

# Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2023

# Roteiro

- 6 Dinâmica Quase-Geostrófica (QG)
  - Para começo de conversa...
  - Progressivamente Abandonando a Geostrofia
  - Quasi-Geostrofia
  - Divergência no modelo QG
  - Conservando PV com Estratificação Constante

# Roteiro

- 6 Dinâmica Quase-Geostrófica (QG)
  - Para começo de conversa...
  - Progressivamente Abandonando a Geostrofia
  - Quasi-Geostrofia
  - Divergência no modelo QG
  - Conservando PV com Estratificação Constante

## Objetivos desta aula:

- Progredir do modelo estritamente geostrófico  $\rightarrow$  águas rasas  $\rightarrow$  QG.
- Permitir velocidades não geostróficas apenas no termo de Coriolis.
- Demonstrar que isso permite divergência horizontal (leia-se  $w \neq 0$ ).
- Introduzir a ideia de continuamente estratificado.
- Obter a conservação de vorticidade potencial QG.

Capítulo 16 do livro do Benoit.

## Conhecimento prévio:

- Intimidade com a equação do movimento geostrófico.
- Intimidade com a equação da continuidade.
- Familiaridade com os n<sup>os</sup> adimensionais ( $Re$ ,  $Ro$ ,  $Ro_T$  e  $Ek$ ).
- Familiaridade com a definição da freq. de Brunt-Väisälä.
- Conhecimento do conceito de vorticidade potencial.
- Se você tem dificuldade com qualquer um desses pontos, **estude-o**.

# Roteiro

- 6 Dinâmica Quase-Geostrófica (QG)
  - Para começo de conversa...
  - Progressivamente Abandonando a Geostrofia
  - Quasi-Geostrofia
  - Divergência no modelo QG
  - Conservando PV com Estratificação Constante

# Modelo estritamente geostrófico

$$\begin{cases} v_g = \frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u_g = -\frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

- Compare com o 1º slide do Tema 3.

- Linear: não tem termos  $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ .

- Plano  $f$ .

- $Ro < 1$  ( $\sim 0.01 - 0.2$ ).

- Não-divergente, i.e.:

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{se o fundo for plano.}$$

- Colunas de Taylor rígidas, alinhadas com o eixo de rotação.

## Modelo de águas rasas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0. \end{cases}$$

- Veja o slide 24 do Tema 3.
- Aproximadamente geostrófico.
- Barotrópico  $\Rightarrow$  Colunas de Taylor c/ divergência.

$Ro_T = \frac{1}{\Omega T} < 1$  Termo de Coriolis é maior que aceleração local,

$Ro = \frac{U}{\Omega L} < 1$  Coriolis é maior que termo não-linear,

$Ek = \frac{A_z}{\Omega H^2} < 1$  Coriolis é maior que termo viscoso.

# Roteiro

## 6 Dinâmica Quase-Geostrófica (QG)

- Para começo de conversa...
- Progressivamente Abandonando a Geostrofia
- **Quasi-Geostrofia**
- Divergência no modelo QG
- Conservando PV com Estratificação Constante

## Caminhando para a Quasi-Geostrofia

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du_g}{Dt} - f_0 \mathbf{v} - \beta_0 y v_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{Dv_g}{Dt} + f_0 \mathbf{u} + \beta_0 y u_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{array} \right.$$

■ Plano  $\beta$ ,  $p \leftarrow p'$ ,

■  $u_g$  e  $v_g$  geostróficos, veja Slide 6.

