógnitas, o nó F, em que não se conhecem N_3 e N_{13} , e o nó I, em que não se conhecem N_{10} e N_{15} . Qualquer um deles pode ser escolhido para início da resolução. Suponha-se que se tenha escolhido o nó F, e que por meio das equações de equilíbrio deste nó se tenha determinado N_3 e N_{13} .

A etapa seguinte da resolução sistematizada consiste em passar-se a um nó da treliça em que atuem N_3 ou N_{13} e no qual se tenha apenas duas incógnitas. O exame da treliça mostra que não há nenhum nó nestas condições, pois no nó A tem-se três incógnitas - N_1 , N_5 e N_4 - e no nó G também tem-se três incógnitas - N_4 , N_{11} e N_{14} .

Este fato decorre da lei de formação das treliças compostas, e a resolução sistematizada da treliça não pode então prosseguir. O máximo que se poderia fazer seria determinar N_{10} e N_{15} por meio das equações de equilíbrio do nó I, mas para a obtenção das demais incógnitas do problema - N_1 , N_2 , N_4 , N_5 , N_6 , N_7 , N_8 , N_9 , N_{11} , N_{12} e N_{14} - seria necessária a resolução do sistema constituído pelas 14 equações de equilíbrio dos nós A, B, C, D, E, G e H, sistema que ainda seria muito grande.

Em decorrência da lei de formação das treliças compostas, não é possível empregar a resolução sistematizada do processo do equilíbrio dos nós de forma integral, o que torna o uso exclusivo do processo do equilíbrio dos nós muito inadequado para a resolução das treliças compostas.

7.5.2 Processo do equilíbrio dos nós combinado com o processo de Ritter

A mesma lei de formação das treliças compostas que torna inadequado o uso exclusivo do processo do equilíbrio dos nós para resolvê-las permite que elas sejam

facilmente resolvidas por uma combinação do processo do equilíbrio dos nós e do processo de Ritter.

Uma treliça composta é formada pela união de duas treliças simples por meio de três barras ou por meio de um nó comum e uma barra. Em ambos os casos, as ligações entre as duas treliças simples introduzem três vínculos entre elas, ou seja, impedem três movimentos de uma treliça em relação à outra: impedem o movimento na direção de cada uma das barras de ligação no primeiro caso e o deslocamento do nó comum – isto é, seu movimento horizontal e seu movimento vertical – e o movimento na direção da barra de ligação no segundo caso.

A resolução de uma treliça composta pela combinação do processo do equilíbrio dos nós com o processo de Ritter consiste então em:

- a) Por meio de um corte, isto é, empregando o processo de Ritter, separar as duas treliças simples, seccionando os elementos que as unem para formar a treliça composta, e determinar os esforços nestes elementos de ligação;
- b) Utilizando a resolução sistematizada, empregar o processo do equilíbrio dos nós para resolver cada uma das treliças simples que compõem a treliça composta.

Mais uma vez, este procedimento será apresentado por meio de um exemplo, o da treliça que vem sendo analisada, mostrada na Figura 7.78.

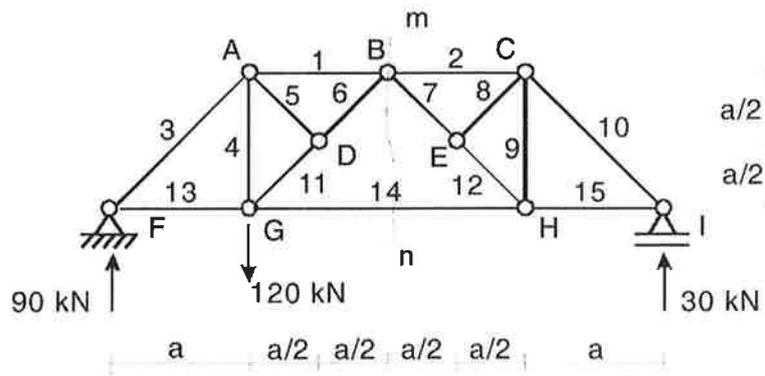
Etapa a) Emprego do processo de Ritter para separar a treliça composta nas duas treliças simples que a compõem e determinação dos esforços nos elementos de ligação das duas treliças simples.

As duas treliças simples que compõem a treliça da Figura 7.78 são unidas por meio de um nó comum – o nó B – e de uma barra – a barra 14.

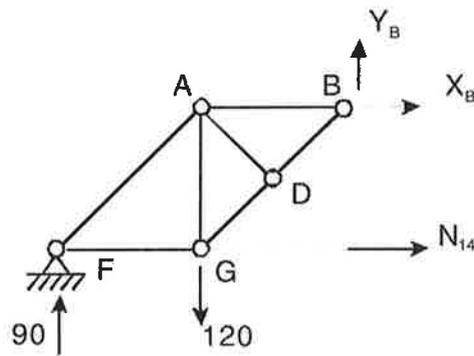
O processo de Ritter se inicia com a obtenção das reações de apoio da treliça; estas reações já foram determinadas por meio das equações (7.69) a (7.71) de equilíbrio global da treliça, estando indicadas na Figura 7.79.

O próximo passo do processo de Ritter é a separação da treliça composta nas treliças simples que a compõem por meio de um corte que seccione os elementos de ligação das treliças simples.

Na Figura 7.80 (a) indica-se o corte mn que secciona o nó B comum às duas treliças simples e a barra 14 que as liga. Na Figura 7.80 (b), mostra-se o trecho da treliça à esquerda do corte, nele estando indicados os esforços que atuam nos elementos de ligação que foram cortados, e que podem ser determinados por meio das equações de equilíbrio deste trecho da treliça. Observa-se que o nó B transfere uma força com direção qualquer, que pode ser então decomposta em sua componente horizontal X_B e em sua componente vertical Y_B .



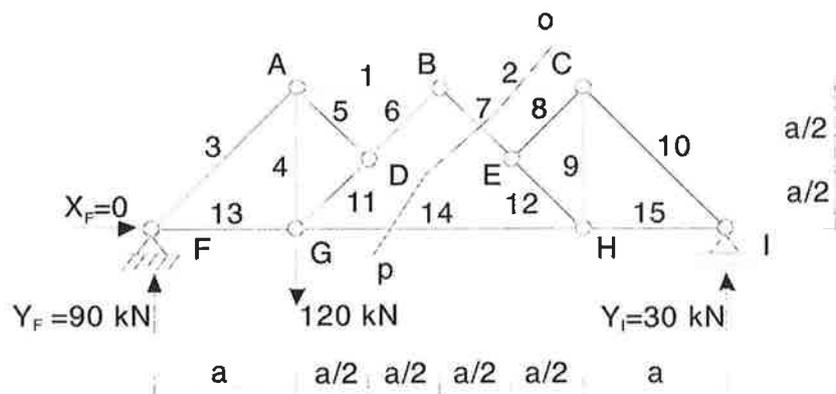
(a)



(b)

Figura 7.80

Alternativamente, pode-se cortar a treliça por meio do corte *op* indicado na Figura 7.81 (a), em que, em lugar de se cortar exatamente um dos elementos de ligação das duas treliças simples – o nó B –, optou-se por cortar duas barras, de forma a já se obter diretamente duas das forças normais procuradas. Na Figura 7.81 (b), indicam-se os esforços que atuam nas barras que foram cortadas, e que se irá determinar.



(a)

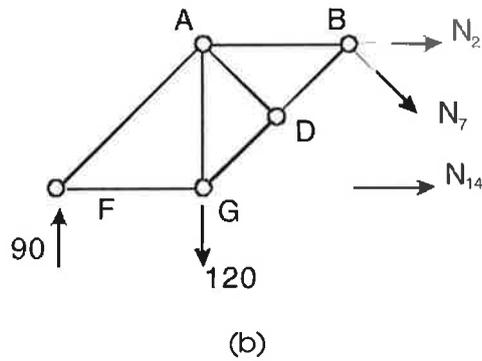


Figura 7.81

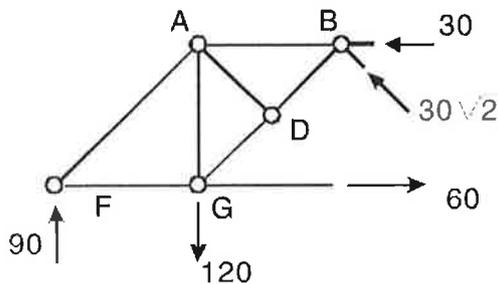
As forças normais nas barras 2, 7 e 14 podem ser obtidas por meio das equações de equilíbrio do trecho da treliça indicado na Figura 7.81 (b):

$$\sum M_B = 0 \quad -90 \cdot 2a + 120 \cdot a + N_{14} \cdot a = 0 \Rightarrow N_{14} = 60 \text{ kN} \quad (7.75)$$

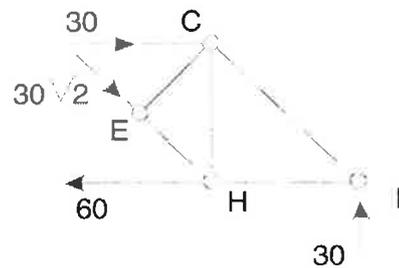
$$\sum Y = 0 \quad 90 - 120 - N_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_7 = -30\sqrt{2} \text{ kN} \quad (7.76)$$

$$\sum X = 0 \quad N_2 + N_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{14} = N_2 + (-30\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 60 = 0 \Rightarrow N_2 = -30 \text{ kN} \quad (7.77)$$

Nas Figuras 7.82 (a) e (b), indicam-se o trecho da treliça à esquerda do corte op e o trecho da treliça à direita do corte op , já com as forças nas barras de ligação que acabam de ser determinadas.



(a)



(b)

Figura 7.82

Observa-se que estas duas treliças são treliças simples, e que, por serem treliças simples, podem ser resolvidas pelo processo do equilíbrio dos nós com o emprego da resolução sistematizada.

Etapa b) Emprego do processo do equilíbrio dos nós para determinar os esforços nas barras das treliças simples que compõem a treliça composta.

Para determinar as forças normais nas barras da treliça da Figura 7.82 (a), inicia-se com o equilíbrio do nó F, passando-se depois aos equilíbrios dos nós G, A e D. Na Figura 7.83, indicam-se estes nós e as forças que atuam em todas as barras que neles chegam obtidas por meio das equações de equilíbrio do nó; no caso desta treliça, como as barras são inclinadas a 45°, é extremamente fácil fazer o equilíbrio graficamente, da forma comentada logo após o término do Exemplo 7.2.

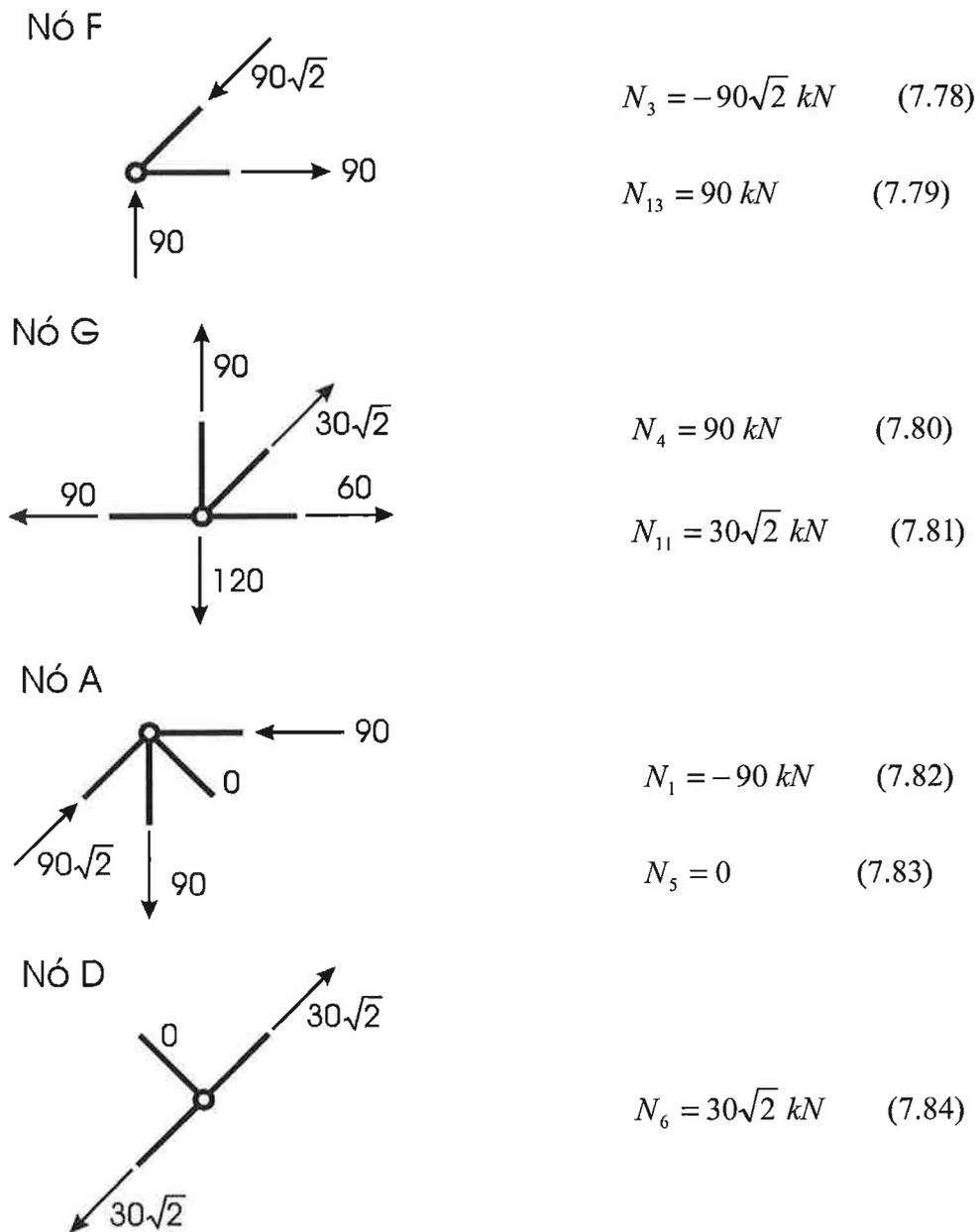


Figura 7.83

Observa-se que, das equações de equilíbrio referentes ao nó D, apenas uma foi utilizada para obter N_6 , pois só se tinha uma incógnita a determinar neste nó. Como já se comentou, isto decorre do fato de que como todas as forças externas que atuam nesta treliça simples já haviam sido determinadas, as equações de equilíbrio dos nós levam a três equações suplementares, que podem então ser empregadas para fazer-se uma verificação das forças normais obtidas.

Além da equação suplementar relativa ao nó D, as outras duas são as equações de equilíbrio do nó B, que não foram empregadas para obter as forças normais procuradas, e que podem ser utilizadas como elementos de verificação. Este nó está apresentado na Figura 7.84, e uma simples inspeção visual mostra que os esforços encontrados satisfazem tanto o equilíbrio das forças horizontais como o das forças verticais.

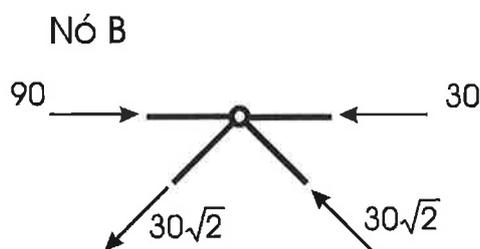


Figura 7.84

A determinação das forças normais nas barras da treliça simples à direita do corte *op* não será feita aqui, e sugere-se que o leitor a faça como exercício, conferindo os resultados encontrados com os da Tabela 7.3, em que se indicam as forças normais em todas as barras desta treliça.

Tabela 7.3

Barra	Força normal (kN)
1	- 90
2	- 30
3	- $90\sqrt{2}$
4	90
5	0
6	$30\sqrt{2}$
7	- $30\sqrt{2}$
8	0
9	30
10	- $30\sqrt{2}$
11	$30\sqrt{2}$
12	- $30\sqrt{2}$
13	90
14	60
15	30

É interessante observar que a combinação do processo do equilíbrio dos nós com o processo de Ritter empregada na resolução desta treliça é extremamente eficiente por se consistir, na verdade, em um procedimento para subdividir o grande sistema de 18 equações a 18 incógnitas que resolve o problema em vários subsistemas menores: um subsistema de três equações a três incógnitas ao se determinar as reações de apoio da treliça, um outro subsistema de três equações a três incógnitas ao se cortar a treliça pelo processo de Ritter e determinar os esforços nos elementos de ligação das treliças simples, e, finalmente, vários subsistemas de duas equações a duas incógnitas ao se resolver cada uma das treliças simples pelo processo do equilíbrio dos nós.



Antes de se passar a mais um exemplo de resolução de uma treliça composta, será discutida uma particularidade muito curiosa da treliça que acaba de ser resolvida: sem que nenhuma análise mais profunda tivesse sido feita, uma simples inspeção visual desta treliça teria sido suficiente para se perceber que as forças normais nas barras 5 e 8 são nulas. Isto, porque nos nós D e E chegam três barras, duas das quais com a mesma direção, nele não havendo forças externas aplicadas. As forças normais nas três barras que chegam nestes nós devem então estar em equilíbrio; como duas delas possuem a mesma direção, nestas barras atuarão forças iguais e de sentidos contrários e na terceira barra a força normal será nula.

Na Figura 7.85 reapresenta-se o nó D, e as forças normais nas barras que nele chegam. Em lugar de na análise do equilíbrio deste nó se utilizar o eixo horizontal e o vertical, serão empregados o eixo que tem a direção das barras colineares e o eixo a ele ortogonal.

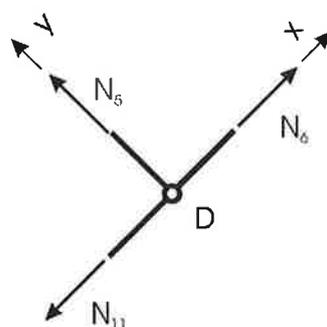


Figura 7.85

As equações de equilíbrio são então

$$\sum X = 0 \quad -N_{11} + N_6 = 0 \Rightarrow N_6 = N_{11} \quad (7.85)$$

$$\sum Y = 0 \quad N_5 = 0 \quad (7.86)$$

comprovando-se o que se havia afirmado.

No caso deste exemplo, a barra 5 é ortogonal às barras colineares. É importante ressaltar que mesmo que ela não fosse ortogonal às outras duas, a força normal nesta barra continuaria sendo nula. Na Figura 7.86 consideram-se três barras chegando em um nó genérico A, duas das quais colineares, e a terceira, não ortogonal às outras duas.

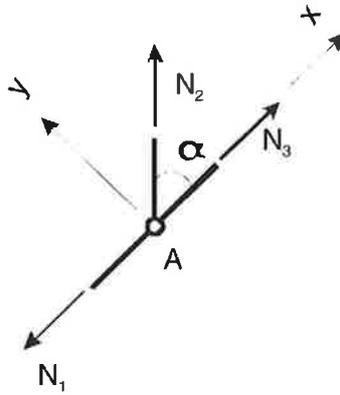


Figura 7.86

As equações de equilíbrio deste nó são

$$\sum Y = 0 \quad N_2 \cdot \text{sen } \alpha = 0 \Rightarrow N_2 = 0 \quad (7.87)$$

$$\sum X = 0 \quad -N_1 + N_2 \cdot \text{cos } \alpha + N_3 = 0 \Rightarrow N_1 = N_3 \quad (7.88)$$

Como se havia afirmado, verifica-se novamente que a força normal na barra não colinear às outras duas é nula.

A treliça que acaba de ser examinada é uma treliça utilizada em pontes, sendo as cargas dos veículos que passam pela ponte transferidas aos nós do banzo inferior da treliça por meio das transversinas que neles se apóiam. Nos nós D e E, portanto, não serão aplicadas forças externas, a não ser as decorrentes do peso próprio das barras, podendo então o leitor indagar por que razão existem nesta treliça as barras 5 e 6 se nelas não atuarão forças normais.

O motivo que levou à colocação destas barras na treliça é evitar que as barras 11 e 12 fiquem muito esbeltas e possam ser muito fletidas quando vierem a ser comprimidas.

Em decorrência de nossa experiência com as estruturas encontradas no dia-a-dia, todos sabemos que se comprimirmos uma régua de plástico bem fina ela irá encurvar-se, e que, se não tomarmos cuidado para não encurvá-la muito, acabará por romper-se. Este fenômeno ocorre porque as régua reais sempre apresentam imperfeições – o eixo não é absolutamente reto, suas seções transversais não são todas exatamente iguais, são fletidas pelo peso próprio, etc. –, vindo a sofrer flexão quando comprimidas, flexão esta que aumenta à medida que a régua vai se encurvando. É interessante observar que este fenômeno só ocorre na compressão, não ocorrendo na tração; ao contrário, o eixo inicialmente curvo de uma régua ficará menos curvo se ela for tracionada.

A este fenômeno, que é tanto mais importante quanto mais esbelta for a barra – isto é, quanto maior for o seu comprimento e menores as dimensões de suas seções transversais –, dá-se o nome de flexão composta de barras esbeltas, e será estudado mais adiante no curso.

É justamente para diminuir o comprimento das barras 11 e 12 e portanto diminuir a possibilidade de elas apresentarem grandes curvaturas quando comprimidas que foram introduzidas as barras 5 e 6 na treliça. Observa-se que na situação em que foi feito o exame desta treliça, com a força externa ativa aplicada em G, embora a barra 12 fique comprimida, podendo encurvar-se, a barra 11 fica tracionada. Já

quando a força externa ativa estiver aplicada em H irá ocorrer o contrário: a barra 11 ficará comprimida e a barra 12, tracionada.

Exemplo 7.7

Determinar as forças normais nas barras da treliça da Figura 7.87.

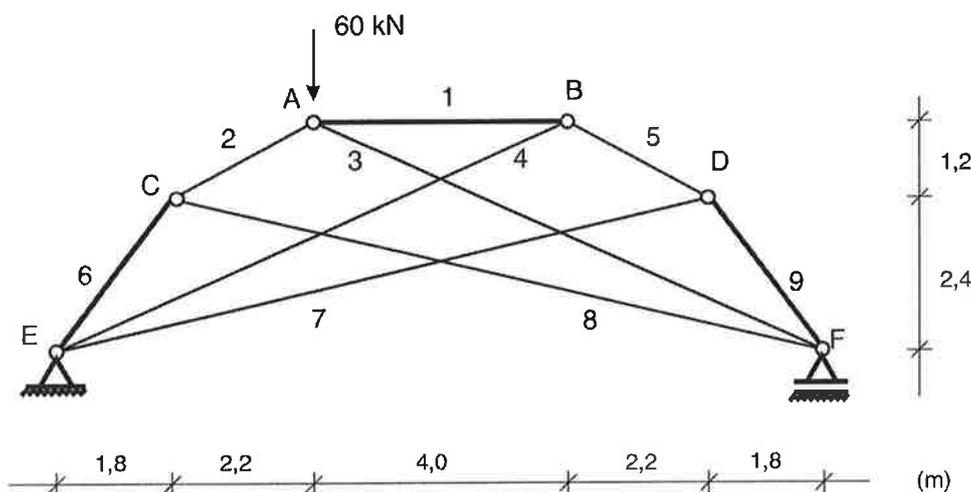


Figura 7.87

Esta treliça, utilizada em coberturas, é uma treliça composta, formada pela união das treliças simples CAF e BDE por meio de três barras - as barras 1, 6 e 9. Na Figura 7.87, as barras que ligam as treliças simples para formar a treliça composta estão indicadas com traços mais grossos.

Por tratar-se de uma treliça composta, esta treliça será resolvida pelo emprego do processo do equilíbrio dos nós combinado com o processo de Ritter;

Etapa a) Emprego do processo de Ritter para separar a treliça composta nas duas treliças simples que a compõem e determinação dos esforços nos elementos de ligação das duas treliças simples.

O primeiro passo para o emprego do processo de Ritter é a determinação das reações de apoio, que já se encontram indicadas na Figura 7.88.

O segundo passo consiste em separar a treliça composta por meio de um corte que seccione as barras de ligação, e a posterior determinação das forças normais que atuam nestas barras de ligação.

Na Figura 7.88 (a), mostra-se o corte que secciona as barras 6, 1 e 9 que unem as duas treliças simples, e nas Figuras 7.88 (b) e (c), os dois trechos em que ficou separada a treliça após o corte.

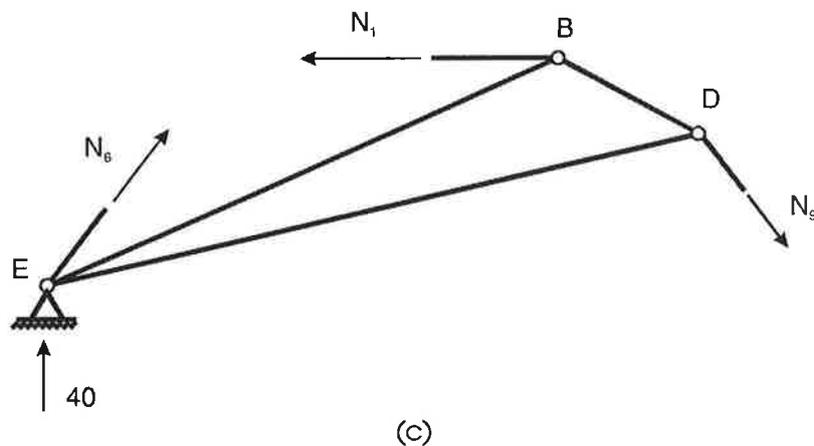
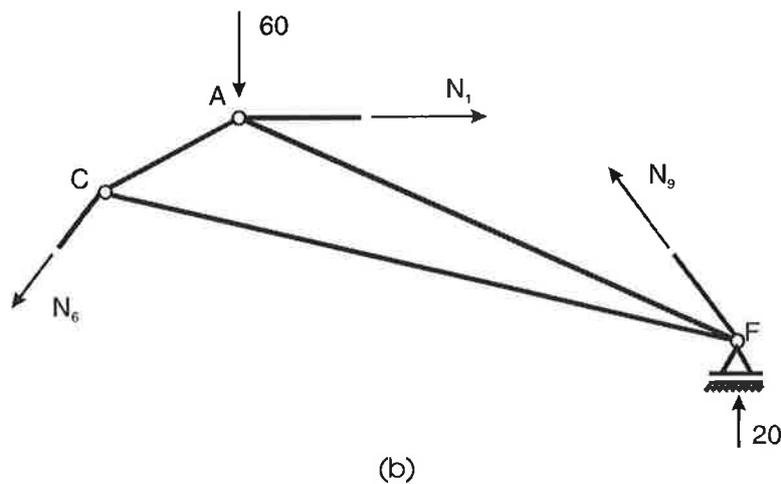
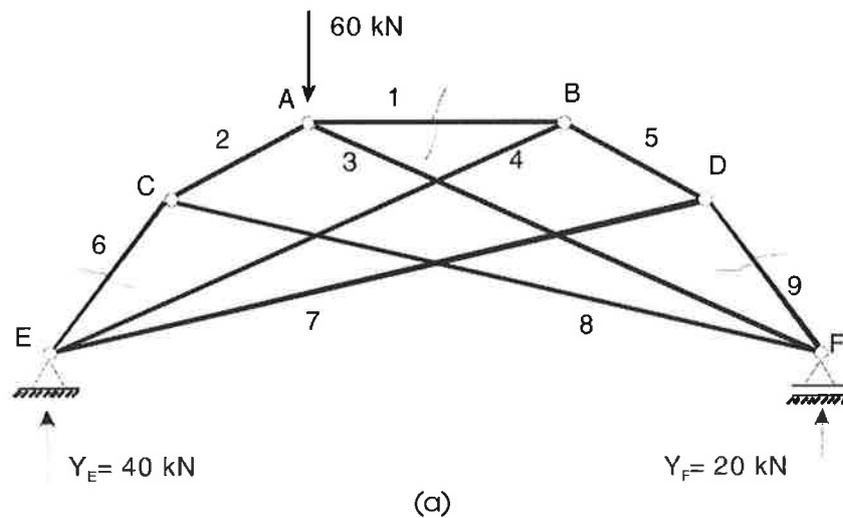


Figura 7.88

A obtenção das forças normais nas barras 6, 1 e 9 pode ser feita pela análise do equilíbrio de qualquer um dos dois trechos da treliça mostrados nas Figuras 7.88 (b) e (c). No caso desta treliça, não existe um trecho que torne esta resolução mais simples; opta-se, aqui, por examinar o equilíbrio do trecho mostrado na Figura 7.88 (b), representado na Figura 7.89 com as forças normais, N_6 , N_1 e N_9 que se está procurando já decompostas em suas componentes horizontal e vertical.

