ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Introdução a circuitos elétricos

Notas de Aula

Prof. Dr. Emiliano R. Martins

1 – Introdução

O objetivo deste curso é introduzir noções básicas de circuitos elétricos. Podemos dividir o estudo de circuitos elétricos em duas partes: o estudo dos elementos que constituem os circuitos e o estudo dos circuitos propriamente dito. Neste curso, tentaremos abordar os conceitos essenciais de ambas as partes. O curso parte do princípio que o aluno está familiarizado com conceitos de eletricidade e magnetismo, tipicamente tratados no curso SEL 0410.

Todos os elementos e dispositivos elétricos e eletrônicos têm como objetivo controlar o transporte de cargas. Assim, antes de começar a estudar os elementos propriamente ditos, é útil abordar os principais mecanismos de transporte de cargas, o que é feito no capítulo seguinte.

2 – Noções de transporte: corrente de arrasto e corrente de difusão

Existem dois tipos de transporte de cargas: a corrente de arrasto e a corrente de difusão. A corrente de arrasto é a mais comum em eletrônica passiva, mas ambas correntes desempenham papel igualmente importante em eletrônica ativa.

2.1 – Corrente de arrasto

A corrente de arrasto é a que ocorre quando alguma força impõe uma direção uniforme ao deslocamento de cargas. Na maioria esmagadora das vezes, essa força advém de um campo elétrico. Uma situação típica é ilustrada na Figura 1. O cilindro de área *A* poderia ser um resistor ou um outro elemento qualquer. Os pontos pretos indicam cargas, podendo ser tanto positiva quanto negativa. A presença de uma força externa (advinda de um campo elétrico) "arrasta" as cargas e faz com que elas movam na mesma direção e com a mesma velocidade média.

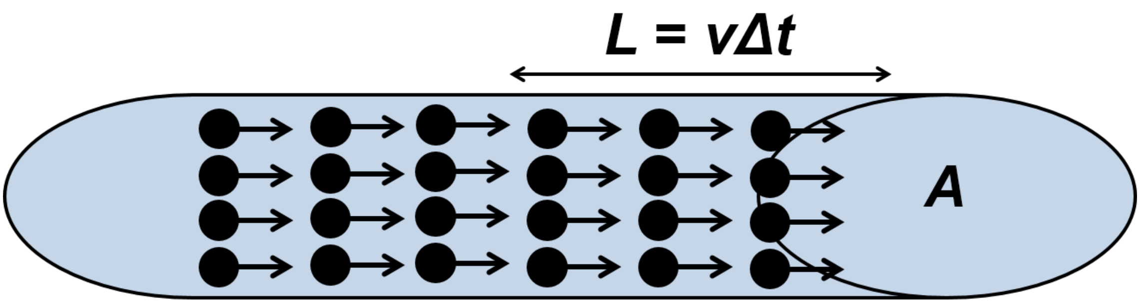


Figura 1 Exemplo de corrente de arrasto

Suponha que a densidade de corrente seja J (densidade de corrente é a corrente total dividido pela área transversal, que no nosso exemplo é a área A), a densidade volumétrica de cargas no cilindro seja ρ e a velocidade seja v. Pergunta: qual é a relação entre J, ρ e v?

Para encontrar essa relação, lembre-se que corrente nada mais é que a quantidade de cargas que passa pela seção transversal por unidade de tempo (e essa definição do que é corrente é expressa na sua unidade, que é coulombs por segundo). Então, para determinarmos a corrente, temos que contar o número de cargas que passa pela seção transversal em um determinado intervalo de tempo Δt. Então vamos supor que nesse intervalo de tempo Δt passem $N_{\Delta t}$ cargas. Assim, a corrente I será, obviamente:

$$I = \frac{N_{\Delta t}}{\Delta t}$$

Equação 1

Mas se a velocidade das cargas for v, então a carga percorre uma distância $L = v\Delta t$ em um intervalo de tempo Δt. Isso significa que, no intervalo de tempo Δt, todas as cargas que estiverem dentro do volume $V = AL = Av\Delta t$ (ou seja, o volume delimitado pela área A e comprimento $L = v\Delta t$) vão passar pela seção transversal. Portanto, $N_{\Delta t}$ nada mais é que a quantidade de cargas dentro desse volume. Se a densidade de cargas for ρ, então, obviamente, temos que:

$$N_{\Delta t} = \rho V = \rho A v \Delta t$$

Equação 2

Substituindo a Equação 2 na Equação 1:

$$I = \frac{\rho A v \Delta t}{\Delta t} = \rho A v$$

Mas como $J = I/A$, temos finalmente que:

$$J = \rho v$$

Equação 3

A Equação 3 será utilizada mais adiante no curso.

Antes de encerrar essa seção sobre corrente de arrasto, é importante responder à pergunta: quando aparece uma corrente de arrasto? A resposta é bem simples: como a corrente de arrasto está associada à uma força, que na maioria esmagadora das vezes é a força de Coulomb (ou seja, advinda da presença de um campo elétrico), então a corrente de arrasto aparece na presença de um campo elétrico. Em outras palavras, a corrente de arrasto é a corrente advinda da diferença de uma diferença de potencial eletrostático (já que a presença de um campo elétrico está associada à diferença de potencial eletrostático), que usualmente expressamos em unidade de volts (joules por coulomb).

2.2 Corrente de difusão

A corrente de difusão ocorre quando existe uma diferença de concentração de cargas em algum ambiente. Se você tiver dois compartimentos, um cheio de oxigênio e o outro com vácuo, e você abrir uma porta entre eles, após um tempo ambos os compartimentos estarão com igual concentração de oxigênio. Isso ocorre por causa do processo de difusão de moléculas de oxigênio, que migram do compartimento de maior concentração para o compartimento de menor concentração. Se, ao invés de oxigênio você tiver cargas, haverá uma corrente elétrica, resultante da diferença de concentração de cargas. Note que não é necessário a aplicação de nenhuma força externa para que ocorra corrente de difusão (basta agitação térmica das cargas, ou moléculas).

Considere uma situação modelo, onde temos duas caixas idênticas de comprimento *lz* dividida em dois compartimentos, sendo que o compartimento da esquerda possui concentração maior que o compartimento da direita.

Definindo o eixo z como mostrado na Figura 2, e definindo a densidade de corrente de cargas que cruzam a caixa da esquerda para a caixa da direta por $J_{e\text{-}d}$ e a densidade de corrente de cargas que vão da caixa direita para a esquerda por $J_{d\text{-}e}$, então, obviamente, a corrente total em z_0 será:

$$J = J_{e-d} - J_{d-e}$$

Na maioria das situações práticas, a quantidade de cargas que irá cruzar o ponto z_0 da esquerda para a direita será proporcional à concentração de cargas no lado esquerdo. Analogamente, a quantidade de cargas que passa da direita para a esquerda será proporcional à concentração de cargas na parte direita da caixa. Essa relação de proporção é chamada de Lei de Fick. Assim, pela lei de Fick, temos que:

$$J_{e-d} = B\rho(z_0 - lz)$$
$$e$$
$$J_{d-e} = B\rho(z_0 + lz)$$

Equação 4

Onde B é a constante de proporcionalidade e $\rho(z)$ é a concentração de cargas (que agora é função de z). Note que $\rho(z\text{-}lz)$ é a concentração no compartimento esquerdo e $\rho(z+lz)$ é a concentração no compartimento direito. Mas a corrente de difusão total J_D é dada por:

$$J_D = J_{e-d} - J_{d-e}$$

Equação 5

(Claro que, se a quantidade de cargas que passa da direita para a esquerda for igual à quantidade de cargas que passa da esquerda para a direita, então a corrente será nula). Substituindo a Equação 4 na Equação 5:

$$J_D = B\rho(z_0 - lz) - B\rho(z_0 + lz) = B[\rho(z_0 - lz) - \rho(z_0 + lz)]$$

Equação 6

Mas:

$$\rho(z_0 - lz) - \rho(z_0 + lz) \approx -\frac{\partial \rho}{\partial z} 2l_z$$

Equação 7

Portanto:

$$J_D = -D\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Equação 8

Onde $D = 2Blz$. O parâmetro D é chamado de coeficiente de difusão. Assim, a corrente de difusão é proporcional à variação na concentração espacial de cargas, o que faz sentido (note que se a concentração for uniforme, então a corrente de difusão será nula, já que o mesmo tanto de cargas que "pula" da caixa esquerda para a direita também "pula" da direita para a esquerda).

Note o sinal de negativo na Equação 8. A interpretação física para esse sinal é a seguinte: se caixa da esquerda tem maior concentração que a caixa da direita, então a corrente total vai da esquerda para a direita, ou seja, a direção das cargas é no sentido de z positivo. Acontece que, neste caso, a derivada da concentração de cargas é negativa, já que a concentração diminui à medida que z aumenta (ir para a direita corresponde a aumentar z). Em outras palavras, considerando que ρ seja positivo, então caixa da esquerda com concentração maior implica em J positivo e $d\rho/dz$ negativo.

Mas e lz? O que determina o comprimento da caixa lz? Esse parâmetro é um parâmetro estatístico chamado de caminho livre médio (*mean free path*) e expressa o comprimento típico que as cargas percorrem antes de chocarem umas nas outras ou no material. Em outras palavras, o caminho livre médio é o caminho percorrido pelas cargas com velocidade constante (uma vez que o choque altera a velocidade da carga).

Um último comentário para encerrar o capítulo de transporte: dissemos na seção anterior que a corrente de arrasto está associada à presença de uma diferença de potencial eletrostático e é o tipo de corrente associado a lei de Ohm. E a corrente de difusão? Já sabemos que a corrente de difusão está associada à uma diferença de concentração. Mas a concentração de um elemento qualquer é expressa em termos de um parâmetro chamado "potencial químico". Portanto a corrente de difusão está associada à diferença de um potencial químico. Uma bateria, por exemplo, funciona mantendo uma diferença de potencial químico entre seus terminais através da ionização de elementos químicos. Essa diferença de potencial químico induz uma corrente de difusão dentro da bateria. Portanto, quando você conecta uma bateria a um resistor, haverá dois mecanismos de transporte: arrasto no resistor e difusão na bateria.

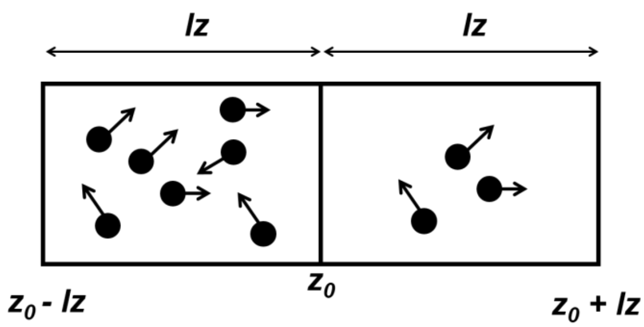


Figura 2

QUESTÃO 2.1

De quais parâmetros físicos espera-se que o coeficiente de difusão dependa?

---

3 – Componentes eletrônicos passivos

Neste capítulo vamos estudar as noções básicas relevantes à componentes passivos que são comumente utilizados em circuitos elétricos. Existem duas classes de elementos passivos: elementos que dissipam energia e elementos que armazenam energia. Resistores fazem parte da primeira classe, enquanto capacitores e indutores fazem parte da segunda classe. Os elementos que dissipam energia são chamados de dissipativos (porque somos muito criativos) e os elementos que armazenam energia são chamados de reativos.

Neste capítulo, vamos tratar primeiramente de resistores. Começaremos tratando da lei de Ohm, que descreve as características de transporte em materiais resistivos e que nos levará naturalmente à noção de resistência. Em seguida, trataremos de capacitores e indutores.

3.1 Lei de Ohm

A primeira coisa que precisamos saber sobre a lei de Ohm é que a lei de Ohm não é nem aqui, nem na China, uma lei. O que eu quero dizer com isso é que a lei de Ohm não é uma lei fundamental da física, como as leis de Newton ou as equações de Maxwell. Aliás, como veremos nessa seção, o mundo seria meio esquizofrênico se a lei de Ohm fosse uma lei fundamental da física. Na verdade, a lei de Ohm nada mais é do que uma observação empírica de um fenômeno estatístico. Nosso objetivo aqui é encontrar um modelo físico que explique a lei de Ohm e discutir quais condições devem ser satisfeitas para que essa lei seja válida.

Na sua forma mais geral, a lei de Ohm afirma que a densidade de corrente em um material (podemos considerar que o material seja um resistor) é proporcional ao campo elétrico nesse material. Chamando a proporção de σ, em linguagem matemática a lei de Ohm é:

$$J = \sigma E$$

Equação 9

Já podemos identificar de cara que a corrente que a lei de Ohm trata é a corrente de arrasto, já que é a corrente devido ao um campo elétrico. Agora, vamos pensar bem no que essa lei nos diz: ela afirma que a corrente em um material é proporcional ao campo elétrico aplicado ao material. Mas já sabemos que a corrente é proporcional à velocidade das cargas (Equação 3). E sabemos também que as cargas estão movendo porque tem um campo elétrico, ou seja, tem uma força agindo sobre elas. Então a lei de Ohm está efetivamente nos dizendo que a velocidade das cargas é proporcional à força aplicada nas cargas!!! Mas isso não pode ser, porque, de acordo com a segunda lei de Newton, a força é proporcional à aceleração, e não à velocidade. Foi Aristóteles quem pensou que força era proporcional à velocidade. Mas todo mundo sabe que, em matéria de física, Newton está muito mais de parabéns que Aristóteles. Então como pode a lei de Ohm ser verdade, se ela é uma lei Aristotélica?

Na verdade, tem mais coisas na história. De fato, a lei de Ohm é a expressão de um parâmetro estatístico: ela expressa a velocidade média de cargas que são submetidas a uma força, aceleram por um tempo e depois trombam no material, perdendo velocidade. Essa trombada aquece o material e é responsável pelo aquecimento da água do seu chuveiro. Portanto, a lei de Ohm já subentende que existe perda de energia no sistema (energia das cargas sendo transferida para o material e, assim, aquecendo-o). Toda vez que você ver alguma força que seja proporcional à velocidade, pode saber que tem perda na história.

