

Covariância

Análise de portfólio

Prof. Dr. Evandro Marcos Saidel Ribeiro
FEA-RP
Universidade de São Paulo

Portfolio Selection

Author(s): Harry Markowitz

Source: *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1 (Mar., 1952), pp. 77-91

Published by: [Wiley](#) for the [American Finance Association](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/2975974>

Accessed: 08/05/2014 10:52

The return (R) on the portfolio as a whole is a weighted sum of random variables (where the investor can choose the weights). From our discussion of such weighted sums we see that the expected return E from the portfolio as a whole is

$$E = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i$$

and the variance is

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} X_i X_j$$

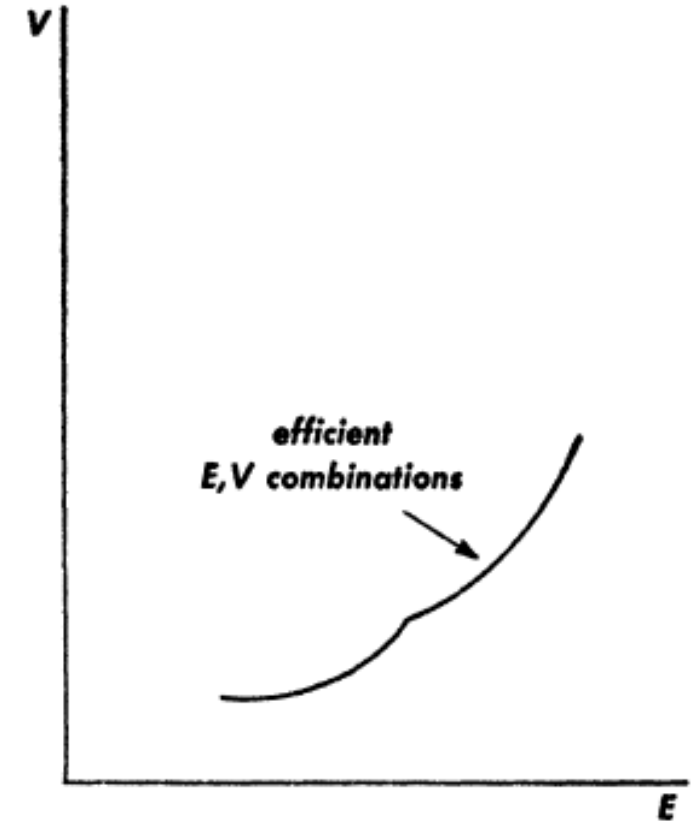
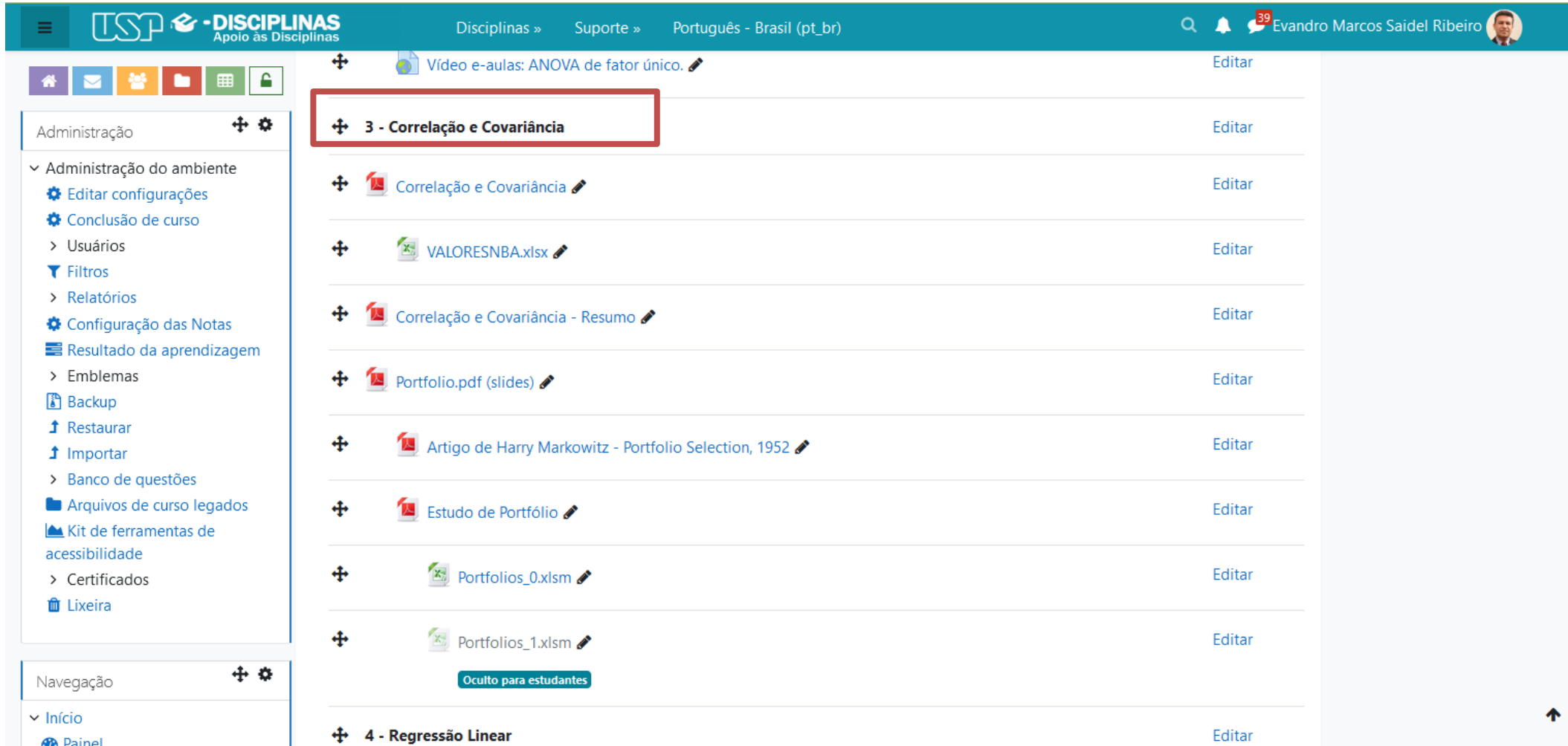


