



PEF – 5743 – Computação Gráfica Aplicada à Engenharia de Estruturas

Prof. Dr. Rodrigo Provasi

e-mail: provasi@usp.br

Sala 09 – LEM – Prédio de Engenharia Civil

Bibliotecas Gráficas: Fundamentação Teórica

- Até aqui vimos as bibliotecas e diversas ferramentas que auxiliam na criação e geração de objetos tridimensionais.
- Esses objetos são representados e utilizados das mais diversas formas em um código de computação gráfica.
- Essa seção veremos toda a fundamentação teórica para a representação dos sólidos, geração de malhas, iluminação e comunicação necessários para que haja um bom funcionamento do programa.

Introdução

- Na última apresentação falamos de coordenadas homogêneas e como lidar com atualizações devido à entrada de usuários.
- Nessa apresentação falaremos de geração de sólidos, o que é fundamental para uma boa representação dos objetos e de projeções.

Geração de Sólidos Tridimensionais

- Grande desafio na criação de superfícies curvas → Computadores não possuem a capacidade de processamento contínuo (só discreto).
- Superfícies curvas → Criação de diversos polígonos planos dispostos lado a lado, sensação de curvatura.
- Geração de uma malha contendo os vértices.

Geração de Sólidos Tridimensionais

- Casos simples → Calculados manuais
- Muitos pontos → Inviável, necessária a criação de um algoritmo para a geração da malha desejada.

Geração de Sólidos Tridimensionais

- O processo de geração de polígonos para compor uma superfície é conhecido como *tesselation*, e para o caso específico em que os polígonos são todos triângulos, a palavra *triangularization* (triangularização) é mais apropriada.
- A utilização de triângulos para tal aproximação é o método mais utilizado na geração de malhas, usado na GPU ou *Graphic Processor Unit*.
- GPUs possuem desempenho otimizado para cálculos com esta geometria.

Geração de sólidos por parametrização

- Para se ter controle de todos os pontos e também flexibilidade de fazer uma malha tão refinada quanto se desejar, pode-se utilizar a técnica de parametrização do sólido.
- Equações paramétricas são equações que representam pontos de uma linha ou uma superfície através de uma ou mais variáveis, chamadas parâmetros.
- Tomando como exemplo uma circunferência de raio r centrada em (x_0, y_0) , a equação analítica que a representa é dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Geração de sólidos por parametrização

- No entanto, equações analíticas não permitem saber quais são os pontos da circunferência, pode-se apenas saber se determinado ponto pertence ou não a ela. As equações paramétricas que representam a mesma circunferência são dadas por:

$$x = x_0 + r \cos 2\pi t$$

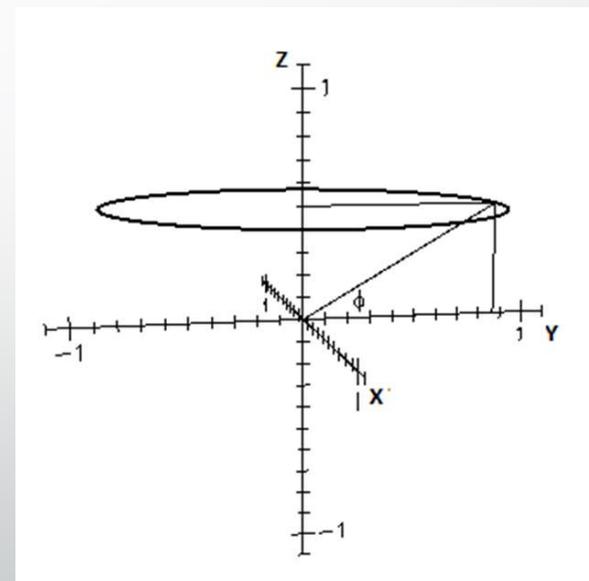
$$y = y_0 + r \sen 2\pi t$$

Geração de sólidos por parametrização

- Nota-se nessas equações que é utilizada a variável t , que pode variar de 0 a 2π para descrever a circunferência inteira.
- Ao se variar o parâmetro t é possível se determinar os pontos $\{x(t), y(t)\}$ que pertencem à circunferência, podendo-se obter tais pontos com o refinamento que se desejar.

Geração de sólidos por parametrização

Ao se descrever superfícies tridimensionais, são utilizados dois parâmetros. No caso de uma esfera, os raios das circunferências que a compõem variam de acordo com a variação da coordenada z .



Geração de sólidos por parametrização

- A coordenada z é facilmente determinada sendo correspondente a $z(\theta; \phi) = R \sen \phi$, já o raio de cada anel é dado por $r(\theta; \phi) = R \cos \phi$.
- Desta forma, as equações parametrizadas da esfera são dadas por:

$$x(\theta; \phi) = x_0 + R \cos \phi \cos \theta$$

$$y(\theta; \phi) = y_0 + R \cos \phi \sen \theta$$

$$z(\theta; \phi) = z_0 + R \sen \phi$$

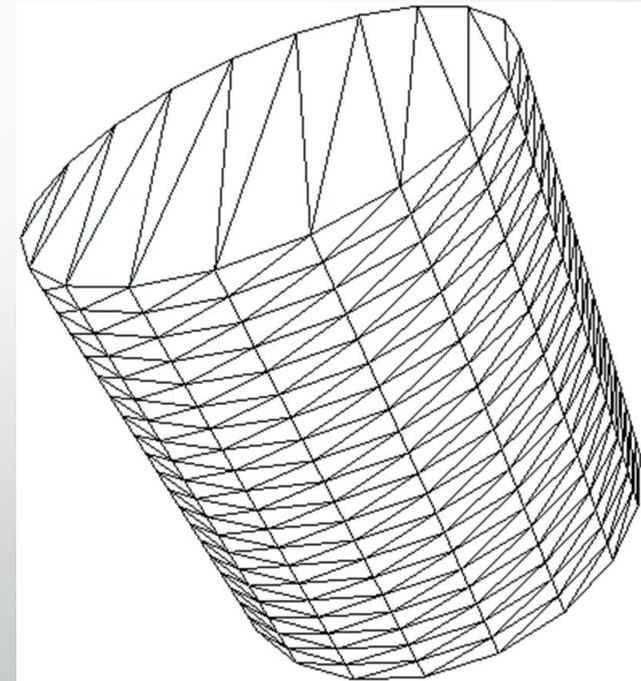
onde θ pode variar entre $0 < \theta < 2\pi$ e ϕ pode variar entre $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Geração de sólidos por parametrização

- Tendo as equações paramétricas definidas, deve-se criar ordenadamente todos os vértices para que a aproximação da superfície curva seja adequada e gere o efeito desejado.
- A criação destes vértices pode ser feita definindo-se incrementos para as variáveis paramétricas, sendo que quanto menor os incrementos, melhor a aproximação feita.
- Neste ponto, a equação paramétrica se mostra de extrema importância, já que esta variação reflete no refinamento da malha.