QUESTÃO 3.1

De um exemplo de outro caso em física onde uma força dissipativa (perda) é expressa como sendo proporcional à velocidade de um corpo. (Dica: revise seu oscilador harmônico).

Vamos tentar achar um modelo físico então que explique a lei de Ohm. Podemos considerar um material uni-dimensional, como mostrado na Figura 3. As bolinhas na figura simbolizam locais de choque e o pontinho é a carga. Vamos considerar então como primeiro modelo um caso onde a carga sai do repouso, é acelerada pelo campo elétrico, tromba na bola, e para, começando o processo novamente. Meio que como um bêbado tentando ir para casa e trombando em tudo quanto é poste. Nosso objetivo é calcular a velocidade média da carga e ver se conseguimos chegar na lei de Ohm. É claro que, para calcular a velocidade média do percurso inteiro, basta calcular a velocidade média entre dois choques consecutivos. Para nosso propósito, podemos considerar que a força seja constante. Se a distância livre for L, então a relação entre L e a aceleração a (constante) será:

$$L = \frac{at^2}{2}$$

Onde t é o intervalo de tempo entre duas colisões. A velocidade média, obviamente, é dada por:

$$v = \frac{L}{t} = \frac{at}{2}$$

Para saber se esse modelo explica a lei de Ohm, temos que saber se v será proporcional à força, ou seja, se v será proporcional ao campo elétrico. Para isso, temos que nos livrar do tempo, o que é facilmente feito expressando o tempo em termos da distância L e a aceleração a. Assim:

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{La}{2}}$$

Agora só precisamos expressar a aceleração em termos do campo elétrico. Pela segunda lei de Newton temos que:

$$a = \frac{F}{m}$$

Onde m é a massa da carga. Mas como $F = qE$, onde q é a carga, chegamos à conclusão que:

$$v = \sqrt{\frac{Lq}{2m}}\sqrt{E}$$

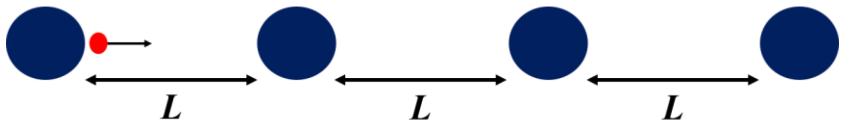


Figura 3

Então o nosso modelo nos leva à uma relação de proporcionalidade entre v e a raiz de E. Em outras palavras: nosso modelo deu errado, já que não explicou a lei de Ohm. De fato, a lei de Ohm afirma que a velocidade é proporcional ao campo elétrico, e não à raiz do campo elétrico.

O que deu errado no nosso modelo foi o fato de termos ignorado a agitação térmica das cargas. No nosso modelo, as cargas estariam paradinhas caso não houvesse um campo elétrico externo. Mas isso não é verdade: devido à agitação térmica, as cargas estão voando caoticamente para tudo quanto é lado. Mas, na ausência de um campo elétrico externo, a média das velocidades das cargas é nula e, portanto, a corrente é nula. Por outro lado, quando aplicamos um campo elétrico externo, vai haver uma aceleração na direção da força e, portanto, uma componente extra na velocidade das cargas. Essa componente extra, devido ao campo elétrico externo, é que resulta em uma corrente diferente de zero. Tudo o que precisamos fazer é achar qual é a velocidade média advinda da aceleração externa, ou seja, qual é a velocidade média desse componente extra. Como a aceleração é constante, ainda podemos utilizar a relação $v = at/2$. A diferença é que agora o tempo entre colisões é determinado pela velocidade térmica das cargas, que é tipicamente muito maior que a velocidade advinda da aceleração. Chamando a velocidade térmica de v_{th}, temos então que $t \sim L/v_{\text{th}}$. Assim, temos que a velocidade média será:

$$v = \frac{at}{2} = \frac{aL}{2v_{th}}$$

Ou seja:

$$v = \frac{qL}{2mv_{th}} E$$

Equação 10

Agora sim chegamos à uma relação de proporcionalidade entre *v* e *E*. Portanto, nosso modelo só explica a lei de Ohm se considerarmos que o tempo de colisão é determinado somente pela velocidade térmica. E isso só é verdade se a velocidade térmica for muito maior que a velocidade advinda da força externa.

Agora que chegamos em um modelo que explica a lei de Ohm, podemos expressar o parâmetro σ em termos de parâmetros mais fundamentais. Para isso, basta substituir a Equação 10 na expressão para a densidade de corrente:

$$J = \rho v = \rho \frac{qL}{2mv_{th}} E$$

Equação 11

Comparando a Equação 11 com a Equação 10, concluímos que:

$$\sigma = \frac{\rho qL}{2mv_{th}}$$

Equação 12

Ou seja, a proporção entre *J* e *E* depende de parâmetros do material (concentração de cargas *ρ* e comprimento *L*), da massa da carga (que é a massa do elétron) e da velocidade térmica, que depende, é claro da temperatura. A propósito, *σ* é chamado de condutividade. Note que a condutividade é diretamente proporcional à *ρ*. Isso faz sentido, já que, quanto maior for *ρ*, mais cargas teremos para contribuir para corrente. Além disso, a condutividade também é proporcional à *L*, já que quanto maior for *L*, maior será a distância que a carga será acelerada antes de colidir e, portanto, maior será a sua velocidade. Por outro lado, a condutividade é inversamente proporcional à velocidade térmica, já que quanto maior for a velocidade térmica, menor será o tempo entre duas colisões.

Diante desse modelo podemos ganhar uma intuição importante a respeito do comportamento térmico de materiais. Na maior parte dos casos, a condutividade de um material diminui quando a temperatura aumenta. Isso ocorre porque, quanto maior for a temperatura, maior será a velocidade térmica v_{th}. Em alguns materiais, entretanto, a condutividade pode aumentar com o aumento da temperatura. Isso é possível porque a concentração de cargas *ρ* pode aumentar com a temperatura. Assim, o aumento de *ρ* pode compensar o aumento de v_{th}, fazendo com que a condutividade aumente com a temperatura. Mas materiais com essa propriedade são, em geral, materiais especiais.

3.2 Resistência

Suponha agora que você tenha um resistor feito de um material cuja condutividade é σ. Suponha também que o resistor seja um cilindro de comprimento d e de seção transversal A. Pergunta: qual é a resistência desse resistor?

Fácil: sabemos que, por definição, a resistência nada mais é que a proporção entre a diferença de potencial eletrostático e a corrente total. Então tudo o que precisamos fazer é usar a lei de Ohm e expressar o campo elétrico em termos do potencial eletrostático e a densidade de corrente em termos da corrente total. Essa última é muito óbvia: $J = I/A$. A primeira também é muito fácil: você sabe do curso de eletricidade e magnetismo que a diferença de potencial é a integral de linha do campo elétrico. Mas se o campo elétrico for constante, então a integral é simplesmente uma multiplicação: $V = Ed$, onde d é o comprimento do resistor. Assim:

$$J = \sigma E$$

Pode ser reexpresso por:

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{d}$$

Portanto:

$$V = \frac{d}{\sigma A} I$$

Ou seja:

$$R = \frac{d}{\sigma A}$$

Equação 13

Onde R é a resistência. Assim, a resistência depende não só de qual material o resistor é feito (que entra na relação através da condutividade), mas também da geometria do resistor: quanto maior for a seção transversal A, mais cargas contribuirão para a corrente total e, portanto, menor será a resistência. Por outro lado, quanto maior for o comprimento d, menor será o campo elétrico para um mesmo valor de V e, portanto, menor será a corrente para um mesmo valor de V, ou seja, quanto maior d, maior será R.

QUESTÃO 3.2

Se te dessem laboratório de eletrônica bem equipado e te pedissem para fazer um experimento com um resistor convencional que DISPROVE a lei de Ohm, o que você faria?

Como foi mencionado mais acima, a lei de Ohm já subentende que há dissipação de energia. Resta então, para fechar essa seção, quantificar a dissipação de energia em um resistor. Essa é uma tarefa simplíssima: se a diferença de potencial no resistor é V, isso significa que cada portador de carga perde uma energia de $E = VQ$, onde Q é carga do portador (que geralmente é um elétron), dada em coulombs. Se essa afirmação não te for óbvia, lembre-se que a diferença de potencial eletrostático é dada em volts, que nada mais é que joules/coulomb (volts = joules/coulomb), o que significa que a diferença de energia potencial (joules) de uma partícula carregada é a diferença de energia potencial eletrostática (volts) vezes a carga da partícula, ou seja joules = volts x coulomb ($E = VQ$).

Então cada portador perde uma energia $E = VQ$ quando passa pelo resistor. É claro que essa energia é transmitida para o resistor em forma de calor. Agora, se temos uma corrente I, isso significa que temos I coulombs por segundo passando pelo resistor. Em outras palavras, se N for número de portadores que passam por segundo e Q for a carga de cada portador, então $I = NQ$. Como cada portador perde uma energia E, então N portadores por segundo irão dissipar uma POTENCIA $W = NE$ (lembre-se que potência é dada em watts = joules/segundo). Mas como $E = VQ$ e $N = I/Q$, então:

$$W = VI$$

Equação 14

Mas você já sabia disso.

3.3 Capacitores

Considere um objeto qualquer carregado, como mostrado na Figura 4.

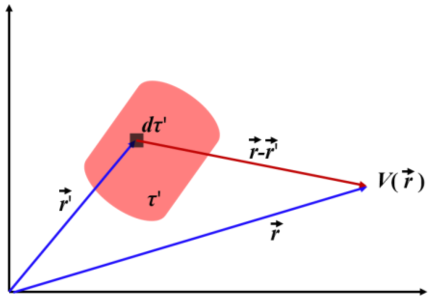


Figura 4

Você aprendeu no curso de eletricidade e magnetismo que o potencial eletrostático devido à esse objeto é dado por:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Equação 15

Onde $V(r)$ é o potencial no ponto r (tomando o potencial no infinito como sendo zero), ε_0 é a constante dielétrica do vácuo, τ' é o volume do objeto, ρ é a densidade volumétrica de carga no objeto (e é função do espaço) e os vetores posições estão representados na Figura 4. Note que a integral é feita em relação à coordenada r' e abrange todo o objeto.

Agora suponha que carga total do objeto seja Q. Em termos matemáticos, temos que:

$$Q = \int_{\tau'} \rho(\vec{r}')d\tau'$$

Equação 16

Suponha também que você calculou $V(r)$ para esse objeto com carga total Q (ou seja, que você efetuou a integral da Equação 14). Provavelmente te deu um trabalho tremendo para fazer isso. Aí alguém te conta que a situação mudou: você ainda tem exatamente o mesmo objeto, mas a carga total não é mais Q: agora a carga total é o dobro de Q. Vamos chamar a carga dessa segunda situação de Q_2. Em termo matemáticos, temos, obviamente, que:

$$Q_2 = 2Q$$

Equação 17

E agora você tem que calcular o potencial $V_2(r)$ advindo da carga Q_2. Se você é meio jacu, você vai resolver a integral outra vez para determinar $V_2(r)$. Mas se você for esperto, você vai notar que, como o objeto é o mesmo, a forma da distribuição de cargas não vai alterar. Em termos matemáticos, se o objeto não mudou, então a nova densidade de cargas ρ_2 tem que ser:

$$\rho_2(\vec{r}') = 2\rho(\vec{r}')$$

Equação 18

Essa relação só é verdade porque a forma com que as cargas se distribuem no objeto não depende da carga total. De fato, a forma depende apenas da geometria do objeto e do material do qual ele é feito. Então, se eu dobrar a carga, a forma não muda, apenas a quantidade total que muda, o que está expresso matematicamente na Equação 18. Observando esse fato, fica fácil provar que $V_2(r) = 2V(r)$. A prova é bem simples. Partindo da expressão para o potencial devido à carga Q_2, temos:

$$V_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho_2(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Equação 19

Substituindo a Equação 18 na Equação 19:

$$V_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{2\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2V(r)$$

Equação 20

Portanto, para um mesmo objeto, se eu dobro a carga total, eu dobro o potencial. É claro que isso também é verdade se eu triplicar a carga e por aí vai. Então a conclusão é que a Equação 15, combinada com o fato de que a forma da distribuição de cargas é independente da quantidade total de cargas, resulta no fato de que **O POTENCIAL É PROPORCIONAL À CARGA TOTAL DO OBJETO**. Para você saber qual é a proporção, você precisa resolver a integral da Equação 15. Mas você só precisa fazer isso uma única vez! Para isso ficar absolutamente claro, vamos chamar essa proporção de C, ou seja:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Equação 21

Então para achar essa proporção, você tem que dividir a carga total pela integral da Equação 15, ou seja, você tem que fazer a seguinte conta:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int_{\tau'} \rho(\vec{r}')d\tau'}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

Equação 22

Onde o numerador é a carga total (Equação 16) e o denominador é a integral da Equação 15. Então, se para um determinado valor de Q, você fizer essa conta e encontrar um determinado valor de C, então para qualquer outro valor de Q, você vai encontrar o mesmo valor de C! Por exemplo, suponha que a nova carga seja $A = mQ$, onde m é um número real qualquer. Chamando a densidade de carga de ρ_A, então a razão da Equação 22, calculada em termos de A, será:

$$C_A = \frac{\int_{\tau'} \rho_A(\vec{r}')d\tau'}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho_A(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = \frac{\int_{\tau'} m\rho(\vec{r}')d\tau'}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{m\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = \frac{m}{m}\frac{\int_{\tau'} \rho(\vec{r}')d\tau'}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = \frac{\int_{\tau'} \rho(\vec{r}')d\tau'}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = C$$

Equação 23

Ou seja, se você calcular a proporção C_A para a carga A, você vai encontra o mesmo resultado que encontrou para a carga Q. É óbvio que essa proporção é muito útil, porque ela te permite encontrar V dado um valor qualquer de Q sem tem que ficar fazendo integral toda hora. Mas como tudo que é útil ganha um nome, essa proporção é chamada de capacitância.

