

Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2021

Roteiro

3 Geostrofia e Além

- Para começo de conversa...
- O Teorema de Taylor–Proudman
- Contornos Geostróficos
- Permitindo um Fundo Inclinado
- Permitindo um Pouco de Aceleração

Roteiro

3 Geostrofia e Além

- Para começo de conversa...
- O Teorema de Taylor–Proudman
- Contornos Geostróficos
- Permitindo um Fundo Inclinado
- Permitindo um Pouco de Aceleração

Objetivos desta aula:

- Provar o teorema de Taylor–Proudman.
- Discutir o significado de contornos geostróficos para um oceano homogêneo.
- Explorar as consequências da inclusão dos termos de aceleração.
- Derivar as equações do modelo de águas rasas.

Capítulo 7 do livro do Benoit.

Conhecimento prévio:

- Intimidade com a equação do movimento geostrófico.
- Intimidade com a equação da continuidade.
- Familiaridade com os n^{os} adimensionais (Re , Ro , Ro_T e Ek).
- Se você tem dificuldade com qualquer um desses pontos, **estude-o**.

Roteiro

3 Geostrofia e Além

- Para começo de conversa...
- O Teorema de Taylor–Proudman
- Contornos Geostróficos
- Permitindo um Fundo Inclinado
- Permitindo um Pouco de Aceleração

Movimento geostrófico...

de um fluido homogêneo, fundo plano.

Se $Ro \ll 1$, $Ro_T \ll 1$ e $Ek \ll 1$,

$$\begin{cases} -fv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ +fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$
$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

- Cons. de momentum e massa.
- Note o ρ_0 : o fluido homogêneo.
- Note a ausência de $\frac{D}{Dt}$: fluxo médio.
- Falta $A_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$: fluxo invíscido.
- Sim, esse p é um p' .

Teorema de Taylor–Proudman

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{cases} -fv & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ +fu & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{cases} \quad \begin{cases} -f \frac{\partial v}{\partial z} & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ +f \frac{\partial u}{\partial z} & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad \begin{cases} -f \frac{\partial v}{\partial z} & = 0, \\ +f \frac{\partial u}{\partial z} & = 0. \end{cases}$$



- Faça passo a passo.
- \therefore u e v não variam em z .
- Em cada (x, y) a camada se move com a mesma velocidade, da superfície até o fundo.

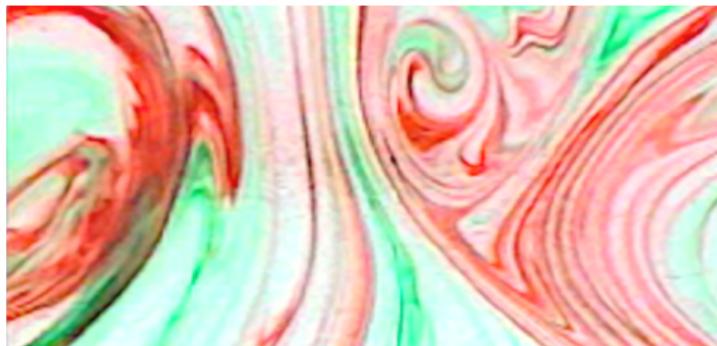
Visualize e entenda as colunas de Taylor

Veja [nosso experimento](#) e [este outro](#).