Geração de sólidos por parametrização

- Uma vez gerados todos os vértices, estes devem ser unidos de forma a se definir os triângulos que irão compor a superfície.
- A sequência de definição destes vértices é essencial, pois definirá a direção da normal e desta forma, a face frontal e o verso de cada triângulo.



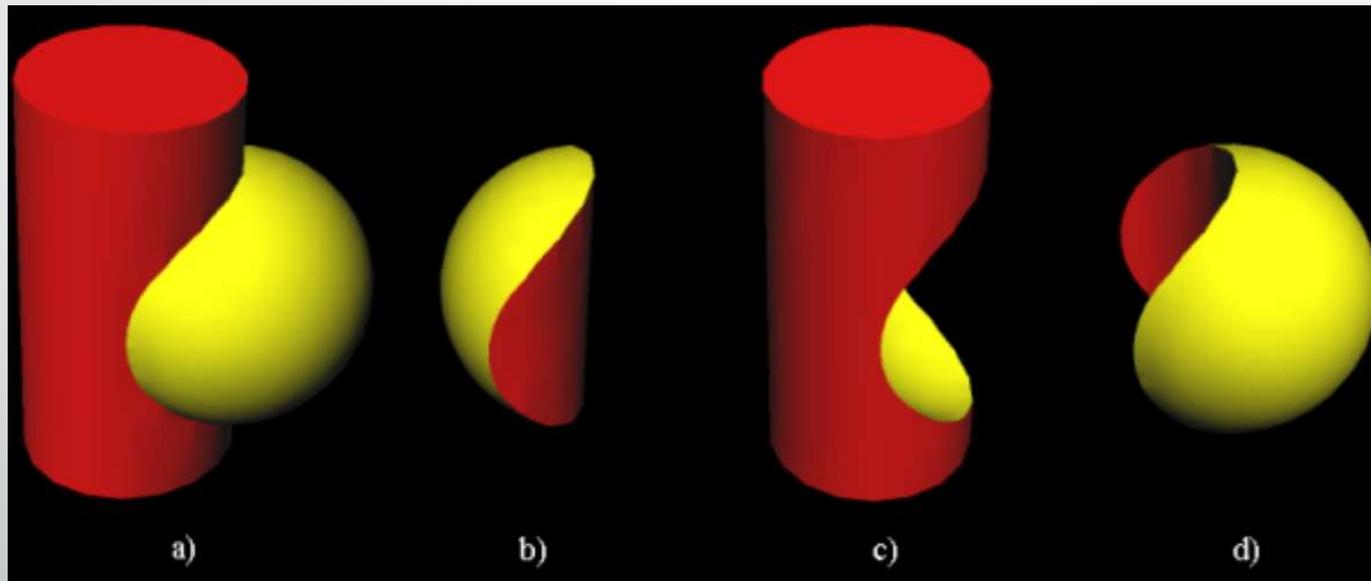
Geração de sólidos por parametrização

- A parametrização dos sólidos é uma maneira muito eficiente de se gerar malhas, permitindo assim um grande controle do refinamento da malha, podendo ser utilizada em diversos sólidos, como cilindros, cones, cubos, dentre outros, sendo necessário apenas encontrar a equação paramétrica que os representa.

Geração de sólidos por operações booleanas

- Para determinadas superfícies, pode não ser possível encontrar uma equação que as represente adequadamente, ou estas equações podem apresentar um nível de complexidade muito elevado.
- Neste caso, deve ser verificada a possibilidade de se utilizar sólidos primitivos e, através de operações booleanas, compor a superfície desejada, uma vez que existem algoritmos para a determinação da interseção de superfícies.

Geração de sólidos por operações booleanas



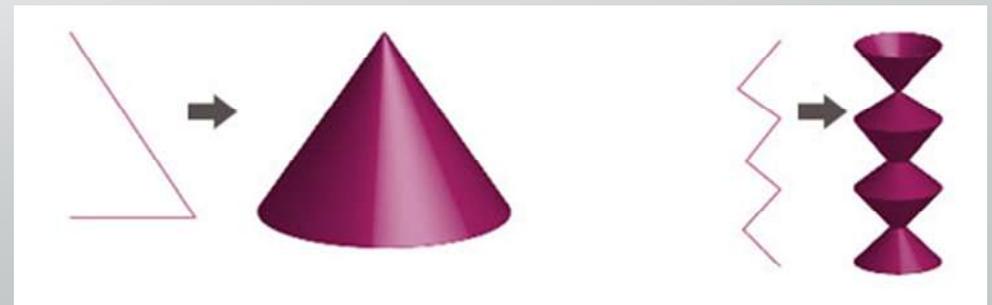
Geração de sólidos por operações booleanas

- As operações booleanas são divididas basicamente em:
 - **União:** Se dá pela junção de dois sólidos, que geram apenas um. Todas as partes de ambos os sólidos são preservadas. Representa o caso (a).
 - **Intersecção:** O sólido gerado corresponde apenas a região comum aos dois sólidos primitivos. Representa o caso (b).
 - **Subtração:** Neste caso, o sólido gerado é definido por um sólido inicial subtraído da região onde ocorre intersecção com um segundo sólido. Este caso é representado em (c) e em (d), onde a esfera é subtraída do cilindro e o cilindro é subtraído da esfera, respectivamente.

Geração de sólidos por revolução

- A técnica de geração de sólidos por revolução (*revolve*) é muito utilizada quando se deseja a criação de objetos axissimétricos.
- Para a criação de um objeto tridimensional, é necessário um perfil bidimensional, o qual será rotacionado em torno de um eixo dado, produzindo assim o efeito desejado.