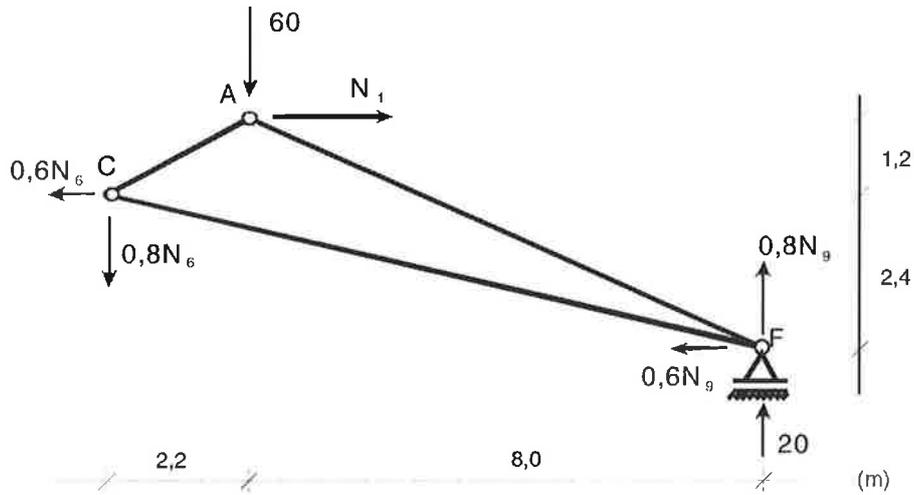


Figura 7.89

As equações de equilíbrio que serão empregadas para determinar as forças normais nas barras 6, 1 e 9 são

$$\sum X = 0 \quad -0,6 N_6 + N_1 - 0,6 N_9 = 0 \quad (7.89)$$

$$\sum Y = 0 \quad -0,8 N_6 - 60 + 0,8 N_9 + 20 = 0 \quad (7.90)$$

$$\sum M_F = 0 \quad 0,8 N_6 \cdot 10,2 + 0,6 N_6 \cdot 2,4 + 60 \cdot 8 - N_1 \cdot 3,6 = 0 \quad (7.91)$$

cujas resoluções levam às forças normais procuradas:

$$N_1 = -54,55 \text{ kN} \quad (7.92)$$

$$N_6 = -70,46 \text{ kN} \quad (7.93)$$

$$N_9 = -20,46 \text{ kN} \quad (7.94)$$

Uma vez determinadas estas forças, pode-se passar à obtenção das forças normais nas treliças simples CAF e BDE pelo processo do equilíbrio dos nós mediante o emprego da resolução sistematizada. É interessante ressaltar que, para ambas as treliças simples, as forças N_1 , N_6 e N_9 que se acaba de obter são forças externas.

Etapa b) Emprego do processo do equilíbrio dos nós para determinar os esforços nas barras das treliças simples que compõem a treliça composta.

Pode-se agora determinar as forças normais nas barras das treliças simples indicadas nas Figuras 7.90 (a) e (b) por meio da resolução sistematizada do processo do equilíbrio dos nós.

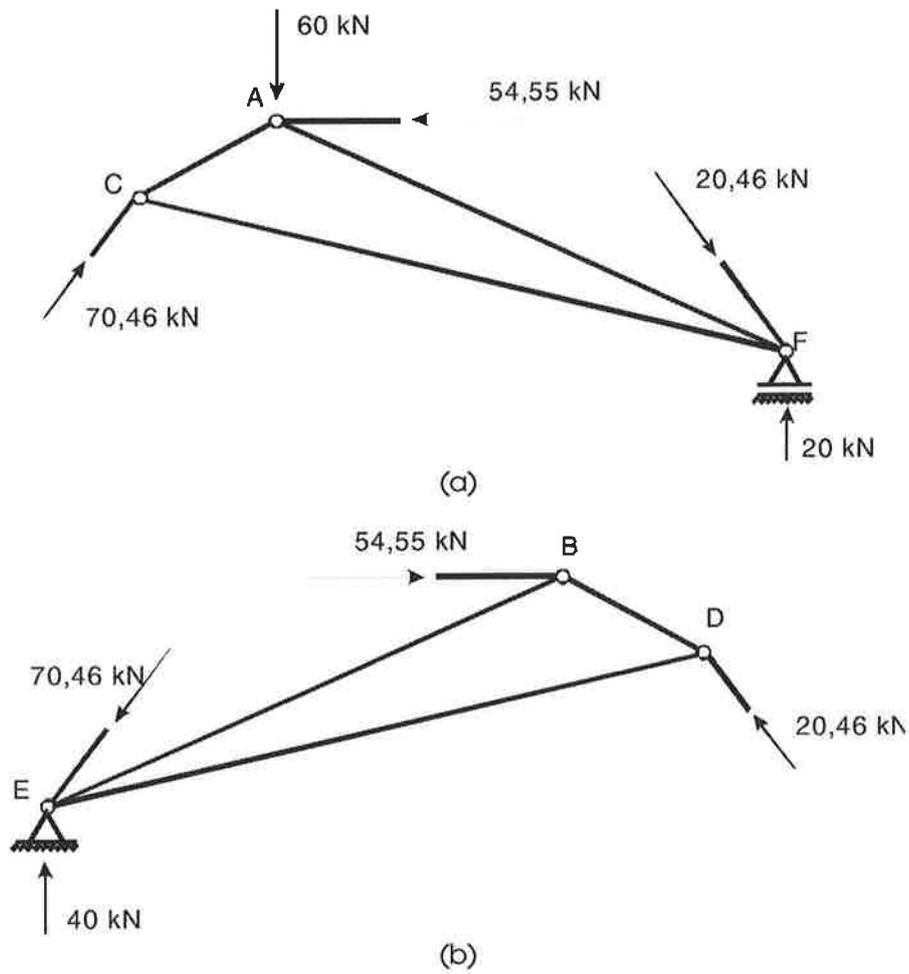


Figura 7.90

Será feita aqui apenas a resolução da treliça simples indicada na Figura 7.90 (a), deixando-se ao leitor como exercício a obtenção das forças normais da treliça da Figura 7.90 (b).

A determinação das forças normais da treliça da Figura 7.90 (a) será iniciada com a análise do equilíbrio do nó A, mostrado na Figura 7.91 (a); na Figura 7.91 (b), apresentam-se as componentes horizontal e vertical das forças que atuam no nó A.



Figura 7.91

As equações de equilíbrio do nó A são então

$$\sum X = 0 \quad - 0,878 N_2 - 54,55 + 0,912 N_3 = 0 \quad (7.95)$$

$$\sum Y = 0 \quad - 0,479 N_2 - 60 - 0,410 N_3 = 0 \quad (7.96)$$

das quais decorrem:

$$N_2 = -96,74 \text{ kN} \quad (7.97)$$

$$N_3 = -33,32 \text{ kN} \quad (7.98)$$

Das três forças normais que atuam na treliça simples CAF, duas já foram determinadas. Tem-se, ainda, as quatro equações de equilíbrio dos nós C e F para determinar a força normal N_8 ; será utilizada para determiná-la uma das equações de equilíbrio do nó C, e as demais equações de equilíbrio serão empregadas como elementos de verificação das forças normais obtidas.

Na Figura 7.92 (a), mostram-se as forças que atuam no nó C, e na Figura 7.92 (b), as componentes destas forças.

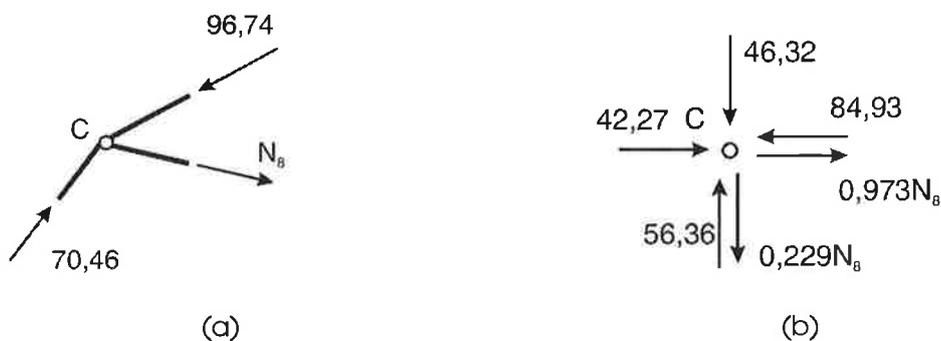


Figura 7.92

As equações de equilíbrio do nó C são

$$\sum X = 0 \quad 42,27 - 84,93 + 0,973 N_8 = 0 \quad (7.99)$$

$$\sum Y = 0 \quad 56,36 - 46,32 - 0,229 N_8 = 0 \quad (7.100)$$

A força normal na barra 8 pode ser obtida pela equação (7.98), encontrando-se

$$N_8 = 43,84 \text{ kN} \quad (7.101)$$

Como todas as forças normais da treliça simples CAF já foram determinadas, a segunda equação de equilíbrio do nó C pode ser empregada como elemento de verificação:

$$\sum Y = 56,36 - 46,32 - 0,229 \cdot 43,84 = 0 \quad (7.102)$$

A expressão 7.102 mostra que a verificação é satisfeita.

Embora já se tenha feito uma conferência das forças normais obtidas, as equações de equilíbrio do nó F ainda poderiam ser empregadas como outros dois elementos de verificação. Em termos práticos, apenas a conferência (7.102) já seria suficiente como indicação da correção das forças normais obtidas. Apesar disso, também serão feitas aqui as verificações adicionais relativas ao nó F, representado na Figura 7.93 (a); na Figura 7.93 (b), estão indicadas as componentes das forças que atuam nesse nó.



Figura 7.93

As resultantes das forças horizontais e verticais que atuam no nó F são:

$$\sum X = -42,67 + 30,39 + 12,28 = 0 \quad (7.103)$$

$$\sum Y = 10,04 - 13,67 - 16,37 + 20 = 0 \quad (7.104)$$

Novamente, as duas equações de equilíbrio são satisfeitas pelas forças normais encontradas, logo estas outras duas verificações também estão satisfeitas.

Na Tabela 7.4, são indicadas as forças normais em todas as barras da treliça composta da Figura 7.87; lembra-se que a obtenção das forças normais nas barras da treliça simples BDE não foi aqui apresentada, tendo-se sugerido que o leitor a faça como exercício.

Tabela 7.4

Barra	Força normal (kN)
1	- 54,55
2	- 96,74
3	- 33,32
4	32,78
5	- 28,09
6	- 70,46
7	12,73
8	43,84
9	- 20,46

A Tabela 7.4 mostra que quase todas as barras da treliça que acaba de ser resolvida são comprimidas, apenas as barras 4, 7 e 8 sendo tracionadas. Não é muito difícil compreender as razões que levam a estes esforços nas barras da treliça.

Esta treliça, representada na Figura 7.94, tem um comportamento estrutural semelhante ao de um arco.

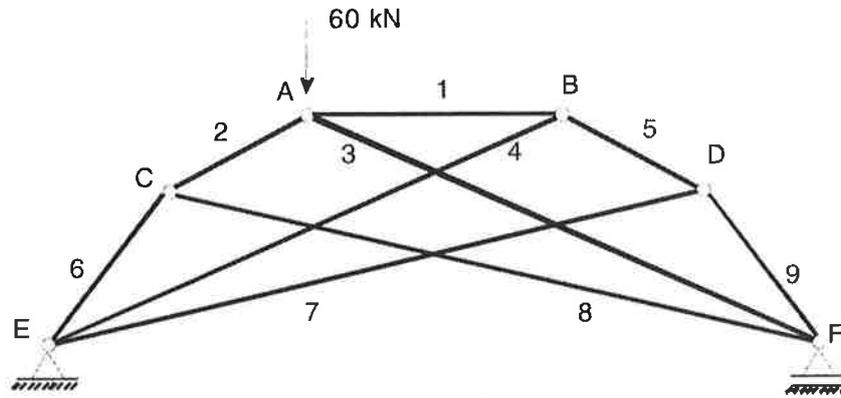


Figura 7.94

Como já se comentou, esta treliça é empregada em coberturas. Em lugar desta treliça, poder-se-ia utilizar como estrutura desta cobertura uma das estruturas triarticuladas mostradas na Figura 7.95.

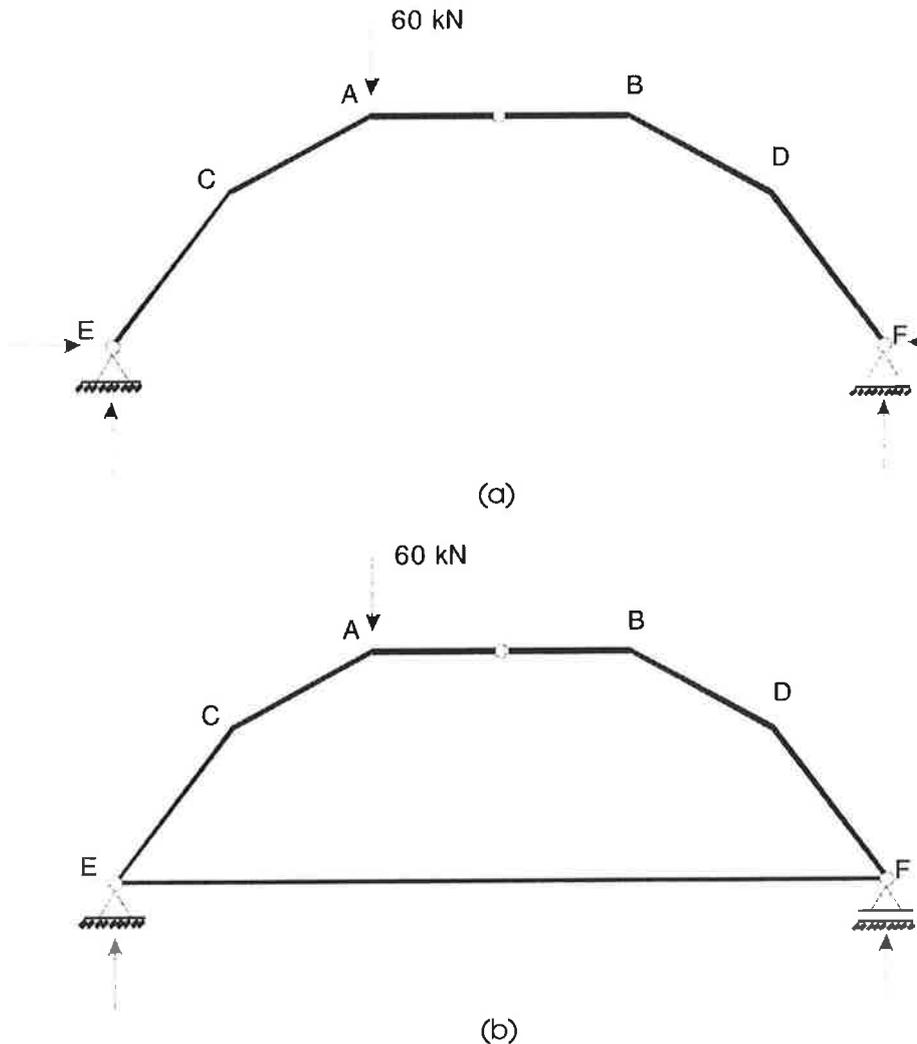


Figura 7.95

Sob a ação do carregamento que nelas atua, a tendência destas estruturas é a de se "abrirem", em decorrência da tendência de afastamento dos apoios E e F, semelhantemente ao que ocorre com a estrutura da Figura 7.96, que não fica em equilíbrio, vindo efetivamente a abrir.

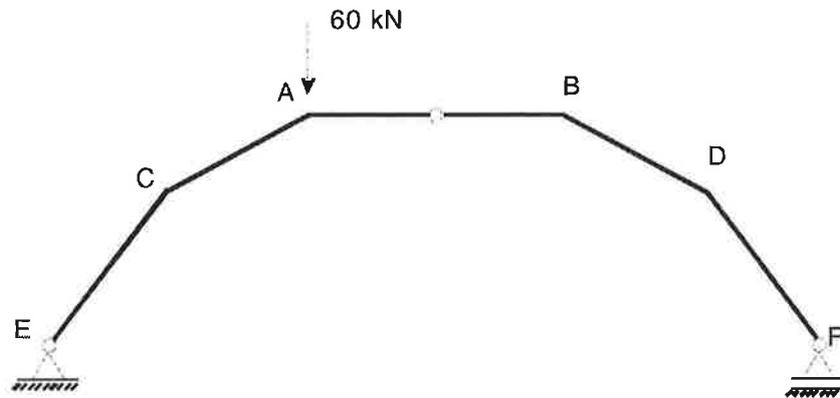


Figura 7.96

Embora tendam a abrir, as estruturas da Figura 7.95 têm sua abertura impedida: a da Figura 7.95 (a) pelas articulações fixas E e F que não podem afastar-se uma da outra e a da Figura 7.95 (b) pelo tirante que liga os apoios E e F. As direções e os sentidos das reações de apoio destas estruturas são bastante intuitivos, estando mostrados na Figura 7.95. Também é bastante intuitivo perceber que o tirante que une os apoios E e F da estrutura da Figura 7.95 (b) fica tracionado.

Com se verá no Capítulo 9 desta apostila, as estruturas da Figura 7.95 têm o comportamento estrutural de um arco, ficando comprimidas.

Pois bem, como já se comentou, há uma semelhança de comportamento entre a treliça da Figura 7.94 e os "arcos" da Figura 7.95.

A treliça da Figura 7.94 se comporta como um "arco" formado pelas barras 6, 2, 1, 5 e 9, que, por serem articuladas em suas extremidades, necessitam das barras 3, 4, 7 e 8 para ficarem em equilíbrio.

Como em um arco, as barras 6, 2, 1, 5 e 9 da treliça ficam comprimidas. A seqüência das barras 6, 2 e 1 forma um arco cujas extremidades E e B tendem a se afastar uma da outra, isto é, um arco que tende a abrir; esta abertura é impedida pela barra 4, que trabalha como um tirante, ficando tracionada. O mesmo ocorre com o arco formado pela seqüência das barras 6, 2, 1 e 5, cuja abertura é impedida pela barra 7, que também fica tracionada, e com o arco formado pela seqüência das barras 2, 1, 5 e 9, cuja abertura é impedida pela barra 8, também tracionada.

A tendência do arco formado pela seqüência das barras 1, 5 e 9 também é a de abrir, e esta abertura é impedida pela barra 3, que deveria então estar tracionada. O exame da Tabela 7.4 mostra, entretanto, que, em lugar de ser tracionada, a barra 3 é comprimida. Isto, porque parte da força de 60 kN aplicada no nó A é transferida diretamente ao apoio F pela barra 3, comprimindo-a. A força de compressão na barra 3 é portanto a resultante de duas forças normais: a força de compressão decorrente da transferência de parte da força de 60 kN do nó A para o apoio F e da força de tração na barra 3 decorrente de seu papel como tirante do arco formado pelas barras 1, 5 e 9. Como a componente de compressão é maior que a de tração, a força normal final na barra 3 é de compressão.

Embora possua um comportamento estrutural um pouco mais complexo que as treliças anteriormente examinadas neste Capítulo, verifica-se que não é muito difícil compreender o comportamento estrutural da treliça que se acaba de analisar.



Finalizando este Capítulo, convém ressaltar que todos os processos de resolução de treliças examinados – o processo do equilíbrio dos nós, o processo de Ritter ou das seções e a combinação destes dois processos empregada na resolução das treliças

compostas – decorrem de uma mesma propriedade, a de que estando uma estrutura em equilíbrio, qualquer parte da estrutura, seja ela um nó ou um trecho maior da estrutura, está em equilíbrio.

Bibliografia

1. Riley, W.F, Sturges, L.D e Morris, D.H. Statics and Mechanics of Materials. John Wiley & Sons, New York, 1995.
2. Salvadori, M. e Heller, R. Structure in Architecture. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
3. Tardieu, E. e Coussin Fils, A. Les Dix Livres d'Architecture de Vitruve, avec les Notes de Perrault. Tardieu e Coussin, Paris, 1837.
4. Ballio, G. e Mazzolani, F.M. Theory and Design of Steel Structures. Chapman and Hall, London, 1983.
5. West, H.H. Analysis of structures. John Wiley & Sons, New York, 1980.
6. Aço Minas Gerais S/A. Princípios de projeto de estruturas em aço. Aço Minas Gerais S/A, Belo Horizonte, 1989.
7. Morrow, H.W. Elements of steel design. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
8. Palladio, A. The Four Books of Architecture. Dover, New York, 1965.
9. Kirby et al. Engineering in History. Dover, New York, 1990.
10. Timoshenko, S. History of Strength of Materials. Dover, New York, 1983.
11. Grinter, L.E. Theory of Modern Steel Structures. MacMillan, New York, 1943.

8. Pórticos triarticulados

8.1 Introdução

Considerem-se as estruturas indicadas na Figura 8.1. Embora elas tenham a mesma forma e o mesmo carregamento, possuem comportamentos estruturais bastante distintos, em decorrência de suas diferentes condições de apoio. A estrutura da Figura 8.1 (a) tem como apoios uma articulação fixa e uma articulação móvel; a da Figura 8.1 (b), duas articulações fixas, indicadas por pequenos círculos, como usualmente se representam as articulações fixas deste tipo de estrutura.

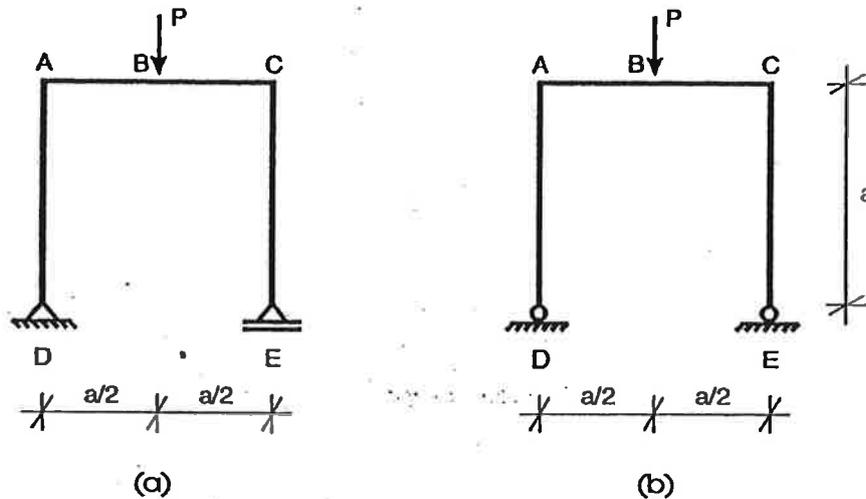


Figura 8.1

É muito fácil verificar que a estrutura da Figura 8.1 (a) é isostática, e que se tiver qualquer um de seus vínculos retirado se tornará hipostática. As reações de apoio e o diagrama de momentos fletores desta estrutura estão indicados na Figura 8.2, em que também se mostra a sua deformada.

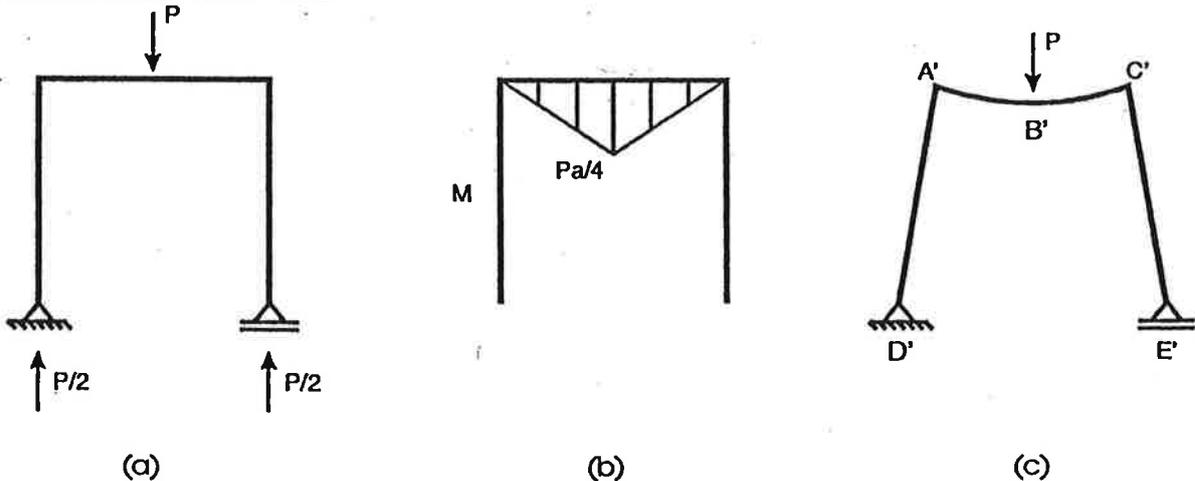


Figura 8.2

A deformada da estrutura está diretamente ligada ao diagrama de momentos fletores, pois estando uma barra solicitada por momentos fletores, ela se encurvará, isto é, ficará fletida, e sua concavidade será voltada para a região comprimida da barra, já que suas fibras longitudinais aumentam de comprimento no lado traçionado e diminuem de comprimento no lado comprimido, sendo exatamente estes alongamentos e encurtamentos que levam a barra a se encurvar.

No caso da estrutura da Figura 8.1 (a), verifica-se pelo diagrama de momentos fletores da Figura 8.2 (c) que os montantes AD e CE permanecem retos, já que neles não há momentos fletores, e que a trave AC se encurva com concavidade voltada para cima, por estar solicitada por momentos fletores que traçionam a face inferior e comprimem a face superior. Como o encurvamento desta trave leva as suas seções transversais de extremidade A e C a apresentarem rotação, os montantes deixam de ser verticais, inclinando-se, e o apoio articulado móvel E move-se para a direita.

Observa-se que, embora os montantes tenham se inclinado e a trave superior da estrutura tenha se encurvado, as barras da estrutura, que eram ortogonais entre si antes da aplicação da força P, continuam ortogonais entre si na estrutura deformada. Na Figura 8.3 (a) apresenta-se um detalhe do nó A da estrutura indeformada, e na Figura 8.3 (b), um detalhe do nó A' da estrutura deformada, verificando-se que as tangentes aos eixos das barras de ambas as estruturas são ortogonais no nó.

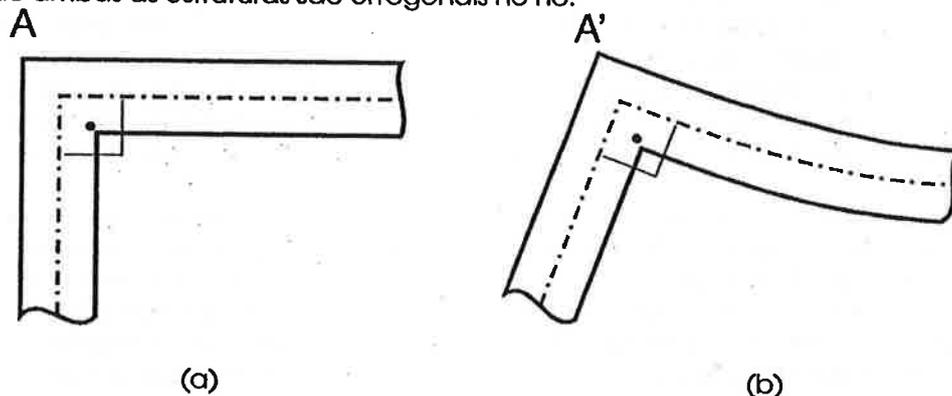


Figura 8.3

É conveniente repetir aqui uma observação que já foi sido feita na Nota 5.8 do Capítulo 5: na determinação dos esforços solicitantes desta estrutura, considerou-se a sua configuração indeformada, isto é, a configuração que ela possuía antes da aplicação da força P. É muito fácil verificar pela Figura 8.2 (c) que, se se considerar a estrutura na configuração deformada, os seus esforços solicitantes serão outros e que haverá momento fletor nos montantes, que não ficarão mais retos, encurvando-se. Como já se comentou no Capítulo 5, o modelo de cálculo que se está adotando, em que se despreza a deformação da estrutura na determinação dos esforços solicitantes, só poderá ser empregado quando os esforços solicitantes obtidos com a consideração da configuração indeformada forem muito próximos daqueles obtidos com a consideração da deformação da estrutura.

Dá-se o nome de efeitos de primeira ordem àqueles decorrentes dos esforços solicitantes obtidos considerando-se a estrutura indeformada e de efeitos de segunda ordem os efeitos adicionais decorrentes da consideração da deformação da estrutura. É claro que o modelo que leva em conta a deformação da estrutura representa melhor a estrutura

real. Ele é, entretanto, muitíssimo mais complexo que o modelo mais simples, pois nele os momentos fletores dependerão da deformação da estrutura, que, por sua vez, dependerá dos momentos fletores. Esta interdependência entre os momentos fletores e a deformação da estrutura levará a ter-se que integrar uma equação diferencial para obter o diagrama de momentos fletores, em suma, a um modelo muitíssimo mais complexo para a estrutura. Por esta razão, quando os efeitos de segunda ordem forem muito menores que os de primeira ordem, a estrutura ficará muito bem representada pelo modelo simples em que se considera a configuração indeformada para determinar os esforços solicitantes. Quando os efeitos de segunda ordem não forem desprezíveis, como, por exemplo, no caso dos pilares esbeltos – pilares longos com pequenas seções transversais –, será necessário utilizar a configuração deformada na obtenção dos esforços solicitantes. Este modelo mais complexo será visto mais adiante no curso, quando se estudarem a flexão composta das barras esbeltas e a estabilidade do equilíbrio.

É mais uma vez importante lembrar que o princípio de superposição dos efeitos só é válido quando se usa o modelo em que se utiliza a configuração indeformada da estrutura para obter os esforços solicitantes, não podendo ser aplicado quando os efeitos de segunda ordem são levados em consideração.

Examinando agora a estrutura da Figura 8.1 (b), não é difícil perceber que ela é hiperestática: se, por exemplo, o apoio fixo da direita for transformado em uma articulação móvel que permita o movimento horizontal do ponto E, a estrutura da Figura 8.1 (b) ficará exatamente igual à estrutura da Figura 8.1 (a), que, como se acaba de ver, é isostática. Como nenhum outro vínculo poderá ser retirado sem que ela venha a poder apresentar movimento de corpo rígido, a estrutura da Figura 8.1 (b) possui grau de hiperestaticidade igual a um, ou, como normalmente se diz, é uma vez hiperestática.