■ Abrindo as derivadas materiais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} + \cancel{w \frac{\partial u_g}{\partial z}} - f_0 \mathbf{v} - \beta_0 y v_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1) \\ \frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + \cancel{w \frac{\partial v_g}{\partial z}} + f_0 \mathbf{u} + \beta_0 y u_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2) \end{array} \right.$$

## Caminhando para a Quasi-Geostrofia ... continuação

Em (1) substituo  $u_g$  usando geostrofia do Slide 6:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right) + \frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right) \dots \\ & \dots - f_0 \mathbf{v} - \beta_0 y \left( \frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ & -\frac{1}{f_0\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial y} + \frac{1}{f_0^2 \rho_0^2} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{1}{f_0^2 \rho_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - f_0 \mathbf{v} - \frac{\beta_0}{f_0\rho_0} y \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

## Caminhando para a Quasi-Geostrofia ... continuação

Definindo o operador Jacobiano  $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$  com  $a = p$ ,  $b = \frac{\partial p}{\partial y}$ :

$$-\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} - \frac{1}{\rho_0^2 f_0^2} J\left(p, \frac{\partial p}{\partial y}\right) - f_0 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0 f_0} \beta_0 y \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analogamente para (2), substituo  $v_g$  com  $a = p$ ,  $b = \frac{\partial p}{\partial x}$  fica análogo:

$$+\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho_0^2 f_0^2} J\left(p, \frac{\partial p}{\partial x}\right) + f_0 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0 f_0} \beta_0 y \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Se você está acompanhando pelo Benoit, essas são as Eqs. 16.10a e 16.10b.

## Onde chegamos com isso?

Fica mais fácil entender se isolarmos  $u$  e  $v$  que são as velocidades totais:

$$v = + \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial y} - \frac{1}{\rho_0^2 f_0^3} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \beta_0 y \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$u = \underbrace{- \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{Geostrofia}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0 f_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} - \frac{1}{\rho_0^2 f_0^3} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \beta_0 y \frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{Correções Ageostróficas}}$$

O 1º termo do lado direito é simples geostrofia.

O 2º é a parte **a**geostrófica: termos menores ( $p$  é uma anomalia) que permitem divergência.

# Roteiro

## 6 Dinâmica Quase-Geostrófica (QG)

- Para começo de conversa...
- Progressivamente Abandonando a Geostrofia
- Quasi-Geostrofia
- **Divergência no modelo QG**
- Conservando PV com Estratificação Constante

## Sobre a divergência

Por continuidade  $-\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ . Já sabemos que  $(u_g, v_g)$  é não-divergente  $\therefore$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} - \frac{1}{\rho_0^2 f_0^3} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \beta_0 y \frac{\partial p}{\partial y} \right] \dots \\ \dots &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial y} - \frac{1}{\rho_0^2 f_0^3} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \beta_0 y \frac{\partial p}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0 f_0^2} \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right]}_{\text{Há um } \nabla^2 p \text{ aqui}} - \frac{1}{\rho_0^2 f_0^3} \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right]}_{\text{* Aguarde um pouco...}} + \dots \\ \dots &+ \frac{\beta_0}{\rho_0 f_0^2} \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]}_{\text{Sobra apenas } \frac{\partial p}{\partial x}} \end{aligned}$$

## Sobre a divergência ... continuação

Expandindo o termo marcado com  $\star$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} J \left( p, \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \right).$$

Usando a regra do produto e reagrupando:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial y^2} \right) + \dots \\ &\dots \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

## Sobre a divergência ... continuação

Podemos usar o Jacobiano aqui:

$$\begin{aligned} \star &= \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = J(p, \nabla_h^2 p). \end{aligned}$$

Juntando os termos:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p + \frac{1}{\rho_0 f_0} J(p, \nabla_h^2 p) + \beta_0 \frac{\partial p}{\partial x} \right].$$

Podemos argumentar por análise de escalas que  $w$  é da mesma ordem dos termos ageostróficos, justificando a eliminação dos termos em  $w$  do Slide 9.