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

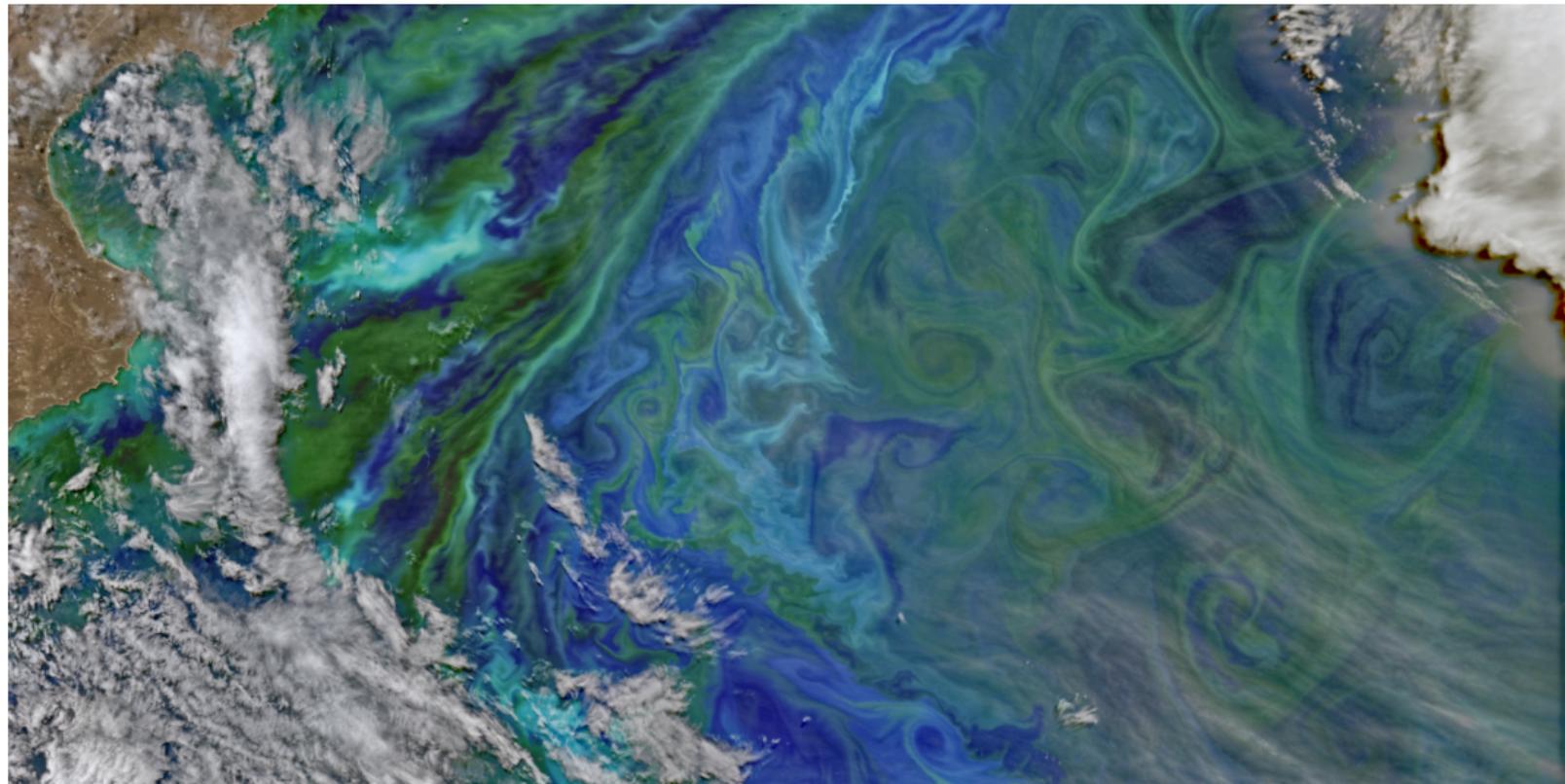
- Na parede do obstáculo $u, v = 0$.
- Se passassem por cima $u, v \neq 0$ e $\frac{\partial u, v}{\partial z} \neq 0$.
- \therefore tanto o confete como a tinta desviam do obstáculo.
- Partículas sobre o obstáculo tendem a ficar lá.
- As *colunas de Taylor* vem em dois tamanhos: médio sobre a pastilha e grande no resto do tanque.

Rigidez rotacional: olhando o tanque de cima



- Estes padrões são comuns em experimentos desse tipo.
- A tinta forma **fitas** como um rocambole ou um bolo-de-roló.
- As partículas se movem na vertical, mas não na horizontal.
- Por isso as tintas não se misturam mesmo depois de muitas rotações.

