

RAD1507 – Estatística Aplicada à Administração I
Prof. Dr. Evandro Marcos Saidel Ribeiro

Como resolver um problema de forma “Algorítmica”

1. Entender o problema

O que se pretende entender com o estudo?

Neste caso: Obter risco e retorno esperado num portfólio.

2. Formular o problema

Quais são as informações ou dados (*inputs*) disponíveis. A partir destes *inputs* o que será obtido (*outputs*). Serão obtidos valores, gráficos, ...?

Neste caso: a partir de variações de preços serão obtidos o retorno e o risco de uma carteira de investimentos por expressões matemáticas que seguem a teoria de seleção de portfólio, de Markowitz (1952).

3. Elaborar um algoritmo

De forma geral, indicar os passos para obtenção dos valores de *outputs* a partir dos *inputs*.

Neste caso, elaborar algoritmo para simulação e outro para otimização.

4. Implementar o algoritmo

Utilizar um software, Excel, R, Python, ... e implementar o algoritmo utilizando expressões características da linguagem de programação específica.

5. Executar o código e resolver o problema

Obter valores que resolvam o problema inicial.

Seleção de portfólio - Passos para resolução do Trabalho 2

Passo 1. Entendendo o problema. O problema é obter medidas de risco e retorno para uma carteira com seis títulos. Estas medidas de risco e retorno são exemplos práticos de aplicação de estatística na área de administração.

Passo 2. Formulação do problema. Este assunto foi estudado por Markowitz (1952) e para resolvê-lo neste trabalho utilizaremos a formulação de Markowitz resumida a seguir, que considera como entrada séries de preços de ações.

2.1 Medidas de Risco e Retorno

Seja \bar{R}_i a variação média do título i , obtida a partir de uma série de variações de preço num certo período. Seja P_i o investimento percentual neste título.

Então, para um portfólio formado por N títulos temos:

O retorno de cada título:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \vdots \\ \bar{R}_N \end{bmatrix}. \quad (1)$$

A participação em cada título:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}. \quad (2)$$

sendo

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1 \quad (3)$$

e

$$0 \leq P_i \leq 1. \quad (4)$$

A matriz de covariância:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \cdots & S_{1,N} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \cdots & S_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \cdots & S_{N,N} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

O retorno esperado para o portfólio é obtido por:

$$R = \tilde{P}' \tilde{R}. \quad (6)$$

O risco pode ser definido pela variância do portfólio, dada por:

$$\text{Variância} = \tilde{P}' \tilde{S} \tilde{P}, \quad (7)$$

ou então pelo desvio padrão do portfólio, dado por

$$\text{DesvPad} = \sqrt{\text{Variância}}. \quad (8)$$

Passo 3, 4 e 5. Elaboração de algoritmo para o estudo de Risco e Retorno por Simulação e por otimização

A seleção de um portfólio é feita quando são determinados todos os percentuais P_i . Esta determinação pode ser arbitrária, aleatória ou otimizada. A seguir são descritos os algoritmos para resolver o problema pelo método aleatório e pelo método otimizado.

3.1 Simulação aleatória

Considere um estudo com seis títulos. Para obter a matriz de investimento percentual, ou seja, os valores de cada P_i , considere os três passos a seguir:

1. Numa planilha de análise (AnaliseSimula) reserve uma região com seis células para a matriz de participações.
2. Obtenha as participações: Sorteie seis números aleatórios entre 1 e 100. Utilize a função do Excel para obter os números aleatórios: =ALEATÓRIOENTRE(1;10000) Grave estes valores como X_i .

3. Obtenha a soma:
$$Tot = \sum_{i=1}^6 X_i .$$

4. Cada valor de P_i é obtido por:
$$P_i = \frac{X_i}{Tot}$$

A planilha resultante é apresentada a seguir. Note que a coluna A apresenta sorteios aleatórios, na coluna C estes sorteios são transformados em percentuais. Os valores de Retorno e Variância são calculados pelas expressões (6) e (7) .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Simulação		Participação				Risco	Risco
2	13		0,0442	v_ibov		Retorno	Variância	Desvio Padrão
3	88		0,2993	v_petro		-0,000662	0,000119	0,010909
4	54		0,1837	v_dolar				
5	18		0,0612	v_bisa3				
6	91		0,3095	v_elpl4				
7	30		0,1020	v_oibr3				
8	294	Total	1	Soma				
9								