FIG. 6



The screenshot shows the 'eDisciplinas' interface for the course 'RAD1408 - Estatística Aplicada à Administração'. The user is logged in as 'Evandro Marcos Saidel Ribeiro'. The interface is divided into a left sidebar and a main content area.

Left Sidebar:

- Administração**
 - Administração do ambiente
 - Editar configurações
 - Conclusão de curso
 - Usuários
 - Filtros
 - Relatórios
 - Configuração das Notas
 - Resultado da aprendizagem
 - Emblemas
 - Backup
 - Restaurar
 - Importar
 - Banco de questões
 - Arquivos de curso legados
 - Kit de ferramentas de acessibilidade
 - Certificados
 - Lixeira
 - Navegação**
 - Início
 - Painel

Análise de portfólio

PARTE I - Simulação

Prof. Dr. Evandro Marcos Saidel Ribeiro
FEA-RP
Universidade de São Paulo

Seleção de portfólio - Passos para resolução do Trabalho 2

Passo 1. Entendendo o problema. O problema é obter medidas de risco e retorno para uma carteira com seis títulos. Estas medidas de risco e retorno são exemplos práticos de aplicação de estatística na área de administração.

Passo 2. Formulação do problema. Este assunto foi estudado por Markowitz (1952) e para resolvê-lo neste trabalho utilizaremos a formulação de Markowitz resumida a seguir, que considera como entrada séries de preços de ações.

2.1 Medidas de Risco e Retorno

Seja \bar{R}_i a variação média do título i , obtida a partir de uma série de variações de preço num certo período. Seja P_i o investimento percentual neste título.

