# Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2021

# Roteiro

12 Conservação de Sal e Calor

- Para começo de conversa...
- Equações de Conservação de $S$ e $T$
- Aplicação da Conservação de Calor

# Roteiro

12 Conservação de Sal e Calor

- Para começo de conversa...
- Equações de Conservação de $S$ e $T$
- Aplicação da Conservação de Calor

# Objetivos desta aula:

- Retomar a discussão sobre fluxo laminar e turbulento.
- Discutir as equações de conservação de sal e de calor.
- Aplicar a estratégia matemática de Reynolds a estas equações.
- Explorar a ideia de termoclina como balanço entre difusão e advecção.
- Interpretar a solução desse balanço.

Pond & Pickard Cap 10

# Conhecimento prévio:

- Derivada material, termos locais e advectivos.
- Medidas Eulerianas e Lagrangianas.
- Interpretação do Laplaciano.
- Decomposição de Reynolds.
- Programação básica.

# Roteiro

12 Conservação de Sal e Calor

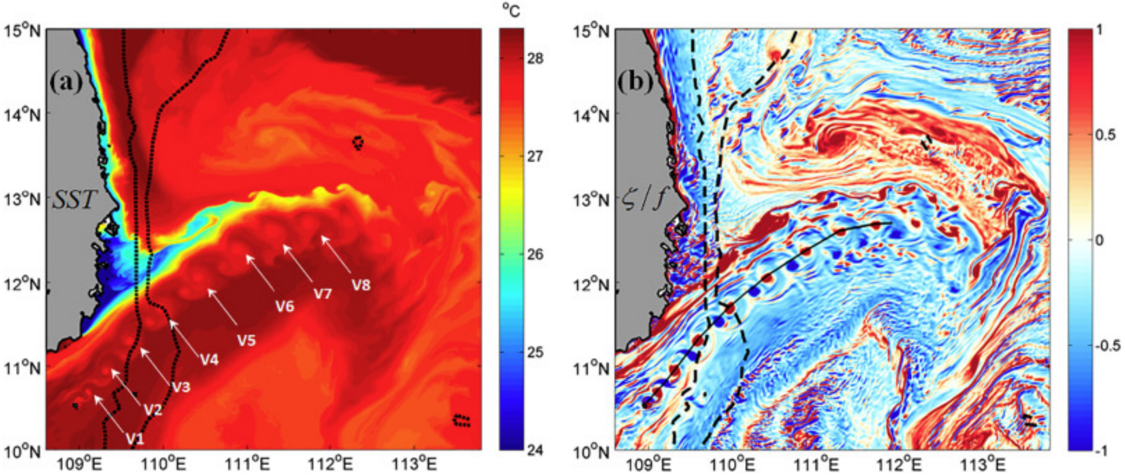
- Para começo de conversa...
- Equações de Conservação de $S$ e $T$
- Aplicação da Conservação de Calor

# O que é um fluxo laminar?

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{não-linear}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{g} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}}_{\text{viscoso}}$$

- Não-linear: $\frac{V^2}{L}$. Viscoso: $\frac{\mu V}{\rho L^2} = \frac{\nu V}{L^2}$. $\frac{\text{Não-linear}}{\text{Viscoso}} = Re = \frac{VL}{\nu}$, $Re$ é o número de Reynolds.
- Se o termo não-linear $\gg$ termo viscoso $\Rightarrow$ turbulência, $Re$ "grande".
- Em torno de cilindros $Re > 10^3 \rightsquigarrow$ turbulento, $Re < 10 \rightsquigarrow$ laminar e $Re\ 10^2 \rightsquigarrow$ alameda de Von Kárman.
- No oceano $Re\ 10^4 - 10^5$.

# Para os curiosos




Yu et al. JMS, 2018, doi.org/10.1016/j.jmarsys.2018.03.010.