Geração de sólidos por revolução



Geração de sólidos por revolução

- Para que um sólido seja gerado por esta técnica, deve-se primeiramente ter posse dos pontos que definem o perfil a ser rotacionado.
- Posteriormente, é necessário que seja definido um centro de rotação e um vetor em torno do qual será feita a operação.
- Com isto, o próximo passo necessário é a definição do ângulo de incremento, o qual definirá dois perfis consecutivos, para posterior união.

Geração de sólidos por revolução

- Assumindo-se que um ponto (x, y, z) é pertencente ao perfil, e este deve ser rotacionado em torno do ponto (x_0, y_0, z_0) direcionado pelo vetor $(0, 0, 1)$, com um incremento angular de $d\theta$, suas novas coordenadas serão:

$$x' = (x - x_0) \cos d\theta - (y - y_0) \operatorname{sen} d\theta$$

$$y' = (x - x_0) \operatorname{sen} d\theta - (y - y_0) \cos d\theta$$

$$z' = z$$

Geração de sólidos por revolução

- Fazendo-se esta rotação sucessivas vezes, serão gerados diversos perfis consecutivos, bastando, portanto, a união dos mesmos para a geração do sólido.
- É importante observar que a qualidade do objeto gerado é inversamente proporcional ao ângulo de incremento, pois ângulos grandes podem produzir objetos grosseiros, uma vez que perfis consecutivos são conectados com superfícies planas (geralmente, triângulos).

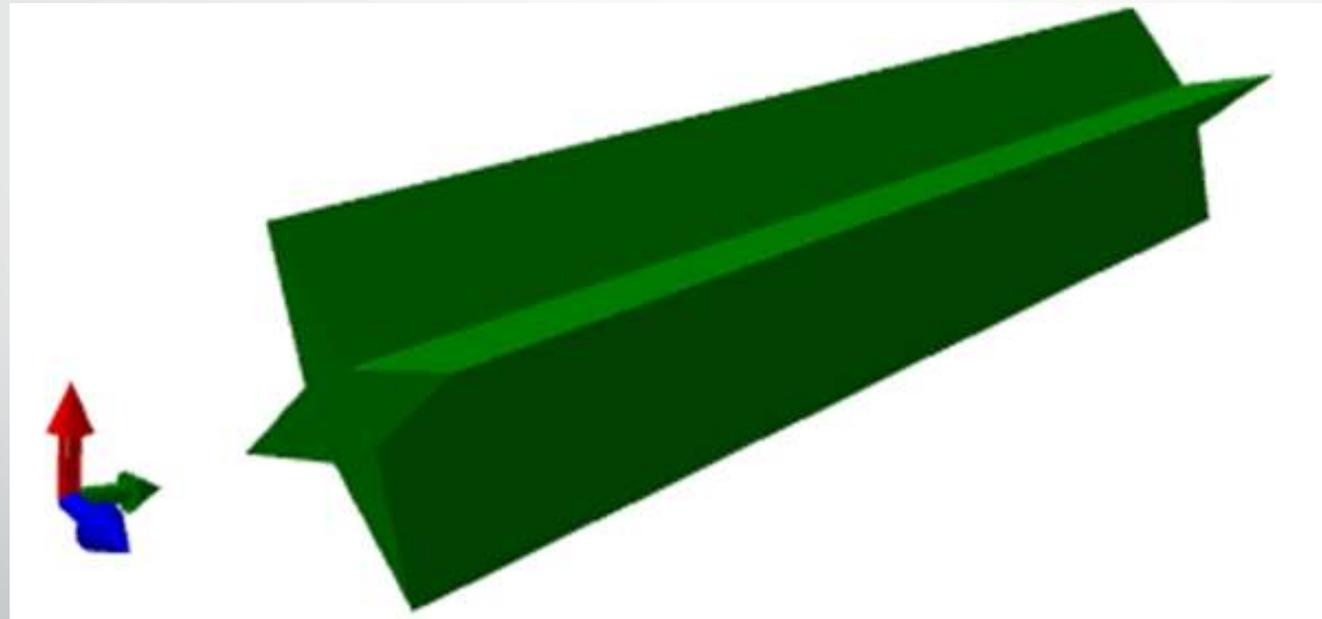
Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Estas duas técnicas consistem na geração de um sólido tridimensional pelo arrasto de uma imagem plana, sendo que no caso da extrusão, tem-se como caminho uma reta perpendicular à imagem plana, enquanto que o arrasto pode ser feito ao longo de uma curva qualquer.
- Bastante semelhante à técnica de revolução apresentada anteriormente, o objeto tridimensional é formado pela união de consecutivos perfis.

Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Para a geração de um sólido por extrusão, basta um perfil bidimensional, e a distância pelo qual ele deve ser arrastado.
- Desta forma, uma transformação de translação é aplicada igualmente a todos os pontos do perfil, e o sólido desejado será gerado pela união destes perfis.
- Dependendo do caso, pode ser interessante subdividir a distância total de deslocamento em pequenos incrementos, gerando diversos perfis consecutivos que devem ser unidos de forma adequada.