Na Figura 8.4 mostram-se as reações que os apoios podem introduzir na estrutura da Figura 8.1 (b). Pode-se imediatamente perceber que as equações de equilíbrio não são suficientes para a determinação das reações de apoio, já que se tem quatro reações de apoio a determinar e só três equações de equilíbrio linearmente independentes. O fato de se ter um maior número de reações de apoio que de equações de equilíbrio decorre do fato de a estrutura ser hiperestática, e o fato de se ter uma reação de apoio a mais que o número de equações de equilíbrio decorre do fato de a estrutura ser uma vez hiperestática.

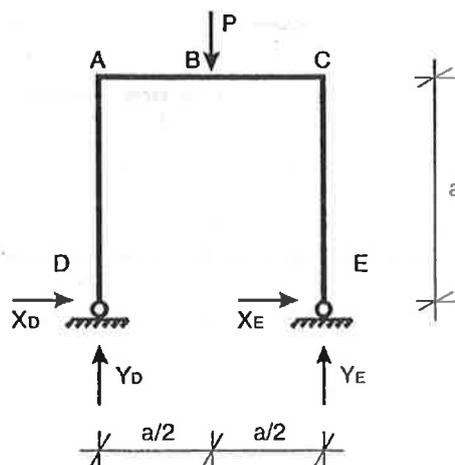


Figura 8.4

Apesar de as reações de apoio horizontais não poderem ser determinadas pelas equações de equilíbrio, as reações verticais podem sê-lo, como se mostra a seguir:

$$\sum X = 0 \quad X_D + X_E = 0 \quad (8.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_D - P + Y_E = 0 \quad (8.2)$$

$$\sum M_D = 0 \quad -P \cdot \frac{a}{2} + Y_E \cdot a = 0 \Rightarrow Y_E = \frac{P}{2} \quad (8.3)$$

Da equação (8.2), obtém-se que $Y_D = \frac{P}{2}$. Como já era de se esperar, em decorrência da simetria da estrutura e do seu carregamento, as duas reações verticais da estrutura são iguais.

As reações horizontais, como se havia mencionado, não podem ser determinadas, pois na equação (8.1) tem-se duas incógnitas. A informação que pode-se obter desta equação é que as reações horizontais da estrutura são iguais em intensidade e opostas em sentido, o que está de acordo com a simetria da estrutura e do carregamento.

Há várias formas de se determinar as reações horizontais desta estrutura, e aqui será apresentada uma destas alternativas, que é muito simples e de significado físico muito claro.

Comentou-se acima que a estrutura da Figura 8.1 (b) tornar-se-ia isostática se a articulação fixa em E fosse transformada em uma articulação móvel. É o que se faz na Figura 8.5 (a), verificando-se que a estrutura ficou exatamente igual à estrutura isostática da Figura 8.1 (a), cuja deformada, já mostrada na Figura 8.2 (c), é rerepresentada na Figura 8.5 (b). Imagine-se agora que uma força horizontal X seja aplicada no ponto E' da estrutura da Figura 8.5 (b), como mostrado na Figura 8.5 (c). Sob a ação desta força, o apoio móvel se deslocará para a esquerda, e para cada valor de X apresentará um diferente deslocamento. Existe um particular valor H da força X que fará com que o ponto E' volte para posição original do ponto E , isto é, que anulará o deslocamento horizontal decorrente da liberação do impedimento ao movimento horizontal do ponto E . Comparando agora as Figuras 8.4 e 8.5 (c), verifica-se que a reação horizontal X_E da estrutura da Figura 8.4, que impede que o ponto E apresente deslocamento horizontal, deve ser igual à força H que impede que o ponto E da estrutura da Figura 8.5 (c) tenha deslocamento horizontal, já que se trata de duas estruturas com a mesma forma e o mesmo carregamento e seus apoios apresentam os mesmos deslocamentos. A diferença entre elas é que, no caso da estrutura da Figura 8.4, a força horizontal é um esforço externo reativo introduzido pelo apoio, e, no caso da estrutura da Figura 8.5 (c), ela é um esforço externo ativo aplicado na extremidade inferior do montante CE . Estas duas forças, entretanto, por produzirem exatamente os mesmos efeitos, são iguais. Em outras palavras, de forma bem informal, pode-se dizer que a estrutura não distingue a situação da Figura 8.4, em que a força horizontal é aplicada pelo apoio, da situação da Figura 8.5 (c), em que a força horizontal é uma força externa ativa aplicada na base do montante. Em ambos os casos, forças horizontais aplicadas no mesmo ponto levam o ponto E a não se deslocar, logo as duas forças são iguais.

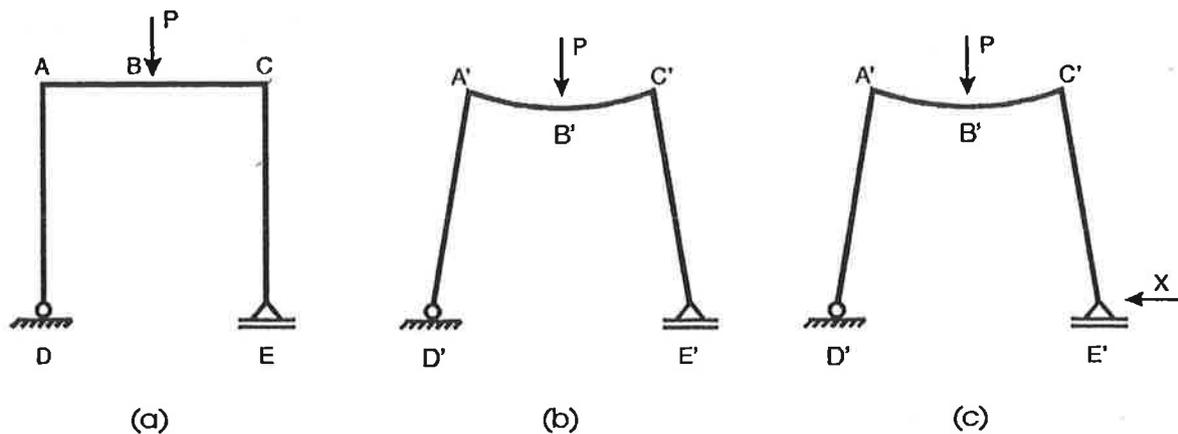


Figura 8.5

A reacção horizontal em E pode então ser obtida transformando a estrutura em isostática e determinando o esforço que deve ser aplicado na estrutura isostática para anular o deslocamento decorrente da liberação da estrutura.

A força H recebe o nome de empuxo, e para sua determinação é necessário levar em conta as características de deformabilidade do material da estrutura e as características geométricas da estrutura. Por estar fora do escopo desta disciplina, a determinação do empuxo H não será aqui apresentada e será feita mais adiante no curso.

Deve-se observar que a existência de um empuxo horizontal orientado para o interior da estrutura já era de se esperar, pois, sob a ação da força P , a tendência da estrutura é de abrir-se, sendo então necessário que os apoios introduzam esforços que impeçam a abertura sua, isto é, forças horizontais orientadas para o seu interior.

Na Figura 8.6 apresentam-se as reacções de apoio da estrutura da Figura 8.1 (b), o seu diagrama de momentos fletores e a sua deformada.

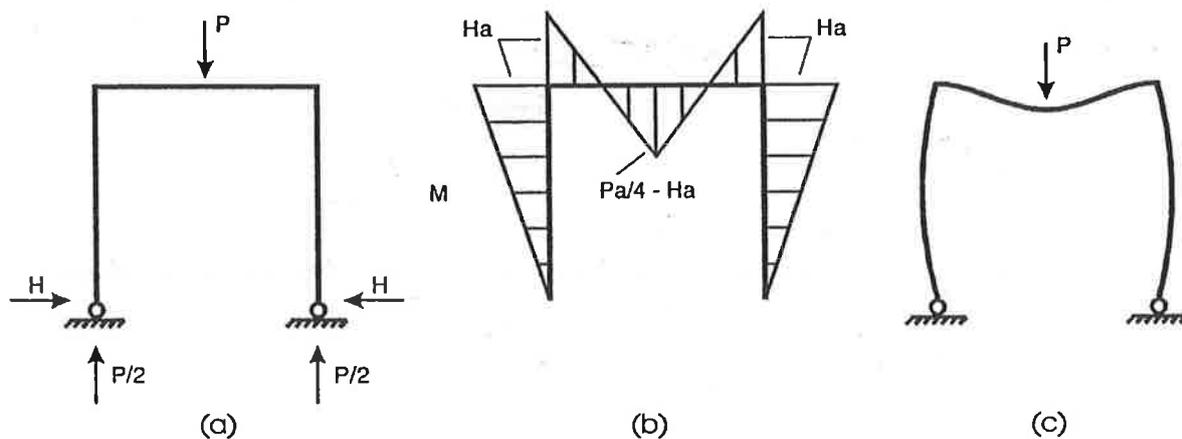


Figura 8.6

A estrutura da Figura 8.1 (a) recebe o nome de viga poligonal e a da Figura 8.1 (b), o nome de pórtico biarticulado. O que caracteriza a estrutura da Figura 8.1 (b) como sendo um pórtico é o fato de os seus apoios não poderem apresentar deslocamento horizontal, o que, como já se observou, leva ao aparecimento dos empuxos horizontais. O apoio direito da viga poligonal não impede o seu deslocamento horizontal, e não surgem reações horizontais na estrutura.

Pórticos biarticulados como o da Figura 8.1 (b), pórticos triarticulados como o da Figura 8.7 (a) e pórticos biengastados como o da Figura 8.7 (b) são muito utilizados como estruturas de galpões.

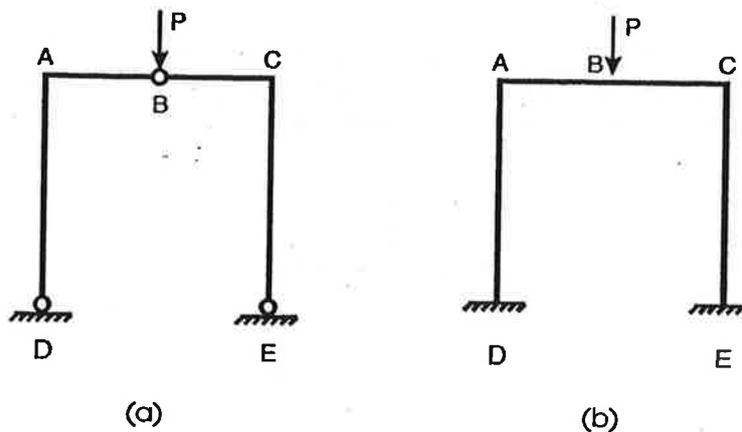


Figura 8.7

O que caracteriza estas três estruturas como pórticos é o fato de seus apoios não poderem apresentar deslocamento horizontal, o que os leva a introduzirem empuxos horizontais nestas três estruturas.

Os pórticos biarticulados, como se verificou, são estruturas uma vez hiperestáticas, e os biengastados são três vezes hiperestáticos, como se pode facilmente constatar. Já os pórticos triarticulados, objetos deste Capítulo, são isostáticos, pois a retirada de qualquer um de seus vínculos leva-os a poderem apresentar movimento de corpo rígido. Caso, por exemplo, a articulação fixa do apoio E do pórtico da Figura 8.7 (a) seja transformada em articulação móvel, este apoio irá se deslocar para a direita, e a estrutura só irá parar quando encostar no chão, como mostrado na Figura 8.8. As duas partes do pórtico mantiveram sua forma original, suas barras tendo permanecido retas: a parte esquerda do pórtico girou em torno do apoio esquerdo, e a parte direita apresentou translação horizontal e rotação em torno do apoio direito, todos movimentos de corpo rígido.

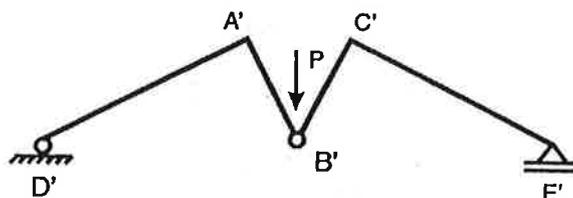


Figura 8.8

Estruturas isostáticas e estruturas hiperestáticas apresentam comportamentos estruturais bastante distintos, que merecem ser examinados com algum detalhe.

Na análise que acaba de ser feita do comportamento do pórtico biarticulado da Figura 8.1 (b) e da técnica apresentada para determinar seu empuxo, imaginou-se que seus apoios não apresentassem deslocamentos horizontais.

No caso de um pórtico real, entretanto, os apoios sempre apresentarão um deslocamento horizontal, mesmo que pequeno, como se pode constatar ao examinar o pórtico da Figura 8.9, apoiado em blocos de estacas. Os apoios introduzem um empuxo no pórtico (Figura 8.9 (a)), que, por sua vez, introduz esforços iguais e contrários nos blocos, como se mostra na Figura 8.9 (b). Sob a ação destes esforços, os apoios sempre irão apresentar um movimento horizontal, já que tanto as estacas como o solo são deformáveis. Observações semelhantes se aplicam às cargas verticais, que levarão os blocos a também apresentar deslocamentos verticais.

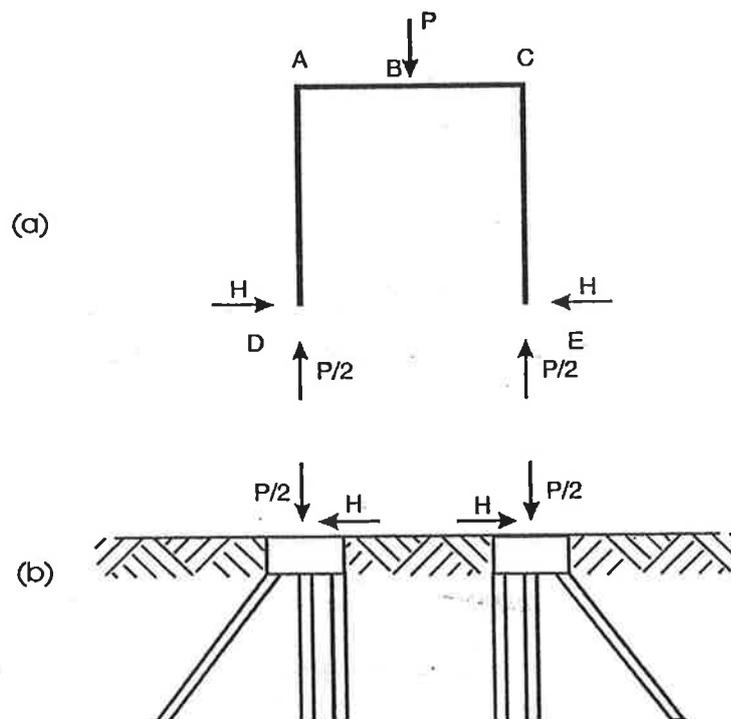


Figura 8.9

Estes deslocamentos dos apoios introduzem esforços na estrutura?

Embora a força vertical P aplicada no pórtico leve os blocos a apresentarem tanto deslocamentos horizontais como verticais, os efeitos destes deslocamentos podem ser estudados separadamente, e, para responder à pergunta que acaba de ser formulada, para simplificar a análise será examinado apenas o efeito dos deslocamentos horizontais sobre o pórtico.

Na Figura 8.10 (a) mostra-se a deformada do pórtico biarticulado da Figura 8.9, decorrente dos deslocamentos horizontais dos seus apoios, tendo-se omitido o desenho dos blocos para tornar a figura mais simples. Observa-se que as barras do pórtico deixaram de ser retas, encurvando-se, o que indica que nelas atuam momentos fletores; o aspecto do diagrama de momentos fletores deste pórtico é apresentado na Figura 8.10 (b).

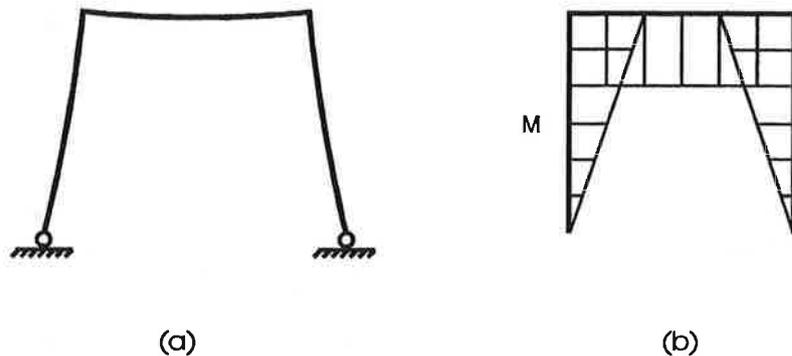


Figura 8.10

Verifica-se, portanto, que os deslocamentos horizontais dos apoios introduziram esforços no pórtico.

Se os esforços decorrentes dos deslocamentos horizontais dos apoios forem muito pequenos em comparação com os esforços obtidos com a hipótese de os apoios serem indeslocáveis, o efeito dos deslocamentos horizontais dos apoios poderá ser desprezado, e a estrutura poderá ser calculada supondo-se os apoios indeslocáveis, como se procedeu ao determinar o empuxo H por meio da estrutura isostática da Figura 8.5. Se os esforços decorrentes dos deslocamentos horizontais dos apoios forem grandes, eles terão que ser levados em conta no projeto da estrutura.

Como se mencionou há pouco, estruturas isostáticas e hiperestáticas apresentam comportamentos bastante distintos, o que poderá ser constatado ao examinar-se agora o efeito que os deslocamentos horizontais dos apoios têm sobre o pórtico triarticulado da Figura 8.7 (a).

Na Figura 8.11 (a), mostra-se o pórtico triarticulado antes dos deslocamentos dos apoios, e, na Figura 8.11 (b), depois destes deslocamentos.

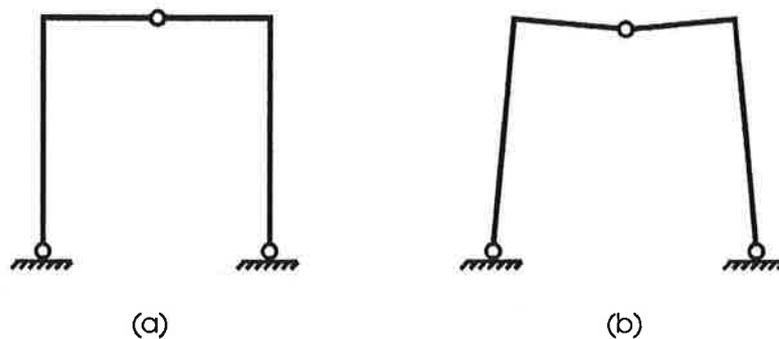


Figura 8.11

Verifica-se agora que todas as barras do pórtico triarticulado permaneceram retas, o que mostra que nelas não surgiram momentos fletores. A forma da estrutura, entretanto, modificou-se, em decorrência dos movimentos de corpo rígido das duas metades do pórtico, que apresentaram uma translação horizontal e uma rotação em torno dos seus apoios.

Os comportamentos destes dois pórticos face aos deslocamentos dos apoios são muito distintos: na estrutura biarticulada eles introduziram esforços e na estrutura isostática não introduziram esforços.

Quando, então, os deslocamentos dos apoios introduzem esforços na estrutura? A resposta a esta pergunta é simples: quando a estrutura opõe resistência à mudança de forma que eles introduzem. No caso do pórtico triarticulado, os deslocamentos dos apoios levam os montantes a inclinar-se, e a estrutura não oferece nenhuma resistência a esta mudança de forma, uma vez que as suas duas metades podem girar livremente em torno da articulação superior B. Já no caso do pórtico biarticulado, a trave horizontal oferece resistência à inclinação dos montantes, tendo que ser fletida para que eles possam inclinar-se, o que leva ao aparecimento dos momentos fletores na estrutura.

Esta diferença de comportamento entre as estruturas isostáticas e hiperestáticas também se manifesta em outras duas situações: quando ocorrem variações de temperatura e quando se tem defeitos de montagem. Em ambos os casos, as diferenças de comportamento entre as estruturas isostáticas e hiperestáticas decorrem do fato que acaba de ser analisado: a resistência oferecida pela estrutura à mudança de forma nela introduzida por estas ações.

Considere-se o pórtico triarticulado da Figura 8.12 (a). Um aumento uniforme da temperatura de sua trave superior leva-o a girar para fora em torno dos apoios, e o pórtico fica com a forma indicada na Figura 8.12 (b); como ele não oferece nenhuma resistência a este movimento, nele não surgem esforços e suas barras permanecem retas. Uma diminuição uniforme da temperatura da trave superior leva-o a girar para dentro em torno dos apoios, ficando com a forma apresentada na Figura 8.12 (c); novamente, não são introduzidos esforços na estrutura.

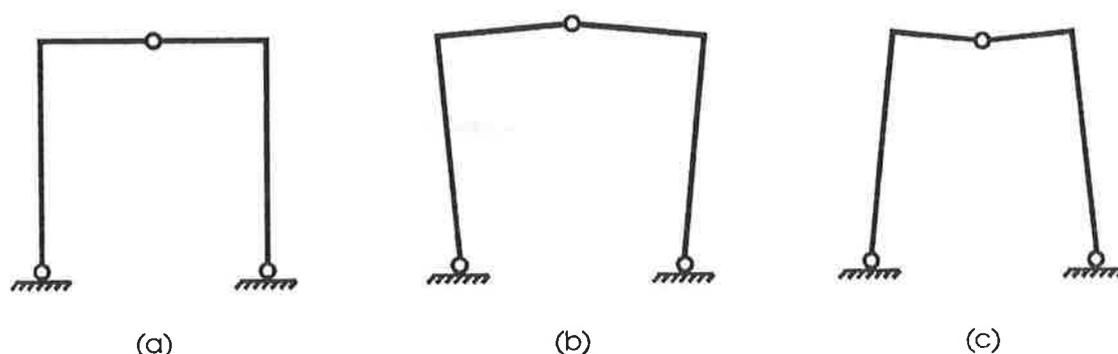


Figura 8.12

Na Figura 8.13 (b) mostra-se a deformação do pórtico biarticulado da Figura 8.13 (a) produzida por um aumento uniforme da temperatura da trave superior. Como a estrutura opõe resistência à mudança de forma decorrente da variação de temperatura, surgem momentos fletores em suas barras, que se encurvam. Na Figura 8.13 (c), apresenta-se o aspecto do diagrama de momentos fletores deste pórtico biarticulado.

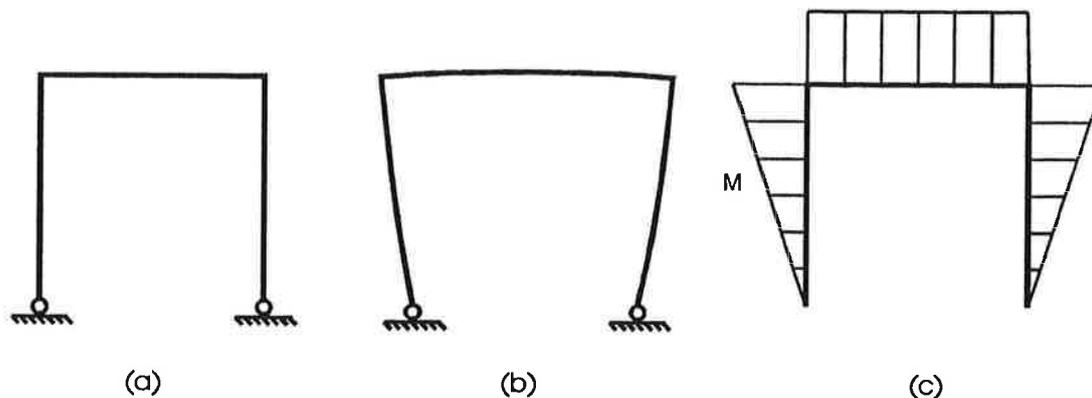


Figura 8.13

Dá-se o nome de defeitos de montagem aos efeitos decorrentes do fato de os diversos elementos que compõem a estrutura não terem ficado em sua fabricação exatamente com as dimensões previstas no projeto.

Imagine-se que os pórticos triarticulado e biarticulado que estão sendo examinados sejam metálicos, construídos em uma fábrica e levados à obra para serem montados. Quase que certamente as suas dimensões não serão as mesmas de seu projeto. Suponha-se, por exemplo, que a trave superior de ambos tenha ficado maior que o previsto. No caso do pórtico triarticulado, para unir suas duas partes será necessário girá-las em torno de suas bases e uni-las por meio do pino da articulação superior em B. O pórtico ficará então com um aspecto semelhante ao do pórtico da Figura 8.12 (b). A montagem não introduzirá esforços na estrutura, e suas barras permanecerão retas.

No caso do pórtico biarticulado, a situação será outra. Na Figura 8.14, mostra-se o pórtico com a base C do montante esquerdo já ligada ao apoio; como sua trave superior ficou mais longa que o previsto, sua base D não ficará mais exatamente sobre o apoio D*, e, para fixá-lo à base, será necessário aplicar uma força horizontal que leve a sua extremidade inferior D a coincidir com o apoio D*, e aí então colocar o pino. Para montar o pórtico é necessário deformá-lo, e, uma vez montado, ele terá aspecto semelhante ao do pórtico da Figura 8.13 (b). Suas barras ficarão encurvadas, denotando a presença de momentos fletores.

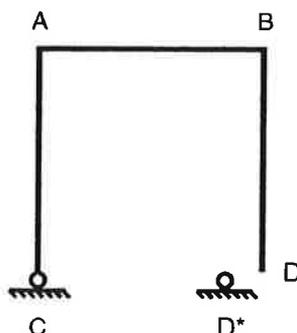


Figura 8.14

Como se acaba de verificar, deslocamentos de apoio, variações de temperatura e defeitos de montagem levam ao aparecimento de esforços na estrutura quando esta resiste às mudanças de forma produzidas por estas ações. Quando a estrutura não opõe resistência às mudanças de forma produzidas por estas ações, não surgem esforços na estrutura.

Uma construção da cidade de São Paulo que é extremamente conhecida, mas que poucos sabem ter sua estrutura principal formada por pórticos triarticulados é o Viaduto do Chá, mostrado na Figura 8.15 em fotografia tirada na época de sua inauguração.

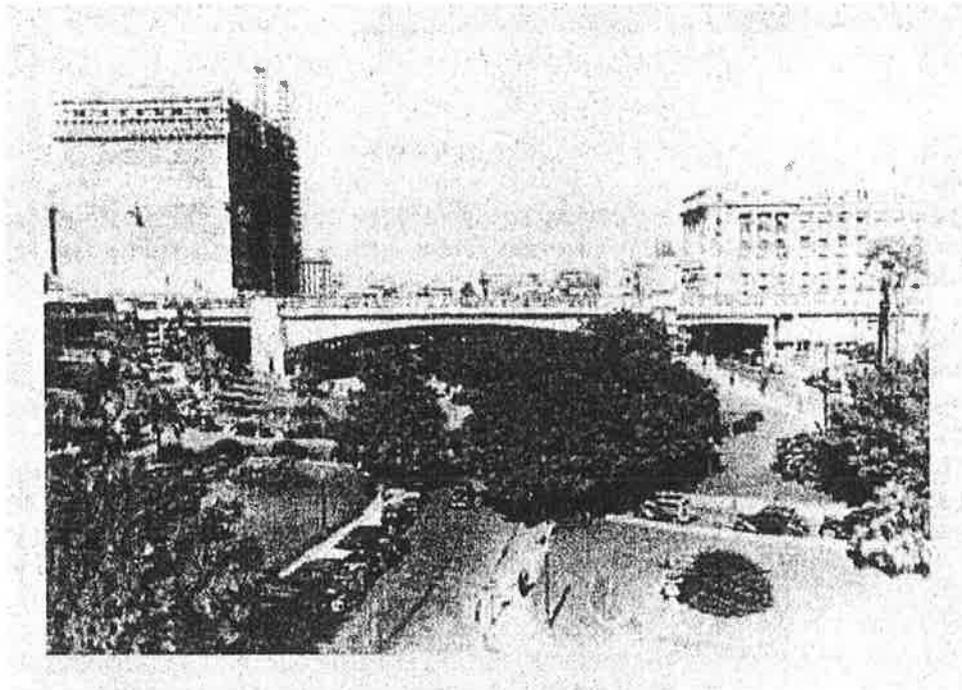


Figura 8.15 (1)

Em 1935, foi aberto um concurso para o projeto do novo viaduto sobre o vale do Anhangabaú, que deveria substituir o viaduto metálico que, desde 1892, fazia a ligação do centro velho ao centro novo da cidade, e que na década de 1930 já não comportava mais o tráfego do centro da cidade, que havia aumentado muito e estava a exigir uma passagem mais larga sobre o vale. Venceu o concurso o projeto do arquiteto Elisiário da Cunha Bahiana e do engenheiro Gustavo Andréas Gam, e o novo Viaduto do Chá, construído pela Companhia Construtora Nacional, foi inaugurado no dia 18 de abril de 1938.

O memorial descritivo do Viaduto do Chá apresentado pela Companhia Construtora Nacional foi publicado no número de maio de 1936 da Revista de Engenharia Mackenzie, e nele são discutidas as razões que levaram à escolha do sistema estrutural do viaduto (3).