## Divergência horizontal

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p + \frac{1}{\rho_0 f_0} \mathcal{J}(p, \nabla_h^2 p) + \beta_0 \frac{\partial p}{\partial x} \right].$$

- Isso é convergência horizontal pois  $\frac{\partial \omega}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ .
- Pense em termos geostróficos: Se  $\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial x}$  e  $-\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial y}$  são  $v_g$  e  $u_g$ ,
  - o Laplaciano contém a variação temporal da vorticidade relativa  $\zeta$ ;
  - o Jacobiano forma termos advectivos com  $\zeta$ ;
  - o termo em  $\beta_0$  representa advecção de vorticidade planetária.
  - $\frac{\partial \omega}{\partial z}$  é o estiramento da coluna. Percebe onde quero chegar?

## Divergência horizontal ... continuação

Convença-se disso mostrando *matematicamente* que em:

$$\frac{1}{\rho_0 f_0^2} \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p}_1 + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 f_0} J(p, \nabla_h^2 p)}_2 + \underbrace{\beta_0 \frac{\partial p}{\partial x}}_3 \right]$$

- 1 contém a variação temporal da vorticidade relativa  $\zeta$ ;
- 2 contém a advecção de  $\zeta$  pelo fluxo geostrófico;
- 3 contém a advecção de vorticidade planetária.

# Roteiro

- 6 Dinâmica Quase-Geostrófica (QG)
  - Para começo de conversa...
  - Progressivamente Abandonando a Geostrofia
  - Quasi-Geostrofia
  - Divergência no modelo QG
  - Conservando PV com Estratificação Constante

## Conservação de massa

Considere  $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0$  com  $\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$  pequeno,  $T$  grande e  $w$  pequeno

no modelo **quasi**geostrófico. Substituindo  $u_g$  e  $v_g$ :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0; \text{ lembrando que } N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}, \text{ assumindo}$$

N constante e usando a definição de  $J$ : 
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{f_0 \rho_0} J(p, \rho') - \frac{\rho_0 N^2}{g} w = 0.$$

## Conservação de massa ... continuação

$$\text{Divido por } \frac{N^2}{g}: \quad \frac{g}{N^2} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{g}{N^2} \frac{1}{f_0 \rho_0} J(p, \rho') - \rho_0 w = 0.$$

$$\text{Aplico } \frac{\partial}{\partial z}: \quad g \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) + \frac{g}{f_0 \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} J(p, \rho') \right) - \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

$$\text{Uso } \rho' = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z}: \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{f_0 \rho_0} J \left( p, \frac{1}{N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Do Slide 17 (ou Benoit 16.12) tenho

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p + \frac{1}{\rho_0 f_0} J(p, \nabla_h^2 p) + \beta_0 \frac{\partial p}{\partial x} \right] \text{ substituo } \frac{\partial w}{\partial z}, \text{ ou seja,}$$

estiramento vertical, na conservação de massa.

## Combinando conservação de massa e momentum

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{f_0 \rho_0} J \left( p, \frac{1}{N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{f_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p + \frac{1}{\rho_0 f_0} J \left( p, \nabla_h^2 p \right) + \beta_0 \frac{\partial p}{\partial x} \right]$$

Rearranjando os termos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla_h^2 p + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{f_0 \rho_0} J \left[ p, \nabla_h^2 p + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] + \beta_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Lembrando que  $\psi = \frac{1}{\rho_0 f_0} p$ , definindo  $q = \nabla_h^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta_0 y$  temos:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0} \text{ que é a conservação de vorticidade potencial.}$$

## Pontos a ponderar

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0} \quad \text{onde } q = \nabla_h^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta_0 y.$$

■  $u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$  e  $v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ .  $p = \rho_0 f_0 \psi$  ( $p \leftarrow p'$ ).

■ Do Slide 12 temos velocidades ageostróficas; convertendo  $p$  para  $\psi$ :

$$u_a = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + J \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \beta_0 y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$$

$$v_a = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + J \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \beta_0 y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$$

escalando dá para confirmar que  $(u_a, v_a) \ll (u_g, v_g)$ .