Geração de sólidos por extrusão e arrasto



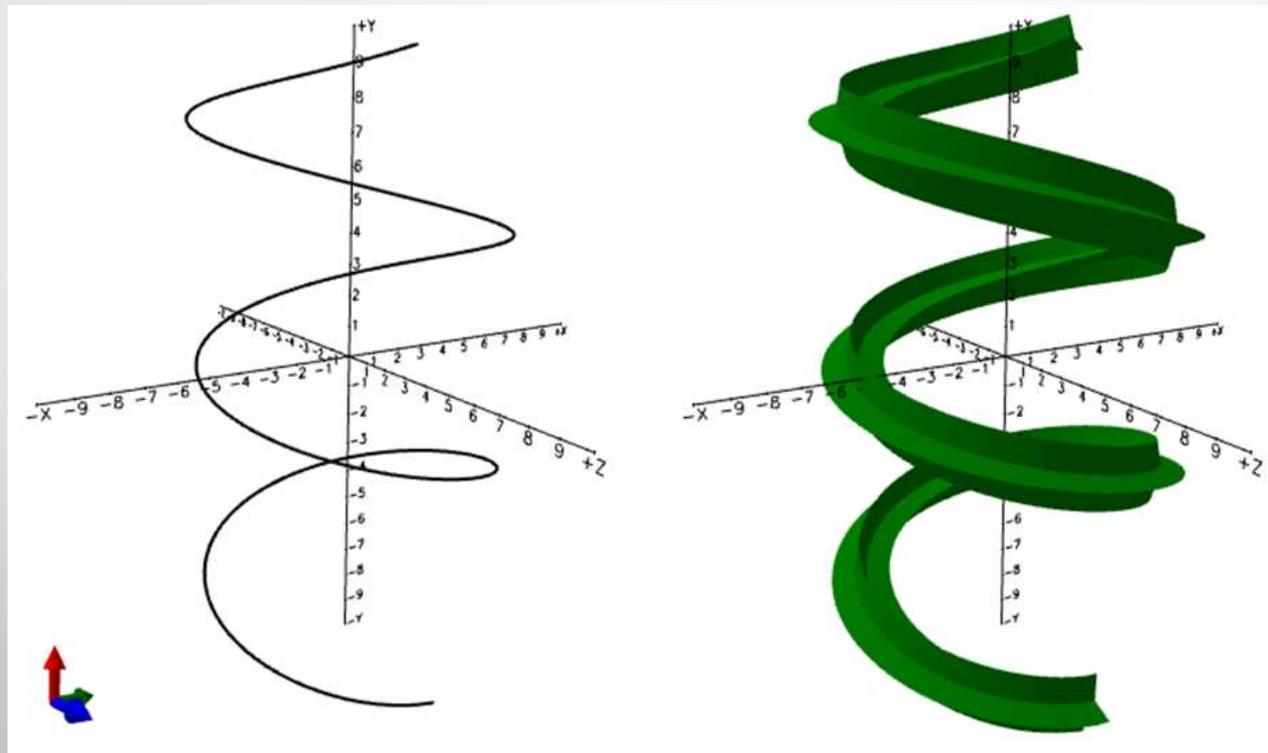
Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- A técnica de arrasto (*sweep*) possui o conceito bastante semelhante à extrusão, porém permite uma maior flexibilidade, de modo que o perfil não precisa necessariamente estar perpendicular ao caminho a ser percorrido, além da possibilidade de se construir um caminho genérico.
- Adicionalmente, podem ser aplicados outros efeitos ou transformações, como rotação do perfil, escala, distorção, entre outras, bastando que sejam definidos os seus parâmetros.

Geração de sólidos por extrusão e arrasto

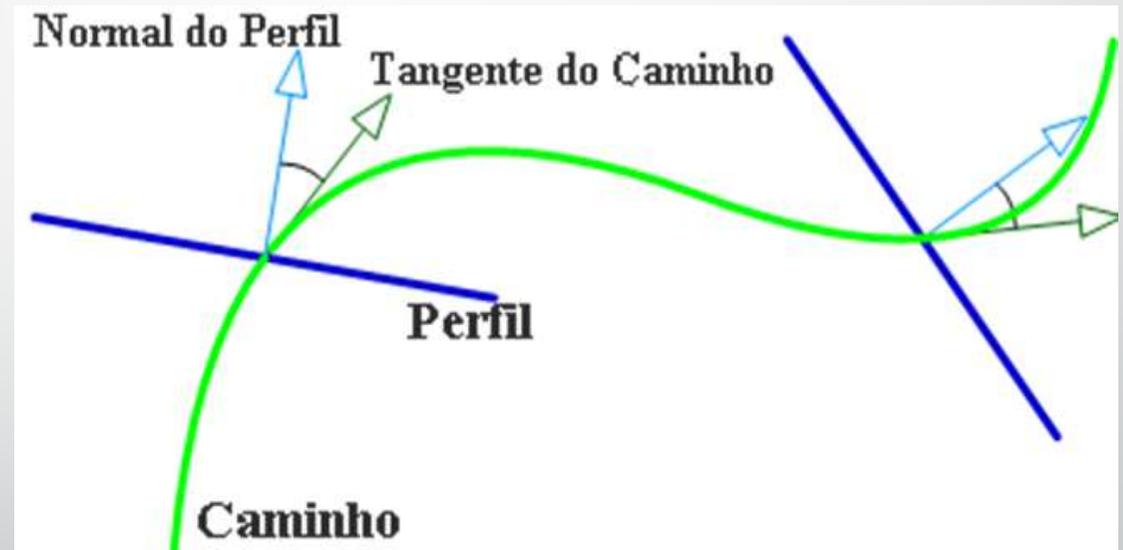
- Para a aplicação desta técnica, é necessária a definição do perfil a ser arrastado, assim como a curva pela qual será efetuada a operação. Adicionalmente, caso desejado, serão necessárias as funções de variação de cada parâmetro, as quais definem as transformações a serem aplicadas durante a operação.

Geração de sólidos por extrusão e arrasto



Geração de sólidos por extrusão e arrasto

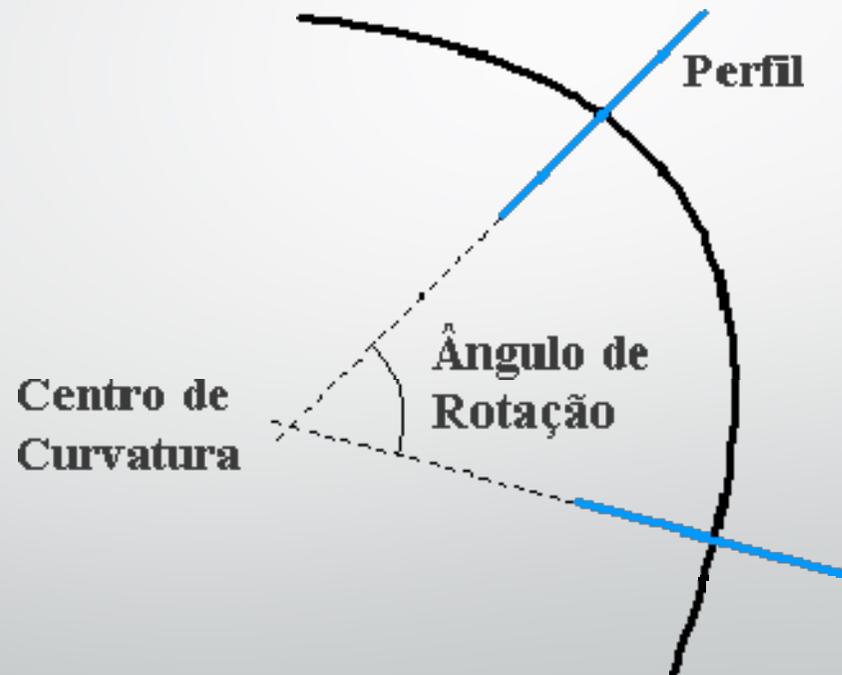
- Durante seu percurso, tem-se como restrição essencial que o ângulo formado entre a normal do perfil e a tangente da curva seja constante (ou, caso desejado, que sua variação siga uma função dada).
- A implementação desta restrição pode ser feita de duas maneiras



Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Rotação do perfil em torno do centro de rotação da curva:
 - Encontrar o centro de rotação da curva;
 - Fazer o produto vetorial entre os vetores que ligam o centro de rotação da curva com a posição atual e com a posição final, assim como o cálculo do ângulo entre eles;
 - Aplicar a rotação no perfil, utilizando-se como centro de rotação o mesmo que o da curva, e eixo de rotação o vetor encontrado anteriormente.

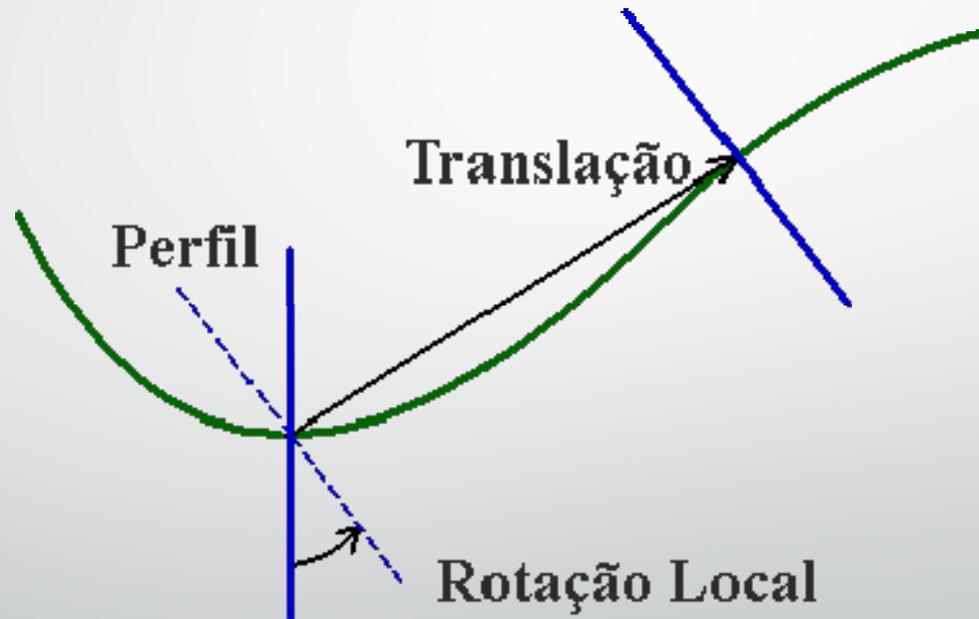
Geração de sólidos por extrusão e arrasto



Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Rotação do perfil em seu próprio centro e aplicação de uma translação para correção da posição:
 - Calcular o produto vetorial e o ângulo dos vetores tangentes à curva na posição atual e na próxima posição desejada.
 - Aplicar uma rotação ao perfil, com centro em sua própria origem, e como eixo de rotação o vetor encontrado anteriormente.
 - Aplicar uma transformação de translação de modo a colocar o perfil na nova posição.

Geração de sólidos por extrusão e arrasto



Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Apesar de a primeira técnica parecer mais prática, uma vez que é necessário aplicar apenas uma transformação ao perfil, ela se demonstra restrita, não podendo ser utilizada para casos onde o centro de rotação se encontra no infinito (retas), ou curvas com diversos centros de rotação.

Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Da mesma forma que as técnicas de revolução e extrusão apresentadas anteriormente, pode ser necessária a definição de incrementos ao percorrer o caminho desejado. Assumindo uma curva s e um incremento Δs , têm-se:

$$\vec{s}(0) = (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$$

$$\vec{s}(\Delta s) = (x_{s1}, y_{s1}, z_{s1})$$

- E os seus respectivos vetores tangentes:

$$\vec{s}'(0) = (x'_{s0}, y'_{s0}, z'_{s0})$$

$$\vec{s}'(\Delta s) = (x'_{s1}, y'_{s1}, z'_{s1})$$

Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Pode-se aplicar uma rotação ao perfil, com o seguinte eixo de rotação (\vec{w}) e ângulo (θ):

$$\vec{w} = \vec{s}'(0) \times \vec{s}'(\Delta s)$$

$$\theta = \text{ÂnguloEntre}(\vec{s}'(0); \vec{s}'(\Delta s))$$

- Posteriormente, a seguinte translação deve ser aplicada:

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \vec{s}(\Delta s) - \vec{s}(0) = (x_{s1} - x_{s0}, y_{s1} - y_{s0}, z_{s1} - z_{s0})$$

Geração de sólidos por extrusão e arrasto

- Adicionalmente, caso tenha sido definida qualquer outra transformação a ser aplicada ao perfil, esta deve ser feita nesta etapa do processo.
- O sólido desejado será gerado pela aplicação destes passos sucessivas vezes, para cada ponto do perfil ao longo do caminho definido, e a posterior união entre perfis consecutivos.