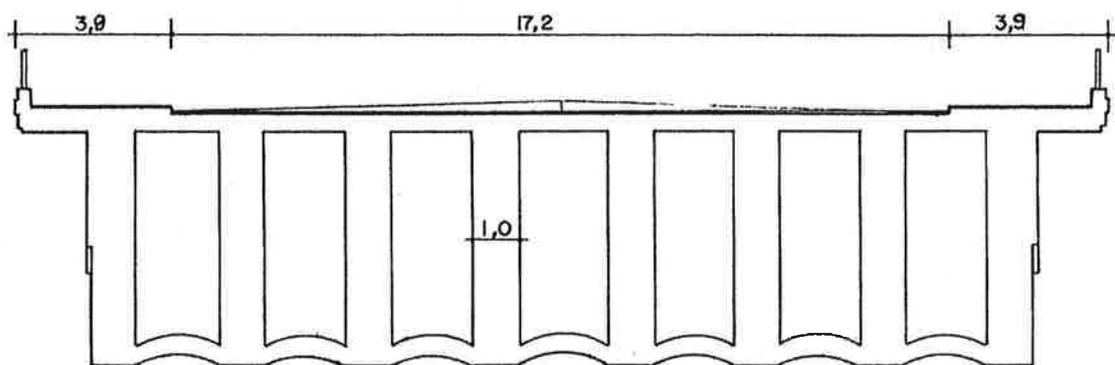
A primeira frase do memorial explica que a natureza do subsolo impunha a escolha de um sistema isostático para o viaduto. Como analisou-se há pouco, os deslocamentos dos apoios de uma estrutura isostática não introduzem esforços na estrutura, ao passo que introduzem esforços nas estruturas hiperestáticas. Em uma região com um solo muito deformável, o emprego de estruturas isostáticas evita os esforços decorrentes de grandes

deslocamentos dos apoios, e esta foi a razão da escolha de um sistema isostático para a estrutura do Viaduto do Chá.

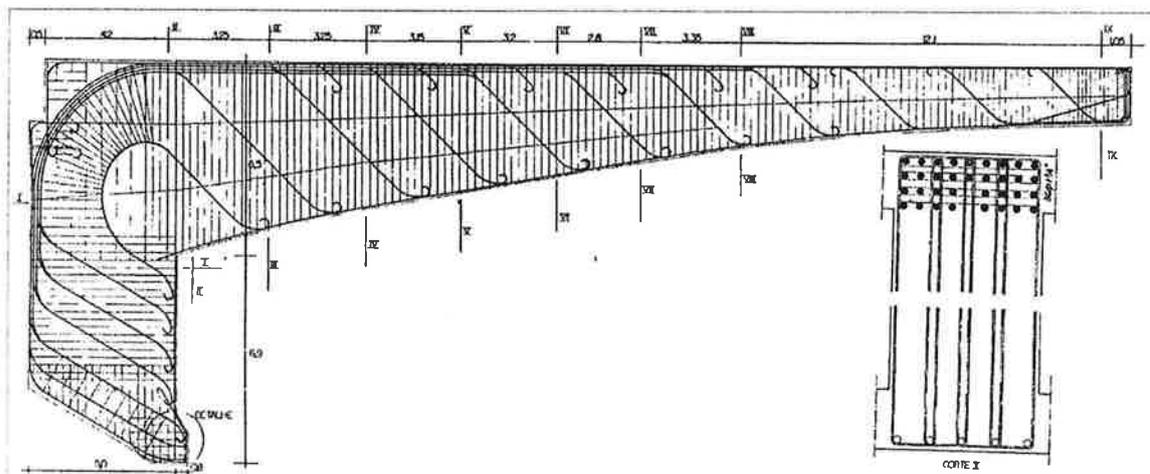
A opção por um pórtico triarticulado deve-se ao grande vão de 66 m que deveria ser vencido, ao fato de que um pórtico levaria a empuxos menores que um arco triarticulado – que, como se verá no próximo capítulo desta apostila, também é uma estrutura isostática – e por permitir o gabarito desejado junto aos apoios.

Verifica-se, portanto, que a escolha do pórtico triarticulado como sistema estrutural do Viaduto do Chá decorreu principalmente do fato de ser uma estrutura em que os deslocamentos dos apoios não introduzem esforços.

A estrutura principal do Viaduto do Chá é assim constituída por oito pórticos triarticulados paralelos que dão apoio ao tabuleiro do viaduto, sendo inferiormente ligados por uma laje que impedem que sejam vistos externamente. Na Figura 8.16, apresenta-se a seção transversal do Viaduto do Chá (Figura 8.16 (a)) e o esquema das armaduras de uma das metades de um dos pórticos triarticulados (Figura 8.16 (b)), ambos reproduzidos da obra de Vasconcelos (4).



(a)



(b)

Figura 8.16

Uma construção histórica notável que possuía pórticos triarticulados como elementos estruturais principais era a "Galerie des machines" (Galeria das máquinas), mostrada na Figura 8.17.

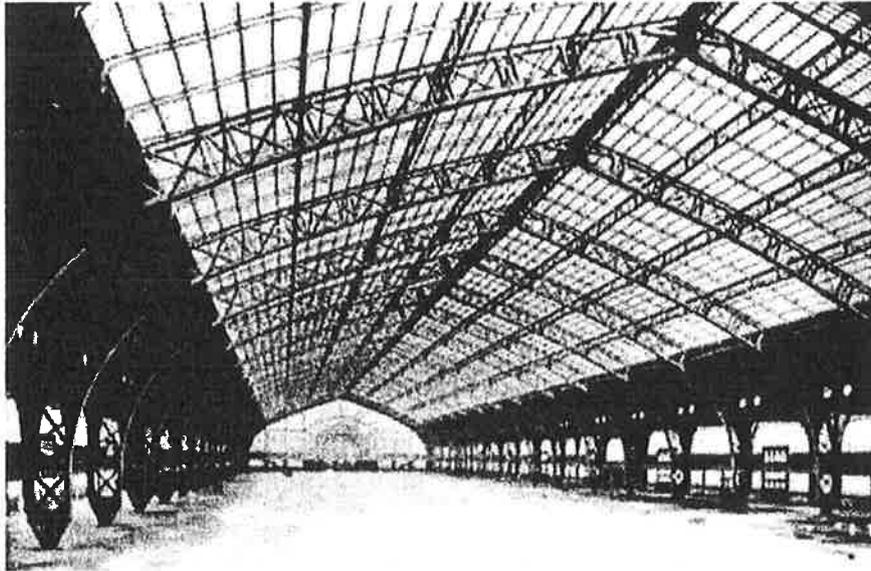


Figura 8.17 (5)

Construída para abrigar a exposição de máquinas da Exposição Universal de 1889, realizada em Paris, era, depois da Torre Eiffel, a segunda maior atração da feira. Projetada pelo arquiteto Ferdinand Dutert e pelo engenheiro Victor Contamin, que a calculou, a "Galerie des machines" tinha 420 m de comprimento, 115 m de largura e 43,5 m de altura, abrigando a maior área até então já coberta por um edifício.

Sua estrutura de aço era constituída por uma série de pórticos triarticulados com 115 m de vão, e, também no caso desta construção, os pórticos triarticulados foram adotados por razões bem objetivas: para facilitar o cálculo da estrutura e facilitar sua montagem (6).

Comentou-se no início deste capítulo que, sendo os pórticos triarticulados isostáticos, suas reações de apoio – e os esforços solicitantes em suas barras – podem ser calculados apenas com o emprego das equações de equilíbrio da estática. No caso das estruturas hiperestáticas, para a determinação das reações de apoio – e dos esforços solicitantes –, além das equações de equilíbrio da estática, são necessárias equações adicionais, ligadas à deformação da estrutura, como se mostrou ao se discutir a obtenção das reações de apoio do pórtico biarticulado da Figura 8.4.

Uma das razões que levaram os engenheiros franceses e alemães a passarem a utilizar estruturas triarticuladas – pórticos e arcos – em meados do século XIX foi exatamente o fato de que eram capazes de calcular os esforços que atuam nestas estruturas, pois o cálculo dos pórticos e arcos biarticulados ainda não estava totalmente dominado (7). O emprego de estruturas triarticuladas conferia assim muito maior segurança ao projeto de estruturas de grande porte; é exatamente o que ocorreu no caso da "Galerie des machines", a cobertura mais extensa até então construída e que até hoje é uma das maiores coberturas já feitas.

Na Figura 8.18, mostra-se o detalhe do apoio de um dos pórticos triarticulados da "Galerie des machines", e chama-se a atenção para três pessoas que aparecem nesta fotografia, permitindo assim ter-se uma idéia das dimensões monumentais desta estrutura.

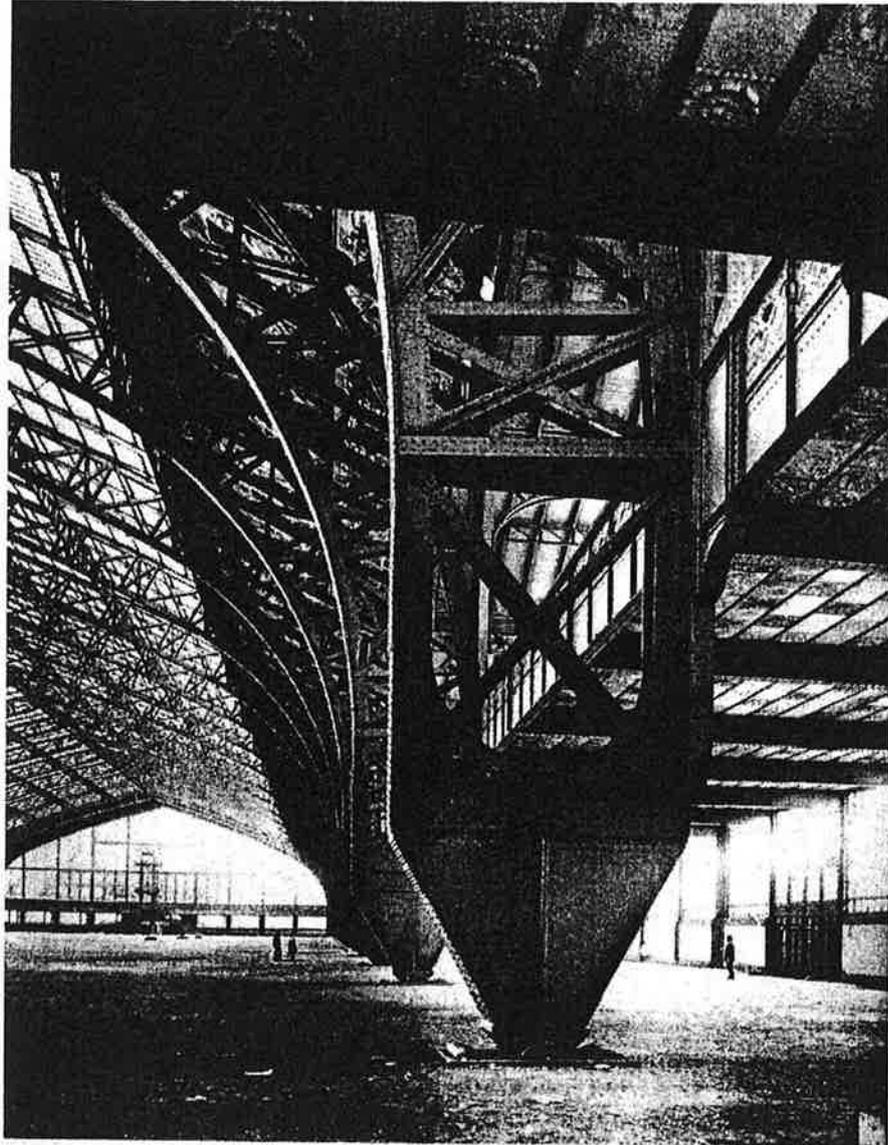


Figura 8.18 (8)

A "Galerie des machines" foi utilizada também na Exposição Universal de 1900, e, posteriormente, até ter sido desmontada em 1909, foi empregada para a realização de competições de hipismo e como hangar para dirigíveis. Na Figura 8.19, mostra-se a "Galerie des machines" sendo usada para a realização de uma exposição de animais, e, na Figura 8.20, como hangar de um dirigível; esta última fotografia revela mais uma vez o enorme tamanho que tinha esta construção.

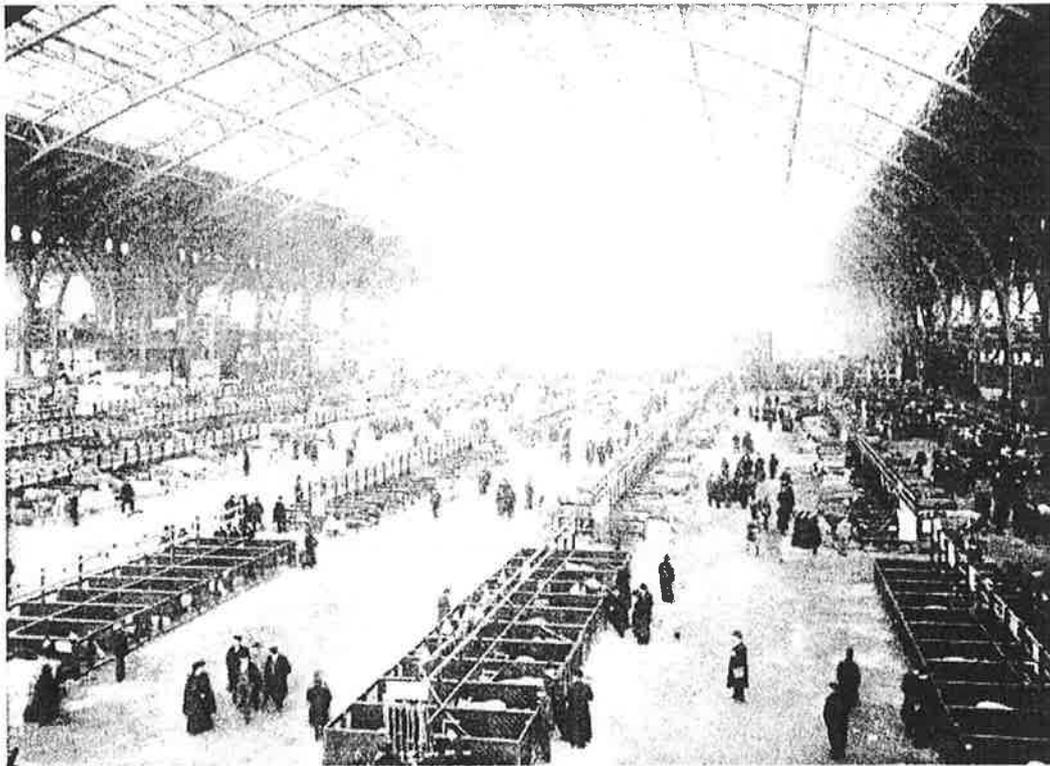
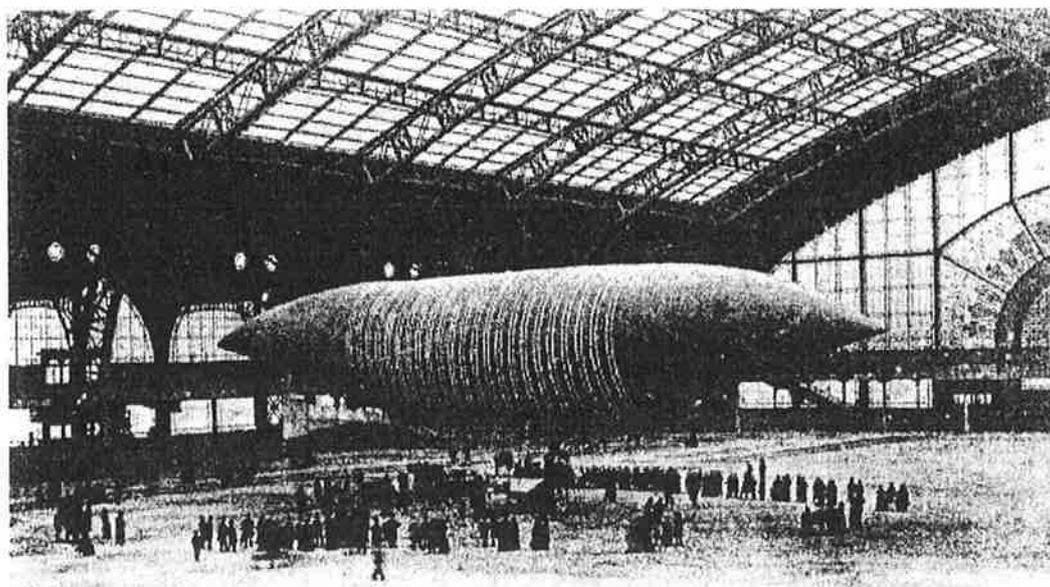


Figura 8.19 (9)



1907. PARIS — Le Dirigible Lebaudy "Le Jaune", dans la Galerie des Machines.
 Dirigible construit par le Comte de Lebaudy, commandeur de la Légion d'honneur.
 Longueur 35 mètres, Moteur 25 hp, Mercedes — Révélait l'existence de la ligne de Moisson à Paris, 35 km en 1 h 14 min.

Figura 8.20 (10)

8.2 Resolução dos pórticos triarticulados

Feita esta discussão introdutória sobre o comportamento estrutural dos pórticos triarticulados, será feita agora a sua resolução, isto é, a determinação dos esforços solicitantes que neles atuam.

Exemplo 8.1

Traçar os diagramas de esforços solicitantes do pórtico triarticulado da Figura 8.21.

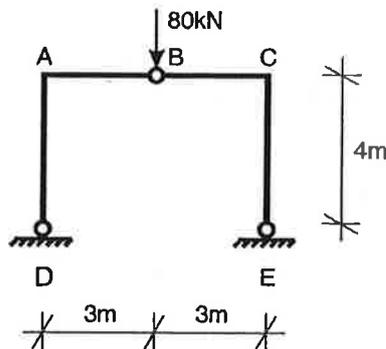


Figura 8.21

Para obter os esforços solicitantes deste pórtico triarticulado, vai-se proceder exatamente como no caso das estruturas analisadas no Capítulo 4: os esforços solicitantes serão determinados por meio do teorema do corte.

Para empregá-lo, é necessário conhecer as reações de apoio do pórtico, que serão agora determinadas. Na Figura 8.22, estão indicadas as reações que se deseja obter.

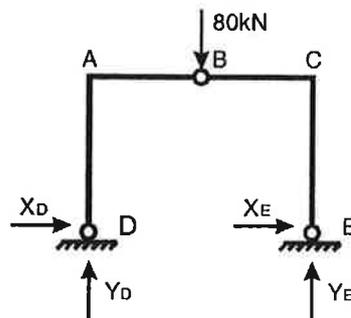


Figura 8.22

Sob a ação do carregamento externo ativo - a força de 80 kN aplicada em B - e dos esforços externos reativos, o pórtico estará em equilíbrio, logo as equações de equilíbrio da estática devem ser satisfeitas:

$$\sum X = 0 \quad X_D + X_E = 0 \quad (8.4)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_D - 80 + Y_E = 0 \quad (8.5)$$

$$\sum M_D = 0 \quad -80 \cdot 3 + Y_E \cdot 6 = 0 \Rightarrow Y_E = 40 \text{ kN} \quad (8.6)$$

Da equação (8.5), obtém-se o valor de Y_D :

$$Y_D = 80 - Y_E = 40 \text{ kN} \quad (8.7)$$

Embora as equações de equilíbrio tenham permitido obter Y_D e Y_E , elas não são suficientes para a determinação das reações horizontais, já que se tem duas incógnitas a encontrar - X_D e X_E - e apenas uma das equações de equilíbrio ainda não foi usada, a equação (8.4), da qual se conclui apenas que as duas reações horizontais devem ser iguais e contrárias, isto é, que

$$X_D = -X_E \quad (8.8)$$

Como a estrutura é isostática, deve ser possível, entretanto, a obtenção de todas as reações de apoio por meio de equações de equilíbrio da estática.

Poder-se-ia imaginar que, impondo-se o equilíbrio dos momentos de todos os esforços externos que atuam no pórtico em relação a um ponto diferente do que já foi considerado - o ponto D - seria possível obter uma das reações horizontais. Este procedimento, entretanto, não iria dar certo, pois, sendo a estrutura plana, o número máximo de equações de equilíbrio global da estrutura linearmente independentes é três, e esta quarta equação de equilíbrio seria uma combinação linear das três equações que já foram utilizadas, não fornecendo nenhuma informação adicional sobre as reações de apoio do pórtico.

Para comprovar esta afirmação, considere-se a equação de equilíbrio dos momentos dos esforços externos que atuam no pórtico em relação ao ponto A:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad X_D \cdot 4 - 80 \cdot 3 + X_E \cdot 4 + Y_E \cdot 6 = 0 \\ \Rightarrow X_D \cdot 4 - 80 \cdot 3 + X_E \cdot 4 + 40 \cdot 6 = 0 \Rightarrow X_D + X_E = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Observa-se que esta equação de equilíbrio de momentos leva exatamente à equação (8.4) de que já se dispunha, não levando então a nenhuma das reações de apoio horizontais.

O exame do pórtico que está sendo resolvido mostra que há nele um elemento que ainda não foi utilizado, e que é fundamental não apenas para a caracterização do comportamento estrutural do pórtico, mas também para a determinação dos empuxos: a articulação interna existente em B.

Como já se comentou, esta articulação permite que uma parte do pórtico gire em relação à outra, possibilitando que o ângulo de 180° entre as barras AB e BC se modifique. Como já se viu anteriormente, rotações são impedidas por momentos; o fato de a articulação em B não opor nenhum impedimento à rotação de uma parte da estrutura em relação à outra mostra então que em B não há a transferência de momento de uma parte à outra do pórtico, ou seja, que neste ponto do pórtico o momento fletor é nulo.

O fato de o momento fletor na articulação interna B ser nulo leva à quarta equação de equilíbrio, que não apenas possibilita a determinação do empuxo do pórtico como também caracteriza a diferença existente entre o pórtico triarticulado da Figura 8.21 e o pórtico biarticulado que se obteria se a articulação em B fosse suprimida. As equações de equilíbrio global destes dois pórticos seriam exatamente as mesmas, as equações (8.4) a (8.6) (logo as reações verticais do pórtico biarticulado também seriam iguais a $\frac{P}{2}$, como a simetria já faria supor), e o que distinguiria o pórtico triarticulado do biarticulado seria justamente a presença da articulação em B, que, do ponto de vista de equilíbrio, se traduziria pelo fato de o momento fletor ser nulo neste ponto.

A quarta equação de equilíbrio necessária para a determinação das reações de apoio do pórtico da Figura 8.21 é então:

$$M_{\text{fletor em B}} = 0 \quad -X_D \cdot 4 + Y_D \cdot 3 = 0 \Rightarrow X_D = \frac{3}{4} Y_D = \frac{3}{4} 40 = 30 \text{ kN} \quad (8.10)$$

Encontrada a reação X_D , X_E é obtida por meio da expressão (8.8), obtendo-se $X_E = -30 \text{ kN}$.

Na Figura 8.23, mostram-se todos os esforços externos que atuam no pórtico: a força externa ativa aplicada em B, as reações verticais e os empuxos horizontais que acabam de ser determinados.

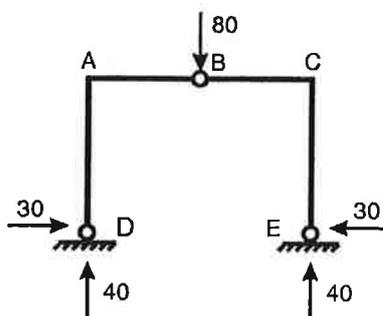


Figura 8.23

Como já se comentou, a equação (8.10) é uma equação de equilíbrio, não uma equação de equilíbrio global do pórtico como as equações (8.4) a (8.6) e como a equação (8.9), mas uma equação de equilíbrio de uma de suas partes, a sua metade direita.

Como o pórtico triarticulado da Figura 8.21 é uma estrutura isostática, era esperado que as suas reações de apoio pudessem ser determinadas apenas com o uso de equações de equilíbrio da estática, e isto realmente foi possível, como se acaba de comprovar.

É interessante comentar que em D há um empuxo horizontal e uma reação de apoio vertical, cuja resultante R tem a sua linha de ação passando pela articulação interna em B, como mostrado na Figura 8.24. Isto já era de se esperar, pois, sendo estas duas forças os únicos esforços externos aplicados à esquerda de B e sendo o momento fletor nulo em B,

o momento destas forças em relação a B deve ser nulo; como a resultante R destas forças não é nula, o seu momento em relação a B só será nulo se a linha de ação da resultante passar por este ponto, o que realmente ocorre. Observação análoga a esta se aplica também ao apoio E, e a Figura 8.24 mostra que a linha de ação da resultante R* das reações de apoio em E também passa por B.

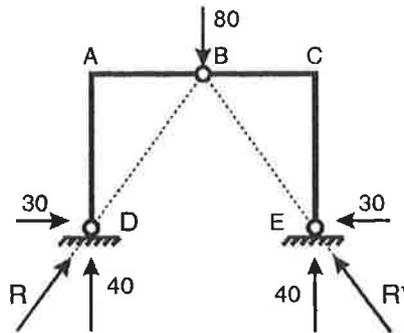


Figura 8.24

Na equação (8.10), o momento fletor em B foi determinado por meio do teorema do corte, reduzindo-se na seção B os esforços externos aplicados à sua esquerda. Alternativamente, o momento fletor em B poderia ter sido determinado transferindo para esta seção todos os esforços externos aplicados à sua direita. Neste caso, em lugar de obter-se a reação horizontal X_D , teria sido determinada a reação horizontal X_E , e X_D seria obtida por meio da expressão (8.8).

Determinadas as reações de apoio do pórtico, os seus esforços solicitantes podem ser obtidos por meio do teorema do corte; por tratar-se de matéria já vista com grande detalhe no Capítulo 4, a determinação dos esforços solicitantes do pórtico não será aqui explicitada, e os diagramas de esforços solicitantes deste pórtico são então diretamente apresentados na Figura 8.25.

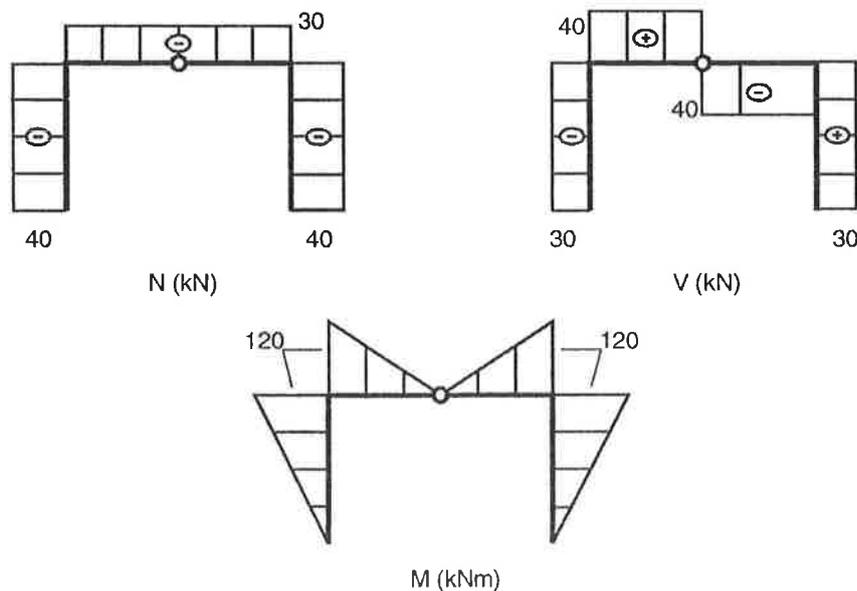


Figura 8.25

A partir do diagrama de momentos fletores pode-se traçar a deformada do pórtico, lembrando que as barras encurvam-se com a concavidade voltada para o lado comprimido. A deformada do pórtico é mostrada na Figura 8.26.

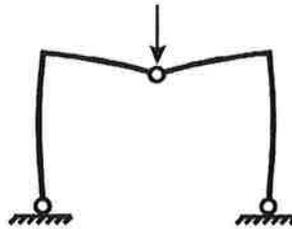


Figura 8.26

A deformada do pórtico revela muito claramente o que se havia afirmado anteriormente: a articulação interna em B permite que uma parte do pórtico gire em relação à outra, o que leva a uma alteração do ângulo de 180° que as barras AB e BC apresentavam entre si na configuração indeformada.

Verifica-se também que, sob a ação da força vertical, o pórtico tende a abrir-se, e os empuxos impedem que isto ocorra, empurrando-o para dentro, desta forma tracionando as fibras externas dos montantes, que encurvam-se com concavidade para o interior do pórtico. As duas partes da trave superior ficam tracionadas em sua parte superior, e se encurvam também com concavidade para o interior do pórtico.



Passa-se agora à resolução de um segundo exemplo.

Exemplo 8.2

Traçar os diagramas de esforços solicitantes do pórtico triarticulado da Figura 8.27 e desenhar a sua deformada.

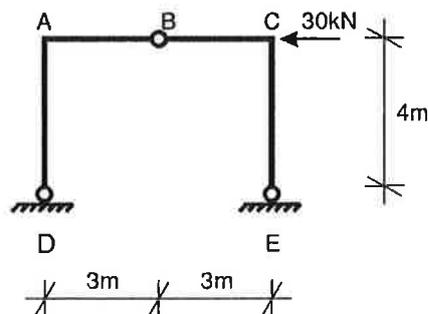


Figura 8.27

Trata-se, na verdade, do pórtico examinado no exemplo anterior, mas submetido a um outro carregamento.