Olhando o oceano de cima



Roteiro

3 Geostrofia e Além

- Para começo de conversa...
- O Teorema de Taylor–Proudman
- **Contornos Geostróficos**
- Permitindo um Fundo Inclinado
- Permitindo um Pouco de Aceleração

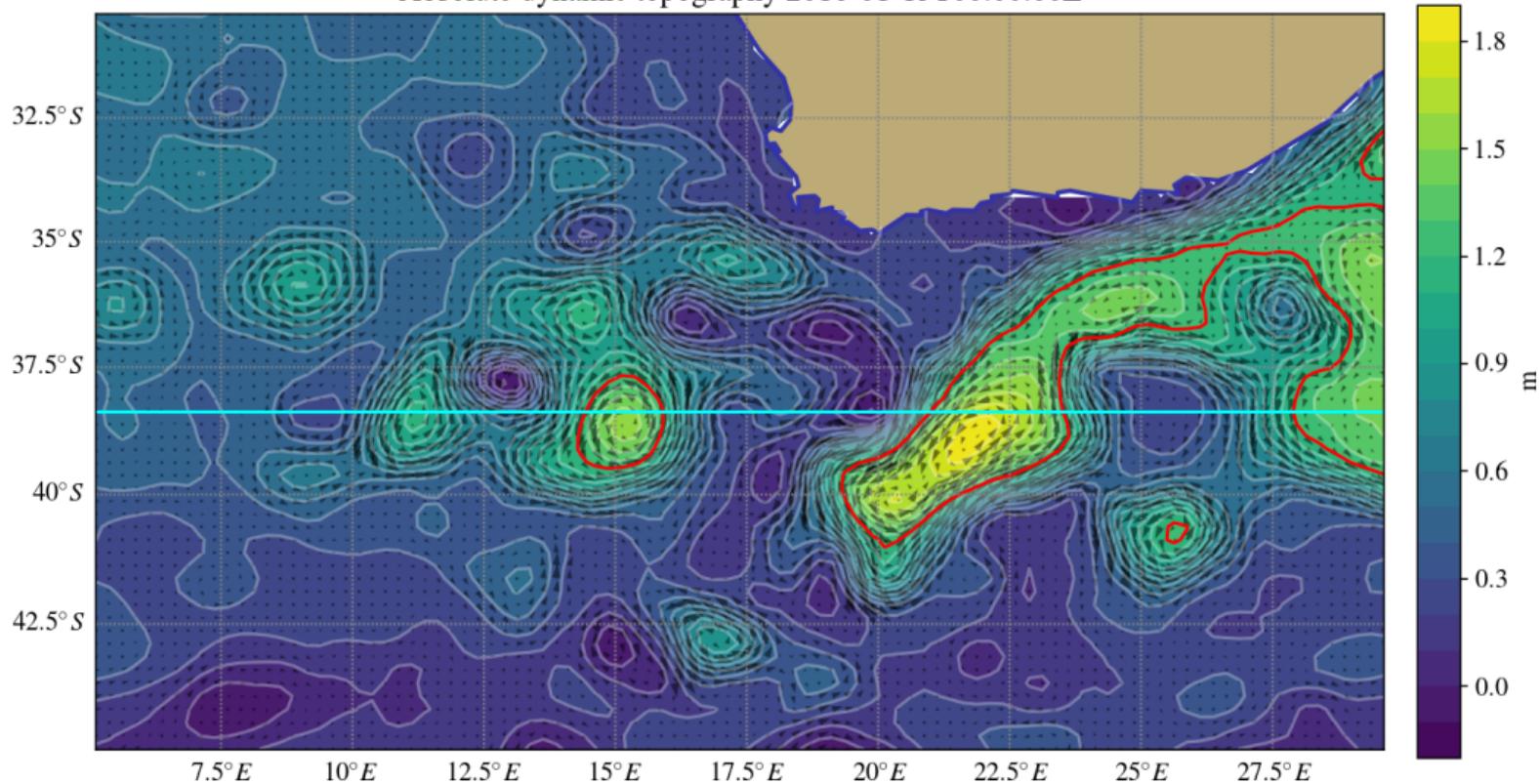
Adquira esta perspectiva

$$\begin{cases} v &= \frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u &= -\frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{cases}$$