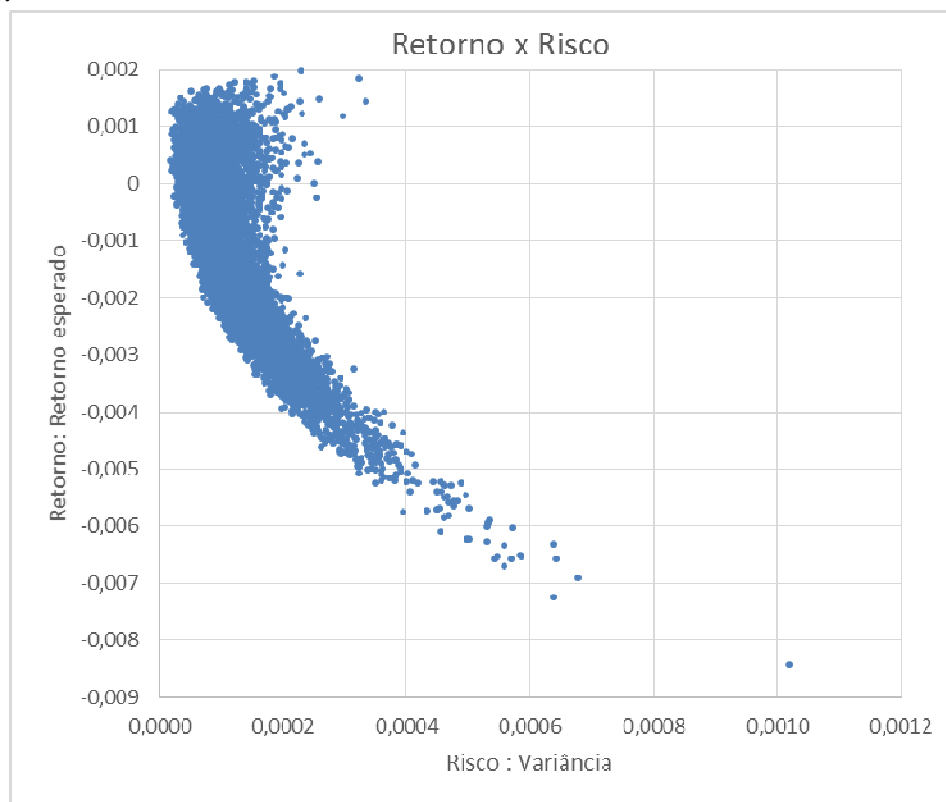
Uma vez definido o portfólio pelos valores de \tilde{P} , obtenha os valores de Risco na célula G3 pela expressão (7) e de Retorno na célula F3 pela expressão (6). Grave os valores obtidos de Variância e de Retorno. Obtenha outra simulação repetindo os passos 1 a 3 e obtendo novos valores de Variância e de R.

Para gravar os valores da Simulação considere desenvolver uma “Macro” que copia os valores de Retorno e Risco obtidos para a coluna A e B, a partir da linha 11. Note que o valor de Retorno está na célula F3 (na programação de macro VBA, esta célula é reconhecida como Cells(3,6), ou seja, linha 3 coluna 6) e o valor de Risco está na célula G3, que no VBA é reconhecida como Cells(3,7).

Na figura a seguir é apresentado um código de programação VBA que copia 1000 valores de Retorno e Risco simulados para as colunas A e B da planilha “AnaliseSimula”.

```
Sub simula()  
'  
' simula Macro  
' Atalho do teclado: Ctrl+t  
'  
For i = 1 To 1000  
    Retorno = Cells(3, 6)  
    Risco = Cells(3, 7)  
    Cells(10 + i, 1) = Retorno  
    Cells(10 + i, 2) = Risco  
    Calculate  
Next i  
  
End Sub
```

Após executar a Macro faça um gráfico de dispersão com os valores obtidos de Risco e Retorno. Veja um exemplo na figura a seguir, na qual foram consideradas 10000 simulações.