Na Figura 8.28, indicam-se as reações de apoio do pórtico que se deseja determinar, e que, novamente, serão obtidas mediante quatro equações de equilíbrio: as três

equações de equilíbrio global da estrutura e a equação correspondente ao momento fletor nulo na articulação interna:

$$\sum X = 0 \quad X_D - 30 + X_E = 0 \quad (8.11)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_D + Y_E = 0 \quad (8.12)$$

$$\sum M_D = 0 \quad 30 \cdot 4 + Y_E \cdot 6 = 0 \quad (8.13)$$

$$M_{\text{fletor em B}} = 0 \quad -X_D \cdot 4 + Y_D \cdot 3 = 0 \quad (8.14)$$

A resolução deste sistema de equações leva às reações de apoio do pórtico:

$$X_D = 15 \text{ kN} \quad (8.15)$$

$$Y_D = 20 \text{ kN} \quad (8.16)$$

$$X_E = 15 \text{ kN} \quad (8.17)$$

$$Y_E = -20 \text{ kN} \quad (8.18)$$

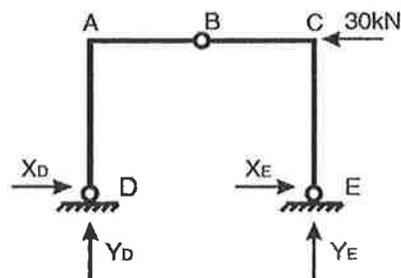


Figura 8.28

Na Figura 8.29, mostra-se o pórtico com todos os esforços externos que nele atuam.

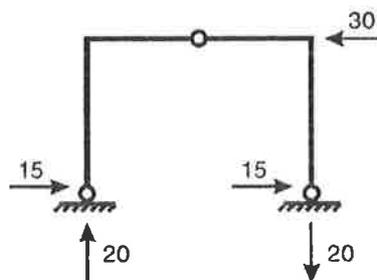


Figura 8.29

As reações de apoio do pórtico, que acabam de ser obtidas mediante a resolução do sistema das equações de equilíbrio (8.11) a (8.14), alternativamente poderiam ter sido obtidas analisando-se o equilíbrio do pórtico de uma forma mais física e menos analítica:

A força horizontal aplicada no pórtico tende a girá-lo no sentido anti-horário, e a tendência do ponto D é então a de deslocar-se para baixo, e a do ponto E, de deslocar-se para cima.

Para impedir que o ponto D desça, a reação vertical em D será para cima, e, para impedir que o ponto E suba, a reação vertical em E será para baixo (Figura 8.30 (a)).

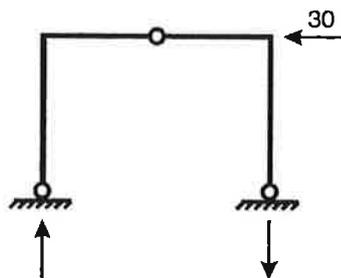
Como no pórtico a única força externa ativa é horizontal, as reações verticais serão iguais em intensidade e de sentidos contrários, isto é, constituirão um binário.

O binário formado pelas reações verticais é que irá se opor à tendência de rotação impressa pela força horizontal aplicada no pórtico. Verifica-se, pelos sentidos já determinados das reações verticais que este binário realmente introduz uma tendência de girar o pórtico no sentido horário, contrária portanto à produzida pela força horizontal.

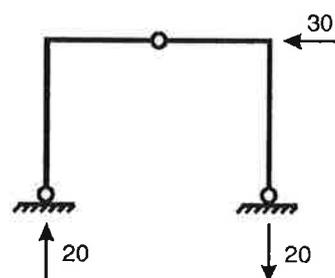
O momento da força horizontal em relação à base do pórtico é de 120 kNm, logo o binário formado pelas reações de apoio verticais deverá ter este mesmo momento para impedir a rotação do pórtico; como o braço do binário é de 6 m, as reações verticais serão iguais a 20 kN (Figura 8.30 (b)).

Determinadas as reações verticais, como o momento fletor em B é nulo e à esquerda desta articulação interna os únicos esforços externos são as reações de apoio em D, a linha de ação desta reação deve passar por B, o que permite a obtenção da reação horizontal em D, de 15 kN, orientada para a direita (Figura 8.30 (c)).

Pelo equilíbrio das forças horizontais, obtém-se a reação horizontal em E, também de 15 kN e também orientada para a direita (Figura 8.30 (d)).



(a)



(b)

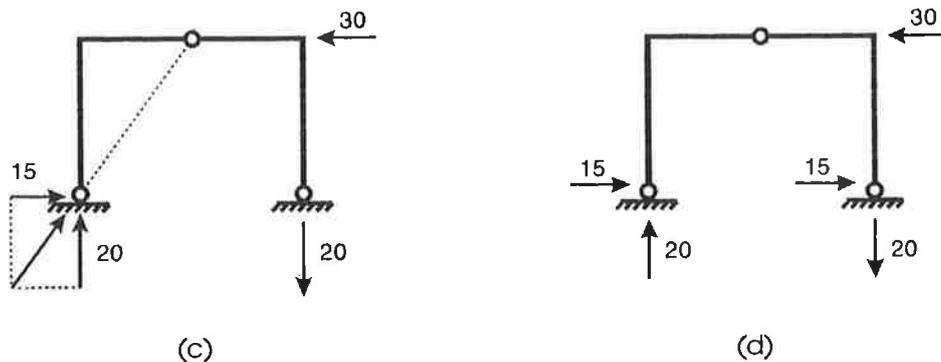


Figura 8.30

Esta forma de determinar as reações de apoio pode à primeira vista parecer mais complicada que a analítica, feita por meio da resolução do sistema de equações de equilíbrio, mas, com a prática de fazer este tipo de análise, ficará mais fácil ao leitor empregar resoluções deste tipo. Ela tem a enorme vantagem de ser diretamente ligada ao comportamento físico da estrutura, portanto muito mais transparente do ponto de vista de funcionamento estrutural do pórtico que a resolução analítica. Sugere-se ao leitor que, ao analisar estruturas simples, procure empregar este procedimento de resolução e por meio dele compreender o comportamento da estrutura que está sendo examinada.

Um outro hábito que sugere-se ao leitor que procure cultivar é o de, antes de partir para a resolução numérica, ou seja, quantitativa da estrutura, procurar analisá-la do ponto de vista apenas qualitativo, tentando perceber como ela irá comportar-se. Feita em seguida a resolução numérica da estrutura, o leitor deverá comparar os resultados encontrados com aqueles que a análise qualitativa havia sugerido. Quando houver discrepâncias entre as duas, o leitor deverá procurar descobrir as razões destas diferenças, procurando sempre fazê-lo tentando entender o comportamento estrutural.

Procedendo desta forma, além de a análise estrutural tornar-se muito mais interessante, é com este tipo de abordagem que irá realmente compreender como as estruturas funcionam.

Vale a pena lembrar que as estruturas só passaram a ser calculadas numericamente a partir do século XVIII -- o cálculo numérico mais antigo registrado é o do reforço da cúpula da Basílica de São Pedro, no Vaticano, realizado por Giovanni Poleni, em 1742 --, e que grande parte das construções mais notáveis da humanidade, das pirâmides egípcias às pontes romanas, das catedrais góticas às grandes igrejas do Renascimento, foram feitas sem cálculo, com base no conhecimento qualitativo das estruturas.

Hoje, dispõe-se de modelos matemáticos extremamente precisos e poderosos para a análise das estruturas, mas o seu real entendimento só se dará quando seu comportamento qualitativo for compreendido.

Obtidas as reações de apoio do pórtico, o teorema do corte pode ser usado para determinar os seus esforços solicitantes, cujos diagramas são mostrados na Figura 8.31.

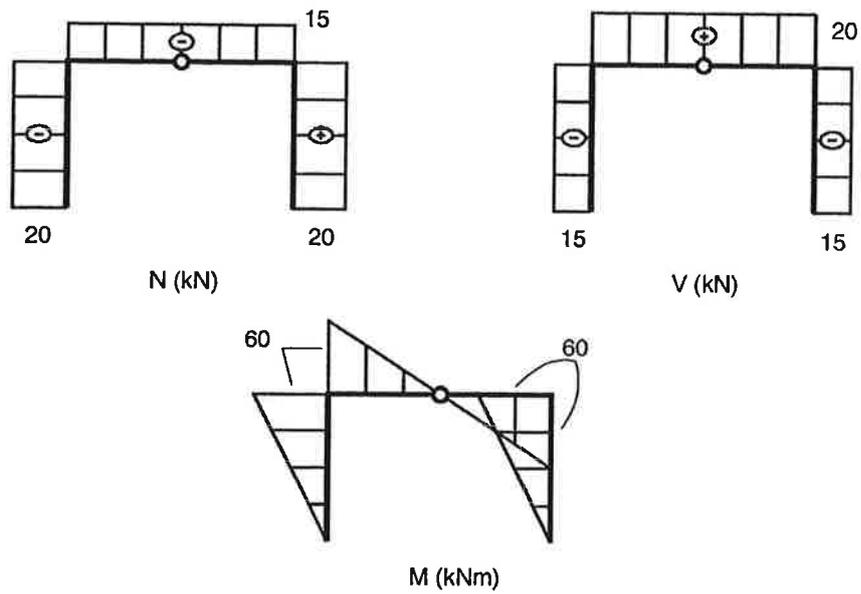


Figura 8.31

A partir do diagrama de momentos fletores, pode-se esboçar a deformada do pórtico, apresentada na Figura 8.32.

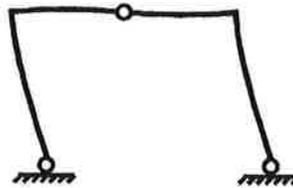


Figura 8.32

Como era de se esperar, a força horizontal aplicada em C desloca o pórtico para a esquerda, o que leva a sua metade esquerda a encurvar-se para o interior do pórtico e a sua metade direita, para o exterior do pórtico.

Exemplo 8.3

Traçar os diagramas de esforços solicitantes do pórtico triarticulado da Figura 8.33 e desenhar a sua deformada.

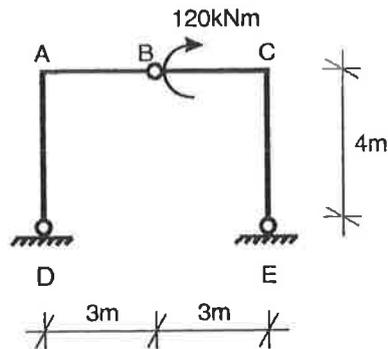


Figura 8.33

Este pórtico, que é novamente o pórtico dos exemplos anteriores, mas com um diferente carregamento, tem como esforço externo ativo um momento aplicado em uma seção imediatamente à direita da articulação interna em B.

Este modelo matemático poderla ser, por exemplo, o modelo de um pórtico triarticulado real cujo nó B é mostrado de forma ampliada na Figura 8.34.

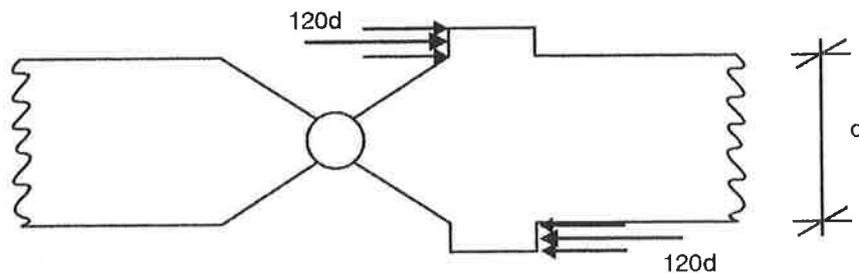


Figura 8.34

Para a determinação das reações de apoio deste pórtico, podem ser usadas as três equações de equilíbrio global da estrutura e a equação de momento fletor nulo em B. É importantíssimo salientar aqui que o momento fletor na articulação sempre será nulo, mesmo que em uma seção imediatamente à sua direita haja um momento externo aplicado. Isto, porque a articulação sempre irá permitir a rotação de uma parte da estrutura em relação à outra, não opondo resistência a este movimento, não podendo então transferir momento de uma parte à outra do pórtico. Isto fica muito claro ao observar-se a Figura 8.34, em que foi representado o nó B de um possível pórtico real representado pelo pórtico da Figura 8.33.

As reações do pórtico estão apresentadas na Figura 8.35, e sugere-se que, como exercício, o leitor procure obtê-las por meio do procedimento baseado no comportamento físico da estrutura discutido no exemplo anterior. Nesta análise, o leitor deverá perceber, por exemplo, que, sob a ação do momento externo aplicado, a tendência deste pórtico é a de fechar-se, o que levará os empuxos a serem agora orientados para o exterior do pórtico, impedindo que ele se feche.

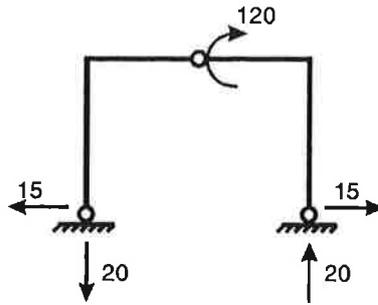


Figura 8.35

É interessante observar que a linha de ação da reação do apoio D do pórtico passa pela articulação B, já que ela é o único esforço externo aplicado à esquerda da articulação; já a linha de ação da reação do apoio E não passa por B, pois, à direita da articulação da trave superior, além da reação de apoio, é aplicado o momento externo ativo de 120 kNm, que introduz momento em B.

Os diagramas de esforços solicitantes deste pórtico estão mostrados na Figura 8.36.

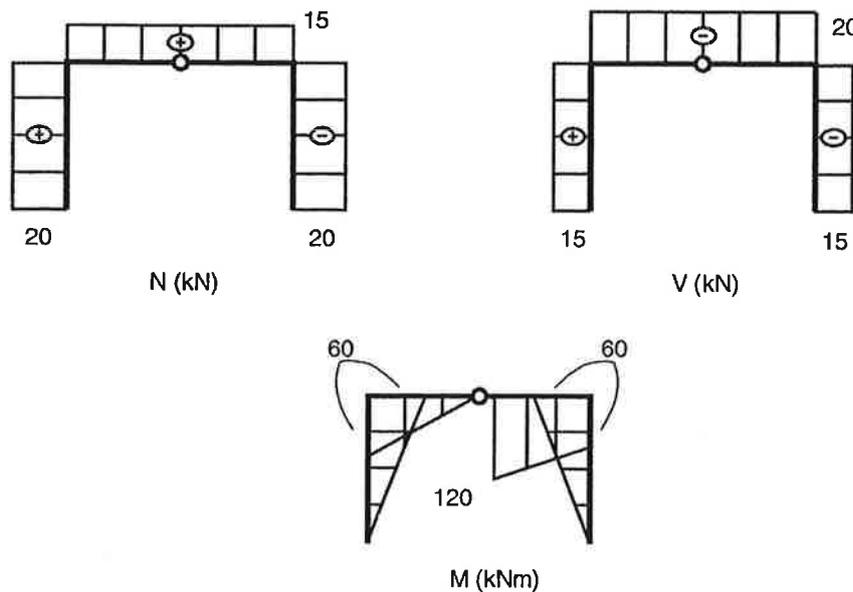


Figura 8.36

O momento fletor em B é nulo, e, imediatamente à sua direita, onde é aplicado o momento externo ativo, há uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores. Entre estas duas seções transversais, há um trecho em que o momento fletor é nulo, como se vê na Figura 8.37, em que o detalhe do diagrama de momentos fletores junto ao nó B é mostrado.

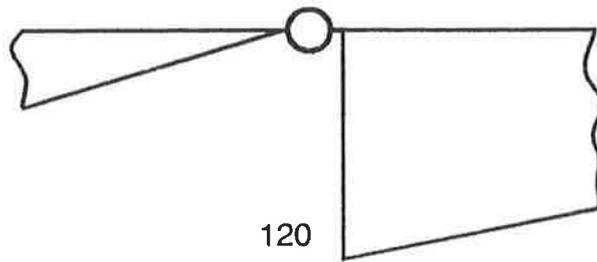


Figura 8.37

A deformada do pórtico é apresentada na Figura 8.38. Como era de se esperar, o nó B se desloca para cima, o que faz com que todas as barras do pórtico fiquem tracionadas no lado interno do pórtico, apresentando então concavidade voltada para o seu exterior.

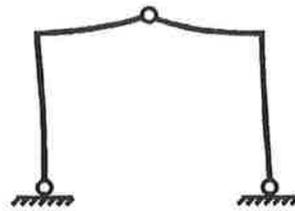


Figura 8.38

Exemplo 8.4

Na Figura 8.39, indicam-se as forças aplicadas pelo vento em um dos pórticos internos de um galpão industrial localizado na cidade de São Paulo. O galpão possui 40 m de comprimento, 10 m de largura, e os pórticos transversais são espaçados a cada 5 m; a pressão e as sucções do vento foram determinadas por meio da norma NBR 6123 "Forças devidas ao vento em edificações", de 1988 (11). Traçar os diagramas de esforços solicitantes deste pórtico.

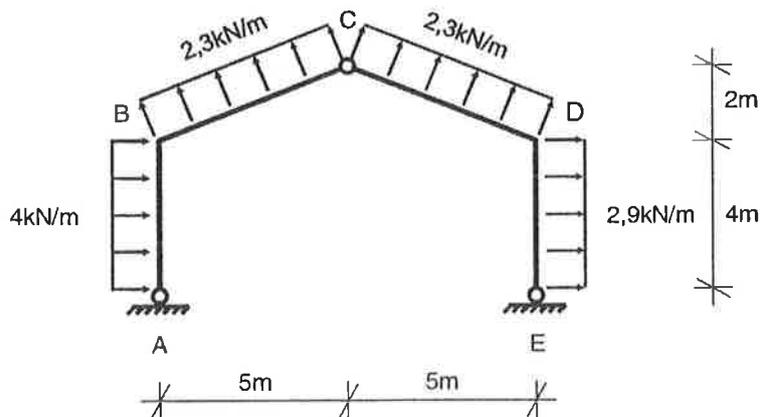


Figura 8.39

Antes de iniciar a resolução do problema, é interessante constatar que, neste galpão, o vento produz pressão apenas na parede situada a barlavento - que é o lado de onde vem o vento -, produzindo sucção nas duas águas do telhado e também na parede situada a sotavento - que é o lado contrário àquele de onde sopra o vento. É por esta razão que, quando há ventos muito fortes, casas e galpões são destelhados, coberturas de postos de gasolina são arrancadas, etc.

Para calcular as reações de apoio do pórtico, substituem-se as forças uniformemente distribuídas pelas forças mecanicamente equivalentes a elas, indicadas na Figura 8.40; as componentes horizontal e vertical destas forças mecanicamente equivalentes também estão indicadas na Figura 8.40.

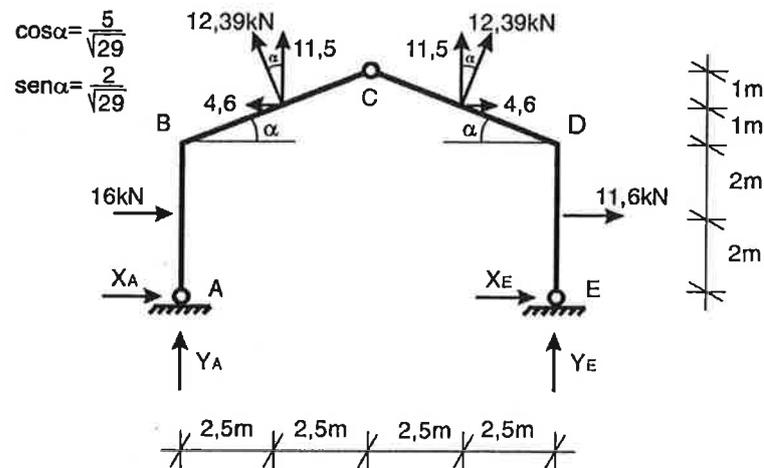


Figura 8.40

As reações de apoio do pórtico podem ser obtidas por meio das equações de equilíbrio abaixo:

$$\sum X = 0 \quad X_A + 16,0 - 4,6 + 4,6 + 11,6 + X_E = 0 \quad (8.19)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_A + 11,5 + 11,5 + Y_E = 0 \quad (8.20)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -16,0 \cdot 2,0 + 4,6 \cdot 5,0 + 11,5 \cdot 2,5 + 11,5 \cdot 7,5 - 4,6 \cdot 5,0 - 11,6 \cdot 2,0 + Y_E \cdot 10,0 = 0 \quad (8.21)$$

$$M_{\text{fletor em C}} = 0 \quad -X_A \cdot 6,0 + Y_A \cdot 5,0 - 16,0 \cdot 4,0 + 4,6 \cdot 1,0 + 11,5 \cdot 2,5 = 0 \quad (8.22)$$

A resolução deste sistema leva às reações de apoio, $X_A = -19,29 \text{ kN}$, $X_E = -8,31 \text{ kN}$, $Y_A = -17,02 \text{ kN}$ e $Y_E = -5,98 \text{ kN}$, mostradas na Figura 8.41. Como o vento tende a empurrar o pórtico para a direita, as reações horizontais são para a esquerda; como tende a levantá-lo, as reações verticais são para baixo.

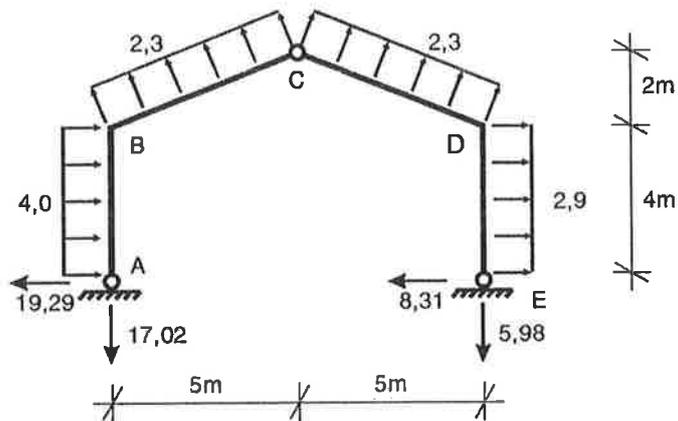
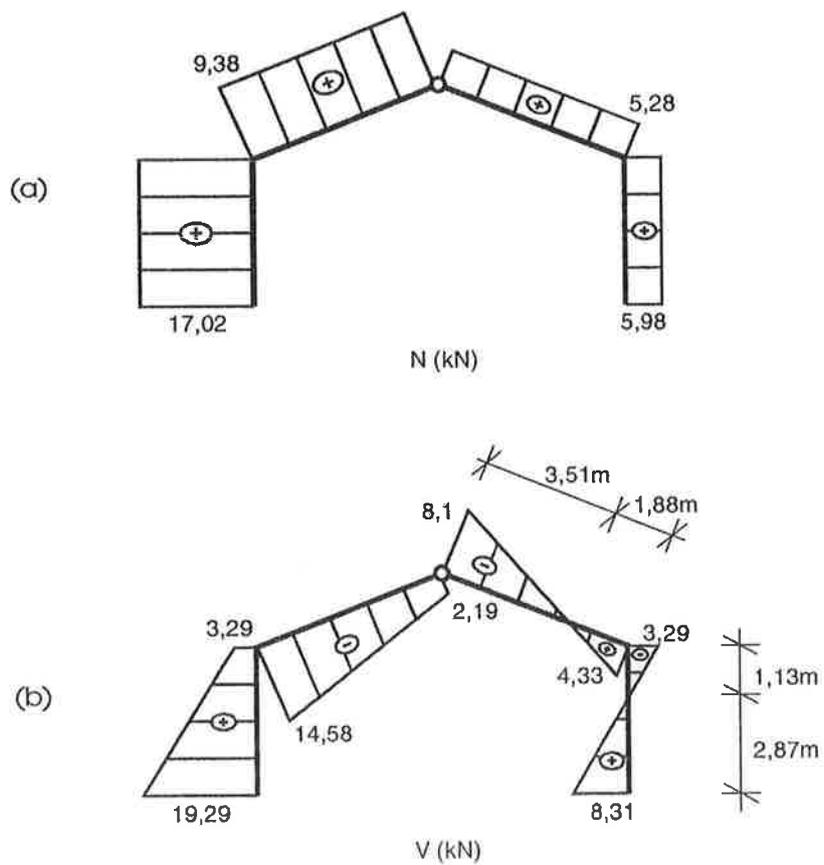


Figura 8.41

Os diagramas de esforços solicitantes do pórtico estão mostrados na Figura 8.42: o de forças normais na Figura 8.42 (a), o de forças cortantes na Figura 8.42 (b) e o de momentos fletores na Figura 8.42 (c).



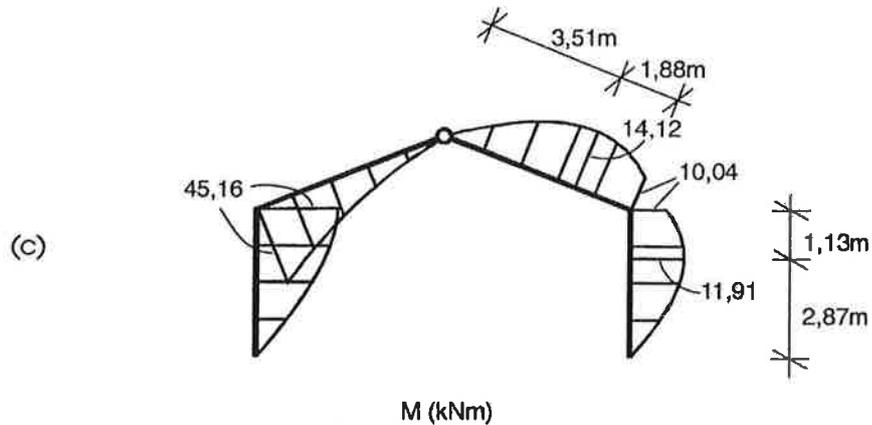


Figura 8.42

Para obter estes diagramas, como habitualmente, utiliza-se o teorema do corte.

A força normal em BC, por exemplo, é obtida cortando-se esta barra na seção B+ imediatamente à direita de B, nela reduzindo os esforços externos aplicados à sua esquerda, como indicado na Figura 8.43.

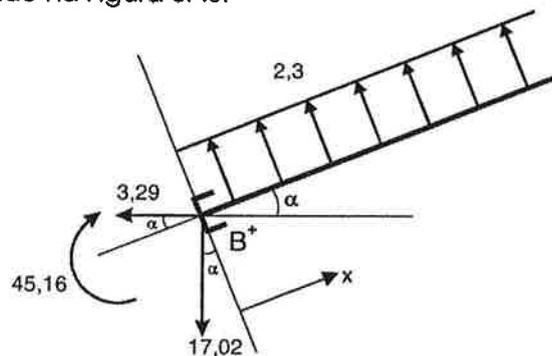


Figura 8.43

Tem-se então na barra BC:

$$N = 3,29 \cos \alpha + 17,02 \sin \alpha = 9,38 \quad (8.23)$$

A força cortante na seção B+ é

$$V = 3,29 \sin \alpha - 17,02 \cos \alpha = -14,58 \quad (8.24)$$

e a força cortante na barra BC tem então a equação

$$V(x) = -14,58 + 2,3 x \quad (8.25)$$

Já o momento fletor em BC tem por equação

$$M(x) = 45,16 - 14,58 x + 2,3 \frac{x^2}{2} \quad (8.26)$$

Observando o diagrama de forças cortantes, verifica-se que nas barras CD e DE há uma seção em que a força cortante se anula, logo em que o momento fletor passa por um extremo. Estes extremos estão indicados na Figura 8.42 (c).

Uma verificação interessante de se fazer é a do equilíbrio do nó C, indicado na Figura 8.44. Os esforços que nele atuam devem estar em equilíbrio, ou seja, as somatórias das componentes horizontais e verticais das forças mostradas na Figura 8.44 devem ser nulas.

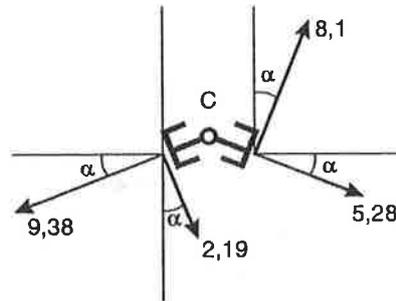


Figura 8.44

De fato, tem-se

$$\sum X = -9,38 \cos \alpha + 2,19 \sin \alpha + 8,1 \sin \alpha + 5,28 \cos \alpha = 0,015 \quad (8.27)$$

e

$$\sum Y = -9,38 \sin \alpha - 2,19 \cos \alpha + 8,1 \cos \alpha - 5,28 \sin \alpha = 0,043 \quad (8.28)$$

Embora as duas somas acima não tenham sido nulas, são praticamente nulas, o que confirma o equilíbrio dos esforços que atuam no nó C; foram os erros de arredondamento que levaram-nas a não darem resultados exatamente nulos.

Na Figura 8.45, mostra-se a deformada do pórtico que está sendo analisado. Como era de se esperar, em decorrência do vento que o empurra para a direita e tende a levantá-lo, ele se desloca para a direita e para cima.