Então, para um portfólio formado por N títulos temos:

$$\text{O retorno de cada título: } \tilde{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \vdots \\ \bar{R}_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{A participação em cada título: } \tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{sendo } \sum_{i=1}^N P_i = 1 \quad (3)$$

$$\text{e } 0 \leq P_i \leq 1. \quad (4)$$

$$\text{A matriz de covariância: } \tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,N} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \dots & S_{N,N} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{O retorno esperado para o portfólio é obtido por: } R = \tilde{P}' \tilde{R}. \quad (6)$$

$$\text{O risco pode ser definido pela variância do portfólio, dada por: } \text{Variância} = \tilde{P}' \tilde{S} \tilde{P}, \quad (7)$$

$$\text{ou então pelo desvio padrão do portfólio, dado por } \text{DesvPad} = \sqrt{\text{Variância}}. \quad (8)$$

Passo 3, 4 e 5. Elaboração de algoritmo para o estudo de Risco e Retorno por Simulação e por otimização

A seleção de um portfólio é feita quando são determinados todos os percentuais P_i . Esta determinação pode ser arbitrária, aleatória ou otimizada. A seguir são descritos os algoritmos para resolver o problema pelo método aleatório e pelo método otimizado.

3.1 Simulação aleatória

Considere um estudo com seis títulos. Para obter a matriz de investimento percentual, ou seja, os valores de cada P_i , considere os três passos a seguir:

1. Numa planilha de análise (AnáliseSimula) reserve uma região com seis células para a matriz de participações.
2. Obtenha as participações: Sorteie seis números aleatórios entre 1 e 100. Utilize a função do Excel para obter os números aleatórios: =ALEATÓRIOENTRE(1;10000) Grave estes valores como X_i .
3. Obtenha a soma: $Tot = \sum_{i=1}^6 X_i$.
4. Cada valor de P_i é obtido por: $P_i = \frac{X_i}{Tot}$

A planilha resultante é apresentada a seguir. Note que a coluna A apresenta sorteios aleatórios, na coluna C estes sorteios são transformados em percentuais. Os valores de Retorno e Variância são calculados pelas expressões (6) e (7).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Simulação		Participação				Risco	Risco
2		13	0,0442	v_ibov		Retorno	Variância	Desvio Padrão
3		88	0,2993	v_petro		-0,000662	0,000119	0,010909
4		54	0,1837	v_dolar				
5		18	0,0612	v_bisa3				
6		91	0,3095	v_elpl4				
7		30	0,1020	v_oibr3				
8		294 Total		1 Soma				
9								

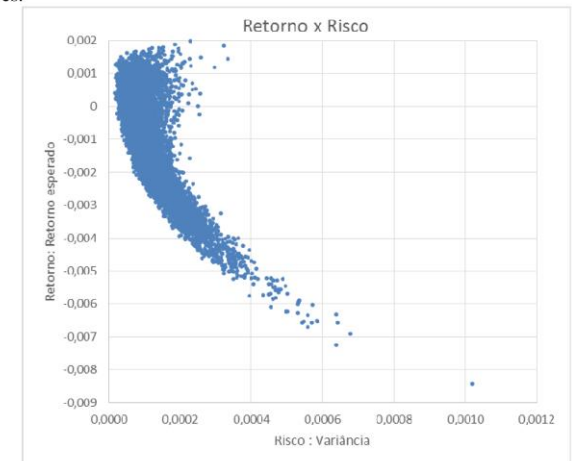
Uma vez definido o portfólio pelos valores de \tilde{P} , obtenha os valores de Risco na célula G3 pela expressão (7) e de Retorno na célula F3 pela expressão (6). Grave os valores obtidos de Variância e de Retorno. Obtenha outra simulação repetindo os passos 1 a 3 e obtendo novos valores de Variância e de R.

Para gravar os valores da Simulação considere desenvolver uma "Macro" que copia os valores de Retorno e Risco obtidos para a coluna A e B, a partir da linha 11. Note que o valor de Retorno está na célula F3 (na programação de macro VBA, esta célula é reconhecida como Cells(3,6), ou seja, linha 3 coluna 6) e o valor de Risco está na célula G3, que no VBA é reconhecida como Cells(3,7).