## Pontos a ponderar ... continuação

- Do Slide 20 podemos obter  $w = -\frac{f_0}{N^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \mathbf{J} \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{z}} \right) \right]$  que é pequeno também pois vem da divergência de  $(u_a, v_a)$ .
- Quanto mais estratificado, maior o  $N^2$ , **menor** o  $w$ . Pense nisso.
- Neste modelo QG a hidrostática ainda vale  $\therefore \rho' = -\frac{\rho_0 f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ .
- Permitimos velocidades ageostróficas **só** no termo de Coriolis, todos os resultados obtidos aqui dependem da rotação.

## Pontos a ponderar ... continuação

$$q = \underbrace{\nabla_h^2 \psi}_{\text{Relativa}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)}_{\text{de Estiramento}} + \underbrace{\beta_0 y}_{\text{Planetária}}$$

- Nessa definição de PV temos as três formas de vorticidade,
  - a relativa se refere à rotação local, o bom e velho  $\zeta$ ;
  - a de estiramento se refere ao esticar/encolher dos **tubos de vórtice**, que são o que restou das nossas colunas de Taylor quando relaxamos a geostrofia;
  - a planetária, porque a Terra é redonda e o oceano é uma casca fina: a partícula muda seu momento de inércia quando se move meridionalmente por se aproximar ou se afastar do eixo de rotação.

## Pontos a ponderar ... continuação

A maior novidade aqui é o termo de estiramento,  $q = \dots + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \dots$

Note que  $\psi$ ,  $p$  e  $\rho'$  estão relacionados via hidrostática, de modo que:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0 g}{N^2} \frac{\rho'}{\rho_0} \right) = \overbrace{\frac{f_0 g}{\rho_0 N^2}}^{\text{Constantes}} \underbrace{\left( \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right)}_{\text{Estiramento}} . \quad \text{Por isso é justificado}$$

chamar esta última forma de *vorticidade de estiramento* e obtê-la a partir de  $T(z)$  e  $S(z)$ .

## Escala dos termos de $q$

$$q = \underbrace{\nabla_h^2 \psi}_{\frac{U}{L}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)}_{\frac{f_0^2 UL}{N^2 H^2}} + \beta_0 y, \text{ A razão entre as vorticidades de estiramento}$$

e relativa é o número de Burger  $\frac{U}{\frac{f_0^2 UL}{N^2 H^2}} = \frac{N^2 H^2}{f_0^2 L^2} = Bu$ , se  $Bu \ll 1$  o estiramento

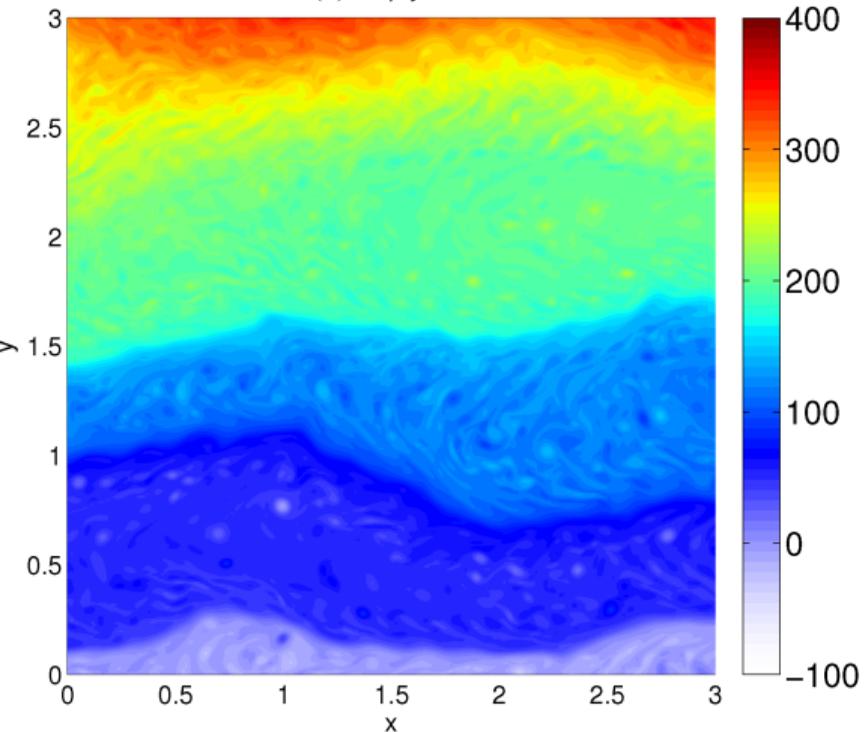
domina, ou seja, parece homogêneo geostrófico onde topografia tem um papel importante; se  $Bu \gg 1$  a vorticidade relativa domina e as camadas desacoplam umas das outras.