3.2 Otimização

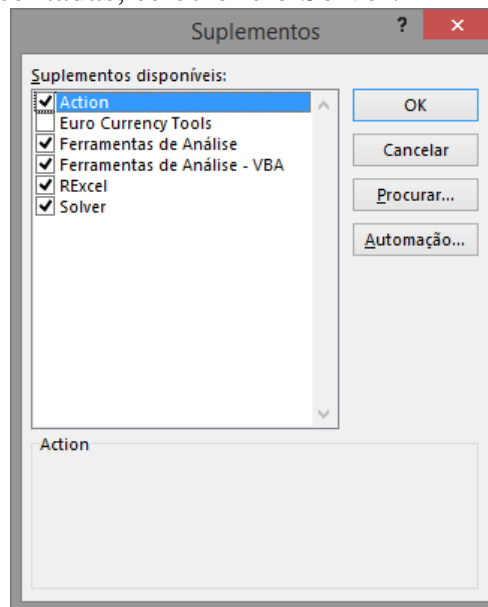
Considere um estudo com seis títulos. Considere valores iniciais para cada P_i de forma que sejam satisfeitas as expressões (3) e (4). Para tanto digite os valores que achar adequado para cada P_i numa nova planilha, planilha “Otimização”. Obtenha os valores de Retorno e Risco da mesma forma do item 2. A planilha deve estar com a seguinte característica:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1							Risco	Risco	
2		Participação	0,2486	v_ibov		Retorno	Variância	Desvio Padrão	
3			0,0000	v_petro		0,001100	0,000013	0,003572	
4			0,5307	v_dolar					
5			0,2070	v_bisa3		Retorno Esperado			
6			0,0000	v_elpl4		0,0013			
7			0,0137	v_oibr3					
8		Total	1,0000						
9									

Utilize um procedimento de otimização, por exemplo utilize a ferramenta SOLVER no Excel. Para habilitar o SOVER, nas versões mais recentes do Excel selecione:

Arquivo → Opções → Suplementos → Suplementos do Excel → [Ir...]

Entre as opções apresentadas, selecione o Solver:



Para realizar a otimização estude as três características necessárias, a Função Objetivo, as Variáveis de decisão, as Restrições:

Função Objetivo: Minimizar a Expressão (7)

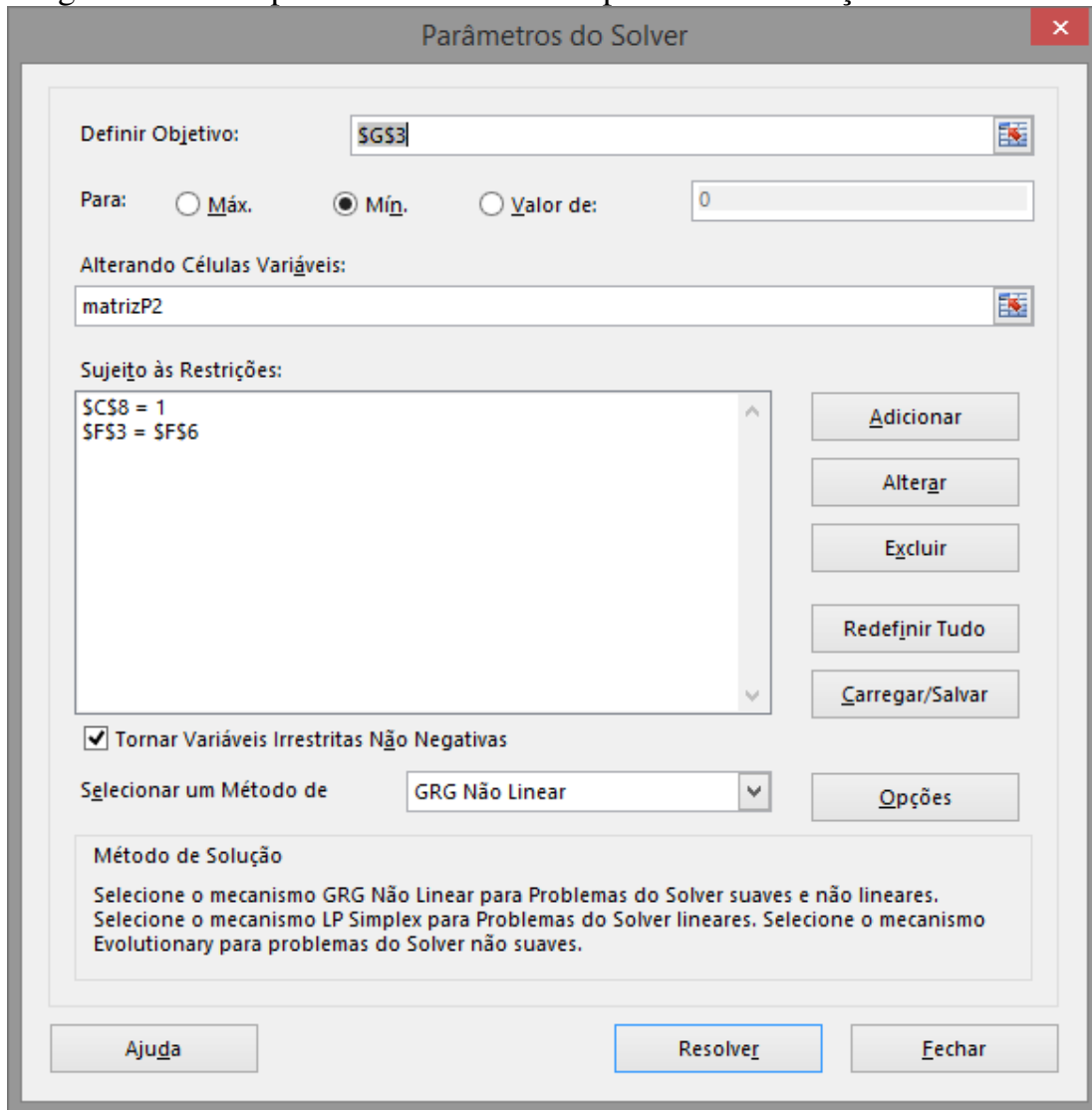
Variáveis de Decisão: Expressão (2)