Na figura a seguir é apresentado um código de programação VBA que copia 1000 valores de Retorno e Risco simulados para as colunas A e B da planilha "AnáliseSimula".

```
Sub simula()
'
' simula Macro
' Atalho do teclado: Ctrl+t
'
For i = 1 To 1000
    Retorno = Cells(3, 6)
    Risco = Cells(3, 7)
    Cells(10 + i, 1) = Retorno
    Cells(10 + i, 2) = Risco
    Calculate
Next i
End Sub
```

Após executar a Macro faça um gráfico de dispersão com os valores obtidos de Risco e Retorno. Veja um exemplo na figura a seguir, na qual foram consideradas 10000 simulações.



Portfolios_0.xlsm

Salvamento Automático Portfolios_1.xlsm Evandro Ribeiro

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Desenvolvedor Ajuda

K37 =MATRIZ.MULT(G34:I34;M29:M31)

Seleção de Portfólios

Taxas de Retorno					Matriz de Covariâncias - S				
Trimestre	a	b	c	Cias.	a	b	c	P	R
1	-39,93%	-53,63%	25,27%	a	0,0441	0,0482	0,0125	0,3667	0,0971
2	28,52%	47,20%	-4,46%	b	0,0482	0,1039	0,0231	0,2714	0,1109
3	3,52%	-23,99%	0,84%	c	0,0125	0,0231	0,0597	0,3619	0,0993

Microsoft Visual Basic for Applications - Portfolios_1.xlsm

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Depurar Executar Ferramentas Suplementos Janela Ajuda

Projeto - VBAProject

Portfolios_1.xlsm - Módulo5 (Código)

```

Sub simula ()
    ' simula Macro
    ' Simula portfolio
    ' Atalho do teclado: Ctrl+t
    imax = Cells(3, 18)
    For i = 1 To imax
        Calculate
        p1 = Cells(33, 12)
        Calculate
        p2 = Cells(33, 12)
        Calculate
        p3 = Cells(33, 12)

        Cells(33, 13) = p1
        Cells(34, 13) = p2
        Cells(35, 13) = p3

        retorno = Cells(37, 11)
        variancia = Cells(40, 17)

        Cells(28 + i, 18) = variancia
        Cells(28 + i, 19) = retorno
    Next i
End Sub
    
```

Análise de portfólio

PARTE II - Otimização

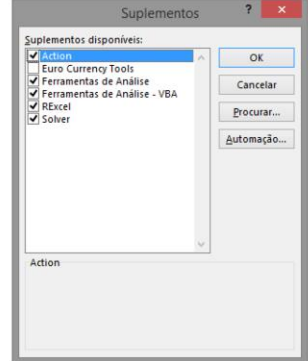
Prof. Dr. Evandro Marcos Saidel Ribeiro
FEA-RP
Universidade de São Paulo

3.2 Otimização

Considere um estudo com seis títulos. Considere valores iniciais para cada P_i de forma que sejam satisfeitas as expressões (3) e (4). Para tanto digite os valores que achar adequado para cada P_i numa nova planilha, planilha "Otimização". Obtenha os valores de Retorno e Risco da mesma forma do item 2. A planilha deve estar com a seguinte característica:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1							Risco	Risco	
2		Participação	0,2486	v_ibov		Retorno	Variância	Desvio Padrão	
3			0,0000	v_petro		0,001100	0,000013	0,003572	
4			0,5307	v_dolar					
5			0,2070	v_bisa3		Retorno Esperado			
6			0,0000	v_elp4		0,0013			
7			0,0137	v_oibr3					
8		Total	1,0000						
9									

Utilize um procedimento de otimização, por exemplo utilize a ferramenta SOLVER no Excel. Para habilitar o SOVER, nas versões mais recentes do Excel selecione: Arquivo → Opções → Suplementos → Suplementos do Excel → [Ir...]
Entre as opções apresentadas, selecione o Solver:

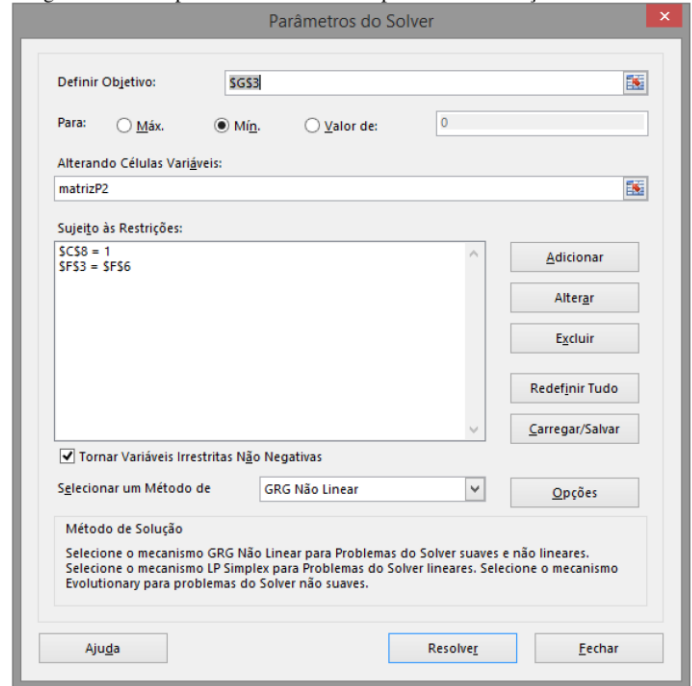


Para realizar a otimização estude as três características necessárias, a Função Objetivo, as Variáveis de decisão, as Restrições:

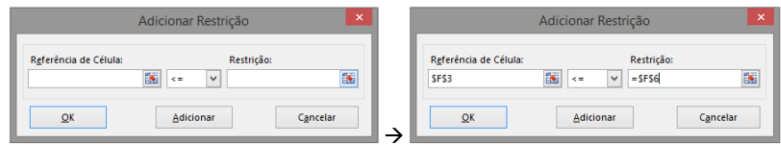
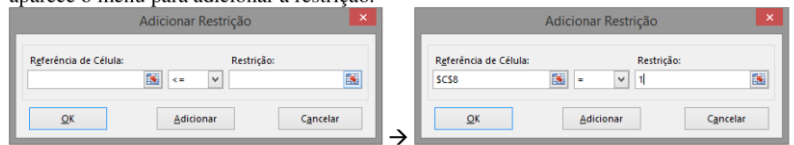
- Função Objetivo:** Minimizar a Expressão (7)
- Variáveis de Decisão:** Expressão (2)
- Restrições:** Expressão (6) = Valor específico
Expressão (3)
Expressão (4)

Nesta nova planilha, "Otimização" a Função Objetivo é a Variância, resultado obtido na célula G3 (célula em vermelho na figura da página anterior).
Clique na célula G3 e execute o Solver: Dados → Análise → Solver

Aparece uma janela com opções para a otimização, a janela dos Parâmetros do Solver. Veja na figura abaixo os parâmetros necessários para esta otimização

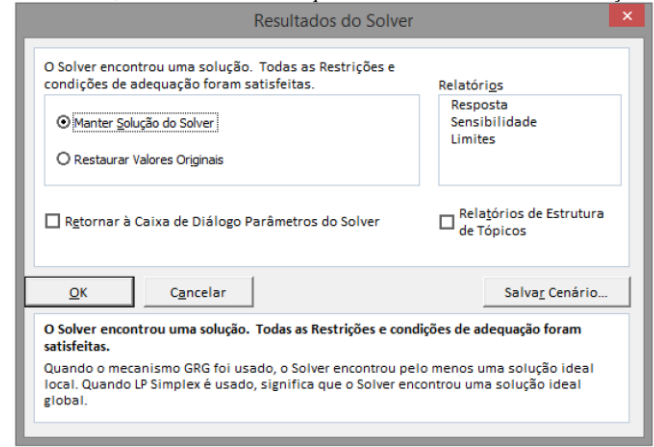


Note que a célula a ser otimizada deve ser Minimizada. As Células variáveis contém o nome "matrizP2" que é o nome que eu atribuí para a região C2:C7 da planilha.
As restrições foram inseridas através do botão [Adicionar]. Clicando em Adicionar aparece o menu para adicionar a restrição.