# Equações de conservação de S e T

$$\frac{DS}{Dt} = \kappa_S \nabla^2 S \quad (1)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa_T \nabla^2 T + Q_T \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} = \kappa_S \nabla^2 S$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_T \nabla^2 T + Q_T$$

- Assumimos $\kappa_S$ e $\kappa_T$ constantes.
- $\kappa_S \simeq \frac{\nu}{1000}$ e $\kappa_T \simeq \frac{\nu}{10}$. Significado?
- $Q_T$ é fonte de calor.
- Não tem $Q_S$, fontes e sorvedouros nas condições de contorno.
- Equações semelhantes para outras variáveis e.g.$[O_2]$.

# Equações de conservação de S e T

Vamos tratar $\dfrac{DS}{Dt} = \kappa_S \nabla^2 S$ e $\dfrac{DT}{Dt} = \kappa_T \nabla^2 T + Q_T$ de forma análoga ao que fizemos no Tema 1: separar $S$ e $T$ em média $\overline{S}$, $\overline{T}$ e variabilidade $S'$, $T'$ para poder tratar do fluxo turbulento.

Para o termo local, $\overline{\dfrac{\partial S}{\partial t}} = \overline{\dfrac{\partial \overline{S}}{\partial t} + \cancel{\dfrac{\partial S'}{\partial t}}}$ pois a média da anomalia é zero.

Para o advectivo, $\overline{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) S}$

$$
\begin{aligned}
\overline{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) S} = \; & \overline{\overline{u}\frac{\partial \overline{S}}{\partial x}} + \cancel{\overline{\overline{u}\frac{\partial S'}{\partial x}}} + \cancel{\overline{u'\frac{\partial \overline{S}}{\partial x}}} + \overline{u'\frac{\partial S'}{\partial x}} + \\
& \overline{\overline{v}\frac{\partial \overline{S}}{\partial y}} + \cancel{\overline{\overline{v}\frac{\partial S'}{\partial y}}} + \cancel{\overline{v'\frac{\partial \overline{S}}{\partial y}}} + \overline{v'\frac{\partial S'}{\partial y}} + \\
& \overline{\overline{w}\frac{\partial \overline{S}}{\partial z}} + \cancel{\overline{\overline{w}\frac{\partial S'}{\partial z}}} + \cancel{\overline{w'\frac{\partial \overline{S}}{\partial z}}} + \overline{w'\frac{\partial S'}{\partial z}} + \cdots
\end{aligned}
$$

# Conservação de S e T no regime turbulento

De forma análoga à eq. de NS, ficamos com:

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{S}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{S}}{\partial z} + \overline{u'\frac{\partial S'}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial S'}{\partial y}} + \overline{w'\frac{\partial S'}{\partial z}} = \kappa_S \nabla^2 \overline{S}$$

Somamos este zero: $(S'\vec{\nabla} \cdot \vec{v'} = 0)$ aos termos das anomalias para obter:

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{S}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{S}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'S'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'S'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'S'}}{\partial z} = \kappa_S \nabla^2 \overline{S}$$

Aqui novamente entra a ideia brilhante de Reynolds,

$$\overline{u'S'} = -K_{Sx}\frac{\partial \overline{S}}{\partial x}; \quad \overline{v'S'} = -K_{Sy}\frac{\partial \overline{S}}{\partial y}; \quad \overline{w'S'} = -K_{Sz}\frac{\partial \overline{S}}{\partial z}$$

# Conservação de S e T no regime turbulento ... continuação

- Por simetria $K_{Sx}$ e $K_{Sy}$ são similares ($= K_h$),
- $K_{Sz}$ ($= K_z$) é bem menor por causa da estratificação.
- Esses $K$ são determinados pelo fluxo e não pelo material.
- A ordem de grandeza de $K_h$ e $A_h$ e de $K_z$ e $A_z$ são similares.
- Para o fluxo médio turbulento as equações 1 e 2 sem barras ficam assim:

$$\frac{DS}{Dt} = K_h \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\frac{DT}{Dt} = K_h \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q_T \quad (4)$$

# Pontos a poderar

- Retomamos a ideia de que $Re$ indica fluxo turbulento no oceano.
- Partimos da conservação de sal e calor em escala molecular.
- Repetimos o que fizemos no Tema 1 p/ conservação de momentum (NS).
- A hipótese de Reynolds permite uma grande simplificação do problema, pois se postula que a média da advecção turbulenta é proporcional ao gradiente médio de $S$ e $T$.
- Assumimos simetria horizontal mas não vertical, por causa das escalas e da estratificação.