Restrições:
Expressão (6) = Valor específico
Expressão (3)
Expressão (4)

Nesta nova planilha, “Otimização” a Função Objetivo é a Variância, resultado obtido na célula G3 (célula em vermelho na figura da página anterior).

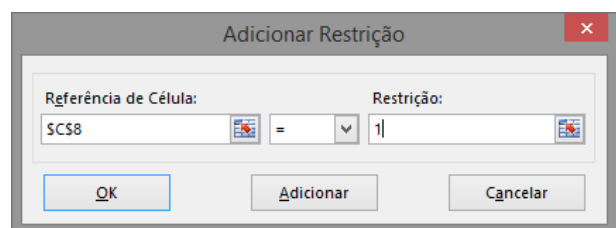
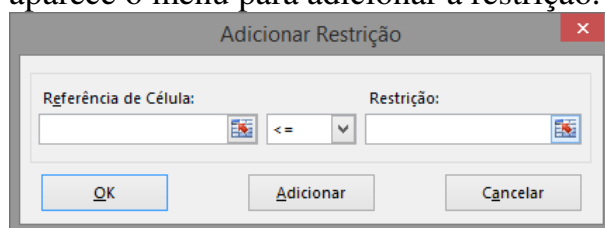
Clique na célula G3 e execute o Solver: Dados → Análise → Solver

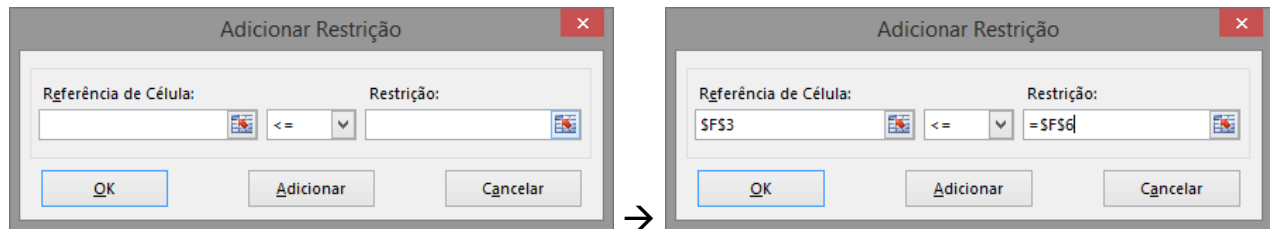
Aparece uma janela com opções para a otimização, a janela dos Parâmetros do Solver. Veja na figura abaixo os parâmetros necessários para esta otimização



Note que a célula a ser otimizada deve ser Minimizada. As Células variáveis contém o nome “matrizP2” que é o nome que eu atribuí para a região C2:C7 da planilha.