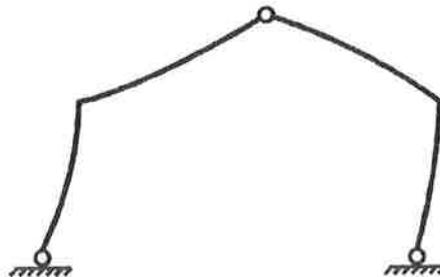


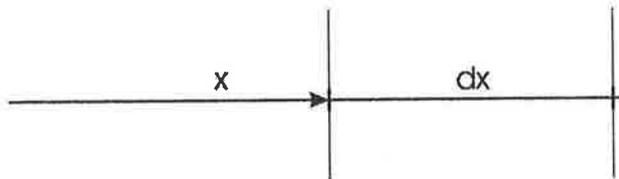
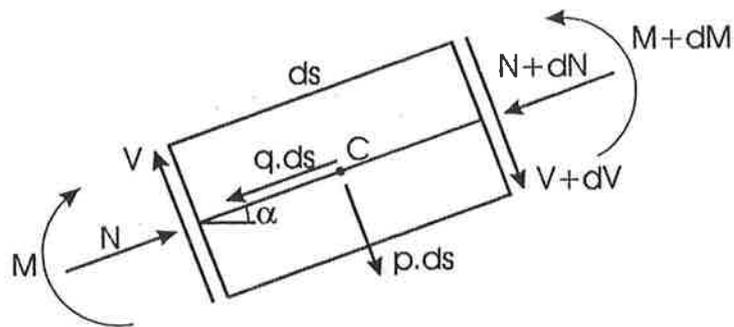
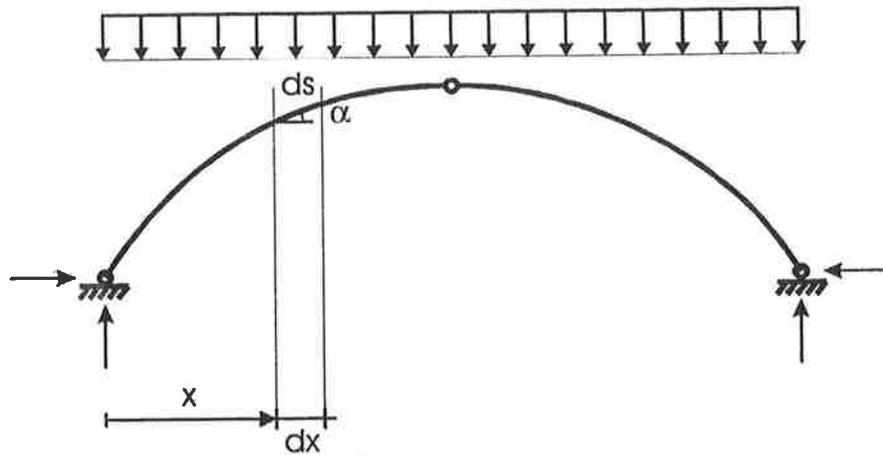
Figura 8.45

O próximo capítulo será dedicado ao estudo de mais uma estrutura triarticulada, os arcos triarticulados, e nele serão discutidas as características estruturais ímpares dos arcos, que fizeram deles um dos elementos estruturais mais significativos para a evolução da arquitetura e da engenharia de estruturas e o principal sistema estrutural empregado pelo homem do século I a.C. ao século XIX.

8.3 Referências bibliográficas

1. São Paulo Antigamente: site sobre a cidade de São Paulo elaborado por sampa.art.br. Disponível em <http://www.sampa.art.br/SAOPAULO/SP%20Antiga/SaoPauloAntigamente.htm>. Acesso em 3 maio 2006.
2. Instituto Cultural Itaú. Cadernos Cidade de São Paulo: Praça do Patriarca/Viaduto do Chá - Praça Ramos/Viaduto do Chá. São Paulo, Instituto Cultural Itaú, 1992. 19 p.
3. Companhia Construtora Nacional. Novo Viaduto do Chá. Revista de Engenharia Mackenzie, São Paulo, p. 38-41, maio 1936.
4. Vasconcelos, A. C. Pontes Brasileiras: Viadutos e Passarelas Notáveis. São Paulo: Editora Pini Ltda., 1993. 614 p.
5. History of Architecture Survey II: 1000-1870: site sobre a história da arquitetura elaborado pela School of Architecture da Universidade do Texas. Disponível em <http://www.ar.utexas.edu/AV/ARC318L/glossary/building/galmach1.html>. Acesso em 3 maio 2006.
6. Picon, A., dir. L'Art de l'ingénieur - Constructeur, entrepreneur, inventeur. Paris, Editions du Centre Pompidou, 1997. 598 p.
7. Schodek, D.L. Structures, 2ª ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1992. 557 p.
8. Mythos der Moderne - Der Crystal Palace in der modernen Architekturgeschichte: site sobre arquitetura elaborado pela Universidade de Trier, na Alemanha. Disponível em http://www.uni-trier.de/uni/fb3/kunstgeschichte/nicolai/html/l_3_6.htm#. Acesso em 3 maio 2006.
9. La Médiatèque de l'Architecture et du Patrimoine: site sobre a arquitetura e o patrimônio da França, elaborado pelo Ministério da Cultura da França. Disponível em http://www.culture.gouv.fr/public/mistral/memsmn_fr?ACTION=CHERCHER&FIELD_6=SERIE&VALUE_6=exposition+universelle+de+1889. Acesso em 3 maio 2006.
10. WWI and Early Aviation Image Archive: site sobre os primórdios da aviação elaborado por Rosebud e Rod Filan. Disponível em <http://www.earlyaviator.com/archive4.htm>. Acesso em 3 maio 2006.
11. ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6123 Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro: ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, junho 1988.

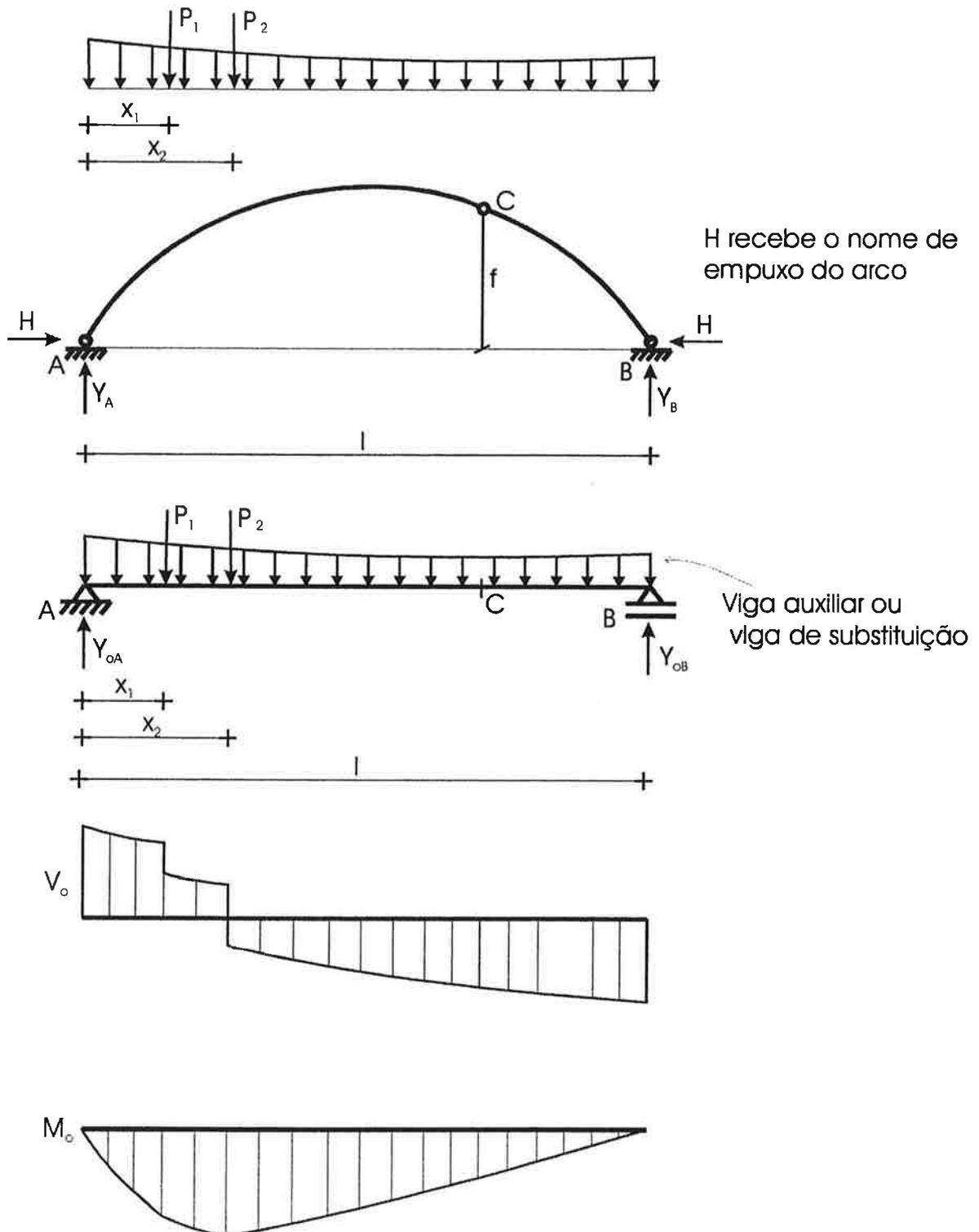
Capítulo 9: Arcos Triarticulados



$$\begin{aligned} \sum M_c &= 0 \\ \Rightarrow -M - V \cdot \frac{ds}{2} - (V + dV) \cdot \frac{ds}{2} + (M + dM) &= 0 \\ \Rightarrow dV \cdot \frac{ds}{2} \approx 0 \Rightarrow -\frac{Vds}{2} - \frac{Vds}{2} + dM &= 0 \\ \Rightarrow dM &= Vds \\ \Rightarrow \frac{dM}{ds} &= V \\ \Rightarrow dx &= ds \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow \frac{dM}{dx} &= \frac{V}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

9.1 Arcos triarticulados submetidos exclusivamente a esforços verticais

9.1.1 Determinação dos esforços solicitantes



As reações do arco podem ser calculadas a partir dos esforços que atuam na viga auxiliar:

Reações verticais do arco:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = P_1 + P_2 + \int_0^l p(x) \cdot dx$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P_1 \cdot x_1 - P_2 \cdot x_2 - \int_0^l p(x) \cdot x \cdot dx + Y_B \cdot l = 0$$

$\Rightarrow Y_A$ e Y_B

Reações verticais da viga auxiliar:

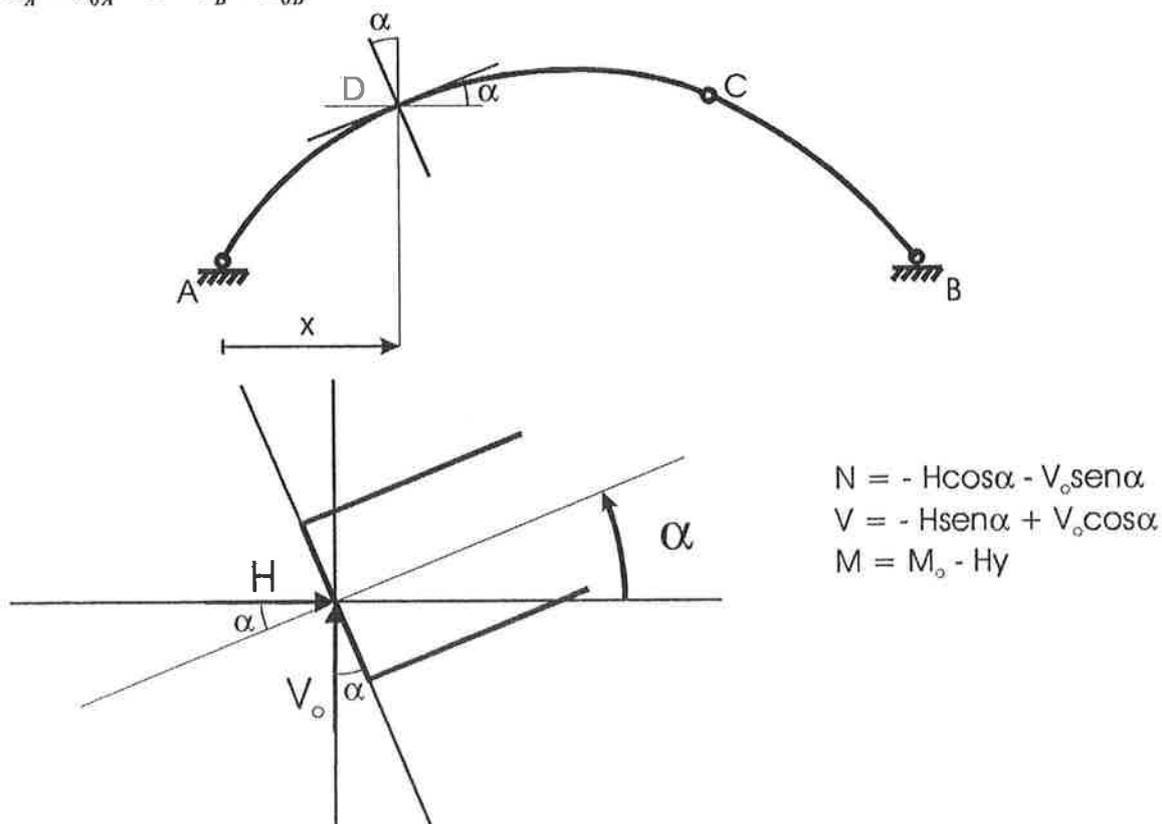
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_{0A} + Y_{0B} = P_1 + P_2 + \int_0^l p(x) \cdot dx$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P_1 \cdot x_1 - P_2 \cdot x_2 - \int_0^l p(x) \cdot x \cdot dx + Y_{0B} \cdot l = 0$$

$\Rightarrow Y_{0A}$ e Y_{0B}

Portanto, podemos concluir:

$$Y_A = Y_{0A} \quad e \quad Y_B = Y_{0B}$$

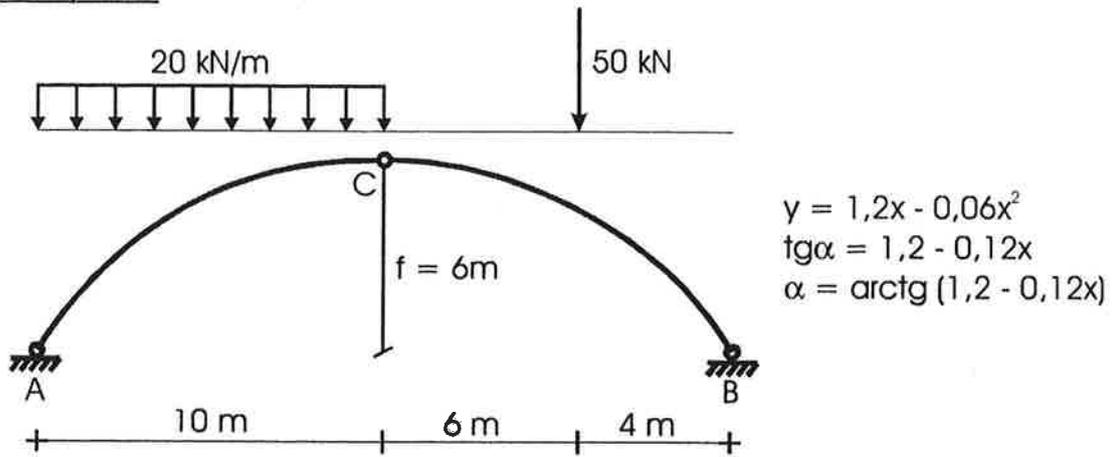


Empuxo do arco:

$$M_C = 0 = M_{0C} - Hf$$

$$H = \frac{M_{0C}}{f}$$

Exemplo 9.1



Viga auxiliar:

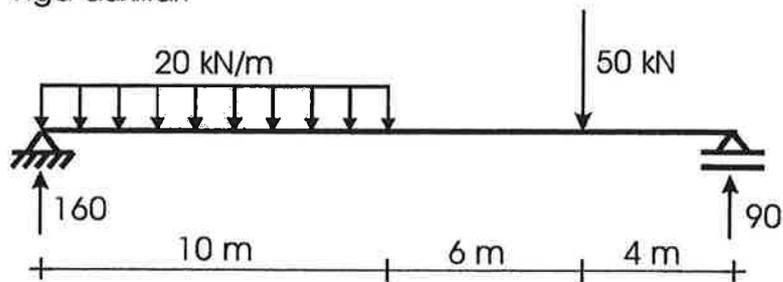


Tabela dos resultados do exemplo 9.1:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X (m)	y (m)	α ($^{\circ}$)	sen α	cos α	Vo (kN)	Mo (kNm)	H sen α (kN)	H cos α (kN)	Vo sen α (kN)	Vo cos α (kN)	Hy (kNm)	N (kN)	V (kN)	M (kNm)
0.00	0.00	50.19	0.77	0.64	160.00	0.00	76.82	64.02	122.92	102.43	0.00	-186.93	25.61	0.00
2.00	2.16	43.83	0.69	0.72	120.00	280.00	69.25	72.14	83.10	86.57	216.00	-155.24	17.31	64.00
4.00	3.84	35.75	0.58	0.81	80.00	480.00	58.43	81.15	46.74	64.92	384.00	-127.90	6.49	96.00
6.00	5.04	25.64	0.43	0.90	40.00	600.00	43.27	90.15	17.31	36.06	504.00	-107.46	-7.21	96.00
8.00	5.76	13.50	0.23	0.97	0.00	640.00	23.34	97.24	0.00	0.00	576.00	-97.24	-23.34	64.00
10.00	6.00	0.00	0.00	1.00	-40.00	600.00	0.00	100.00	0.00	-40.00	600.00	-100.00	-40.00	0.00
12.00	5.76	-13.50	-0.23	0.97	-40.00	520.00	-23.34	97.24	9.33	-38.90	576.00	-106.57	-15.56	-56.00
14.00	5.04	-25.64	-0.43	0.90	-40.00	440.00	-43.27	90.15	17.31	-36.06	504.00	-107.46	7.21	-64.00
16.00	3.84	-35.75	-0.58	0.81	-40.00	360.00	-58.43	81.15	23.37	-32.46	384.00	-104.53	25.97	-24.00
18.00	2.16	-43.83	-0.69	0.72	-90.00	180.00	-69.25	72.14	62.33	-73.04	216.00	-134.47	4.33	-36.00
20.00	0.00	-50.19	-0.77	0.64	-90.00	0.00	-76.82	64.02	69.14	-57.62	0.00	-133.16	19.21	0.00

$$y = 1.2 \cdot x - 0.06 \cdot x^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1.2 - 0.12 \cdot x$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} (1.2 - 0.12 \cdot x)$$

$$H = \frac{M_{oc}}{f} = \frac{600}{6} = 100$$

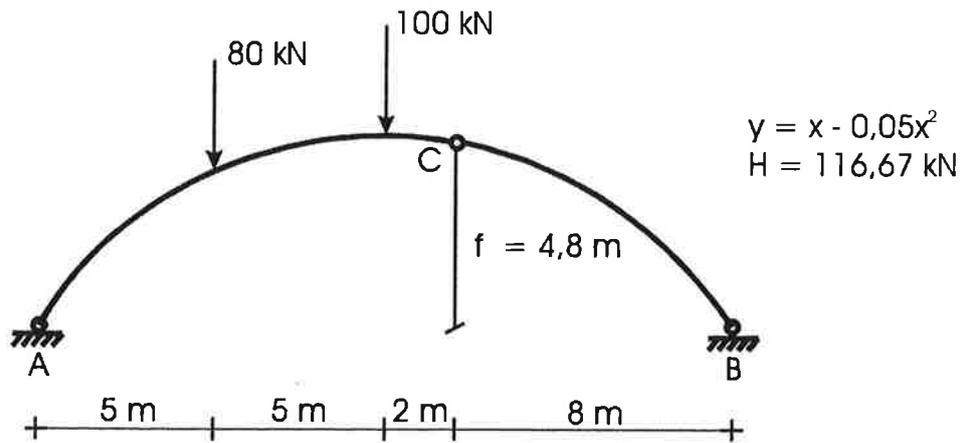
$$N = -H \cos \alpha - V_o \operatorname{sen} \alpha$$

$$V = -H \operatorname{sen} \alpha + V_o \cos \alpha$$

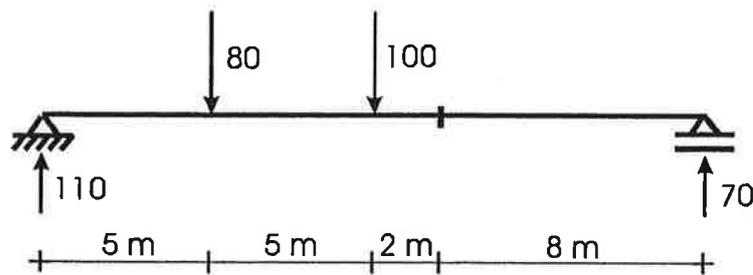
$$M = M_o - H y$$

Exemplo 9,2

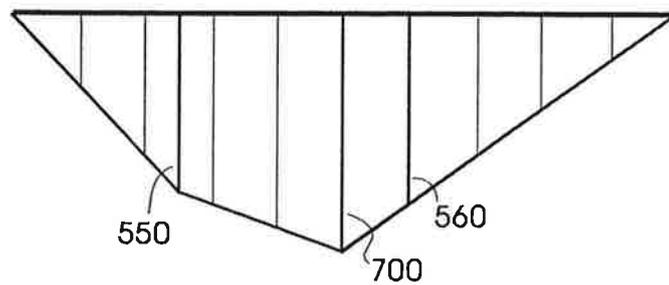
Traçar por superposição gráfica o diagrama dos momentos fletores do arco triarticulado da figura:



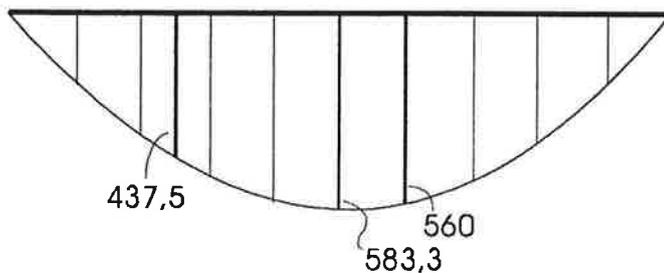
Solução:



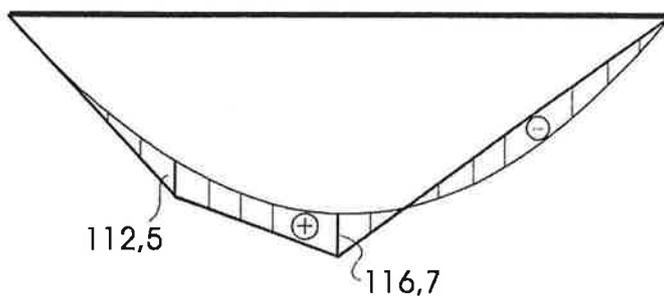
M_o (kNm)



H_y (kNm)



$M = M_o - H_y$
(kNm)



9.2 Linha das Pressões

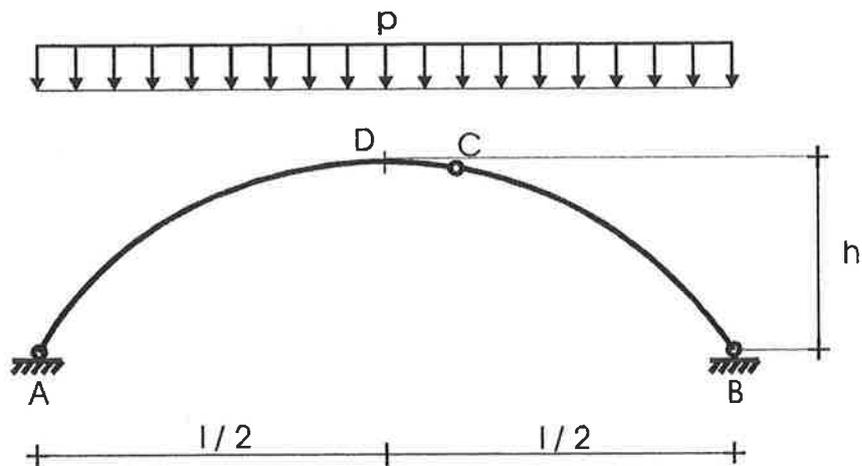
Definição: dá-se o nome de linha das pressões associada a um determinado carregamento à forma da estrutura triarticulada que, solicitada por aquele carregamento, apresenta momentos fletores nulos e forças cortantes nulas em todas as seções transversais.

$$M = M_0 - H \cdot y = 0$$

$$y = \frac{M_0}{H} \text{ é a equação da linha das pressões.}$$

Exemplo 9.3

Determinar a linha das pressões que passa pelos pontos A, B e D correspondente à carga p uniformemente distribuída sobre todo o comprimento l .



Solução:

$$M_0 = \frac{pl}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2}$$

$$y = \frac{M_0}{H}$$

$$H = \frac{M_{0D}}{h} = \frac{pl^2}{8h}$$

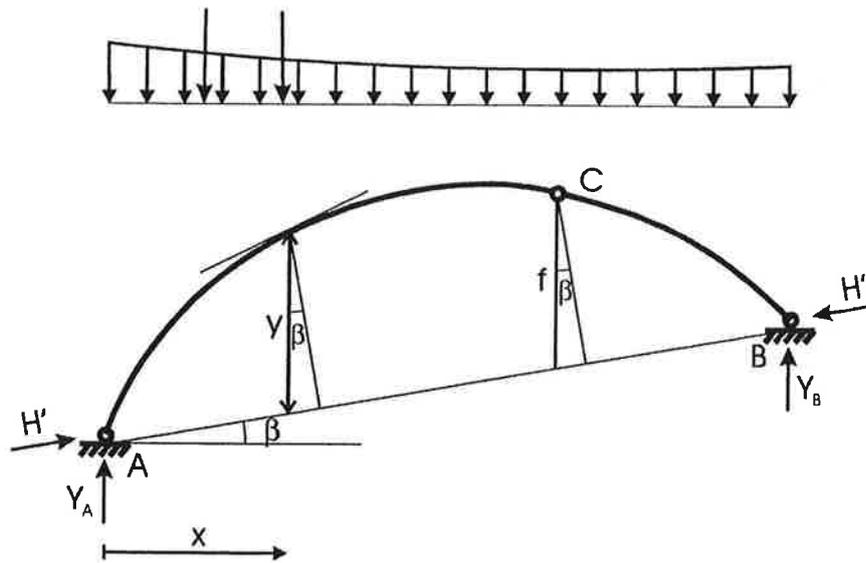
$$y = \left(\frac{pl}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2} \right) \cdot \frac{8h}{pl^2} = \frac{4h}{l^2} \cdot (lx - x^2) = \frac{4hx}{l^2} \cdot (l - x)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)}}$$

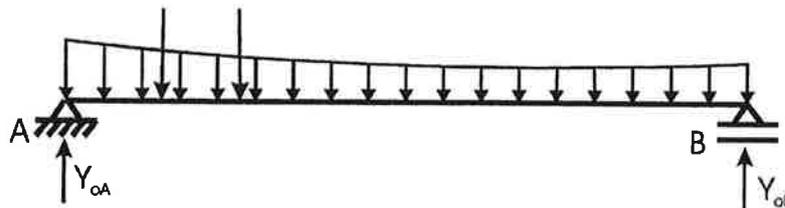
A articulação pode ser colocada em qualquer posição, por exemplo em C.

9.3 Arcos com apoios desnivelados

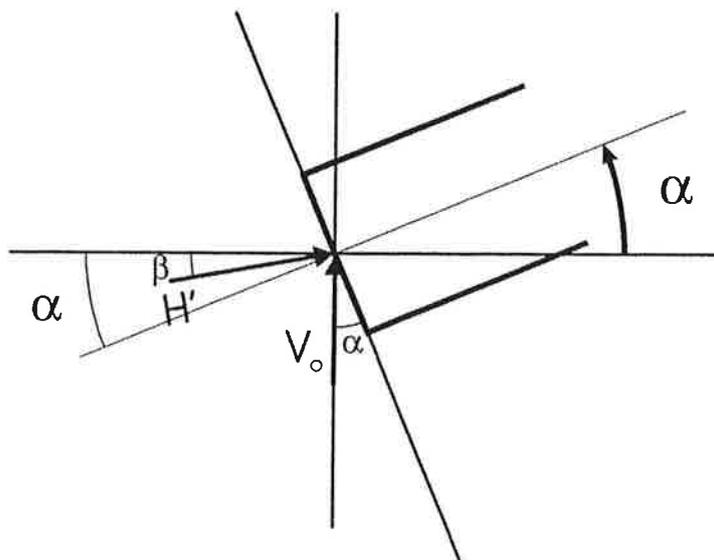
Quando as articulações dos arcos não se encontram numa mesma horizontal, tem-se:



Viga auxiliar:



$$H' = \frac{M_{oc}}{f \cos \beta}$$

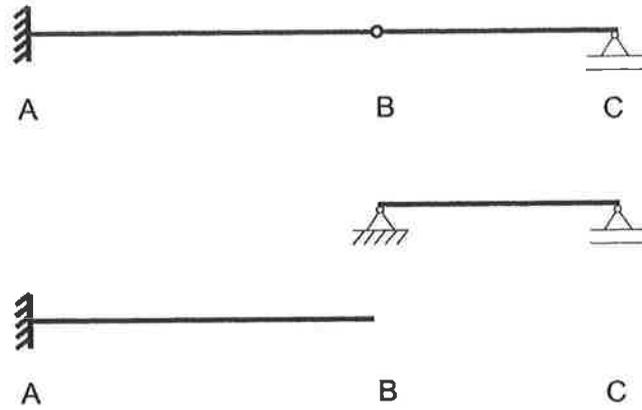


$$\begin{aligned} N &= -H' \cos(\alpha - \beta) - V_o \sin \alpha \\ V &= -H' \sin(\alpha - \beta) + V_o \cos \alpha \\ M &= M_o - H' y \cos \beta \end{aligned}$$

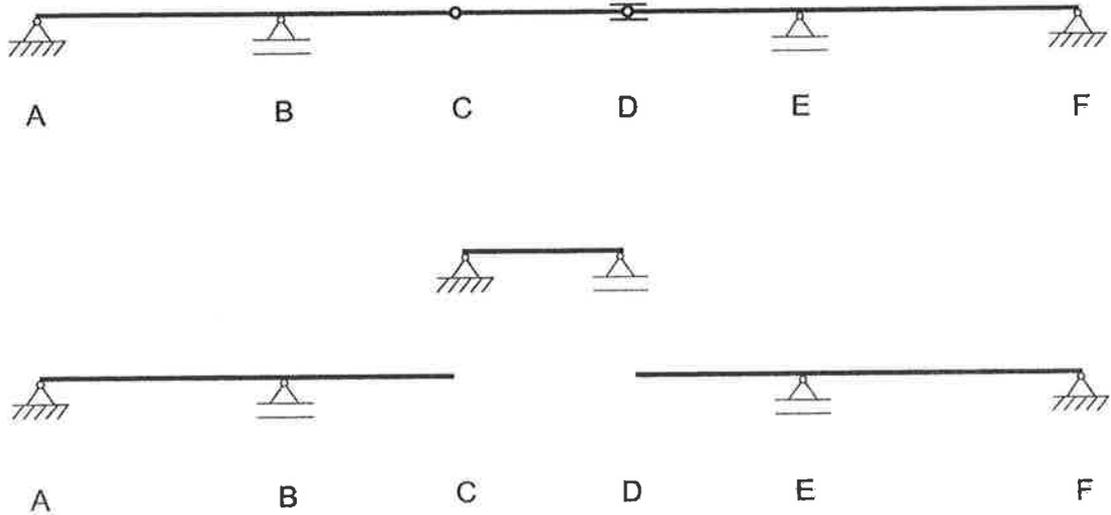
Capítulo 10: Vigas Gerber

Sistema patenteado em 1866 por um engenheiro alemão com este nome.