- $\vec{v} \perp \vec{\nabla} p$, $\vec{v} \parallel$ a contornos de p (convença-se disso).
- Se $p = \rho_0 g \eta$, $\vec{v} \parallel$ a contornos de anom. da altura η .
- Mostre que contornos de p e η coincidem com linhas de corrente ψ .
- Nesse fluxo *isobárico* nenhum trabalho é realizado ao longo das isóbaras.
- Uma vez iniciado ele continua indefinidamente.

Na prática, o que resulta disso?

Absolute dynamic topography 2016-01-15T00:00:00Z



Do plano visual para o intelectual

A Figura 13 mostra dados de satélites altimétricos.

- Os vetores velocidade (preto) tangenciam os contornos de anomalia da altura η (cinza, vermelho)
- O valor de η é indicado em cores: amarelo=calombo, indigo=vale.
- Se o oceano fosse homogêneo, essas velocidades seriam constantes da superfície ao fundo, é o caso *barotrópico*.
- Na realidade elas se referem aproximadamente à média na camada acima da termoclina, é um caso *baroclínico*.

Consequência de trabalharmos no plano f

- Na figura do slide 13 a linha ciano indica f_0 constante. Uns poucos graus em torno dela $f \simeq f_0$.
- Chamamos esse tipo de aproximação de *plano- f* .
- Há uma consequência importante dessa aproximação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \text{ por continuidade } \boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 0.}$$

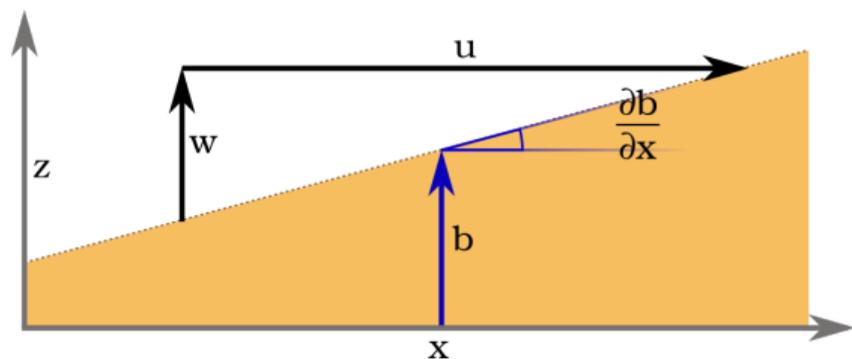
- O fluxo horizontal é não-divergente no plano f .

Roteiro

3 Geostrofia e Além

- Para começo de conversa...
- O Teorema de Taylor–Proudman
- Contornos Geostróficos
- Permitindo um Fundo Inclinado
- Permitindo um Pouco de Aceleração

Fluido homogêneo, geostrófico, plano- f , mas fundo inclinado.



- Como o fundo não é poroso nem viscoso, $w = u \frac{\partial b}{\partial x}$.
- Generalizando, $w = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$.

■ Porém $w = 0$ tanto na superfície¹ como no fundo².

■ Deduzimos $\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \therefore \quad u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ **fluxo segue as isóbatas.**

¹a água não sai voando

²o fundo não é poroso

Pontos a ponderar

- Obviamente oceano não é *exatamente* assim.
- Porém, pense em regiões onde Δb é da ordem de H .
- Você consegue me dar dois exemplos?
- Nesses casos o fluxo **tende** a seguir as isóbatas.
- O fluxo dá a volta nos obstáculos e podemos notar isso até na superfície, através da análise do gradiente de clorofila.