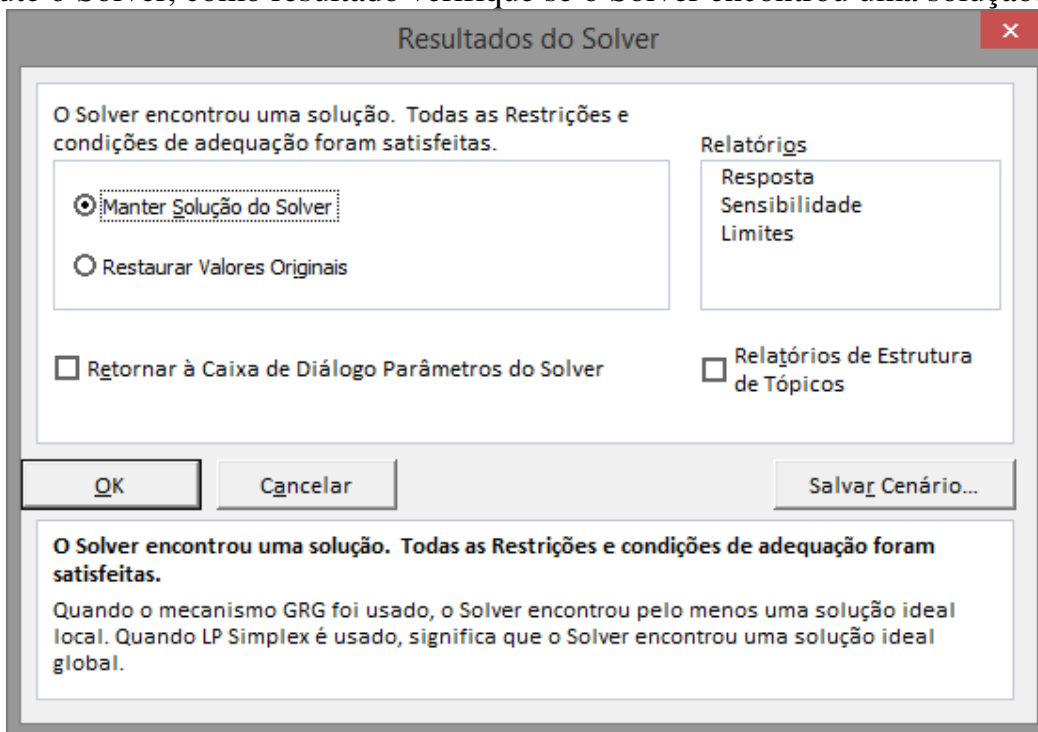
As restrições foram inseridas através do botão [Adicionar]. Clicando em Adicionar aparece o menu para adicionar a restrição.





É importante considerar valor de retorno esperado que esteja dentro dos limites possíveis de obtenção de retorno, ou seja entre o menor retorno médio e o maior retorno médio. No caso dos títulos estudados os valores médios estão entre os valores -0,013177 e 0,002902. De forma prática, serão considerados valores no intervalo -0,013 e 0,003. Para o primeiro cálculo escolha um valor intermediário, por exemplo, 0,001.

Execute o Solver, como resultado verifique se o Solver encontrou uma solução:



Se a solução foi obtida clique em [OK] para Manter a solução do Solver.

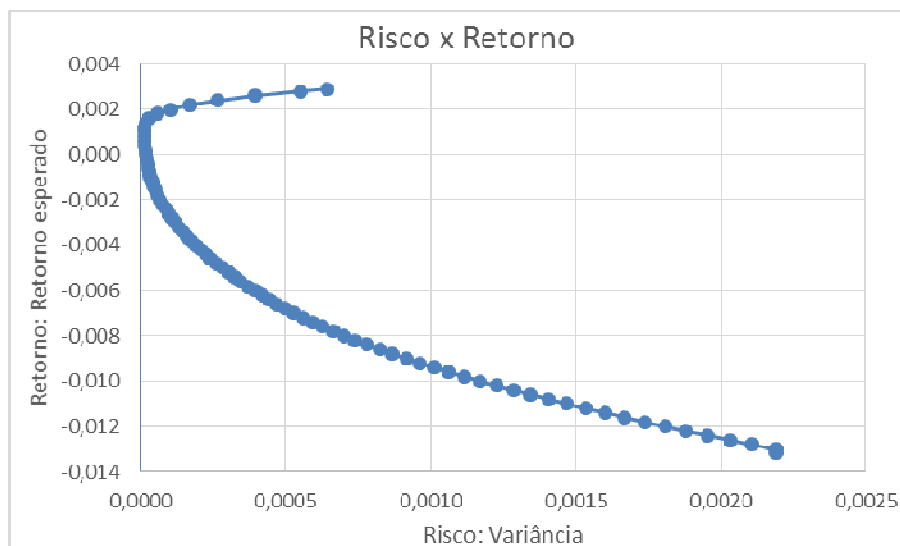
OS valores de P_i são então atualizados para fornecer a carteira otimizada, ou seja aquela que possui um retorno esperado igual ao definido na restrição, que o risco seja o menor possível, e ainda que satisfaça a restrição de que todas as participações somadas resultem em 1.