## Raios de deformação de Rossby

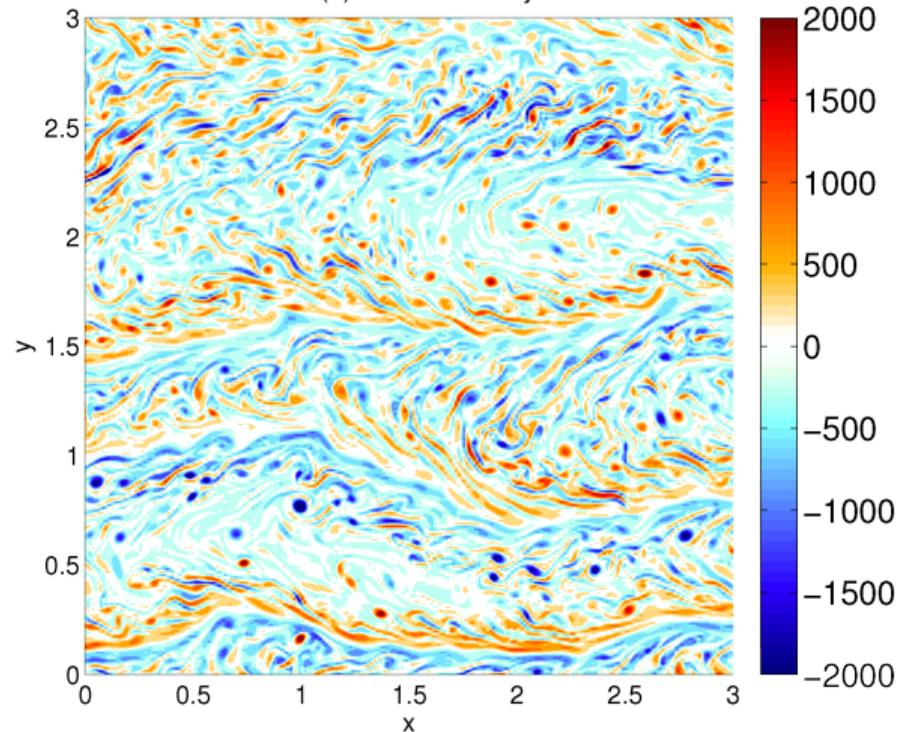
- Se  $Bu \simeq 1$  :  $L = \frac{NH}{f_0} = R_r$ , é o raio de deformação de Rossby.
- Definindo a gravidade reduzida como  $g' = g \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$  ( $\sim 0.01$ ), como  $N^2 \sim \frac{g\Delta\rho}{\rho_0 H}$ ,  $N = \sqrt{\frac{g'}{H}}$  (aproximadamente).
- Dessa forma  $R_r = \frac{\sqrt{g'H}}{f_0}$  num fluido de 2 camadas.
- No caso homogêneo onde  $R_r = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$  o valor de  $R_r$  é  $\sim 10$  vezes maior.
- A estratificação faz com que os fenômenos onde  $Bu \sim 1$  tenham um tamanho menor em comparação com o caso homogêneo. E.g.: vórtices de mesoescala, ondas de Rossby.

# Fim do Tema 6

(a)  $\theta + \beta y$



(b) relative vorticity



Lapeyre, G., Fluids (2017), <https://doi.org/10.3390/fluids2010007>