No contexto de circuitos elétricos, a capacitância é geralmente utilizada para denotar a proporção entre a diferença de potencial de dois objetos metálicos carregados com cargas espelhadas, como representado na Figura 5 (lembre-se que o potencial em um objeto metálico é constante).

$$C = Q/(V_+ - V_-) = Q/(\Delta V)$$

Figura 5

Os objetos podem ser diferentes, mas a definição de capacitância nesse caso pressupõe que a magnitude da carga seja igual em ambos os objetos. Essa pressuposição faz sentido porque, no contexto de circuitos, esses objetos vão ser carregados pelo circuito, então a carga que chega em um será igual à carga que sai do outro. Portanto, nesse caso (quando eles são carregados pelo circuito), as cargas sempre terão a mesma magnitude, mas sinal contrário. Esse sistema formado por dois objetos metálicos é chamado de capacitor.

Como existe uma diferença de potencial entre as placas do capacitor, existirá um campo elétrico entre eles. Agora, suponha que você queira carregar um capacitor com uma carga total Q. Pergunta, quanto de energia a bateria vai ter que desprender para carregar o capacitor com carga total Q?

Para responder essa pergunta, suponha que, em um determinado momento, durante o carregamento, a diferença de potencial seja V. Quanto de energia precisamos para aumentar a carga do capacitor de uma quantidade infinitesimal dq? Lembre-se que, como existe uma diferença de potencial eletrostático entre as placas do capacitor, existe uma barreira de energia entre as duas placas. Essa barreira é análoga à barreira de potencial gravitacional. De fato, se trocássemos a força eletrostática pela força gravitacional, então seria como se uma placa do capacitor estivesse mais alta que a outra. Carregar o capacitor seria análogo a levar bolinhas da placa de baixo para a placa de cima. Em ambos os casos, a energia que você tem que dar para as cargas (ou para as bolinhas) é igual à diferença de energia potencial entre as placas. Então, para carregar o capacitor de um tanto dq, você precisa desprender uma energia dE igual à energia potencial que dq adquire, ou seja:

$$dE = Vdq$$

Equação 24

Mas, se a capacitância for C, temos então que:

$$dE = \frac{q}{C} dq$$

Equação 25

Onde q é a quantidade total de carga no capacitor no momento que acrescentamos o diferencial dq. Se o capacitor possui inicialmente carga zero, e o carregarmos até atingir a carga total Q, então a energia total que tem que ser desprendida (e será armazenada no capacitor) pode ser facilmente obtida integrando a Equação 25:

$$E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Equação 26

No contexto de circuitos elétricos, é mais útil expressar a energia em termos da diferença de potencial, ao invés de expressar em termos da carga total. Isso pode ser facilmente obtido substituindo $Q = CV$ na expressão acima. Assim, temos:

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$

Equação 27

Então, se você quiser carregar um capacitor até que a diferença de potencial nele seja V, você vai ter que desprender a energia $CV^2/2$. Note que essa energia nada mais é que a energia potencial eletrostática das cargas na placa do capacitor. Como essa energia potencial advém da presença do campo elétrico entre as placas (do mesmo jeito que a energia potencial de alguém em cima de um prédio advém da força da gravidade), costuma-se dizer que a energia está armazenada no campo elétrico. É a mesma coisa.

Vimos então quanto de energia precisamos desprender para carregar um capacitor. Mas do mesmo jeito que a energia potencial gravitacional de bolinhas em cima de uma placa alta pode ser reutilizada (basta derrubar as bolinhas), a energia potencial eletrostática das cargas de um capacitor pode ser reutilizada. Por isso dizemos que um capacitor é um elemento reativo. Como foi dito anteriormente, esse termo denota o fato do capacitor armazenar energia (enquanto um resistor apenas dissipa energia).

QUESTÃO 3.3

A unidade de capacitância é chamada de faraday e capacitores convencionais são da ordem de nanofaradays. Suponha que um capacitor possua capacitância $C = 12\text{n}F$ (12 nanofaradays) e que a diferença de potencial entre as placas do capacitor seja de V = 2V

(2 volts). Agora suponha que esse capacitor descarregue em cima de um resistor de resistência $R = 10\ \Omega$ (10 ohms). Qual é a energia total que é dissipada em cima do resistor?

Já que vamos utilizar capacitores em circuitos, é interessante encontrar a relação de corrente e tensão no capacitor. Essa relação pode ser facilmente deduzida a partir da seguinte observação: se um capacitor está sendo carregado por uma corrente I, isso significa que a carga do capacitor está aumentando à uma taxa de I coulombs por segundo. Essa afirmação é simplesmente uma questão de bom senso: se a corrente é I, significa que chegam I coulombs por segundo na placa do capacitor. Como essas cargas não vão para lugar nenhum, então é claro que a carga tem que aumentar à uma taxa de I coulombs por segundo. Portanto, em um capacitor, a taxa de variação temporal da carga é igual à corrente que está carregando (ou descarregando) o capacitor. Em termos matemáticos:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Equação 28

QUESTÃO 3.4

A relação acima é sempre válida? Eu poderia afirmar que essa relação também é válida para a corrente que passa por um resistor?

Como $Q = CV$ e C não depende do tempo (a não ser que as placas do capacitor deformem), então podemos derivar os dois lados da relação $Q = CV$ para obter:

$$I = C\frac{dV}{dt}$$

Equação 29

Essa relação será utilizada no capítulo seguinte quando estudarmos a dinâmica de corrente versus tensão em um circuito envolvendo capacitores, resistores e indutores.

QUESTÃO 3.5

Um capacitor é formado por duas placas paralelas com área A, separadas por uma distância d. Encontre C em função de A e d (suponha que as placas estejam separadas por ar). Dica: utilize a lei de Gauss para encontrar o campo elétrico advindo de uma placa infinita, e depois calcule a diferença de potencial advinda desse campo elétrico.

QUESTÃO 3.6

Uma bateria perde 150 nJ ao carregar um capacitor. A tensão no capacitor depois de carregado é de 5V. Qual é a sua capacitância?

3.4 Indutores

Assim como capacitores, indutores também são elementos reativos, ou seja, indutores são elementos que armazenam energia. Mas, enquanto em um capacitor energia é armazenada em forma de campo elétrico, em um indutor a energia é armazenada na forma de campo magnético.

A lei da Física que está no coração do funcionamento de um indutor é a lei da indução de Faraday (ou, mais convenientemente, lei de Faraday). Como visto no curso de eletricidade e magnetismo, a lei de Faraday afirma que a variação de um campo magnético gera um campo elétrico. Em termos matemáticos, a lei de Faraday pode ser expressa como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{a}$$

Equação 30

Onde subentende-se que a área da integral do lado direito da equação é definida pelo caminho fechado na integral do lado direito. Para facilitar a notação, podemos denotar o fluxo magnético pelo termo ϕ_B, ou seja, definindo:

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Equação 31

A lei de Faraday pode então ser expressa como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Equação 32

A lei de Faraday é uma das leis fundamentais do eletromagnetismo (lembre-se que existem 4 leis fundamentais do eletromagnetismo, que são as equações de Maxwell; a lei de Faraday é uma das equações de Maxwell). Isso significa que a lei de Faraday não pode ser deduzida de outro conjunto de leis. Nós a sabemos porque alguém (o Faraday) a descobriu experimentalmente. Mas isso é tudo o que sabemos.

A lei de Faraday pode ser convenientemente ilustrada através de um exemplo simples, mostrado na Figura 6. Nele, temos um arco metálico por onde passa um fluxo magnético que varia no tempo. Nesse arco metálico existe um pequeno resistor. Pergunta: qual será a diferença de potencial no resistor?

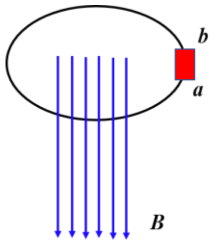


Figura 6

Para responder a essa pergunta, lembre-se que a diferença de potencial no resistor nada mais é que a integral de linha do campo elétrico sobre o resistor. Denotando as extremidades do resistor pelos pontos *a* e *b*, temos então que:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Equação 33

Note que essa integral é parte da integral sobre todo o percurso fechado. De fato, podemos dividir o percurso fechado em duas partes: a parte do aro metálico e a parte do resistor. Assim, temos que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Equação 34

Onde a primeira integral, de *b* até *a*, é feita pelo resistor e a segunda integral, de *a* até *b*, é feita pelo aro metálico. Mas o campo elétrico no aro metálico é zero (o campo em um metal perfeito é zero). Portanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Equação 35

Substituindo a Equação 35 na Equação 33:

$$V_a - V_b = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Equação 36

Mas da lei de Faraday temos que a integral do lado direito corresponde à variação do fluxo magnético. Portanto:

$$V_a - V_b = \Delta V = \frac{d\phi_B}{dt}$$

Equação 37

Esse exemplo mostra um efeito geral advindo da lei de Faraday: a passagem de um fluxo magnético variante no tempo por um arco induz uma diferença de potencial. Essa diferença de potencial induzida é um exemplo de força eletromotriz.

Agora, considere uma espira, ou seja, uma sequência de vários arcos enrolados muito próximos um do outro, como mostrado na Figura 7a. O que vai ocorrer se conectarmos esse elemento a um circuito? Em outras palavras, o que o ocorre se uma corrente passar pela espira?

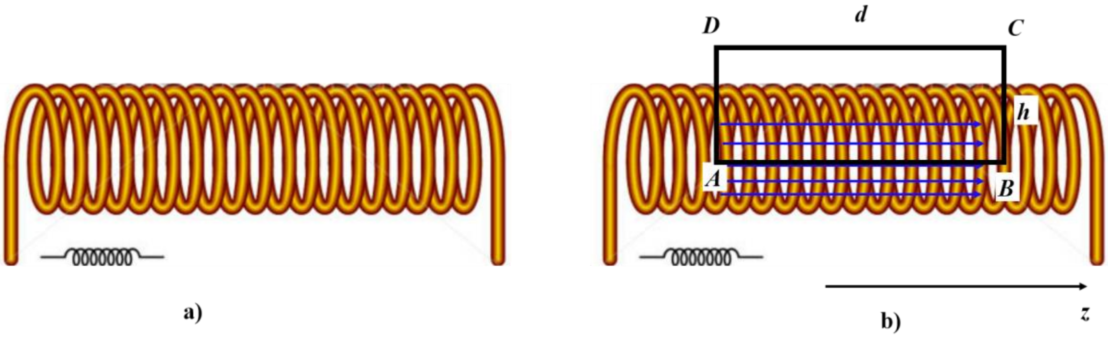


Figura 7

Você já sabe que uma corrente induz um campo magnético e que esse fenômeno, que é chamado de lei de Ampére, é expresso matematicamente pela relação:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_t$$

Equação 38

Onde I_t é a corrente total que atravessa o caminho fechado.

Então, se a corrente induz um campo magnético, vai haver um fluxo magnético e, se esse fluxo variar no tempo, vai aparecer uma diferença de potencial através dos terminais da espira. Podemos inclusive expressar qual será a relação entre a diferença de potencial e a corrente que passa pela espira. Para isso, precisamos primeiro calcular o campo magnético. Por simetria, o campo magnético só pode ser paralelo ao eixo dos arcos (eixo z na Figura 7b: o campo magnético é representado pelas setas azuis que estão dentro da espira) e não varia nessa direção (B não é função de z). Tomando o caminho como um retângulo de lado *d* e altura *h*, cujos lados denotamos pelas letras *A*, *B*, *C* e *D*, a integral do lado esquerdo da Equação 38 fica:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

Equação 39

Como o campo magnético é paralelo ao eixo *z*, então ele é perpendicular à *dl* no caminho de *B* para *C* e no caminho de *A* para *D*. Assim, a segunda e quarta integrais no lado direito da Equação 39 são zero. Além disso, o campo magnético fora da espira é zero (para provar isso, basta aplicar a lei de Ampére em um percurso fora da esfera: neste caso a corrente será zero e, portanto, o campo também será zero). Assim, a integral sobre o percurso fechado é reduzida à integral entre *A* e *B*:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{l} = Bd$$

Equação 40

Substituindo esse resultado na Equação 38:

$$Bd = \mu_0 I_t$$

Equação 41

Mas, se a corrente que circula pela espira for *I*, então I_t será $I_t = I$ x *N*, onde *N* é o número de voltas dentro do comprimento *d*. Definindo a densidade de voltas como *n* (*n* é o número de voltas por unidade de comprimento), temos obviamente que *N* = *n* x *d*, ou seja:

$$Bd = \mu_0 Ind$$

Equação 42

Portanto:

$$B = \mu_0 nI$$

Equação 43

Não é de se surpreender que o campo magnético seja proporcional à corrente. Essa proporção é consequência da relação linear entre *B* e *I* na lei de Ampére.

Agora que sabemos o campo magnético, só precisamos calcular o fluxo para acharmos a diferença de potencial nos terminais da espira. Se o aro possui raio r, o fluxo ϕ_{BA} em cada aro será:

$$\phi_{BA} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a} = B\pi r^2 = \mu_0 n I \pi r^2$$

Equação 44

Como o fluxo total é o fluxo em cada aro vezes a quantidade de aros, temos que, para um comprimento D de espira, o número total de espiras será nD. Assim:

$$\phi_{Bt} = nD\phi_{BA} = \mu_0 n^2 \pi r^2 DI$$

Equação 45

Como esperado, o fluxo magnético é proporcional à corrente (já que o campo magnético é proporcional à corrente). Além disso, a constante de proporcionalidade depende apenas da geometria do sistema. Esse é um resultado geral: para qualquer geometria, o fluxo será proporcional à corrente. E isso é verdade porque na lei de Ampére temos uma relação linear entre o campo magnético e a corrente. É claro que, então, é útil dar um nome para essa constante de proporcionalidade entre o fluxo magnético e a corrente. Essa proporção é chamada de indutância e denominada pela letra L (a unidade de indutância é chamada de Henry), ou seja:

$$\phi_B = LI$$

Equação 46

No caso da nossa espira, já deduzimos que:

$$L = \mu_0 n^2 \pi r^2 D$$

Equação 47

De maneira muito criativa, chamamos o elemento do qual calculamos a indutância e por onde passa o fluxo (no nosso exemplo a espira) de indutor.