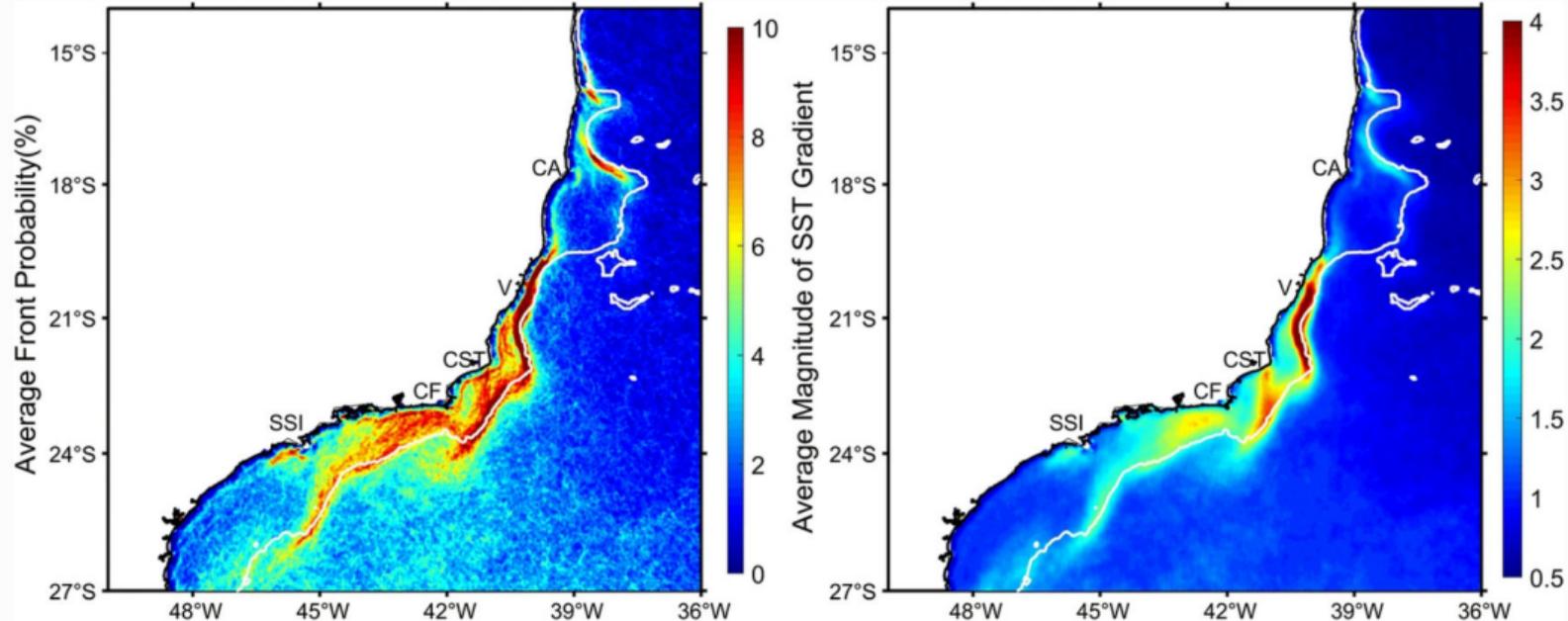
Pontos a ponderar

- Obviamente oceano não é *exatamente* assim.
- Porém, pense em regiões onde Δb é da ordem de H .
- Você consegue me dar dois exemplos?
- Isso, talude continental e ilhas oceânicas.
- Nesses casos o fluxo **tende** a seguir as isóbatas.
- O fluxo dá a volta nos obstáculos e podemos notar isso até na superfície, através da análise do gradiente de clorofila.