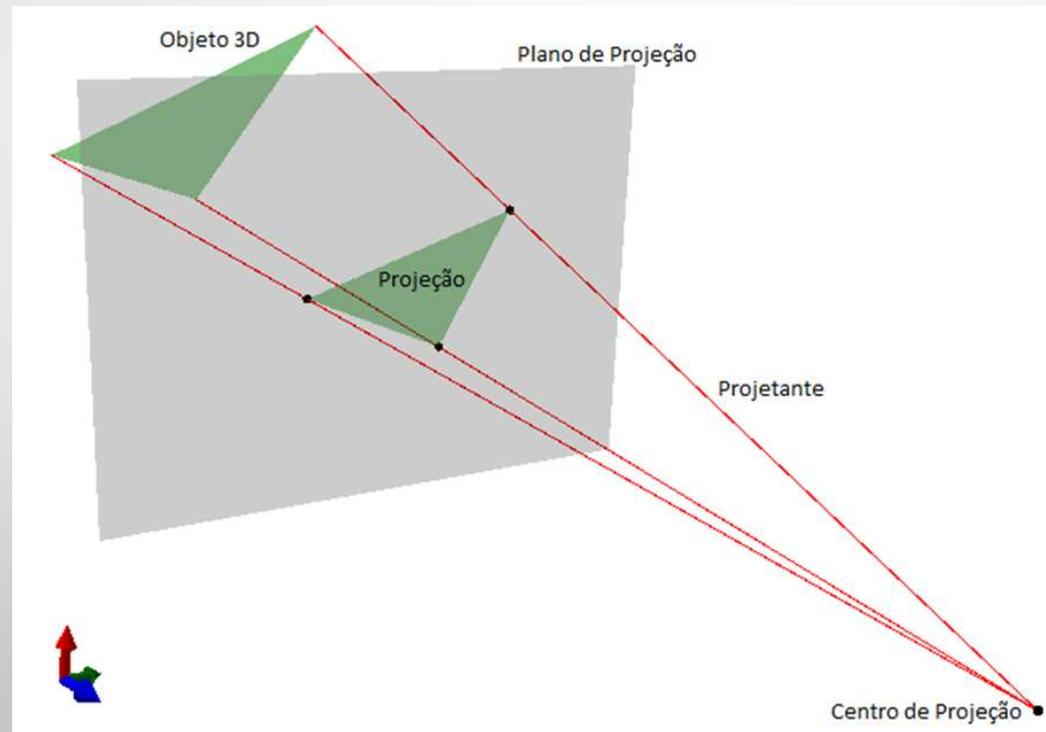
Projeções

- Até agora, foi apresentado como manipular pontos e objetos no espaço tridimensional.
- Mas os monitores atuais não permitem a imersão tridimensional, apenas uma visualização tridimensional planificada.
- Converter esses pontos para o bidimensional denomina-se projeção.
- Exemplo: um cubo, que é definido por seis vértices no espaço tridimensional, deve ser representado no espaço bidimensional, ou seja, todos os seus vértices devem estar no mesmo plano.
- Um exemplo prático bastante comum no dia a dia é a projeção de sombras dos objetos em uma superfície plana.

Projeções

- Para a realização de uma projeção devem ser considerados três elementos básicos:
 - *Plano de projeção*: plano que conterá a janela na qual será feita a projeção dos pontos tridimensionais;
 - *Projetantes ou linhas de projeção*: retas que passam pelos pontos do objeto em direção ao centro de projeção;
 - *Centro de projeção*: ponto fixo de onde partem as retas projetantes;