Voltando para a lei de Faraday, sabemos que a diferença de potencial será proporcional à variação do fluxo magnético (Equação 37). Expressando o fluxo em termos da corrente, temos então que:

$$\Delta V = \frac{d(LI)}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

Equação 48

É importante notar que, se $\Delta V = V_a - V_b$, então V_a é o potencial do lado do indutor por onde entra a corrente, e V_b é o lado por onde sai a corrente.

Pergunta: quanto de energia precisamos desprender para passar uma corrente de *I* coulombs/s por um indutor com indutância *L*?

Para responder a essa pergunta, lembre-se que a potência (energia por segundo) é $P = VI$. Portanto, se existe uma tensão *V'* e uma corrente *I'* no indutor em um intervalo de tempo *dt*, a energia desprendida (e armazenada) nesse intervalo de tempo será:

$$dE = V'I'dt$$

Equação 49

Mas, se existe uma diferença de potencial *V* no indutor, é porque a própria corrente está variando no tempo (veja a Equação 48). No intervalo de tempo *dt*, a corrente varia de um tanto *dI'* dado por:

$$dI' = \frac{dI'}{dt}dt$$

Equação 50

Mas, da Equação 48, temos que:

$$\frac{dI'}{dt} = \frac{V'}{L}$$

Equação 51

Portanto:

$$dI' = \frac{V'}{L}dt$$

Ou seja:

$$dt = \frac{L}{V'}dI'$$

Equação 52

Podemos então expressar a energia armazenada no tempo *dt* em termos do aumento de corrente *dI*. Substituindo a Equação 52 na Equação 49:

$$dE = LI'dI'$$

Equação 53

Integrando de 0 à *I*, teremos então a energia total armazenada no indutor quando passa uma corrente *I* no mesmo é:

$$E = \int_0^I LI'dI' = \frac{LI^2}{2}$$

Equação 54

Como dito anteriormente, essa energia está armazenada no campo magnético. No capítulo seguinte estudaremos em mais detalhes a dinâmica de carga e descarga de capacitores e indutores.

Capítulo 4 Circuitos Elétricos: Introdução e ferramentas

4.1 Introdução

Agora que temos as relações entre corrente e tensão para resistores, capacitores e indutores, podemos passar para o estudo de circuitos elétricos.

Em primeiro lugar, é bom já enfatizar uma questão de terminologia: o termo "circuitos elétricos" denota circuitos que possuem apenas elementos passivos, enquanto o termo "circuitos eletrônicos" denota circuitos que possuem tanto elementos ativos quanto passivos. Portanto, um circuito elétrico vai ter só resistor, capacitor e indutor (estritamente falando, poderia ter um diodo também, mas é mais didático incluir o diodo na família de componentes eletrônicos).

Antes de começar a analisar circuitos elétricos, é útil, inteligente e eficiente tentar identificar propriedades gerais dos circuitos que possam auxiliar a nossa análise. Para isso, vou colocar aqui embaixo as três relações de tensão e corrente que vimos no capítulo anterior; respectivamente, as relações para resistores, capacitores e indutores são:

$$V = RI, \quad I = C\frac{dV}{dt}, \quad V = L\frac{dI}{dt}$$

Equação 55

Observando essas três relações, podemos identificar de cara uma propriedade muito, super, ultra, importante: todas as três relações são lineares. Em todas as relações, se eu dobrar um termo (a tensão, por exemplo), o outro termo dobra junto (a corrente, por exemplo). Esse fato, por si só, já fornece um tremendo avanço na análise de circuitos. Por que? Fácil: porque somos muito bons em analisar sistemas lineares. Você aprendeu a fazer isso no curso de Álgebra Linear, que é de longe o curso de matemática mais importante da graduação. E o que foi que você aprendeu de mais importante nesse curso que é o mais importante? Resposta: que, se um sistema for linear, eu posso descreve-lo em termos da sua resposta à uma classe de funções base. Isso é praticamente tudo o que você precisa saber. Mas, é claro, eu tenho que ser um pouco mais especifico. Então, eu vou fazer uma breve revisão do que você viu em álgebra para conseguir te mostrar como análise de circuitos nada mais é que um problema de autovalor e autovetor. Esse é o meu principal objetivo nesse capítulo.

Em Álgebra Linear você trabalhou com um espaço chamado espaço Euclidiano, que é o espaço de vetores. Você tinha basicamente dois objetos: vetores e matrizes. Como a multiplicação de uma matriz por um vetor gera outro vetor, nós chamamos a matriz de operador. A notação que você provavelmente utilizou em álgebra para representar a transformação de um vetor por um operador foi algo do tipo:

$$\vec{v} = \tilde{A}\vec{u}$$

Onde $\vec{u}$ é o vetor operado, $\vec{v}$ é o vetor resultante da operação e $\tilde{A}$ é o operador (a matriz). O operador pode significar um monte de coisas: uma mudança de coordenadas, uma operação física (por exemplo, o vetor $\vec{u}$ pode ser uma grandeza física em um certo tempo inicial e o vetor $\vec{v}$ pode ser a mesma grandeza depois de um certo tempo; nesse caso, o operador representa alguma lei da física que descreve a evolução temporal dessas grandezas).

Aqui, vamos usar uma notação um pouquinho diferente. Como $\tilde{A}$ é um operador, vamos colocar um par de chaves na frente do $\tilde{A}$ para ficar absolutamente claro qual é o vetor que está sendo operado. Dessa forma, ao invés de representar uma multiplicação matricial como foi feito na equação anterior, vamos representa-la assim:

$$\vec{v} = \tilde{A}\{\vec{u}\}$$

Equação 56

Essa notação então diz que o vetor $\vec{v}$ é o resultado da multiplicação matricial entre a matriz $\tilde{A}\{\ \}$ e o vetor $\vec{u}$.

Agora, suponha que você tenha algum problema onde você tenha que aplicar uma certa operação em um campo vetorial. Lembre-se que um campo vetorial é um conjunto de infinitos vetores (cada vetor sendo associado a um ponto do espaço). Aplicar a operação em um único vetor é moleza: basta multiplicar a matriz pelo vetor. Mas aplicar a operação em um campo vetorial é um trabalho impossível, porque requer infinitas multiplicações vetoriais. Então o que você faz? Primeiro você se pergunta: o meu operador é linear? Se a resposta for sim, então é válida a seguinte relação (que é a própria definição de linearidade):

$$\tilde{A}\{a\vec{u} + b\vec{v}\} = a\tilde{A}\{\vec{u}\} + b\tilde{A}\{\vec{v}\}$$

Equação 57

Onde a e b são constantes. Então, se o operador for linear, ao invés de efetuar a operação para infinitos vetores (o que é impossível), **eu efetuo a operação apenas para os vetores da base** e utilizo a linearidade para expressar o resultado da operação sobre um vetor qualquer. Assim, utilizando a linearidade do operador, eu não preciso fazer a operação para infinitos vetores, mas somente para os vetores da base.

Por exemplo, suponha que o espaço vetorial tenha três dimensões. Nesse caso, a base é formada por três vetores unitários e ortogonais, que podemos chamar de $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$. Um vetor $\vec{u}$ qualquer pode ser escrito como a soma dos vetores base:

$$\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

Equação 58

Então, se o operador for linear, a operação um vetor $\vec{u}$ qualquer em pode ser obtida a partir da operação nos vetores base:

$$\tilde{A}\{\vec{u}\} = \tilde{A}\{a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}\} = a\tilde{A}\{\hat{x}\} + b\tilde{A}\{\hat{y}\} + c\tilde{A}\{\hat{z}\}$$

Equação 59

Assim, para saber o resultado da operação em um vetor $\vec{u}$ qualquer, tudo o que eu preciso saber é o resultado da operação nos vetores base. Neste exemplo, se tivéssemos um campo vetorial, teríamos infinitos vetores. A linearidade do operador nos permitiria saber o resultado da operação nesses infinitos vetores a partir do resultado da operação em apenas três vetores! Acho que todo mundo concorda que uma teoria que te permite trocar infinitos cálculos por três cálculos é bem útil.

Mas não para por aí. Existe um problema particularmente importante onde a noção de base e de linearidade desempenham um papel crucial. O problema pode ser facilmente exemplificado novamente com a relação:

$$\vec{v} = \tilde{A}\{\vec{u}\}$$

Equação 60

Se eu te der o operador (matriz) $\tilde{A}\{\ \}$ e o vetor $\vec{u}$ e te pedir o $\vec{v}$, é moleza de você cumprir sua tarefa: basta multiplicar a matriz pelo vetor. Mas, se eu te der o vetor $\vec{v}$ e te de pedir o $\vec{u}$, aí encrenca. Esse é o famoso problema de inversão de matriz. De fato, a tarefa de encontrar $\vec{u}$ a partir de $\vec{v}$ equivale à tarefa de encontrar a matriz $\tilde{B}\{\ \}$ tal que:

$$B\{\vec{v}\} = \vec{u}$$

Equação 61

É claro que a matriz $\tilde{B}\{\ \}$ é a inversa da matriz $\tilde{A}\{\ \}$ (lembre-se que uma matriz é a inversa da outra se a multiplicação das duas resulta na matriz identidade). **Então o problema de encontrar $\vec{u}$ a partir de $\vec{v}$ equivale ao problema de encontrar a matriz inversa de $\tilde{A}\{\ \}$.** E por conta de que eu estou te contando isso? Porque um monte de problemas, mas um monte mesmo de problemas, de física e engenharia, incluindo analise de circuitos, equivale ao problema de encontrar o inverso de um operador. Mas antes de chegar lá, quero te lembrar como resolvemos o problema de inverter uma matriz.

O método mais fácil e mais útil e mais elegante de se inverter uma matriz é encontrando os autovalores e autovetores da matriz. Lembre-se que um autovetor de uma matriz é um vetor que, quando multiplicado pela matriz, resulta em um vetor proporcional a si mesmo. E essa constante de proporcionalidade é o autovalor. Em linguagem matemática, se o vetor $\vec{a}$ é um autovetor da matriz $\tilde{A}\{\ \}$ com autovalor *a*, então, por definição, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\tilde{A}\{\vec{a}\} = a\vec{a}$$

Equação 62

Lembre-se que, se o espaço possui *N* dimensões, então existem *N* autovetores da matriz $\tilde{A}\{\ \}$ e, além disso, é sempre (quase) possível encontrar uma base para o espaço que seja formada por *N* autovetores.

Agora, suponha que você tenha uma certa matriz $\tilde{A}\{\ \}$, em uma base qualquer. Se você efetuar uma mudança de base, e a nova base for formada pelos autovetores da matriz $\tilde{A}\{\ \}$, então a matriz nessa nova base será uma matriz diagonal. Talvez você não recorde o porquê disso ser verdade, mas não é difícil entender o porquê. Primeiro, suponha que a base original (que pode ser uma base qualquer) seja formada pelos vetores $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ e $\hat{p}_3$. Então um elemento A_{mn} da matriz $\tilde{A}\{\ \}$ nessa base corresponde ao produto escalar entre o vetor base $\hat{p}_m$ e o vetor $\tilde{A}\{\hat{p}_n\}$, ou seja:

$$A_{mn} = \hat{p}_m \bullet \tilde{A}\{\hat{p}_n\}$$

Equação 63

Onde $\bullet$ é o símbolo para o produto escalar e os índices *m* e *n* podem adquirir os valores 1, 2 ou 3 (no nosso exemplo tri-dimensional).

Agora, se ao invés da base qualquer $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ e $\hat{p}_3$ tivermos a base de autovetores $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ e $\hat{a}_3$, então os elementos serão:

$$A_{mn} = \hat{a}_m \bullet \tilde{A}\{\hat{a}_n\} = a_n(\hat{a}_m \bullet \hat{a}_n)$$

Equação 64

Mas como os autovetores são ortogonais, o produto escalar será zero se m for diferente de n. Em outras palavras, $A_{nn} = 0$ se $m \neq n$. Além disso, é óbvio que $A_{nn} = a_n$. Assim, na base formada por seus autovetores, a matriz $\tilde{A}\{\ \}$ é uma matriz diagonal. Além disso, os elementos da diagonal correspondem a seus autovalores ($A_{nn} = a_n$).

E o que isso tem a ver com o problema de inversão matricial? Tudo a ver, porque se a matriz for diagonal, então é muito fácil encontrar a sua inversa. De fato, a inversa de uma matriz diagonal é outra matriz diagonal cujos elementos são o inverso da matriz original. Em outras palavras, se é $\tilde{A}\{\ \}$ for uma matriz diagonal com $A_{nn} = a_n$, então a sua inversa $\tilde{B}\{\ \}$será também uma matriz diagonal com $B_{nn} = 1/a_n$.