Pontos a ponderar

- Obviamente oceano não é *exatamente* assim.
- Porém, pense em regiões onde Δb é da ordem de H .
- Você consegue me dar dois exemplos?
- Nesses casos o fluxo **tende** a seguir as isóbatas.
- O fluxo dá a volta nos obstáculos e podemos notar isso até na superfície, através da análise do gradiente de clorofila.

Na prática é assim



Linha branca = 200 m; média e prob. de $|\nabla T|$ ($^{\circ}\text{C}/100\text{ km}$) de 9/02 a 8/16.

Chen, HH., Qi, Y., Wang, Y. et al. Seasonal variability of SST fronts and winds on the SE continental shelf of Brazil. *Oc. Dyn.* 69, 1387–1399 (2019)

Roteiro

3 Geostrofia e Além

- Para começo de conversa...
- O Teorema de Taylor–Proudman
- Contornos Geostróficos
- Permitindo um Fundo Inclinado
- Permitindo um Pouco de Aceleração

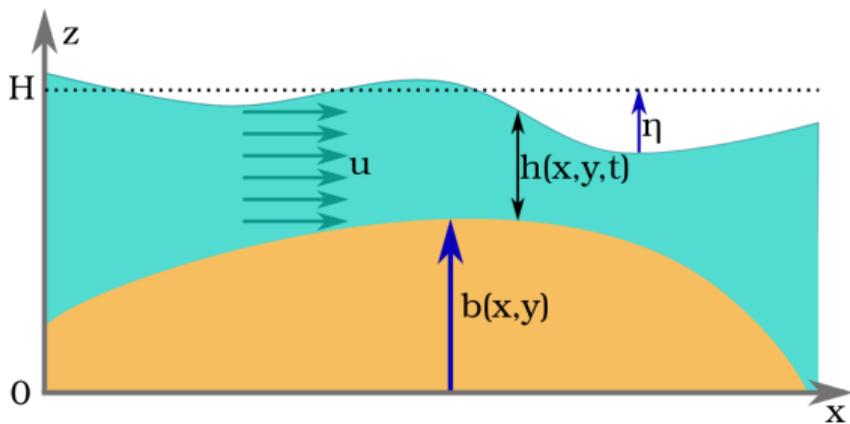
Fluido homogêneo, invíscido e barotrópico

$$\text{Barotrópico} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

- Aplicando $\frac{\partial}{\partial z}$ na continuidade, sei que $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$. **Porquê?**
- Isso resulta em $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$, ou seja, w pode variar linearmente.
- A pequena **aceleração** permite ao fluxo pode desviar das isóbatas.

Fluxo dependente do tempo



Integrando a eq. cont. em z:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_b^{b+h} dz + w|_b^{b+h} = 0$$

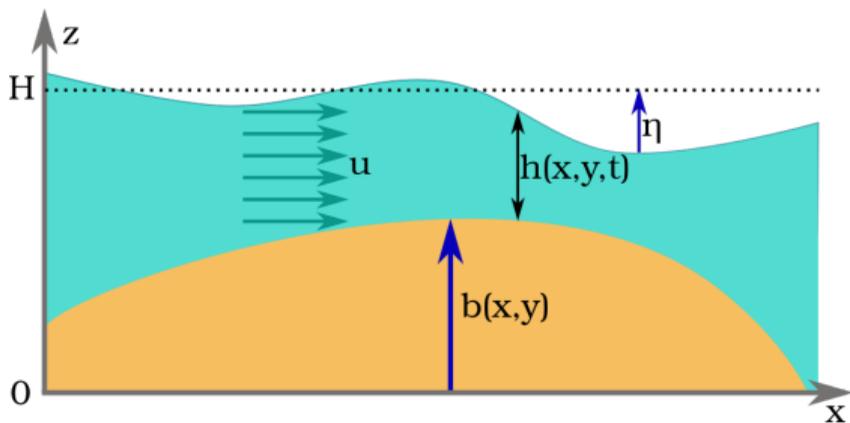
■ No fundo, já vimos que $w|_{z=b} = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y}$.