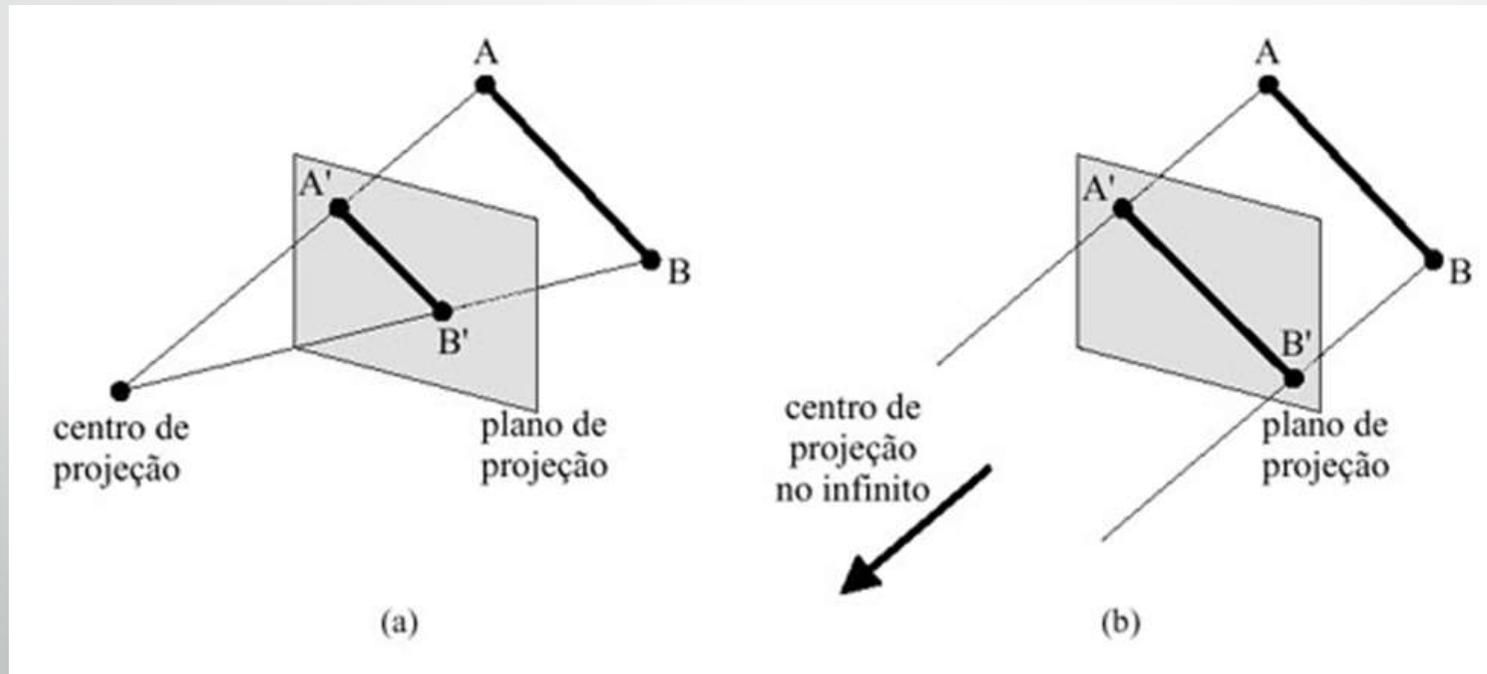
Projeções



Projeções

- Existem basicamente dois tipos de projeções: a perspectiva e a paralela
- Uma projeção perspectiva se assemelha ao processo de formação de imagens em nossos olhos ou câmeras fotográficas, gerando imagens mais realistas.
- A projeção paralela pode ser dividida ainda em ortogonal, onde as retas projetantes são perpendiculares ao plano de projeção, ou oblíqua, onde as retas projetantes são oblíquas ao plano de projeção.
- Em ambos os tipos de projeções paralelas, as retas projetantes são paralelas. Esta projeção se assemelha a projeção de uma sombra produzida pelos raios do sol.

Projeções



Exemplo de projeção perspectiva (a) e paralela (b).

Projeções

- O processo de formação de uma projeção, em computação gráfica, consiste, primeiramente, em normalizar a posição e os eixos da câmera (observador) através da matriz de visualização.
- Em seguida, deve ser realizada a projeção propriamente dita, através da matriz de projeção.

Matriz de Visualização

- A matriz de visualização é responsável por aplicar uma transformação em todos os objetos da cena tridimensional de modo que a câmera fique posicionada na origem, com a sua direção de visualização alinhada com a direção negativa do eixo Z (em algumas ferramentas de visualização, pode estar alinhada com a direção positiva do eixo Z) e o vetor que aponta para cima alinhado com o eixo Y.

Matriz de Visualização

- O eixo Y não é necessariamente o vetor que aponta para cima, uma vez que este vetor não precisa ser perpendicular à direção de visualização, no entanto, o eixo X pode ser calculado por um produto vetorial entre o versor Z, definido anteriormente, e a direção para cima.
- Tendo-se os versores X e Z, o Y pode ser facilmente calculado com mais um produto vetorial entre Z e X.
- É importante observar que todos os versores devem ser normalizados, ou seja, terem sua norma igual a 1.

Matriz de Visualização

- As equações para o cálculo dos versores ficam da seguinte forma:

$$Z = -(\textit{Direção de Visualização})$$

$$X = (\textit{Direção para cima}) \times Z$$

$$Y = Z \times X$$

Matriz de Visualização

- A matriz de visualização (V) pode ser calculada de diversas formas, por exemplo, compondo uma transformação de translação, responsável por trazer a câmera para a origem, com três rotações, uma em torno de cada eixo, responsáveis por alinhar os eixos da câmera, o que resultaria em:

$$V = T R_Z R_Y R_X$$

Matriz de Projeção

- A matriz de projeção é aplicada após a matriz de visualização e é responsável por determinar o que é potencialmente visível na imagem bidimensional, levando em conta as características da câmera, como por exemplo, os planos próximos e distantes, o tamanho do campo de visão, entre outras.

Matriz de Projeção

- A aplicação da matriz de projeção consiste basicamente em normalizar as coordenadas da cena tridimensional, de forma que apenas as regiões com as seguintes coordenadas são renderizadas na tela:
 - Coordenadas X entre -1 e 1;
 - Coordenadas Y entre -1 e 1;
 - Coordenadas Z entre 0 e 1;

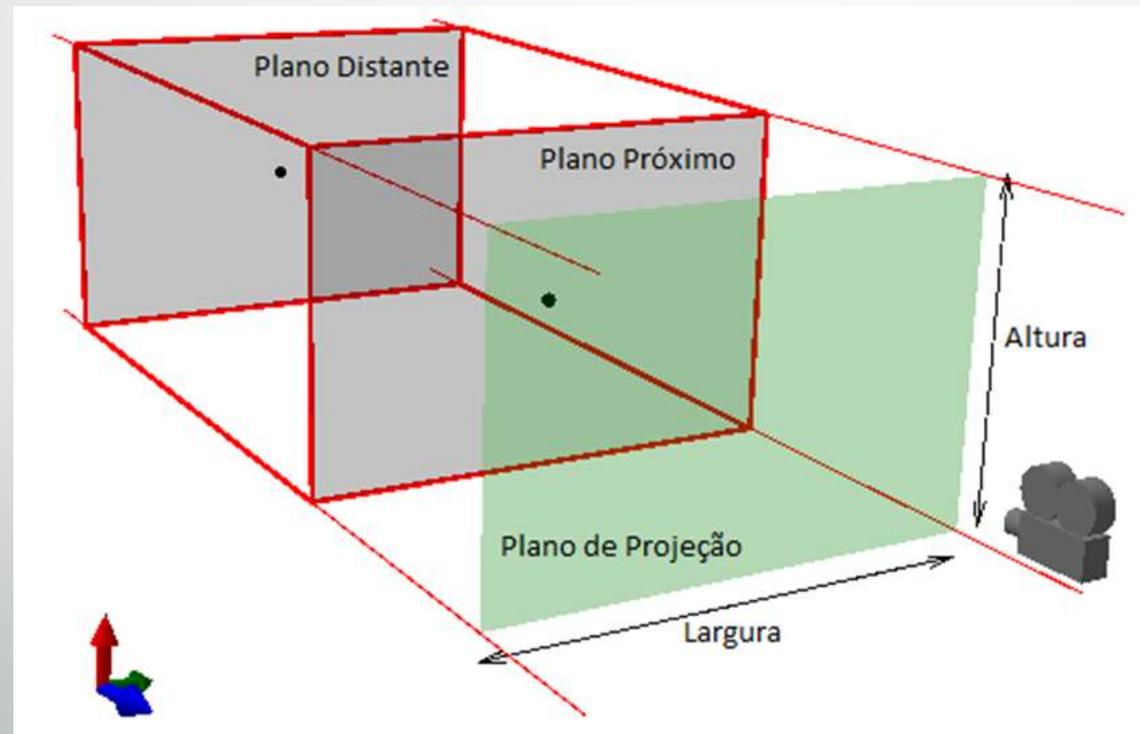
Matriz de Projeção

- Estando todos os pontos a serem desenhados na tela com suas coordenadas normalizadas, são utilizadas as coordenadas X e Y para seu desenho bidimensional, e a coordenada Z para determinar se um objeto está na frente ou atrás de outro objeto
- Ao se desenhar um objeto na tela, a coordenada Z de cada ponto é armazenada em um buffer e caso outro objeto esteja na mesma posição, é feita uma comparação entre o valor armazenado e o do objeto atual, e desta forma determinado qual objeto deve ser preservado.