É importante considerar valor de retorno esperado que esteja dentro dos limites possíveis de obtenção de retorno, ou seja entre o menor retorno médio e o maior retorno médio. No caso dos títulos estudados os valores médios estão entre os valores -0,013177 e 0,002902. De forma prática, serão considerados valores no intervalo -0,013 e 0,003. Para o primeiro cálculo escolha um valor intermediário, por exemplo, 0,001.

Execute o Solver, como resultado verifique se o Solver encontrou uma solução:



Se a solução foi obtida clique em [OK] para Manter a solução do Solver.
OS valores de P_i são então atualizados para fornecer a carteira otimizada, ou seja aquela que possui um retorno esperado igual ao definido na restrição, que o risco seja o menor possível, e ainda que satisfaça a restrição de que todas as participações somadas resultem em 1.

Para o cálculo o valor de retorno esperado foi digitado na Célula F6.

Com o Solver ajustado, obtenha a otimização para vários valores possíveis de retorno. Faça uma lista de retornos esperados na coluna F, a partir da linha 9. Para cada valor de retorno esperado execute o Solver (copie antes o valor de retorno esperado para a célula F6) e copie o valor obtido para a variância otimizada na coluna G.

Faça um gráfico de Risco x Retorno com os valores obtidos.
Para este exemplo o gráfico resultante é apresentado na figura da página seguinte.

Portfolios_1.xlsm

Salvamento Automático Portfolios_2.xlsx Pesquisar Evandro Ribeiro

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Desenvolvedor Ajuda
Compartilhar Comentários

J42
=K37/G42

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
1																							
2																		Pontos					
3																		10000					

Seleção de Portfólios				Matriz de Covariâncias - S			P		R		Simulação		Otimização	
Trimestre	a	b	c	Clas.	a	b	c	a	b	Risco	Retorno	Risco	Retorno	
1	-39,93%	-53,63%	25,27%	a	0,0441	0,0482	0,0125	0,5900	0,0971	0,0441	0,0971	0,0357	0,1004	
2	28,52%	47,20%	-4,46%	b	0,0482	0,1039	0,0231	0,0000	0,1109	0,1039	0,1109	0,045	0,103	
3	3,52%	-23,99%	0,84%	c	0,0125	0,0231	0,0597	0,4100	0,0993	0,0597	0,0993	0,045	0,101	
4	-8,63%	32,72%	15,15%									0,053	0,103	
5	9,88%	44,68%	8,01%									0,049	0,100	
6	20,68%	8,71%	6,90%	Partic. P ^T	0,5900	0,0000	0,4100	1,00				0,045	0,103	
7	21,84%	-3,20%	31,87%	Aplicação				1				0,052	0,105	
8	9,48%	29,11%	64,26%									0,043	0,102	
9	-5,74%	-14,41%	-5,15%									0,040	0,099	
10	38,92%	66,02%	61,92%									0,050	0,104	
11	7,88%	-28,34%	-17,37%									0,056	0,103	
12	-27,02%	-39,57%	-12,15%									0,043	0,102	
13	38,45%	19,28%	-1,88%									0,051	0,104	
14	25,49%	44,97%	0,30%									0,042	0,102	
15	0,99%	1,00%	-26,90%									0,034	0,100	
16	31,69%	3,49%	43,25%									0,059	0,104	

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: Máx. Mín. Valor de:

Alterando Células Variáveis:

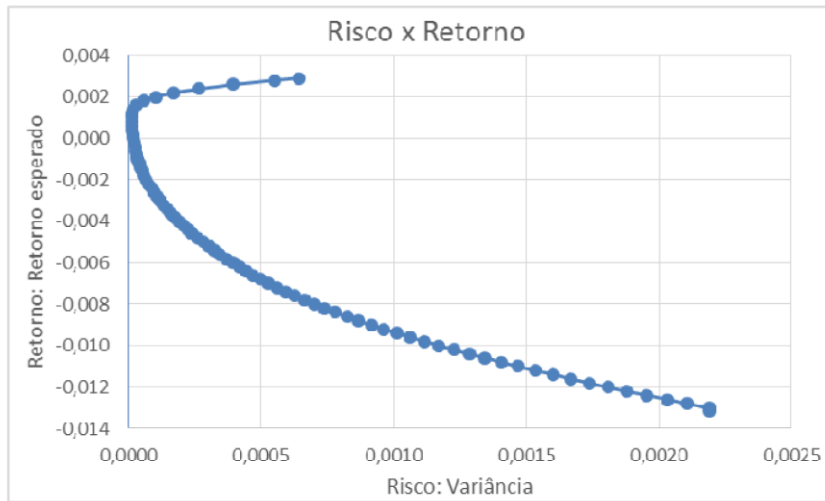
Sujeito às Restrições:

- \$J\$34 = \$J\$35
- \$K\$29:\$K\$31 <= 1
- \$K\$37 = \$I\$37

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

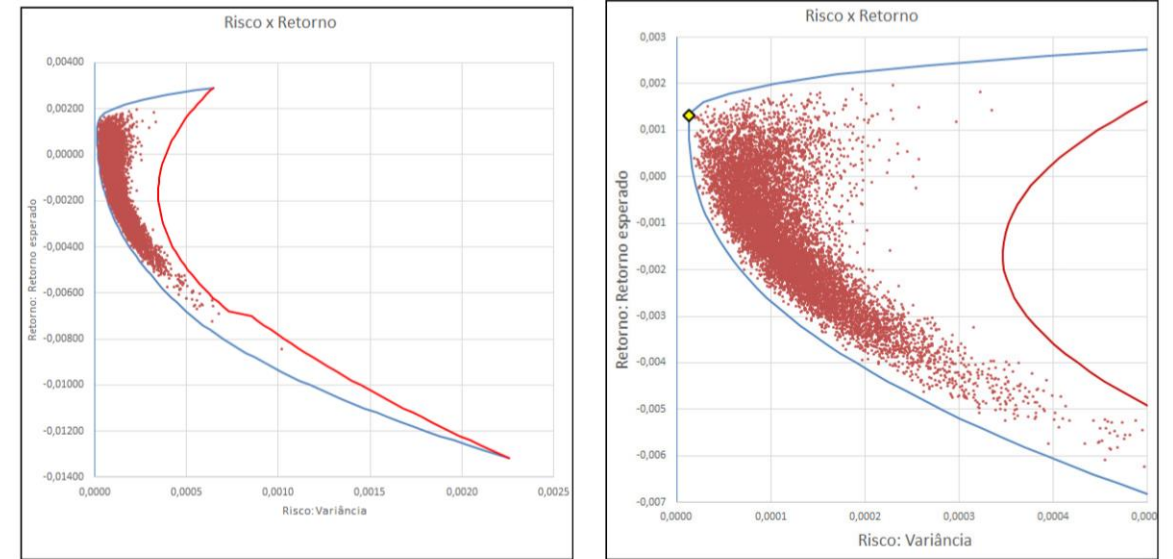
Método de Solução: Seleccione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Seleccione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Seleccione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.



Pode ser considerada também outra função objetivo, dada pelo índice calculado pelo retorno sobre o risco, $I_s = \frac{R}{DesvPad} = \frac{(6)}{(8)}$. Neste caso deve-se maximizar o índice obtido e as restrições consideradas são apenas as Expressões (3) e (4).

Considerações adicionais

Considerando os resultados, Simulação e Otimização (incluindo o I_s), numa mesma figura:



Na figura acima, a linha azul é a de menor risco, a linha vermelha é a de maior risco o losango amarelo é a carteira com maior I_s . Resultado obtido: $I_s = 0,3592$.

Bibliografia

LEVINE, David M.; STEPHAN, David F.; KREHBIEL, Timothy C.; BERENSON, Mark L. *Estatística: Teoria e aplicações usando Microsoft® Excel em português*, 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MARKOWITZ, Harry; Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1 (Mar. 1952), pp. 77-91