■ Na superfície $w|_{z=b+h} = \frac{\partial(b+h)}{\partial t} + u \frac{\partial(b+h)}{\partial x} + v \frac{\partial(b+h)}{\partial y}$.

■ b não varia no tempo³.

³ainda bem!

Fluxo dependente do tempo



Integrando a eq. cont. em z:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_b^{b+h} dz + w|_b^{b+h} = 0$$

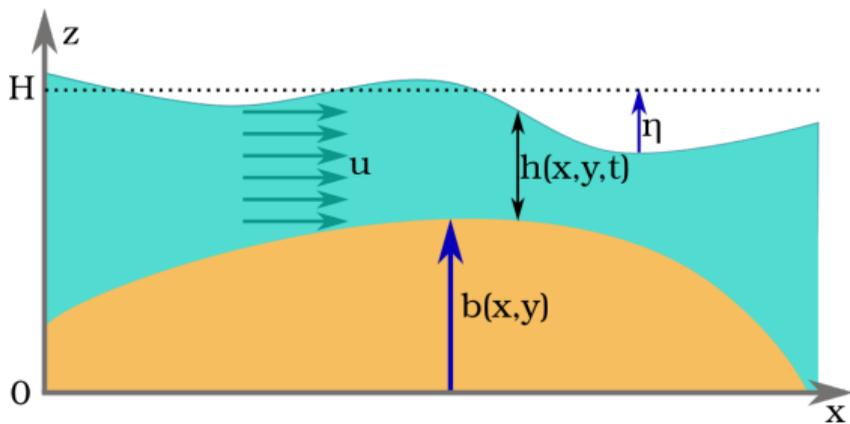
■ No fundo, já vimos que $w|_{z=b} = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y}$.

■ Na superfície $w|_{z=b+h} = \frac{\partial(b+h)}{\partial t} + u \frac{\partial(b+h)}{\partial x} + v \frac{\partial(b+h)}{\partial y}$.

■ b não varia no tempo³.

³ainda bem!

Fluxo dependente do tempo



Integrando a eq. cont. em z:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_b^{b+h} dz + w|_b^{b+h} = 0$$

- No fundo, já vimos que $w|_{z=b} = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y}$.
- Na superfície $w|_{z=b+h} = \frac{\partial(b+h)}{\partial t} + u \frac{\partial(b+h)}{\partial x} + v \frac{\partial(b+h)}{\partial y}$.
- b não varia no tempo³.

³ainda bem!

Fluxo dependente do tempo (cont.)

- É prático adotar uma superfície de referência H tal que $\eta = b + h - H$

- $$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

- Esta eq. substitui a continuidade eliminando w e z .

- Se a pressão atmosférica for uniforme, $p = \rho_0 g \eta$ ou $\eta = \frac{1}{\rho_0 g} p$.

- Vamos substituir isso nas equações do slide 21.

As equações de águas rasas

Para um fundo qualquer:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv & = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu & = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) & = 0. \end{cases}$$

Para o fundo plano:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv & = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu & = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) & = 0. \end{cases}$$

- Essas eqs. se aplicam em modelos com várias camadas homogêneas.
- A superfície da camada n será o fundo da $n + 1$ e assim por diante.
- Modelos numéricos funcionam assim.

Aspectos práticos e filosóficos

- A figura do slide 13 foi feita com dados medidos por satélites altimétricos.
- No processamento dos dados de altura, H é a altura do *geóide marinho*, uma superfície teórica onde o oceano está em equilíbrio hidrostático.
- As correntes *geostróficas* dessa figura foram estimadas a partir das medidas de $\eta(x, y, t)$ cuja precisão⁴ é 2 cm.
- Esses dados são assimilados por modelos numéricos como o ECCO e eles estimam a velocidade *total*, geostrófica + ageostrófica.

⁴o satélite está a 1336 km de altura

Fim do Tema 3