Então qual é o truque? Se eu sei como inverter uma matriz diagonal, eu faço uma mudança de base para diagonalizar a matriz (ou seja, eu passo para a base de autovetores), inverto ela e depois devolvo para base original. Vamos utilizar o nosso problema original como exemplo. Nosso problema original era encontrar $\vec{u}$ a partir de $\vec{v}$ na relação:

$$\vec{v} = \tilde{A}\{\vec{u}\}$$

Equação 65

Então, em primeiro lugar, eu encontro os autovetores e autovalores de $\tilde{A}\{\ \}$ e expresso tanto $\vec{u}$ quanto $\vec{v}$ na nova base. Assim:

$$\begin{aligned}
&\vec{v} = v_1\hat{a}_1 + v_2\hat{a}_2 + v_3\hat{a}_3 \\
&e \\
&\vec{u} = u_1\hat{a}_1 + u_2\hat{a}_2 + u_3\hat{a}_3
\end{aligned}$$

Equação 66

Lembre-se que as coordenadas podem ser facilmente encontradas com o produto escalar. Por exemplo a coordenada v_1 é:

$$v_1 = \hat{a}_1 \bullet \vec{v}$$

Equação 67

Lembre-se também que no meu problema eu conheço $\vec{v}$ mas não conheço $\vec{u}$. Em outras palavras, eu conheço as coordenadas v_1, v_2 e v_3 mas não conheço as coordenadas u_1, u_2 e u_3. Mas encontrá-los agora é fácil. Como:

$$v_1\hat{a}_1 + v_2\hat{a}_2 + v_3\hat{a}_3 = \tilde{A}\{u_1\hat{a}_1 + u_2\hat{a}_2 + u_3\hat{a}_3\} = a_1u_1\hat{a}_1 + a_2u_2\hat{a}_2 + a_3u_3\hat{a}_3$$

Equação 68

Então:

$$u_1 = \frac{v_1}{a_1}, u_2 = \frac{v_2}{a_2}, u_3 = \frac{v_3}{a_2}$$

Equação 69

Se você não estiver convencido que as igualdades acima são verdadeiras, basta aplicar o produto escalar por um dos vetores base no lado esquerdo e direito da Equação 68. Por exemplo, se você aplicar o produto escalar com o vetor $\hat{a}_1$, só vai sobrar a igualdade $v_1 = a_1u_1$.

De certa forma, você já resolveu o problema, porque você já determinou o vetor $\vec{u}$. Mas, por enquanto, você achou o vetor $\vec{u}$ na base de autovetores e, provavelmente, você quer saber qual é o vetor na base original. Chamando novamente essa base original de $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ e $\hat{p}_3$, o que você quer na verdade é encontrar as coordenadas p_m tal que:

$$\vec{u} = p_1\hat{p}_1 + p_2\hat{p}_2 + p_3\hat{p}_3$$

Equação 70

Mas por enquanto você encontrou $\vec{u}$ na base de autovetores, ou seja, por enquanto você conhece só as coordenadas *u* dessa base:

$$\vec{u} = u_1\hat{a}_1 + u_2\hat{a}_2 + u_3\hat{a}_3$$

Equação 71

Então tudo o que te resta agora é voltar para a base original. Isso é muito fácil, basta aplicar o produto escalar com o vetor base correspondente. Por exemplo, a coordenada p_1 pode ser obtida com o produto escalar entre p_1 e $\vec{u}$. Assim:

$$p_1 = \hat{p}_1 \bullet \vec{u} = u_1\hat{p}_1 \bullet \hat{a}_1 + u_2\hat{p}_1 \bullet \hat{a}_2 + u_3\hat{p}_1 \bullet \hat{a}_3$$

Equação 72

E pronto!

E pronto!

Mas isso foi, a priori, só uma revisão de Álgebra Linear. Mas valeu a pena, porque tudo o que você precisa saber de análise de circuitos está embutido nessa revisão.

Eu vou explicar melhor o que eu quero dizer com isso. Existem vários espaços algébricos, sendo que o mais comum deles é o Euclidiano. Mas existe também o espaço de funções, que é chamado de espaço de Hilbert. **Nesse espaço, cada função é um vetor**. **Além disso, uma equação diferencial é um operador**! A equação diferencial desempenha no espaço de Hilbert o mesmo papel que a matriz desempenha no espaço Euclidiano. Então tudo o que você sabe sobre inverter matrizes pode ser utilizado para resolver equações diferenciais. Mas antes de te mostrar como isso é feito e os nomes que as coisas ganham, eu preciso primeiro te contar qual é a operação “produto escalar” no espaço de Hilbert. A definição é muito simples: dada duas funções (ou seja, dois vetores), $g(t)$ e $f(t)$, então o produto escalar entre esses dois vetores será:

$$g(t)\bullet f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)f(t)dt$$

Equação 73

Onde * é complexo conjugado da função. Note que a ordem da operação importa, a não ser que as funções sejam reais.

Uma outra diferença importante entre o espaço de Hilbert e o espaço Euclidiano é a dimensão: enquanto o espaço Euclidiano tem dimensão igual à 3, a dimensão do espaço de Hilbert é infinita. Isso quer dizer que, enquanto uma base do espaço Euclidiano tem 3 vetores, uma base do espaço de Hilbert tem infinitos vetores (ou seja, infinitas funções). Por exemplo, uma base importante para o espaço de Hilbert é conjunto de funções impulso $\delta(t-t_0)$, onde cada t_0 (que pode ser qualquer número real) define uma função. Para verificar que esse conjunto de funções forma uma base, basta lembrar que uma função qualquer pode ser escrita como uma soma infinita (ou seja, uma integral) de funções impulso:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt_0$$

Equação 74

Nessa forma, a função $f(t)$ é interpretada como sendo formada pela soma de infinitas funções $\delta(t-t_0)$ (ou seja, infinitos vetores base), cada uma com coordenada $f(t_0)$. Note que a integral é sobre t_0, porque cada t_0 define um vetor δ. Assim, a Equação 74 é a decomposição vetorial de $f(t)$ na base $\delta(t\text{-}t_0)$ (e $f(t_0)$ nada mais é que a coordenada do vetor $\delta(t\text{-}t_0)$).

Vamos ver então um exemplo típico de como circuitos elétricos (ou qualquer outro sistema descrito por uma equação diferencial linear) se reduz ao problema de inversão matricial.

Suponha que nós temos o circuito abaixo, composto por uma fonte de tensão $V(t)$, um resistor e um capacitor. Vamos supor também que eu esteja interessado em determinar a tensão em cima do capacitor, que chamei de $V_s(t)$.

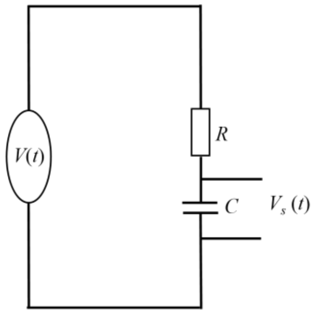


Figura 8

Eu sei que a queda de tensão no resistor mais a queda de tensão no capacitor - que é $V_s(t)$ - tem que ser igual à tensão da fonte $V(t)$. Em termos matemáticos:

$$V(t) = RI + V_s(t)$$

Equação 75

Onde RI é a queda de tensão no resistor. Mas eu também sei que a corrente que passa pelo resistor é a mesma corrente que passa pelo capacitor. Então o termo I na equação acima é também a corrente que passa pelo capacitor. Portanto esse I é função de $V_s(t)$. Mais precisamente:

$$I = C\frac{dV_s}{dt}$$

Equação 76

Substituindo na Equação 75 temos:

$$V(t) = RC\frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t)$$

Equação 77

Como dito anteriormente, a equação diferencial desempenha no espaço de Hilbert a mesma função da matriz no espaço Euclidiano (ambos são operadores, já que ambos transformam um vetor em outro vetor). Assim, podemos definir o operador $\tilde{A}\{\ \}$ da seguinte forma:

$$A\{\ \} = 1 + RC\,\frac{d}{dt}$$

Equação 78

De maneira que operação de $\tilde{A}\{\ \}$ em um vetor $x(t)$ qualquer resulta no vetor $y(t)$ de acordo com a relação:

$$y(t) = A\{x(t)\} = x(t) + RC\,\frac{dx}{dt}$$

Equação 79

Com essa notação, podemos expressar a Equação 77 como:

$$V(t) = A\{V_s(t)\}$$

Equação 80

Compare essa igualdade com igualdade da Equação 60. É a mesma coisa! Os problemas são iguais, apenas em espaços algébricos diferentes. Além disso, em geral nós conhecemos a função $V(t)$ (que é a fonte) e queremos determinar a função $V_s(t)$ - o que é exatamente o mesmo problema de se determinar $\vec{u}$ a partir de $\vec{v}$ na Equação 60. Então nós não precisamos reinventar a roda. É só seguir o mesmo procedimento: encontre os autovetores e autovalores do operador $\tilde{A}\{\ \}$, depois expanda as funções nessa base de autovetores, resolva o problema nessa base (que é ultra-fácil, veja a Equação 69) e depois volte para base original.

Então o nosso principal desafio é encontrar os autovetores (e autovalores) do operador $\tilde{A}\{\ \}$**.** Mas quais funções são autovetores do operador $\tilde{A}\{\ \}$? Lembre-se que um autovetor é uma função que, quando transformada pelo operador, resultar em um múltiplo de si própria (Equação 62). Como um operador linear só tem derivadas e multiplicações por constantes (já que ele é linear), **o autovetor será a função que se torna um múltiplo de si mesma quando derivamos ela**!! E que qual função é um múltiplo da sua própria derivada? Fácil né, é a função exponencial. Assim, se $\tilde{A}\{\ \}$ for um operador linear, então seus autovetores serão da forma:

$$a(t) = \exp(j\omega t)$$

Equação 81

Onde j é o número imaginário puro. Note que, como o espaço de Hilbert é infinito, temos infinitos autovetores. De fato, cada valor de ω define um autovetor diferente. Como ω é qualquer número real, temos infinitos autovetores!

Uma maneira alternativa de expressar o autovalor é substituir o termo ω, que associamos com frequência em radianos por segundo, pelo termo f, que associamos com frequência em Hertz (ou seja, $\omega = 2\pi f$). Assim, podemos, de maneira completamente equivalente, definir o autovetor da Equação 81 como:

$$a(t) = \exp(j2\pi ft)$$

Equação 82

Agora que já sabemos quais são os autovetores fica fácil encontrar os autovalores. Para não confundir os autovalores com a função (já que agora não tenho mais a flechinha para diferenciar os dois), vamos chamar o autovalor λ (antes chamamos o autovalor de a, veja a Equação 62). Note que o autovalor λ é função de f, já que cada autovetor (definido por um valor especifico de f) tem o seu próprio autovalor.

É muito fácil encontrar os autovalores, é só utilizar a própria definição de autovalor, ou seja, é só utilizar a condição:

$$A\{a(t)\} = \lambda a(t)$$

Equação 83

Por exemplo, para o nosso circuito, temos que:

$$A\{a(t)\} = a(t) + RC\frac{da}{dt}$$

Equação 84

Como já sabemos que $a(t)$ é uma exponencial (Equação 81), temos que:

$$A\{a(t)\} = A\{\exp(j2\pi ft)\} = \exp(j2\pi ft) + RC\frac{d\exp(j2\pi ft)}{dt} = \exp(j2\pi ft) + j2\pi fRC\exp(j2\pi ft)$$

Ou seja:

$$A\{a(t)\} = (1 + j2\pi fRC)\exp(j2\pi ft) = (1 + j2\pi fRC)a(t)$$

Equação 85

Comparando a Equação 85 com a Equação 83 concluímos que:

$$\lambda = (1 + j2\pi fRC)$$

Equação 86

Estamos quase lá então. Agora, só precisamos expandir nossa função $V(t)$ na base de autovetores, dividir as coordeandas dessa expansão pelos correspondentes autovalores para encontrar as coordenadas de $V_s(t)$ na base de autovetores (como fizemos na Equação 69), e devolver a resposta para a base original.

Então vamos lá: para um determinado autovetor exp($j2\pi ft$), qual é a coordenada da função (ou seja, do vetor) $V(t)$ para esse autovetor? Você já sabe como fazer isso: é só tomar o produto escalar entre os vetores (veja Equação 66 e Equação 67). Chamando essa coordenada de $V(f)$ (que é função de f porque para cada autovetor eu tenho uma coordenada diferente), temos que:

$$V(f) = \exp(j2\pi ft) \bullet V(t)$$

Equação 87

Da operação produto escalar no espaço de Hilbert (Equação 73), temos então que:

$$V(f) = \exp(j2\pi ft) \bullet V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) V(t) dt$$

Equação 88

Lembre-se que isso implica que $V(t)$ pode ser obtido como a soma dos infinitos autovetores, cada qual com coordenada $V(f)$. Em termos matemáticos, essa soma infinita (que, é claro, vira uma integral, já que temos infinitos termos) é expressa pela relação:

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) \exp(j2\pi ft) df$$

Equação 89

Onde a integral é feita sobre a variável f, já que estamos simplesmente somando os infinitos autovetores exp($j2\pi f\,t$), cada qual com a sua coordenada $V(f)$.

Um adendo: como a função exp($j2\pi f\,t$) é um autovetor para qualquer operador linear, ela aparece toda hora em física em engenharia. De fato, todo sistema físico que é linear é descrito por uma equação diferencial linear cujo autovetor é a função exp($j2\pi f\,t$). Por isso, não é de se estranhar que a decomposição vetorial (Equação 88) e a correspondente composição vetorial (Equação 89) ganhem nomes especiais: esse par de equações é chamado de par Transformada de Fourier (TF) (a Equação 88 é a Transformada de Fourier direta e a Equação 89 é a transformada de Fourier inversa).

Então o produto escalar da Equação 88 (ou seja, a Transformada de Fourier) nos permite encontrar as coordenadas $V(f)$. Para encontrar as coordenadas nessa mesma base do vetor $V_S(t)$, ou seja, para encontrar $V_S(f)$, tudo o que precisamos fazer é dividir pelo autovalor correspondente (igualzinho fizemos na Equação 69). Para o exemplo do nosso circuito, temos que então que:

$$V_s(f) = \frac{V(f)}{\lambda} = \frac{V(f)}{(1 + j2\pi fRC)}$$

Equação 90

Onde utilizamos o autovalor λ encontrado na Equação 86.

Formalmente, já terminamos o problema. Mas você provavelmente vai querer $V_S(t)$, e não $V_S(\omega)$ ou seja, você quer as coordenadas na base original (que é a base $\delta(t\text{-}t_0)$). Mas isso é moleza, basta recompor o vetor, como fizemos na Equação 89. Assim, a resposta final será:

$$V_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_s(f) \exp(j2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(f)}{(1 + j2\pi fRC)} \exp(j2\pi ft) d\omega$$

Equação 91

Onde $V(f)$ é dado pela Equação 88 (que é a Transformada de Fourier).