Para o cálculo o valor de retorno esperado foi digitado na Célula F6.

Com o Solver ajustado, obtenha a otimização para vários valores possíveis de retorno. Faça uma lista de retornos esperados na coluna F, a partir da linha 9. Para cada valor de retorno esperado execute o Solver (copie antes o valor de retorno esperado para a célula F6) e copie o valor obtido para a variância otimizada na coluna G.

Faça um gráfico de Risco x Retorno com os valores obtidos.

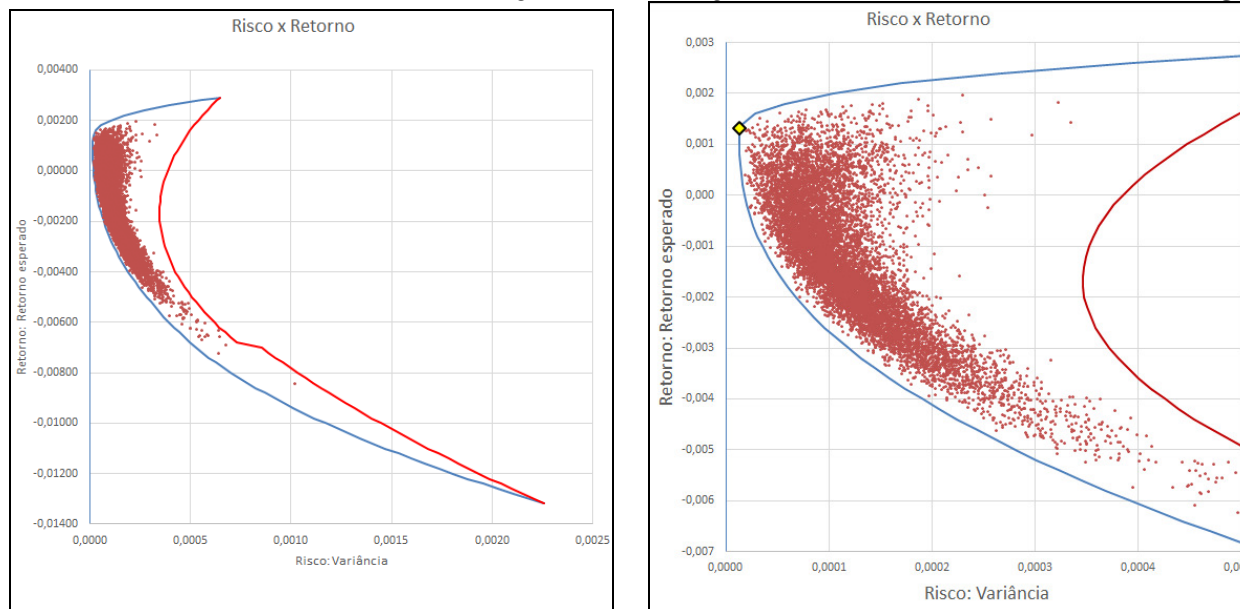
Para este exemplo o gráfico resultante é apresentado na figura da página seguinte.



Pode ser considerada também outra função objetivo, dada pelo índice calculado pelo retorno sobre o risco, $I_S = \frac{R}{DesvPad} = \frac{(6)}{(8)}$. Neste caso deve-se maximizar o índice obtido e as restrições consideradas são apenas as Expressões (3) e (4).

Considerações adicionais

Considerando os resultados, Simulação e Otimização (incluindo o I_S), numa mesma figura:



Na figura acima, a linha azul é a de menor risco, a linha vermelha é a de maior risco o losango amarelo é a carteira com maior I_S . Resultado obtido: $I_S = 0,3592$.

Referência

Harry Markowitz , Portfolio Selection, The Journal of Finance, 7, No. 1, pp. 77-91, 1952.