Projeção Paralela

- Os parâmetros que definem o campo de visualização de uma projeção paralela são:
 - Distância do plano mais próximo de visualização;
 - Distância do plano mais distante de visualização;
 - Largura da janela de visualização;
 - Altura da janela de visualização;

Projeção Paralela



Projeção Paralela

- Para normalizar as coordenadas conforme exposto anteriormente, é necessário apenas uma transformação de escala com uma translação ao longo de Z.
- Os fatores de escala para cada eixo e a translação ao longo de Z são dados pelas seguintes fórmulas:

Projeção Paralela

$$s_x = \frac{2}{w}$$

$$s_y = \frac{2}{h}$$

$$s_z = \frac{1}{z_{Near} - z_{Far}}$$

$$\Delta z = z_{Near} s_z = \frac{z_{Near}}{z_{Near} - z_{Far}}$$

Projeção Paralela

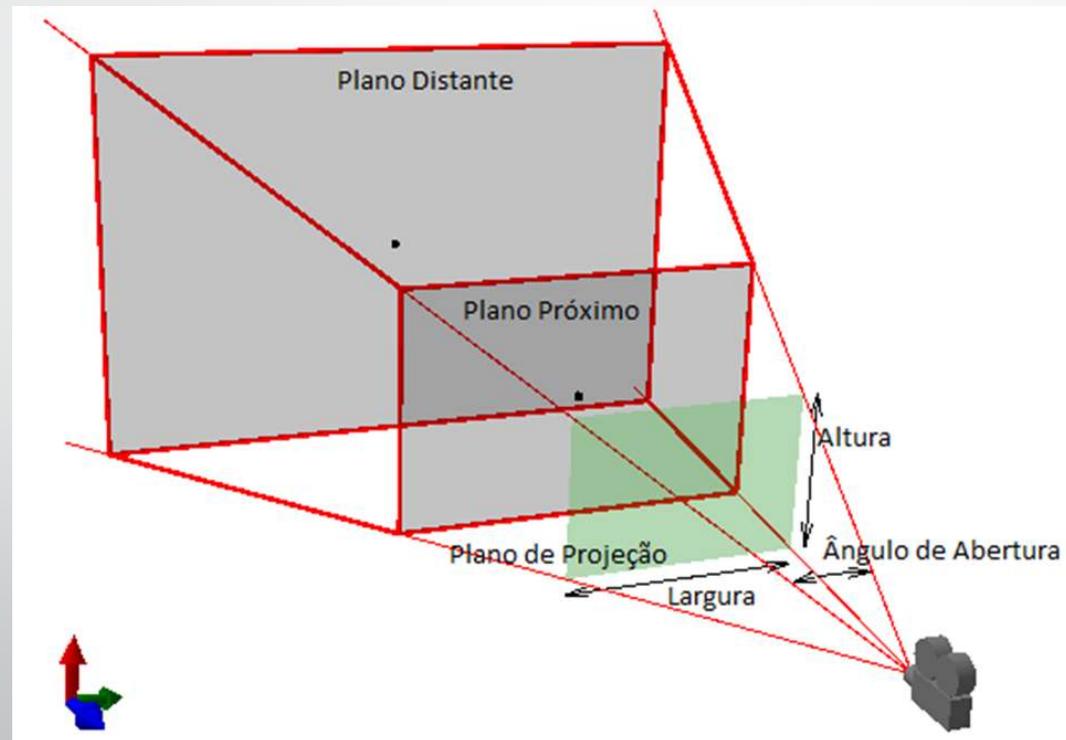
- onde w é a largura da janela de projeção, h a altura da janela de projeção, z_{Near} a distância do plano próximo de projeção e z_{Far} a distância do plano distante de projeção.
- Desta forma, tem-se como matriz final para uma projeção ortogonal:

$$M_{par} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção Perspectiva

- Os parâmetros que definem o campo de visualização de uma projeção perspectiva são:
 - Distância do plano mais próximo de visualização;
 - Distância do plano mais distante de visualização;
 - Ângulo de abertura de visualização;
 - Largura da janela de visualização;
 - Altura da janela de visualização;

Projeção Perspectiva



Projeção Perspectiva

- Tendo-se a largura e altura da janela de visualização, pode-se calcular a razão de aspecto (d_{ratio}) da imagem da seguinte maneira:

$$d_{ratio} = \frac{w}{h}$$

- onde w é a largura da janela de projeção e h a altura da janela de projeção. As coordenadas normalizadas podem ser calculadas pelas seguintes fórmulas:

Projeção Perspectiva

$$x' = \frac{x}{-z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$y' = \frac{y \operatorname{d}_{ratio}}{-z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$z' = \frac{\frac{z_{Far}}{z_{Near} - z_{Far}} + z_{Near} \frac{z_{Far}}{z_{Near} - z_{Far}}}{-z}$$

sendo α o ângulo de abertura, z_{Near} a distância do plano próximo e z_{Far} a distância do plano distante.

Projeção Perspectiva

- Observa-se que todas as fórmulas têm em comum o fator $-z$ no denominador. Fazendo uso de coordenadas homogêneas e lembrando que:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \Delta x \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \Delta y \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \Delta z \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'} \right)$$

- Escolhendo-se arbitrariamente $M_{43} = -1$ e $M_{44} = 0$, podem ser calculados os demais elementos da matriz da seguinte forma:

Projeção Perspectiva

$$s_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$s_y = \frac{d_{ratio}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$s_z = \frac{z_{Far}}{z_{Near} - z_{Far}}$$

$$\Delta z = z_{Near} s_z$$

Projeção Perspectiva

- A matriz de projeção (\mathbf{P}) final para uma câmera perspectiva resulta em:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & \Delta z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$