A princípio, eu já te contei tudo o que você precisa saber para resolver qualquer circuito elétrico com qualquer fonte de tensão (na verdade, o seu professor de Álgebra Linear já te contou tudo o que você precisa saber para resolver qualquer equação diferencial linear). O resto é apenas uma questão de nomenclatura, atalhos e algumas firulas.

4.2 Nomeclaturas, atalhos e algumas firulas

Como vimos na seção anterior, a ideia central na resolução de circuitos elétricos (e de qualquer sistema linear) é resolver o problema utilizando a base de autovetores. Como já sabemos quem são esses autovetores, o problema realmente consiste apenas em encontrar os autovalores. Dessa forma, estamos sempre procurando encontrar a resposta do sistema (os autovalores) para a base de autovetores. Em outras palavras, estamos sempre supondo que a fonte (que estamos chamando de $V(t)$) seja da forma $\exp(j2\pi ft)$ para, em seguida, podermos determinar os autovalores correspondentes ao autovetor $\exp(j2\pi ft)$. Se a fonte não for dessa forma, não tem importância: basta expandir a entrada nessa base de autovetores (ou seja, aplicar a Transformada de Fourier), resolver o problema e depois voltar para base temporal (ou seja, aplicar a Transformada de Fourier inversa), como vimos em detalhe na seção anterior.

Nessa seção vamos então estudar o comportamento do circuito na base de autovetores. Isso é equivalente à estudar o circuito para um caso particular de fonte, que é a fonte $V(t)$

= exp($j2\pi ft$). É claro que tudo vai ficar bem fácil agora, já que estamos na base de autovetores.

A propriedade mais importante na análise de circuitos na base de autovetores é: **se a entrada corresponder à um autovetor ($V(t)$ = exp($j2\pi ft$)), então, necessariamente, a dependência temporal em todos os pontos do circuito é dada pela função exp($j2\pi ft$)**. Isso é consequência do fato de que o operador linear não altera a função exp($j2\pi ft$), ele apenas a multiplica por um número complexo (que é o autovalor). Em termos matemáticos, temos que, dada uma relação linear entre fonte e saída (a saída pode ser qualquer ponto do circuito):

$$V(t) = A\{V_s(t)\}$$

Equação 92

Então, **se $V(t)$ for um autovetor, teremos, necessariamente, que $V_s(t)$ também será um autovetor. Ou seja, $V_s(t)$ será proporcional à $V(t)$**. Para provar isso formalmente, basta expressar V_s(t) em termos de V(t), ou seja, basta inverter o operador $A\{\}$. Chamando o inverso do operador $A\{\}$ de operador $B\{\}$, podemos expressar a Equação 92 como:

$$B\{V(t)\} = V_s(t)$$

Mas se $A\{\}$ for linear então $B\{\}$ também será linear e, portanto, exp($j\omega t$) também é um autovetor de $B\{\}$. Chamando o autovalor correspondente de β, temos que, se a fonte for $V(t)$ = exp($j2\pi ft$), então a saída será:

$$V_s(t) = B\{\exp(j2\pi ft)\} = \beta \exp(j2\pi ft)$$

Equação 93

Note também que λ nada mais é que o inverso do autovalor de $A\{\}$ ($\beta = \lambda^{-1}$, veja Equação 90). **Então, para uma fonte V(t) = exp($j2\pi ft$), a saída será sempre proporcional à exp($j2\pi ft$)**. Portanto, se a fonte for $V(t)$ = exp($j2\pi ft$), então as tensões e correntes em qualquer ponto do circuito serão proporcionais à exp($j2\pi ft$). A constante de proporção depende da frequência (já que cada frequência define um autovetor diferente) e também depende do ponto do circuito onde você está calculando a corrente ou tensão (já que o operador depende do ponto circuito que você está analisando). Mas, em cada ponto, a corrente e tensão serão proporcionais à exp($j2\pi ft$).

Vamos então tirar vantagem desse conhecimento prévio e vamos supor que a entrada seja da forma $V(t)$ = exp($j2\pi ft$) (repetindo: se a fonte não for dessa forma, não tem importância: basta expandir a entrada nessa base de autovetores). Assim, como já sabemos que, em qualquer ponto do circuito (e para qualquer circuito linear) as correntes e tensões serão proporcionais à exp(*j2πft*), usaremos uma notação onde esse fato é colocado de maneira explícita, da seguinte forma:

$$V(t)=\overset{\circ}{V}\exp(j2\pi ft)$$
$$e$$
$$I(t)=\overset{\circ}{I}\exp(j2\pi ft)$$

Equação 94

Onde tanto $\overset{\circ}{V}$ como $\overset{\circ}{I}$ são as constantes de proporção (lembre-se que esses termos são constantes se fixarmos a frequência *f*, mas se você trocar a frequência os termos mudam; isso significa que os termos são, na verdade, funções da frequência). Em qualquer ponto do circuito, a tensão e corrente será da forma da Equação 94, mas tanto $\overset{\circ}{V}$ como $\overset{\circ}{I}$ dependem do ponto do circuito. Lembre-se também que esses termos são números complexos, já que os autovalores são números complexos.

Por exemplo, no circuito exemplo da seção anterior, onde determinamos $V_s(t)$, teríamos que, para uma fonte da forma $V(t) = \exp(j2\pi ft)$, a saída seria:

$$V_s(t)=\frac{1}{\lambda}=\frac{\exp(j2\pi ft)}{(1+j2\pi fRC)}$$

Equação 95

Ou seja, naquele exemplo, temos que, utilizando a notação da Equação 94:

$$V_s(t)=\overset{\circ}{V}_s\exp(j2\pi ft)$$
$$onde$$
$$\overset{\circ}{V}_s=\frac{1}{(1+j2\pi fRC)}$$

QUESTÃO 4.1

Para o circuito da Figura 8, prove que a relação da Equação 95 é verdadeira. É claro que, para isso, você tem que assumir que a entrada seja $V(t) = \exp(j2\pi ft)$

Assim, em qualquer ponto do circuito, a tensão e corrente serão dadas por algum número complexo (que representamos pela bolinha em cima da letra) vezes a função exponencial. Essa é a milésima vez que eu repito esse fato. Se eu estou repetindo tanto é porque essa é uma propriedade crucial. Tão importante que esse número complexo recebe um nome especial: ele é chamado de **fasor**. Repetindo: os números complexos $\overset{\circ}{V}$ e $\overset{\circ}{I}$ como definidos na Equação 94 são chamados de fasores. Essa nomenclatura será utilizada de aqui em diante.

4.3 Impedância

Já sabemos então que, para a fonte da forma $V(t) = \exp(j2\pi ft)$, teremos que as correntes e tensões em qualquer ponto do circuito serão proporcionais à $V(t) = \exp(j2\pi ft)$, e denotamos a constante de proporção pelo termo fasor. O passo natural seguinte é determinar a relação entre os fasores de tensão e corrente em cada elemento do circuito, porque dessa forma poderemos saber de antemão como cada elemento se comporta em relação à frequência.

Passemos então para a relação entre tensão e corrente nos componentes, sempre assumindo que a tensão de entrada é da forma $\exp(j2\pi ft)$.

No caso do resistor, utilizando a nomenclatura fasorial, temos:

$$\begin{aligned}
&Como\\
&I(t) = \overset{\circ}{I}\exp(j2\pi ft)\\
&e\\
&V(t) = \overset{\circ}{V}\exp(j2\pi ft)\\
&então\\
&\overset{\circ}{V}\exp(j2\pi ft) = R\overset{\circ}{I}\exp(j2\pi ft)
\end{aligned}$$

Equação 96

Assim, em um resistor, a relação fasorial entre corrente e tensão é:

$$\overset{\circ}{V} = R\overset{\circ}{I}$$

Equação 97

Para o caso do capacitor, podemos encontrar a relação com facilidade também (lembre-se que o fasor é só um número complexo, que não depende do tempo, portanto a dependência temporal da tensão e corrente está só na exponencial). De fato:

$$I(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$$
$$\therefore$$
$$\overset{\circ}{I}\exp(j2\pi ft) = C\frac{d\left(\overset{\circ}{V}\exp(j2\pi ft)\right)}{dt} = j2\pi fC\overset{\circ}{V}\exp(j2\pi ft)$$

Equação 98

Assim, para um capacitor, temos que:

$$\overset{\circ}{V} = \frac{1}{j\omega C}\overset{\circ}{I} = Z_C\,\overset{\circ}{I}$$

Equação 99

Onde

$$Z_C = \frac{1}{j2\pi fC}$$

Equação 100

E, finalmente, para o indutor, temos:

$$V(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$$
$$\therefore$$
$$\overset{\circ}{V}\exp(j2\pi ft) = L\frac{d\left(\overset{\circ}{I}\exp(j2\pi ft)\right)}{dt} = j2\pi fL\overset{\circ}{I}\exp(j2\pi ft)$$

Equação 101

Portanto, para um indutor:

$$\overset{\circ}{V} = j2\pi fL\overset{\circ}{I} = Z_L\,\overset{\circ}{I}$$

Equação 102

Onde

$$Z_L = j2\pi fL$$

Equação 103

Assim, para todos os elementos, o fasor de tensão é proporcional ao fasor de corrente (como esperado) e essa proporção depende do componente (que entra pelos parâmetros *R*, *C* e *L*) e também depende da frequência. No caso do resistor, a proporção é simplesmente *R* e é independente da frequência. No caso do capacitor, a proporção é um número complexo, que chamamos de Z_C e é inversamente proporcional à frequência, enquanto no caso do indutor a proporção também é um número complexo, que chamamos de Z_L e é diretamente proporcional à frequência.

Essas proporções são chamadas de impedâncias. A impedância do resistor é R, a do capacitor é Z_c e do indutor é Z_L. Como a impedância é a proporção entre o fasor tensão e o fasor corrente, a noção de impedância pode ser entendida como sendo o análogo da resistência, mas agora no caso de uma entrada cuja dependência temporal é da forma $\exp(j2\pi ft)$. Essa é uma noção útil porque permite intuir como o circuito vai se comportar para diferentes frequências. Por exemplo, podemos deduzir de cara que um capacitor com baixa frequência possui alta impedância enquanto um capacitor com alta frequência possui baixa impedância, enquanto o contrário ocorre para o indutor. Assim, de certa forma, capacitores e indutores podem ser interpretados como sendo resistores (complexos) dependentes da frequência.

Se quisermos manter essa interpretação de impedâncias como sendo resistores complexos que dependem da frequência, é natural nos perguntarmos qual o significado físico desse número complexo. O significado físico ficará mais claro na seção seguinte, mas já podemos explicitar algumas informações importantes aqui. Uma delas é que, como todo número complexo possui dois graus de liberdade, então uma impedância carrega duas informações. É útil e instrutivo explicitar quais são os significados dessas duas informações. Isso fica bem fácil se colocarmos a relação fasorial em notação polar. Para isso, suponha então um elemento qualquer possua impedância Z. Assim, nesse elemento, a tensão e corrente possuem a seguinte relação:

$$\mathring{V} = Z\,\mathring{I}$$

Equação 104

Expressando cada termo em notação polar:

$$\mathring{V} = \left|\mathring{V}\right| \exp\left(j\theta_V\right)$$

$$\mathring{I} = \left|\mathring{I}\right| \exp\left(j\theta_I\right)$$

$$Z = \left|Z\right| \exp\left(j\theta_Z\right)$$

Equação 105

A relação da Equação 104 fica:

$$\left|\overset{\circ}{V}\right|\exp\left(j\theta_V\right)=\left|Z\right|\exp\left(j\theta_Z\right)\left|\overset{\circ}{I}\right|\exp\left(j\theta_I\right)=\left|Z\right|\left|\overset{\circ}{I}\right|\exp\left(j\left(\theta_Z+\theta_I\right)\right)$$

Equação 106

De onde fica óbvio que:

$$\left|\overset{\circ}{V}\right|=\left|Z\right|\left|\overset{\circ}{I}\right|$$
$$e$$
$$\theta_V=\theta_Z+\theta_I$$

Equação 107

Assim, concluímos que o módulo de Z fixa a relação de amplitude entre a tensão e corrente no elemento com impedância Z enquanto a fase de Z define a diferença de fase entre a tensão e a corrente.

Veremos alguns exemplos no capítulo seguinte de como o conceito de impedância facilita a análise de circuitos. Mas antes, é útil e necessário explicitar como a análise fasorial se relaciona com o mundo real.

4.3 Significado físico de fasores

Eu já te ensinei (espero) a calcular os fasores de um circuito: basta colocar a entrada na forma $V(t) = \exp(j2\pi ft)$ e determinar a saída, como fizemos no exemplo do circuito da Figura 8. Mas e se eu te pedisse para medir um fasor? Em outras palavras: se eu te der um circuito elétrico qualquer, montado no laboratório e te pedir para você determinar o fasor em algum ponto do circuito experimentalmente. O que você faz?

Certamente você não pode colocar uma fonte no seu circuito que seja $V(t) = \exp(j2\pi ft)$. Essa seria uma fonte com parte real e parte imaginária, mas como o mundo não é Nárnia, nenhuma fonte física tem parte imaginária. Então como você pode determinar o fasor experimentalmente?