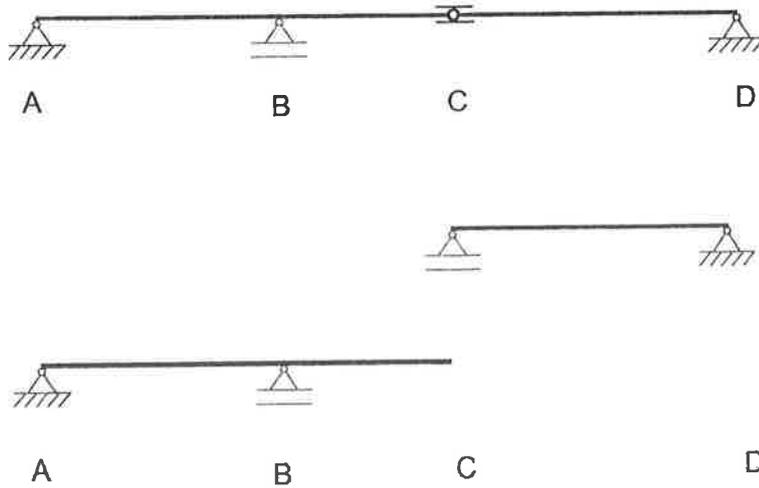
a)



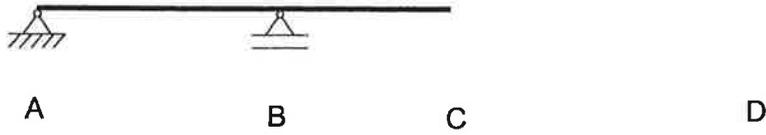
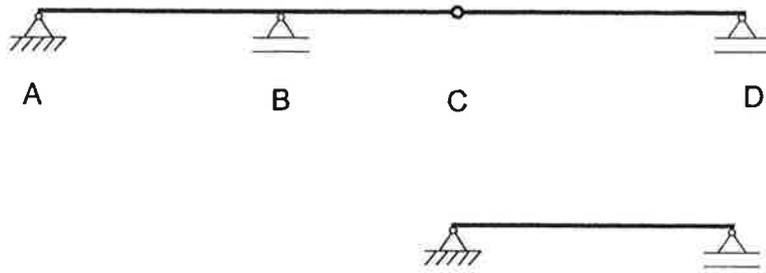
b)



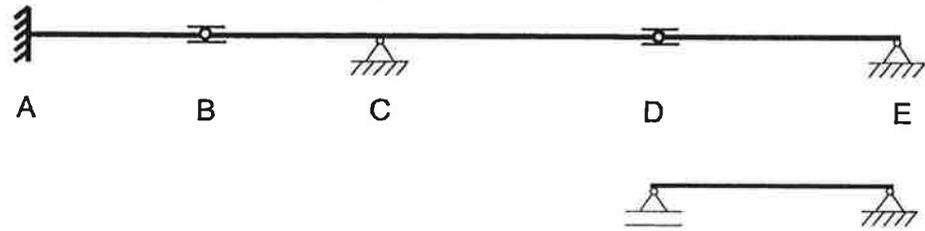
c)



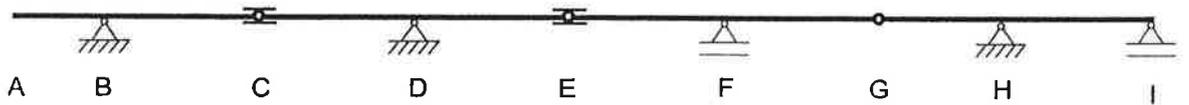
d)



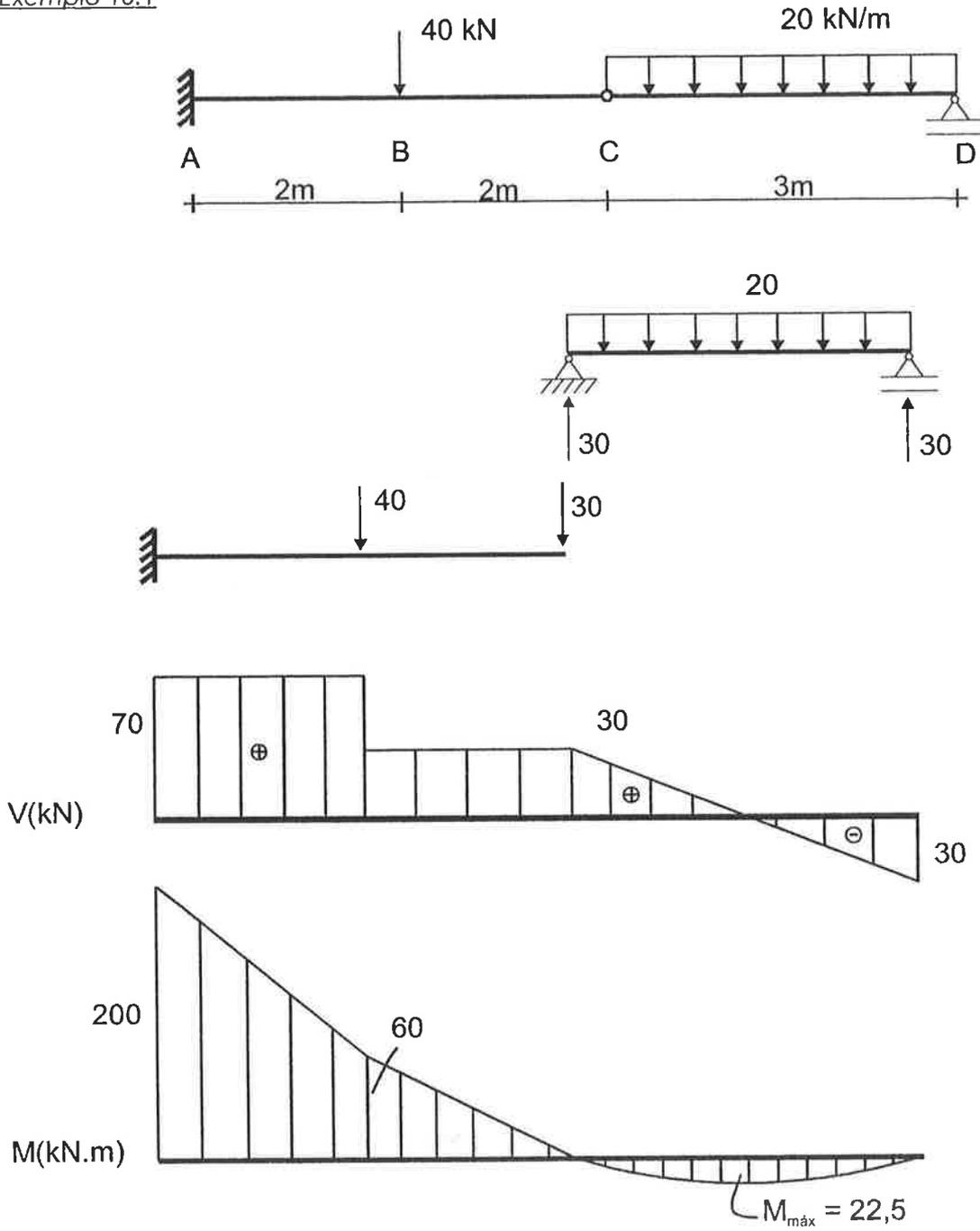
e)



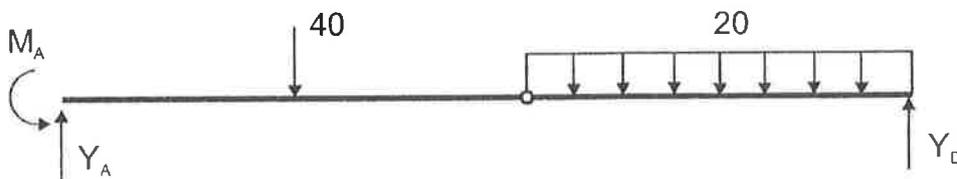
f)



Exemplo 10.1

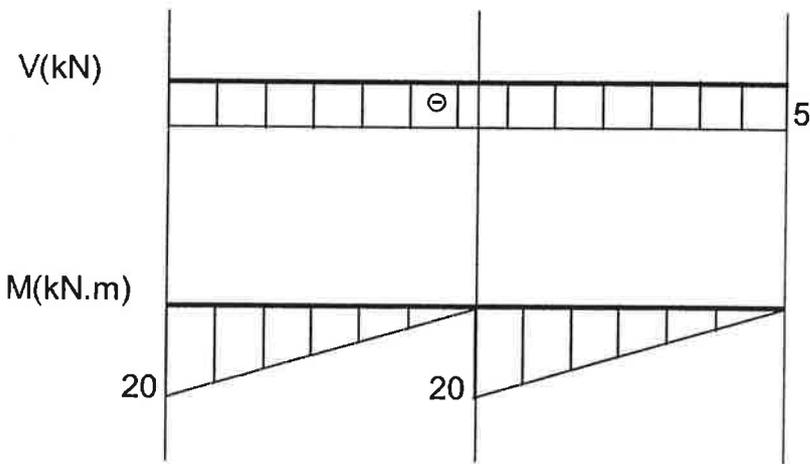
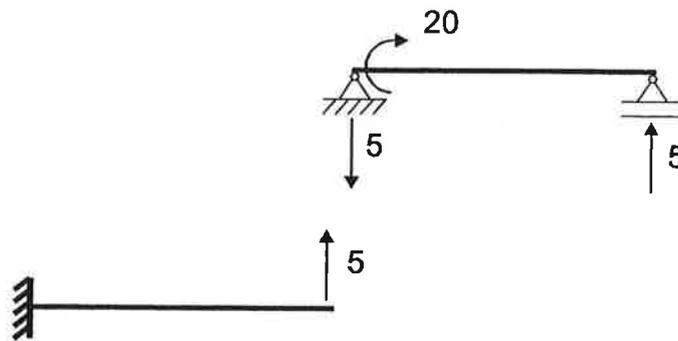
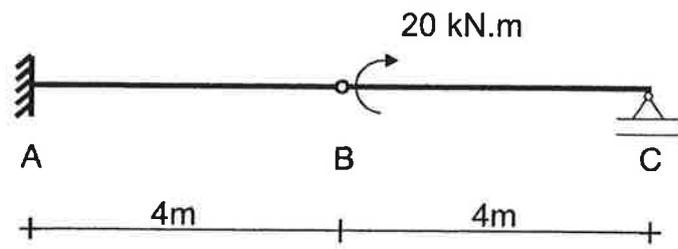


Outra maneira de calcular as reações:

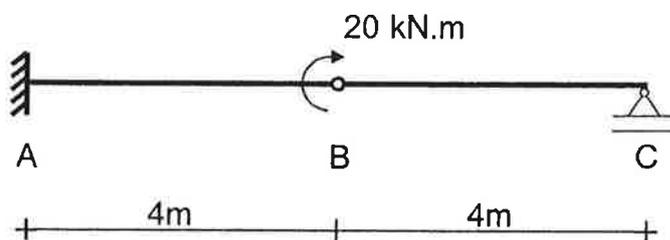


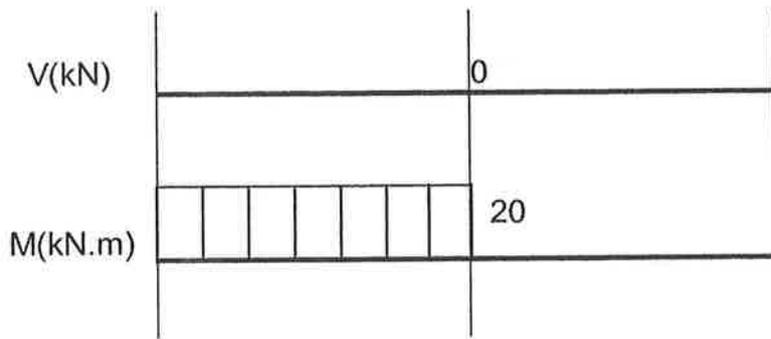
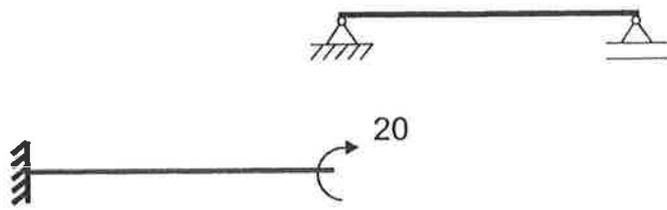
$$\begin{array}{lll}
 \Sigma Y = 0 & Y_A + Y_D = 40 + 20 \cdot 3 = 100 & \Rightarrow Y_A = 70 \\
 \Sigma M_A = 0 & M_A - 40 \cdot 2 - 20 \cdot 3 \cdot 5,5 + Y_D \cdot 7 = 0 & \Rightarrow M_A = 200 \\
 M_C = 0 & Y_D \cdot 3 - (20 \cdot 3^2)/2 = 0 & \Rightarrow Y_D = 30
 \end{array}$$

Exemplo 10.2

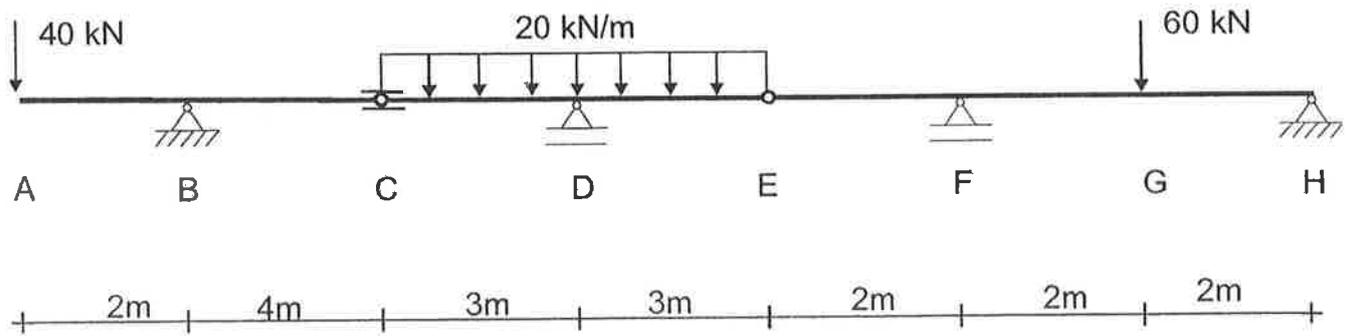


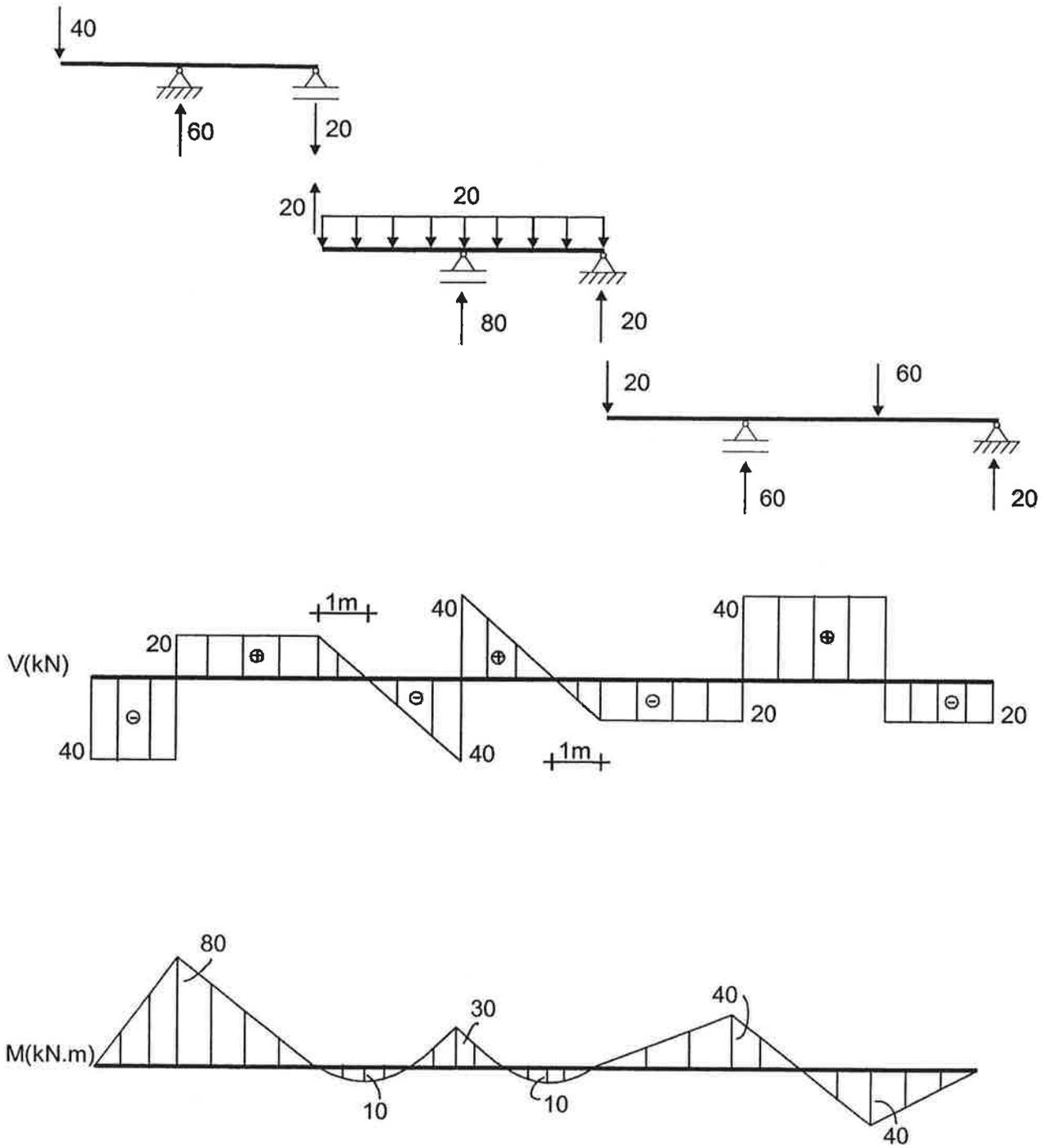
Exemplo 10.3



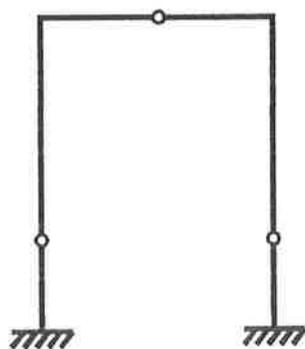
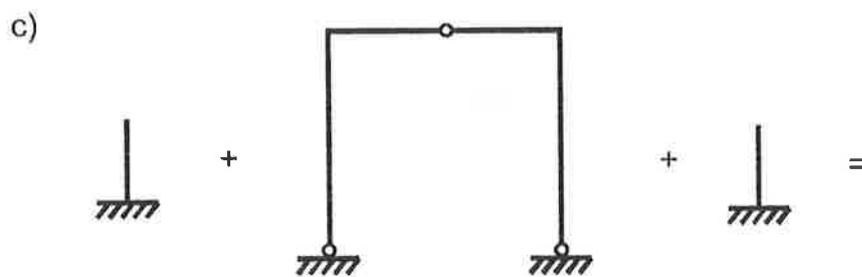
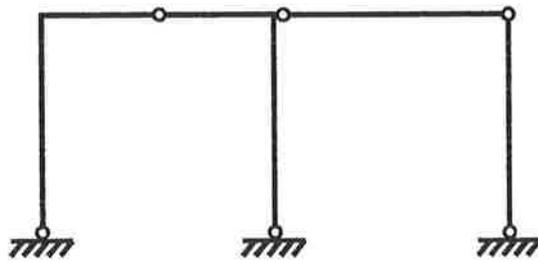
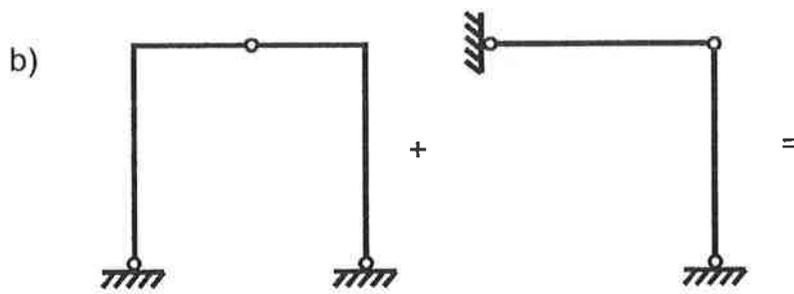
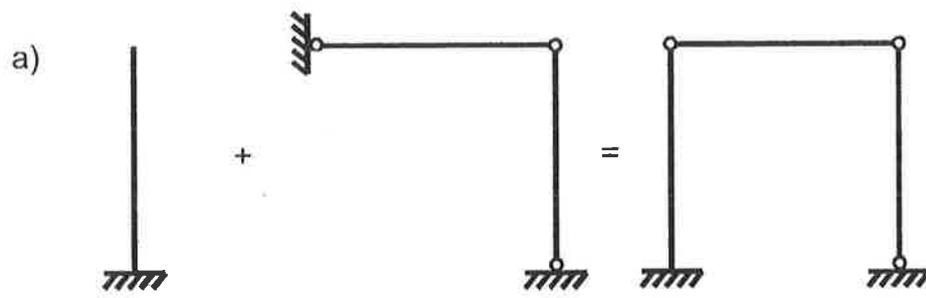


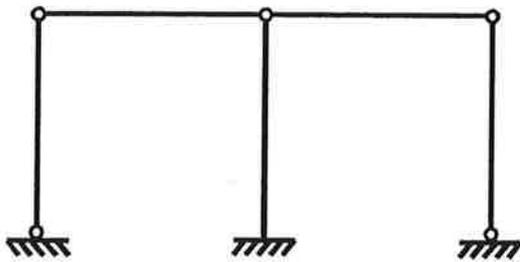
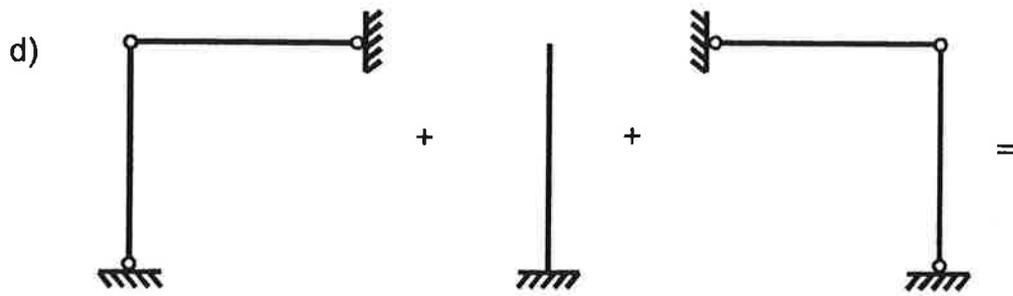
Exemplo 10.4



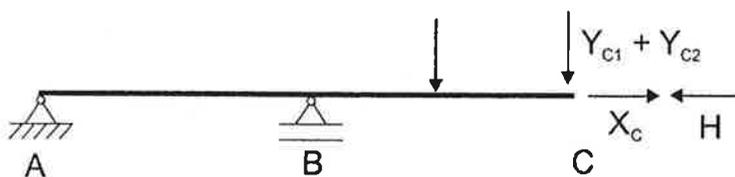
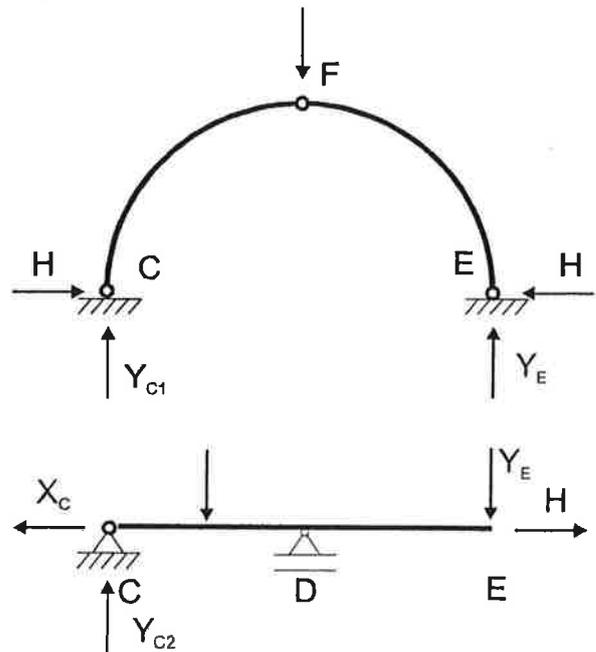
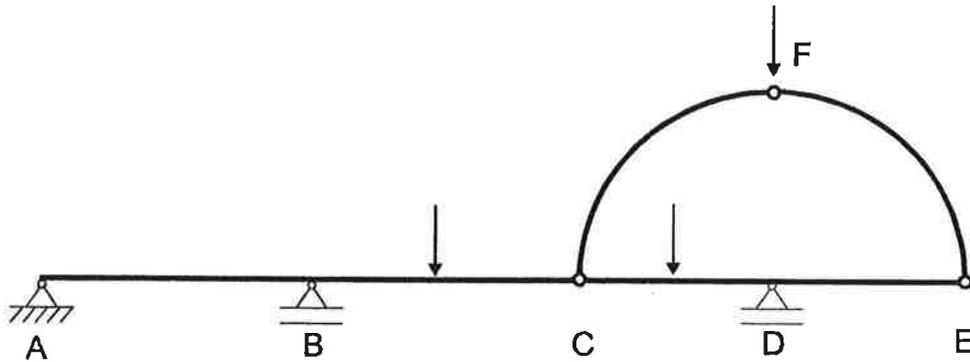


Capítulo 11: Estruturas Associadas

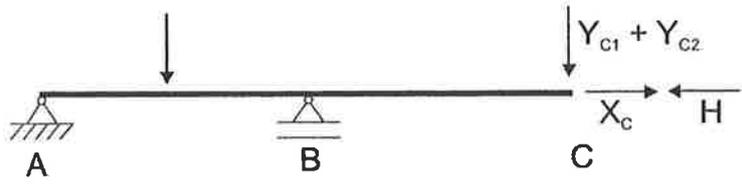
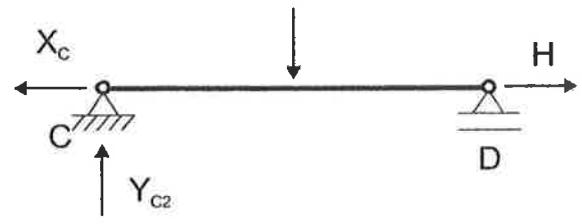
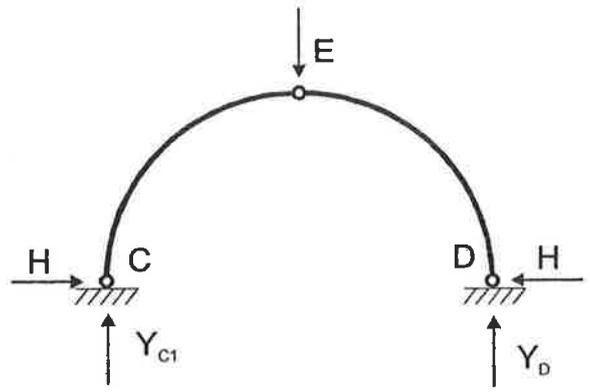
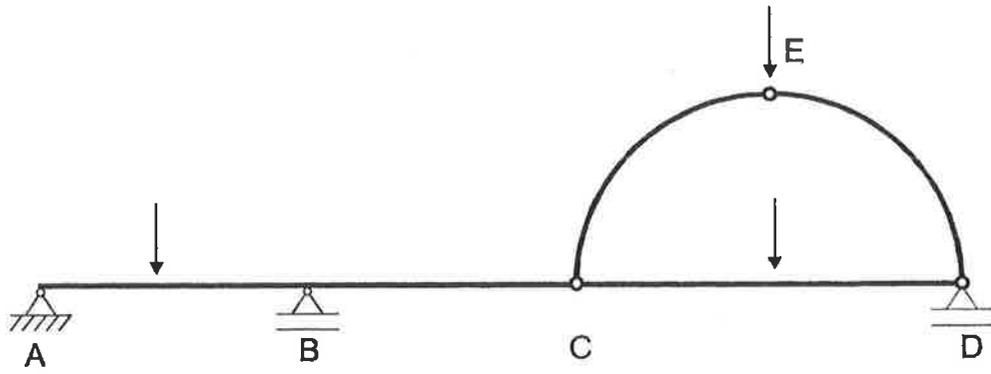