# Roteiro

12 Conservação de Sal e Calor

- Para começo de conversa...
- Equações de Conservação de $S$ e $T$
- Aplicação da Conservação de Calor

# Explorando a termoclina

- Simplifico a Eq. 4: $$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = K_h\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + K_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$ para o caso estacionário e longe da fonte $Q_T(z \simeq 0)$.
- Mesmo p/ circulação de larga escala não há mais simplificações triviais.
- Várias combinações de termos dão resultados interessantes, esta é uma: advecção e difusão verticais se equilibram com $w$, $K_z$ constantes

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{w}{K_z}\frac{\partial T}{\partial z}.$$ Precisamos de 2 condições de contorno (CCs):

1: $T = T_d$ constante no fundo $z = -\infty$, mas basta $z \ll \frac{-K_z}{w}$.

2: $T = T_0$ constante na superfície $z = 0$.

# Explorando a termoclina ... continuação

- Como temos 2 CCs a solução tem 2 constantes, $A$ e $B$.
- Como a função se repete ao ser derivada, uma boa solução deve ser:

$$
\begin{aligned}
T &= A + Be^{\frac{w}{K_z}z} \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= B\frac{w}{K_z}e^{\frac{w}{K_z}z} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= B\frac{w^2}{K_z^2}e^{\frac{w}{K_z}z}
\end{aligned}
$$

Verificando a equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{w}{K_z}\frac{\partial T}{\partial z},$$

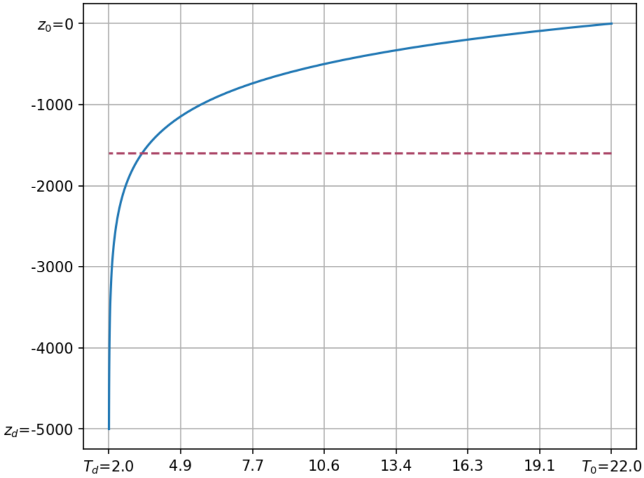
$$B\frac{w^2}{K_z^2}e^{\frac{w}{K_z}z} = \frac{w}{K_z}B\frac{w}{K_z}e^{\frac{w}{K_z}z}$$

Usando as CCs:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= A + Be^0 \Rightarrow T_0 = A + B \\
T_d &= A + Be^{-\infty} \Rightarrow T_d = A \\
B &= T_0 - T_d \\
T(z) &= T_d + (T_0 - T_d)e^{\frac{w}{K_z}z}
\end{aligned}
$$

# Explorando a termoclina ... continuação

- Plote $T(z)$ anotando os valores de $T = T_0,\ T_d$ e $z = 0,\ d$. Assim:




- Mas que $w$ você usa?
- Como eu calculo $K_z$?
- Como eu acho a termoclina?
- O que representa, fisicamente essa termoclina?