Seguindo o bom senso, você escolhe a função real que seja a mais parecida possível com a função complexa $V(t) = \exp(j2\pi ft)$. É claro que a função real mais parecida com a função complexa $V(t) = \exp(j2\pi ft)$ é a parte real da função complexa, ou seja, você escolhe:

$$V(t)=\mathrm{Re}\left\{\exp\left(j2\pi ft\right)\right\}=\cos\left(2\pi ft\right)$$

Equação 108

E daí? E daí que podemos descrever o que ocorre com a entrada cosseinodal em termos do que aprendemos com a entrada $V(t) = \exp(j2\pi ft)$. Para isso, basta utilizar a linearidade do sistema. E isso pode ser feito de maneira conveniente relacionando a entrada (fonte) e saída do circuito por um operador linear, como temos feito ao longo deste capítulo. Então, vamos supor que você queira saber o fasor de tensão em um determinado ponto de um circuito descrito pelo operador $A\{\}$, cujo inverso é o operador $B\{\}$. Chamando o ponto de interesse de $V_s(t)$, temos então que:

$$V_s(t) = B\{V(t)\}$$

Equação 109

Já sabemos também que, se $V(t) = \exp(j2\pi ft)$, então $V_s(t)$ será proporcional à $V(t)$, onde essa proporção é o próprio fasor que queremos determinar experimentalmente. Assim, em termos matemáticos, sabemos que:

$$\overset{\circ}{V}_s \exp(j2\pi ft) = B\{\exp(j2\pi ft)\}$$

Equação 110

Agora vamos determinar a relação entre a operação $B\{\}$ em uma entrada cosseinodal com a saída fasorial. Isso é fácil, basta expressar o cosseno em forma exponencial e utilizar a linearidade de $B\{\}$. Assim:

$$V_s(t) = B\{\cos(2\pi ft)\} = B\left\{\frac{\exp(j2\pi ft) + \exp(-j2\pi ft)}{2}\right\} = \frac{B\{\exp(j2\pi ft)\}}{2} + \frac{B\{\exp(-j2\pi ft)\}}{2}$$

Equação 111

Já sabemos que o resultado da operação na exponencial com argumento positivo (primeiro termo da última igualdade acima) é o próprio fasor vezes a exponencial (Equação 110). Além disso, note que $\exp(-j2\pi ft)$ também é um autovetor do operador linear, então sabemos também que o resultado da operação em $\exp(-j2\pi ft)$ será proporcional à $\exp(-j2\pi ft)$. Chamando essa proporção de $\overset{\circ}{V}_{s-}$, temos:

$$V_s(t) = B\{\cos(2\pi ft)\} = B\left\{\frac{\exp(j2\pi ft) + \exp(-j2\pi ft)}{2}\right\} = \frac{\overset{\circ}{V}_s \exp(j2\pi ft)}{2} + \frac{\overset{\circ}{V}_{s-} \exp(-j2\pi ft)}{2}$$

Equação 112

Pergunta: os fasores $\overset{\circ}{V}_s$ e $\overset{\circ}{V}_{s-}$ são independentes? Pense o seguinte: o operador $B\{\}$ descreve a relação entre entrada e saída de um circuito. O circuito é uma coisa que existe, que você pode montar no seu laboratório, enfiar o dedo e tomar um choque. Então, qualquer função que você coloque na entrada do seu circuito (a entrada é a fonte $V(t)$) vai ser uma função real (claro) e, necessariamente, a função de saída também será real, afinal de contas, a saída do circuito também é algo físico, que existe. Eu não estou dizendo que você nunca vai achar um $B\{\}$ tal que para uma entrada real você tenha uma saída complexa: é até muito fácil escrever operadores que resultam em uma saída complexa para entrada real – o que eu estou dizendo é que esse operador com saída complexa NUNCA vai ser a descrição de um sistema físico.

Então, $V_s(t)$ na Equação 112 tem que ser uma função real. Mas o primeiro termo de $V_s(t)$ é um número complexo (já que tanto o fasor quanto a função $\exp(j2\pi ft)$ são complexas). Assim, necessariamente, o segundo termo tem que ser o complexo conjugado do primeiro. Portanto, para que $V_s(t)$ na Equação 112 seja real, é condição necessária e suficiente que:

$$\mathring{V}_{s-} = \left(\mathring{V}_s\right)^*$$

Equação 113

Agora fica mais conveniente expressar o fasor em notação polar. Denotando a fase do fasor por θ_S temos:

$$\mathring{V}_s = \left|\mathring{V}_s\right| \exp\left(j\theta_s\right)$$

Equação 114

O que implica então que:

$$\mathring{V}_{s-} = \left|\mathring{V}_s\right| \exp\left(-j\theta_s\right)$$

Equação 115

E, portanto:

$$V_s(t) = B\{\cos(2\pi ft)\} = \frac{\left|\mathring{V}_s\right| \exp\left(j2\pi ft + \theta_s\right)}{2} + \frac{\left|\mathring{V}_s\right| \exp\left(-j2\pi ft - \theta_s\right)}{2} = \left|\mathring{V}_s\right| \cos\left(2\pi ft + \theta_s\right)$$

Equação 116

Assim, concluímos que:

$$V_s(t) = B\{\cos(2\pi ft)\} = \left|\mathring{V}_s\right| \cos\left(2\pi ft + \theta_s\right)$$

Equação 117

Podemos tirar duas conclusões importantes da Equação 117.

A primeira é que, se você colocar uma fonte cosseinodal na entrada de um circuito linear, então as tensões e correntes em qualquer ponto do circuito serão sempre funções cossenoidais, mas com amplitude e fase diferentes do cosseno de entrada. Essa conclusão é justificada pelo fato do operador $B\{\}$ poder descrever a tensão (ou corrente) em qualquer ponto do circuito.

A segunda conclusão é a resposta para a nossa pergunta "como medir o fasor $\overset{\circ}{V_s}$"? O fasor é um número complexo, então precisamos determinar duas grandezas (parte real e imaginária ou, se preferir, módulo e fase). De acordo com a Equação 117, **o módulo do fasor corresponde à amplitude da função cosseinodal no ponto de interesse, enquanto a fase do fasor é a diferença de fase entre a entrada (que tem fase zero no nosso modelo) e a função cosseinodal no ponto de interesse**.

Note que o fasor carrega duas informações: seu módulo determina a amplitude da onda e a sua fase determina a fase da onda. Que um único fasor carrega duas informações não é de se estranhar, já que o fasor é um número complexo e números complexos carregam duas informações.

Finalmente, podemos concluir também que, para uma entrada cosseinodal, em um elemento com impedancia Z, então o módulo de Z corresponde à razão entre a amplitude da tensão e a amplitude da corrente no elemento (veja Equação 107), enquanto a fase de Z define a diferença de fase entre a tensão e corrente (veja Equação 107 outra vez).

Para encerrar esse capítulo, vamos fazer um resumo do método de análise de circuitos. Para isso, suponha que você tenha um certo circuito e que você utilize notação fasorial para determinar a tensão em algum ponto do circuito. Vamos chamar essa tensão que você determinou pelo termo $H(f)$ (que é as vezes chamado de função de transferência). Assim, utilizando análise fasorial (ou seja, supondo que a entrada seja $\exp(j2\pi ft)$), você determinou o fasor de saída em algum ponto. Esse fasor de saída é um número complexo que depende da frequência, portanto o fasor de saída é uma função complexa da frequência, função essa que você chamou de $H(f)$. Assim, utilizando análise fasorial, você determinou que:

$$\overset{\circ}{V_s} = H(f)$$

Equação 118

Determinar a função de transferência é o feijão-com-arroz da análise fasorial. Mas, agora vamos supor que você vai colocar uma função temporal qualquer na entrada do seu circuito (uma música por exemplo). Vamos chamar essa tensão de entrada qualquer de $V(t)$ Como utilizar a função de transferência para determinar a tensão de saída no circuito $V_s(t)$? Como vimos amplamente, basta utilizar a transformada de Fourier inversa. Assim, a tensão de saída será:

$$V_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{V}_s \exp(j2\pi ft)df = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{V}(f)H(f)\exp(j2\pi ft)df$$

Equação 119

Onde os fasores de entrada são obtidos pela transformada de Fourier direta do sinal de entrada:

$$\overset{\circ}{V}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

Equação 120

Portanto, a Transformada de Fourier te permite saber a resposta do circuito para qualquer entrada, como vimos repetidas vezes nesse capítulo.

QUESTÃO 4.2

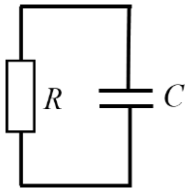
Se a fonte (entrada) do circuito da Figura 8 for $A = \cos(\omega t + \phi)$, qual será tensão na saída?

QUESTÃO 4.3

Por que engenheiros eletricistas adoram resolver problemas supondo que a entrada é da forma $\exp(j\omega t)$?

QUESTÃO 4.4

Considere um circuito formado apenas por um capacitor de capacitância C em série com um resistor de resistência R, como mostrado na figura abaixo. Se no tempo $t = 0$ a tensão no capacitor for V_0, descreva a dependência temporal da tensão no circuito e explique o seu comportamento qualitativo. Além disso, de um significado físico para o termo RC

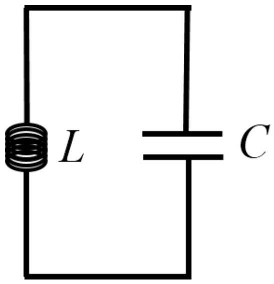


QUESTÃO 4.5

Repita o problema anterior para o caso de um indutor em série com um resistor. Considere que a corrente no tempo $t = 0$ seja I_0. Determine a dependência temporal da corrente. Qual parâmetro desempenha o mesmo papel que RC desempenhou no exercício anterior?

QUESTÃO 4.6

Considere o seguinte circuito, formado por um capacitor e um indutor. Esse circuito é conhecido como circuito tanque. Encontre a equação diferencial que descreve o comportamento da tensão nesse circuito. Qual tipo de sistema físico ultra-famoso é descrito por essa equação diferencial? Quais são os parâmetros equivalentes? Descreva quantitativamente e qualitativamente o que está ocorrendo no circuito (descrição quantitativa é a função temporal da tensão).



QUESTÃO 4.7

Repita o problema anterior, mas acrescentando um resistor em série com o capacitor.

QUESTÃO 4.8

Prove que a impedância equivalente Z_{eq} de duas impedâncias Z_1 e Z_2 colocadas em série é $Z_{eq} = Z_1 + Z_2$

QUESTÃO 4.9

Prove que a impedância equivalente Z_{eq} de duas impedâncias Z_1 e Z_2 colocadas em paralelo é $Z_{eq} = Z_1Z_2/(Z_1+Z_2)$

QUESTÃO 4.10

Suponha que você tenha um circuito qualquer e que a fonte seja cosseinodal. Se você medir a tensão e a corrente em um capacitor, qual será a diferença de fase? E a relação entre as amplitudes?

Repita o problema para um indutor

QUESTÃO 4.11

Suponha que você coloque um resistor em série com um capacitor e que você queira tratar esses dois elementos em série como um único elemento. Se a fonte do seu circuito for cossenoidal, expresse as relações de amplitude e fase entre corrente e tensão no seu elemento em termos de R, C e ω. Explique o que ocorre com as relações de amplitude e a fase entre tensão e corrente quando você varia a frequência entre 0 e infinito.

5 Aplicações de circuitos elétricos: filtros passivos

O melhor exemplo de aplicação e análise de circuitos elétricos são os chamados filtros passivos. Em engenharia elétrica, o termo filtro é utilizado para designar um circuito que “filtra” frequências. Isso quer dizer que o circuito deixa passar certas bandas e frequências e corta outras. O exemplo clássico vem da música: se você quer cortar sons agudos, você tem que passar o sinal por um filtro passa-baixas (que, como indicado pelo nome, só deixa passar frequências baixas). Caso queira cortar sons graves, você tem que passar o sinal por um filtro passa-altas. Então se você colocar uma música do AC/DC em um filtro passa-baixas, vai ficar sem vocal.

Filtros são muito importantes no tratamento de ruídos também, porque geralmente ruídos tem uma faixa de frequência bem maior que a do sinal de interesse, então você consegue cortar o ruído sem cortar o sinal utilizando filtros.

Nesse capítulo vou te mostrar os principais tipos de filtros e utilizá-los como exemplo de análise de circuitos elétricos utilizando fasores.

5.1 Filtros passa-baixas

O circuito da Figura 8 é um exemplo de filtro passa-baixas. Na verdade, esse é o exemplo mais simples de um filtro passa-baixas, mas que basta para nosso propósito.

Por razões pedagógicas, vou calcular novamente a tensão de saída no circuito da Figura 8, mas agora utilizando noção de fasores e impedância. Esse circuito é constituído de duas impedâncias em série, uma advinda do resistor e a segunda do capacitor. Para sabermos a resposta do circuito em função da frequência, basta encontrarmos a relação entre o fasor de saída e o fasor de entrada. Assim, utilizando a notação fasorial (para enxugar a notação vou utilizar a frequência em radianos por segundo) para as tensões de entrada e de saída, temos:

$$V_{ent}(t) = \mathring{V}_{ent} \exp(j\omega t)$$
$$e$$
$$V_s(t) = \mathring{V}_s \exp(j\omega t)$$

Equação 121

Como a tensão de saída é a tensão no capacitor, então a tensão de saída é igual à corrente vezes a impedância do capacitor, ou seja:

$$\mathring{V}_s = \mathring{I} Z_L$$

Equação 122

Que é a relação estabelecida na Equação 99 e na Equação 100 .

Além disso, o fasor de corrente será o fasor de entrada dividido pela impedância equivalente (como você provou na Questão 4.8). Assim:

$$\mathring{I} = \frac{\mathring{V}_{ent}}{Z_{eq}} = \frac{\mathring{V}_{ent}}{R + Z_c}$$

Equação 123

De onde concluímos com facilidade que:

$$\mathring{V}_s = \mathring{V}_{ent} \frac{Z_c}{R + Z_c} = \mathring{V}_{ent} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \mathring{V}_{ent} \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Equação 124

Portanto:

$$\frac{\overset{\circ}{V}_s}{\overset{\circ}{V}_{ent}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Equação 125

Essa relação é absolutamente idêntica à da Equação 90. Ambas afirmar exatamente a mesma coisa, carregam exatamente a mesma informação e são exatamente o mesmo objeto matemático. Só a notação (que é convenção) é que é um pouco diferente. Compreender que a Equação 125 e a Equação 90 são a mesma coisa pode ajudar a aprofundar o entendimento do que é um fasor, porque essa comparação explicita que um fasor com frequência ω nada mais é do que uma coordenada do vetor (função) $\exp(j\omega t)$, quando a função temporal é expandida nessa base de autovetores.