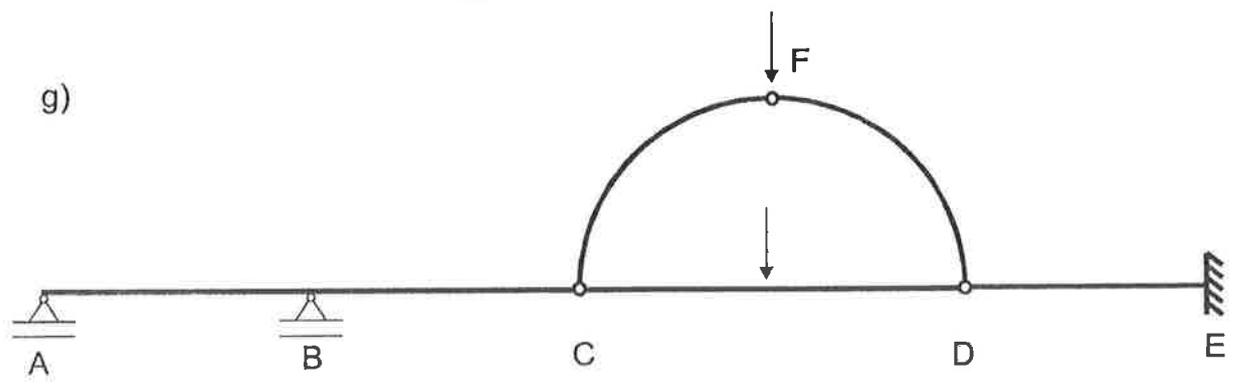
e)

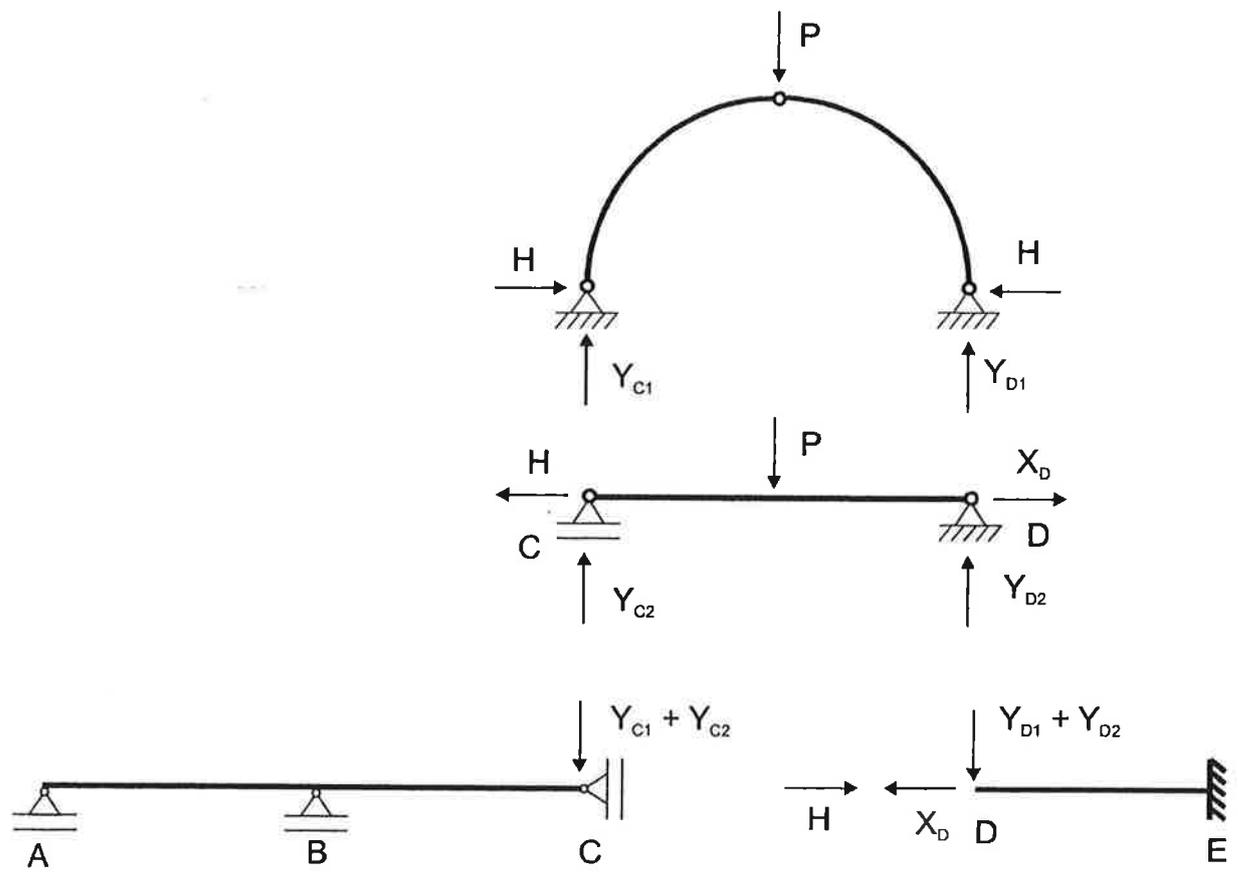


f)

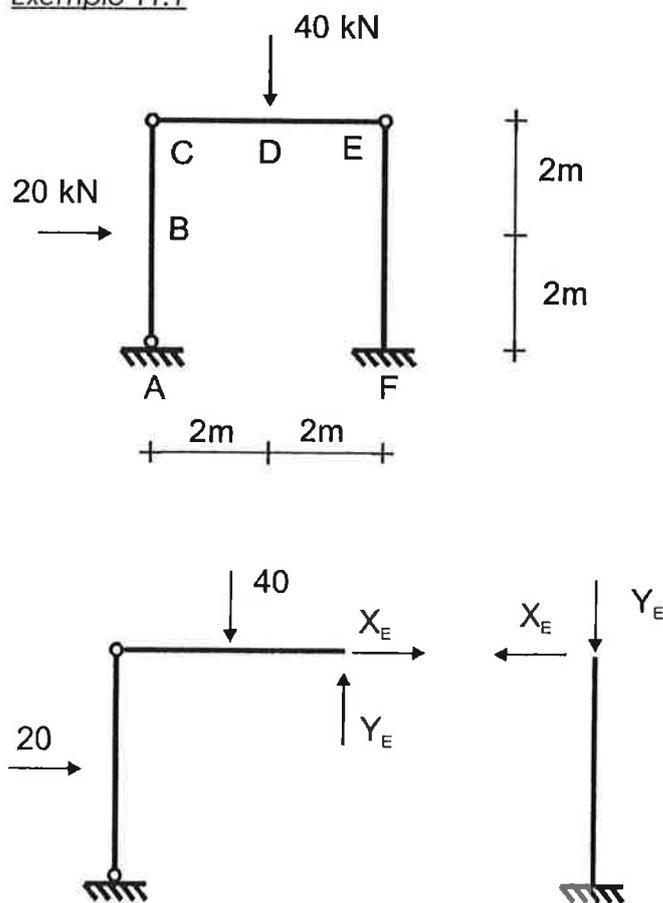


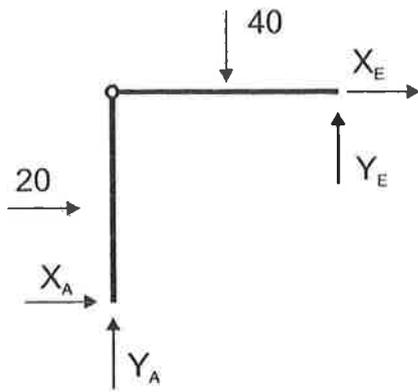
g)



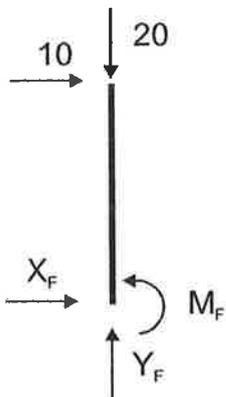


Exemplo 11.1

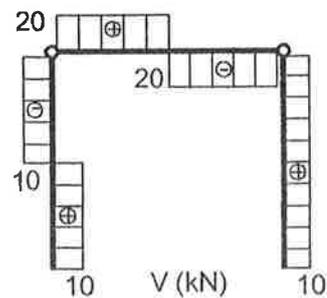
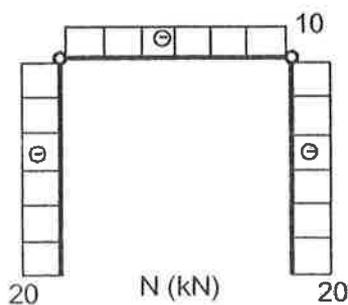
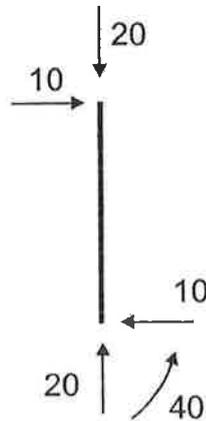
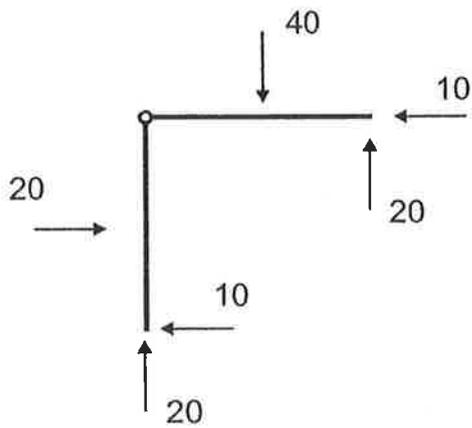


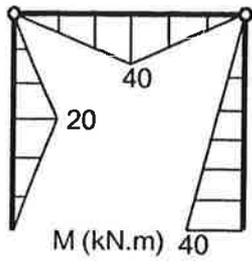


$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad X_A + X_E + 20 = 0 \Rightarrow X_E = -10 \\ \sum Y = 0 & \quad Y_A + Y_E = 40 \Rightarrow Y_A = 20 \\ \sum M_A = 0 & \quad -20 \cdot 2 - 40 \cdot 2 - X_E \cdot 4 + Y_E \cdot 4 = 0 \Rightarrow Y_E = 20 \\ \sum M_C = 0 & \quad X_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow X_A = -10 \end{aligned}$$

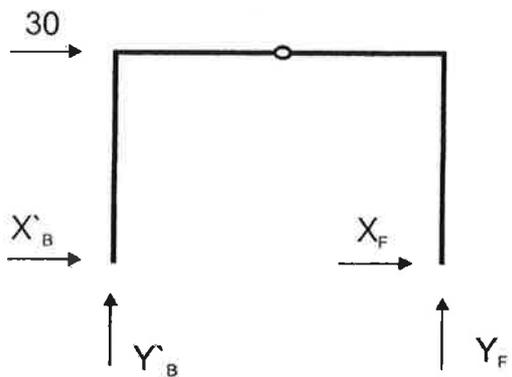
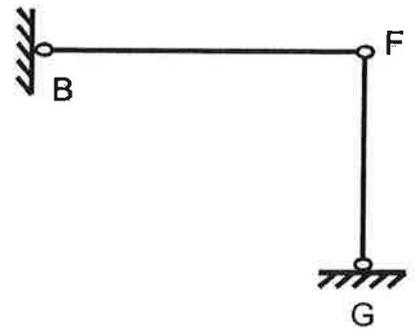
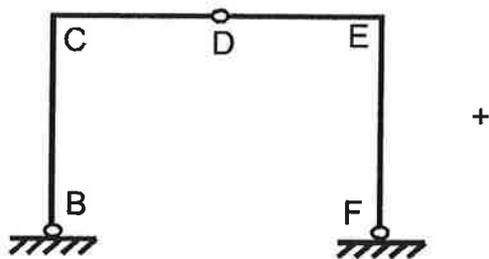
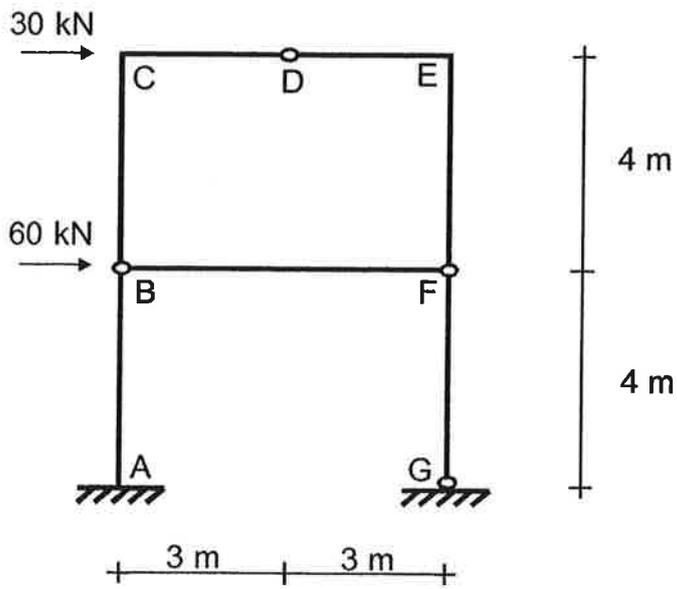


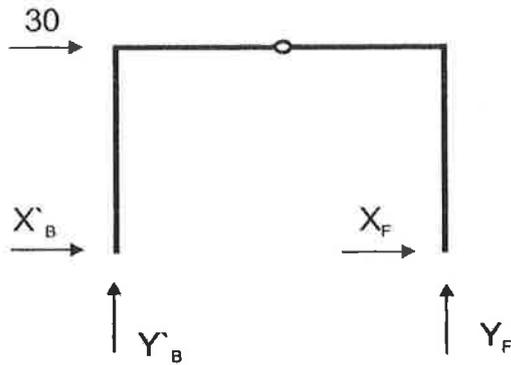
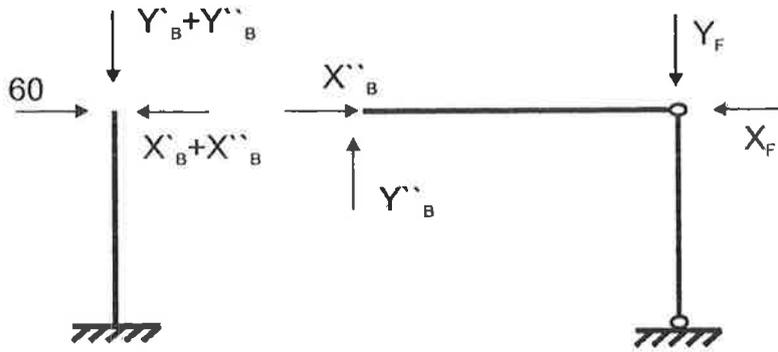
$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad X_F + 10 = 0 \Rightarrow X_F = -10 \\ \sum Y = 0 & \quad Y_F - 20 = 0 \Rightarrow Y_F = 20 \\ \sum M_F = 0 & \quad M_F - 10 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_F = 40 \end{aligned}$$



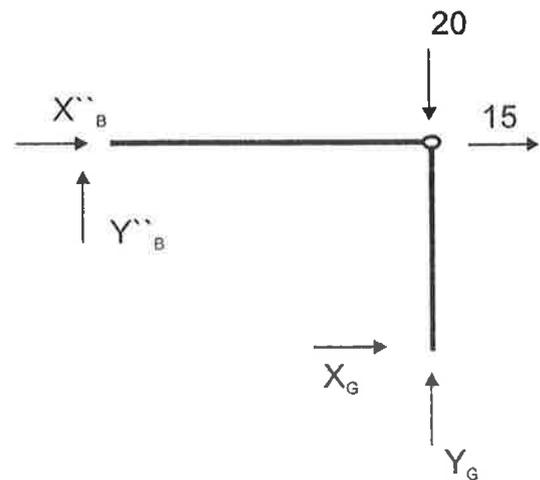
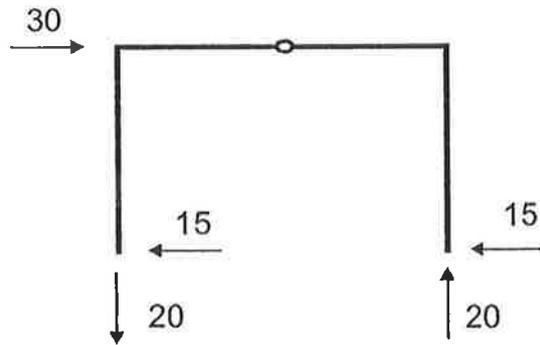


Exemplo 11.2

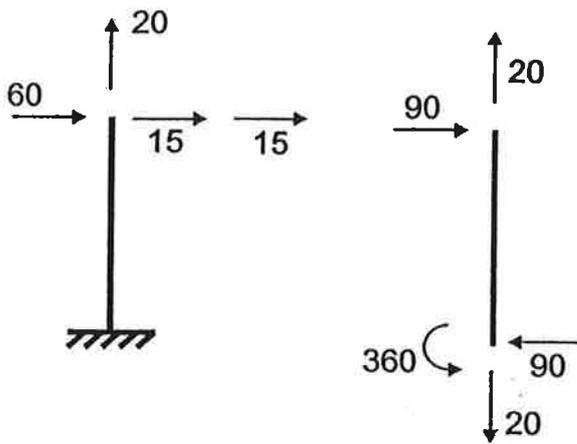
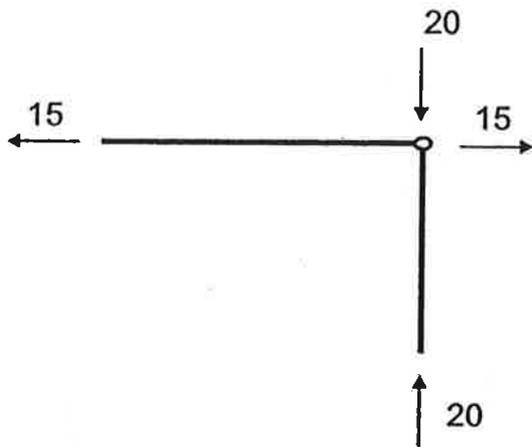




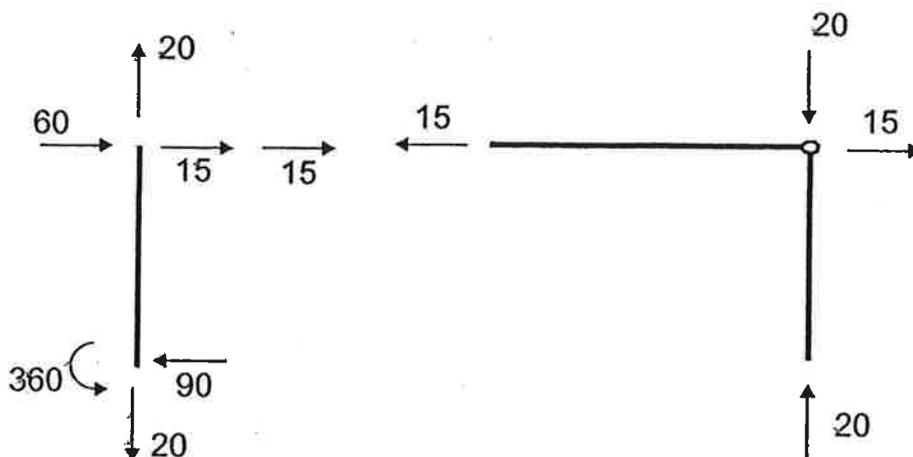
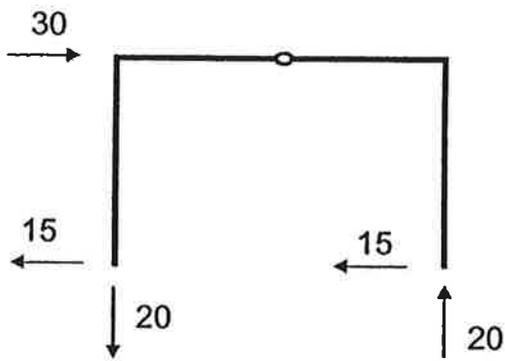
$$\begin{aligned} \sum X = 0 & & X'_B + X_F + 30 = 0 & \Rightarrow X'_B = -15 \\ \sum Y = 0 & & Y'_B + Y_F = 0 & \Rightarrow Y'_B = -20 \\ \sum M_B = 0 & & -30 \cdot 4 + Y_F \cdot 6 = 0 & \Rightarrow Y_F = 20 \\ M_D = 0 & & Y_F \cdot 3 + X_F \cdot 4 = 0 & \Rightarrow X_F = -15 \end{aligned}$$

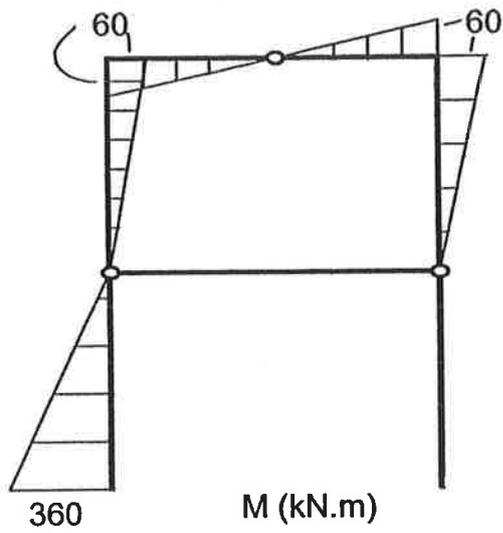
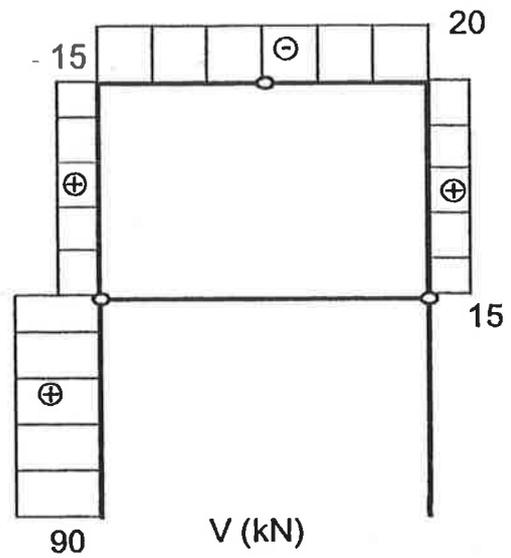
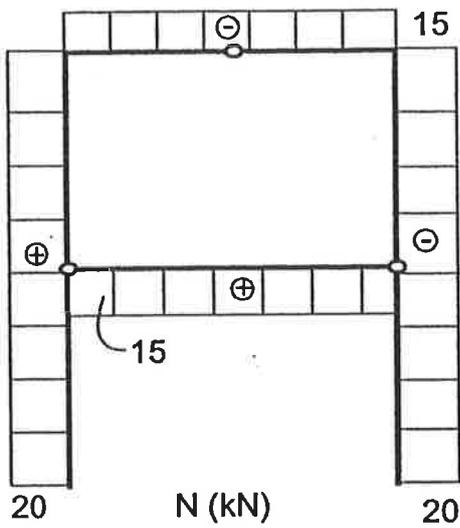


$$\begin{aligned} \sum X = 0 & & X''_B + X_G + 15 = 0 & \Rightarrow X''_B = -15 \\ \sum Y = 0 & & Y''_B + Y_G = 20 & \Rightarrow Y''_B = 0 \\ \sum M_B = 0 & & X_G \cdot 4 + Y_G \cdot 6 - 20 \cdot 6 = 0 & \Rightarrow Y_G = 20 \\ M_F = 0 & & X_G \cdot 4 = 0 & \Rightarrow X_G = 0 \end{aligned}$$



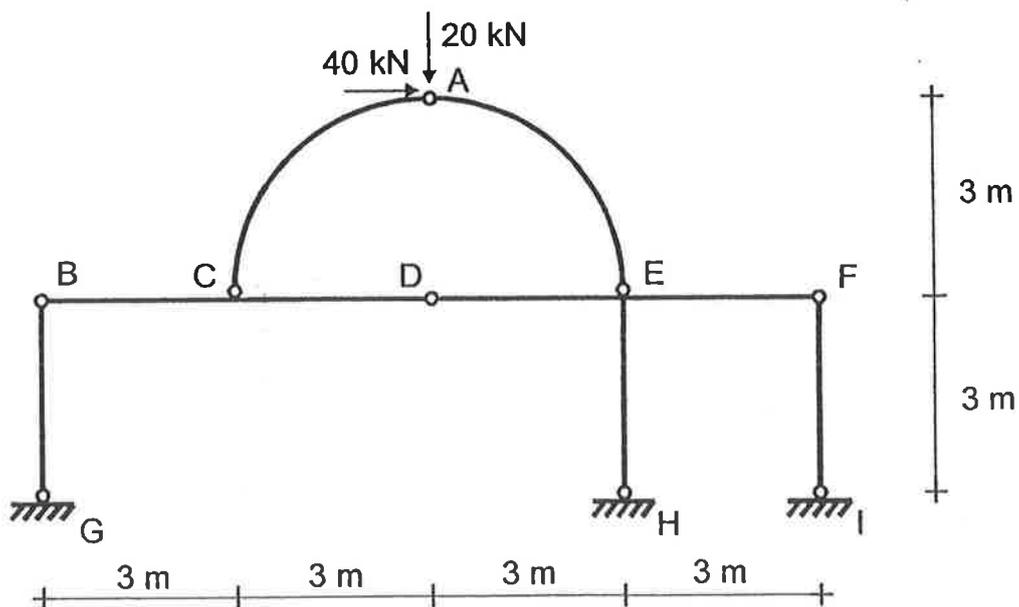
Esforços externos nas subestruturas:

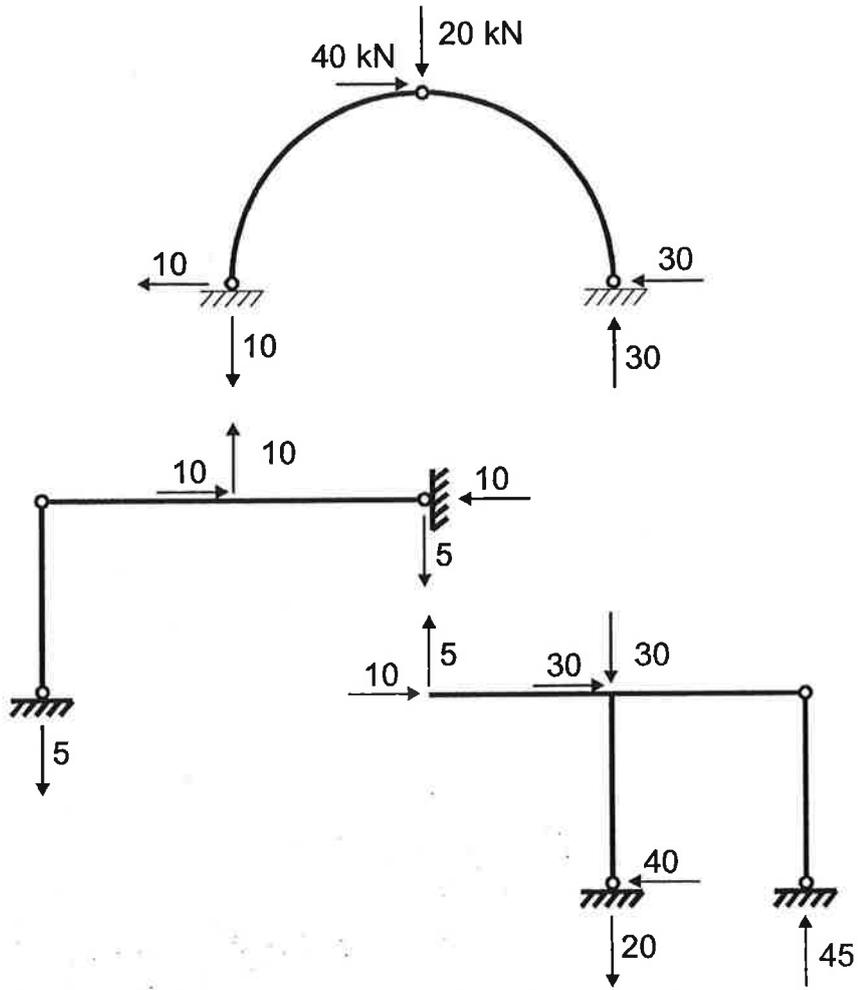




Exemplo 11.3

Traçar o diagrama de momentos fletores dos trechos retos da estrutura da figura:





M (kNm)