A Equação 125 nos diz tudo o que precisamos saber sobre o circuito, pois ela estabelece qual é a relação entre as amplitudes das ondas de entrada e saída, bem como qual é a relação de fase.

Em engenharia, ambos são importantes, mas, para não alongar demais, eu vou me reter na relação de amplitude. Assim, temos que:

$$|H(\omega)| = \left|\frac{\overset{\circ}{V}_s}{\overset{\circ}{V}_{ent}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Equação 126

Onde $H(\omega)$ é chamado de resposta em frequência do circuito.

A Equação 126 nos várias coisas. Em primeiro lugar, se entrada for contínua ($\omega = 0$), então a saída será igual à entrada. Isso faz sentido, porque estamos pegando a saída em cima do capacitor e sabemos que em regime contínuo o capacitor funciona como um circuito aberto (o que é também manifestado pela impedância infinita do capacitor quando $\omega = 0$). Então, em regime contínuo, a corrente será zero e toda a tensão cairá sobre o capacitor.

Além disso, a Equação 126 nos diz que a amplitude da saída vai caindo à medida que a frequência aumenta. Isso é novamente culpa do capacitor: à medida que a frequência aumenta, a impedância do capacitor se aproxima de um curto e, portanto, a tensão em cima do capacitor vai para zero quando a frequência vai para infinito.

Então o que a Equação 126 nos diz é que, se a frequência for baixa, então a tensão de entrada vai cair no capacitor; mas, se a frequência for alta, então a tensão de entrada vai cair no resistor. Portanto, a tensão de entrada só "aparece" na saída quando a frequência é baixa. Assim, um sinal temporal qualquer (uma música, por exemplo) que seja colocado na entrada desse circuito terá suas frequências altas cortadas.

Essa é a descrição qualitativa do circuito. Mas é bem útil decidir quão baixa a frequência deve ser para considerarmos que ela "passou" pelo filtro. Isso é uma questão de convenção e a convenção mais comum é considerar a frequência de corte como sendo aquela na qual o módulo da resposta em frequência é o inverso da raiz de dois. Assim, por definição, a frequência de corte ω_c é aquela que satisfaz a seguinte condição:

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Equação 127

Para o nosso circuito em particular, não é difícil de provar que $\omega_c = 1/RC$.

Vamos ver um exemplo para finalizar a história. Suponha que você queira que o seu circuito funcione como um filtro passa-baixas para frequências de áudio. Neste caso, uma boa opção para a frequência de corte seria algo em torno de 2.5 kHz. Isso corresponderia então à:

$$\omega_c = 2\pi \times 2.5 \times 10^3 = 15.708 \times 10^3 \quad rad/s$$

Isso significa que você tem que escolher o resistor e o capacitor de maneira que:

$$RC = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{15.708 \times 10^3} = 63.6 \times 10^{-6} \quad s$$

Como capacitores são tipicamente da ordem de nano-faradays, você precisaria de um resistor da ordem de kilo-ohms, o que é bem comum.

Então vamos supor que você cumpriu as suas especificações e construiu seu circuito. Agora você quer ver a resposta dele em frequência. Então você plota Amplitude = $|H(\omega)|$, o que resulta em algo do tipo:

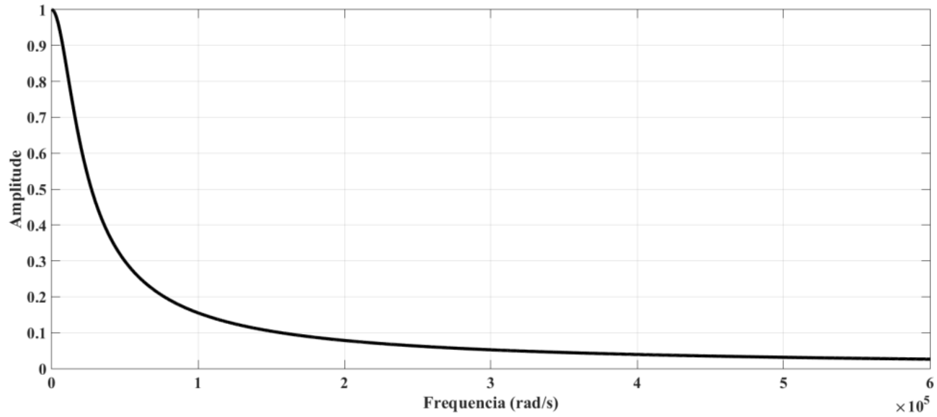


Figura 9 Amplitude = | H*(ω)*|

Horrível né: para você conseguir plotar o gráfico caindo até próximo de zero você teve que ir para uma frquencia na casa de 600 x 10^3 rad/s, bem acima da sua faixa de interesse (a faixa audível termina em torno de uns 60 x 10^3 rad/s).

Então você resolve plotar outra vez, mas mostrando só a sua faixa de interesse. Sai algo do tipo:

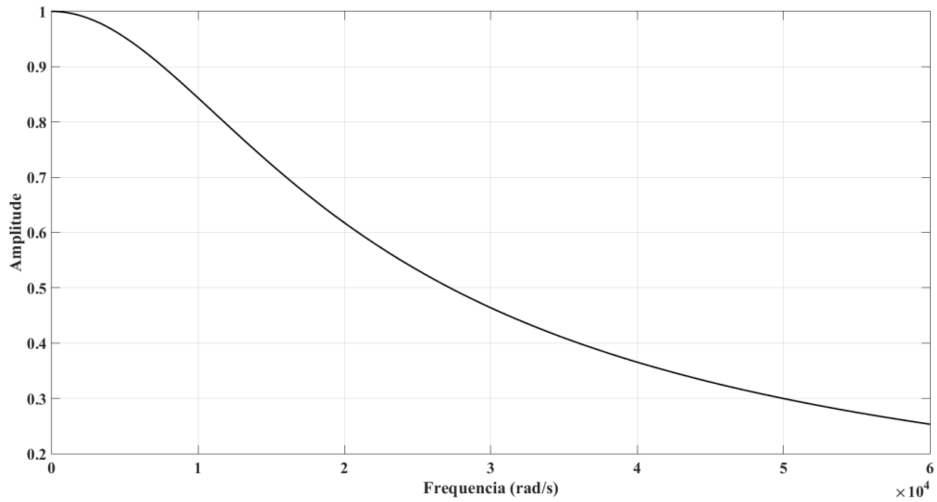


Figura 10

Melhorou né, mas ainda não te dá uma visão "macroscópica" do filtro. O melhor jeito é plotar o eixo horizontal em escala logarítmica e o eixo vertical em unidade de decibéis. Definindo:

$$Magnitude = 10\log_{10}\left(|H(\omega)|^2\right) = 20\log_{10}\left(|H(\omega)|\right)$$

Equação 128

Note que a magnitude (cuja unidade é o decibel, cujo símbolo é dB) refere-se à razão entre as energias dos sinais de entrada e saída, já que é a função de transferência entra como módulo quadrado (falaremos de energia mais adiante). Plotando a magnitude em função da frequência, com essa última em escala logarítmica, fica algo do tipo:

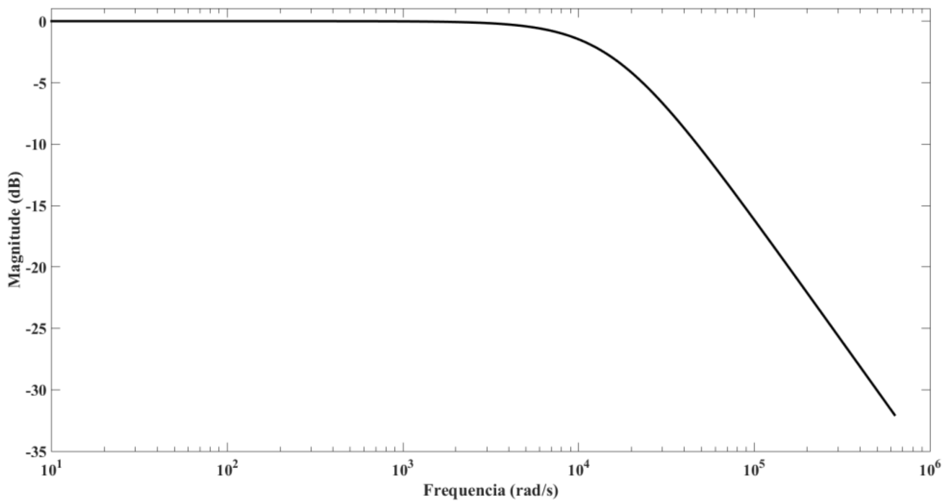


Figura 11

Aí fica bem melhor!

Diagramas desse tipo (dB na vertical e eixo logarítmico na frequência) são chamados de diagramas de Bode.

Em geral, o papel do projetista do filtro é tentar manter a faixa próxima de 0dB (ou seja, ganho 1) o mais "dentro" possível da sua região de interesse. Além disso, quanto mais rápida for a queda da magnitude após a frequência de corte, melhor. Em suma: o projetista desenvolve circuitos que tenham o diagrama de bode mais parecido possível com a metade de um quadrado (linha reta até a frequência de corte e depois despenca abruptamente).

QUESTÃO 5.1

Qual é o valor da magnitude da função de transferência, em dB, na frequência de corte?

5.2 Filtros passa-altas

Como não é difícil de imaginar, o filtro passa-altas mais simples é composto por um resistor em série com um indutor, já que o indutor possui baixa impedância para frequências baixas e alta impedância para frequências altas.

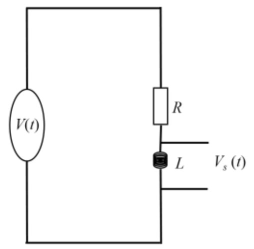


Figura 12

Como é muito fácil encontrar a resposta em frequência, já vou colocar o resultado direto aqui:

$$H(\omega) = \frac{\overset{\circ}{V}_s}{\overset{\circ}{V}_{ent}} = \frac{j\omega L}{R + (j\omega L)} = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{L\omega}}$$

Equação 129

QUESTÃO 5.2

Determine a frequência de corte do filtro passa-altas da Figura 12.

QUESTÃO 5.3

Projete um filtro para remover sons graves. Escolha valores razoáveis de R e L (veja na internet quais são os valores típicos de indutância e depois escolha o valor de R) que resultem na frequência de corte que você escolheu. Plote o diagrama de Bode correspondente (caso sua preguiça de ligar o computador seja intransponível, faça pelo menos um rascunho do que você acredite ser a forma do diagrama de Bode)

5.3 Filtros passa-faixas

Um filtro passa-faixas, como indicado pelo nome, deixa passar uma faixa de frequências e corta o resto. Então um filtro passa-faixas nada mais é que um filtro passa-baixas em série com um filtro passa-altas. Uma configuração bem simples é mostrada na Figura 13.

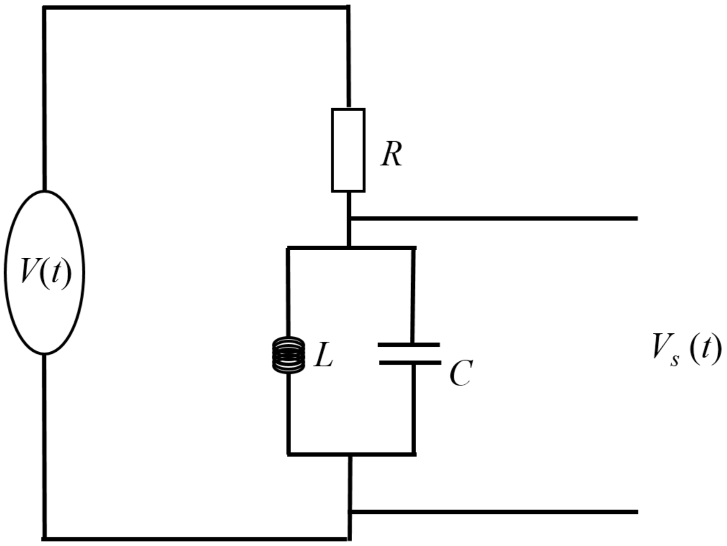


Figura 13

QUESTÃO 5.3

Encontre a resposta em frequência do circuito da Figura 13. Quais são as frequencia**S** (no plural) de corte?

Qual é a frequência na qual a função transferência possui máxima amplitude? O que essa frequência tem a ver com o circuito tanque (veja Questão 4.6)? De uma explicação física.

6 Potência em regime de tensão alternada

Frequentemente estamos interessados em quantificar a dissipação de potência em um circuito. Já sabemos que a potência dissipada em um resistor é dada pelo produto entre a tensão e a corrente, e isso é verdade tanto para tensões e correntes contínuas como para tensões e correntes que variam no tempo. Portanto, do ponto de vista cientifico, eu não tenho nada a acrescentar no que diz respeito à potência dissipada em circuitos elétricos com fontes alternadas. Porém, do ponto de vista de engenharia, é necessário esclarecer como as tensões e correntes são comumente expressas e como a potência é usualmente definida em regimes com fontes cossenoidais. Mas são só convenções, então é muito fácil.

Já sabemos que, se a fonte de um circuito elétrico for cosseindal, então em qualquer ponto desse circuito teremos tensão e correntes também cosseinodais, mas com amplitudes e fases que dependem do circuito. Além disso, sabemos também que a corrente e a tensão estão em fase em cima do resistor. Como são os resistores que dissipam potência, então podemos concentrar a atenção na relação de tensão e corrente em cima do resistor. Como elas estão em fase, temos então, que para um resistor:

$$V_R(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$
$$I_R(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t + \phi)$$

Equação 130

Onde coloquei o sub-índice $_R$ para lembrarmos que a fase ϕ só é a mesma para corrente e tensão em cima do resistor. Assim, a potência dissipada no resistor é:

$$P(t) = V_R(t) I_R(t) = V_0 I_0 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Equação 131

Então essa é a potência dissipada em um resistor. Só que note que ela é uma função temporal periódica. Então essa é uma forma muito inconveniente de se expressar a potência. Por exemplo, suponha que você saiba quem é V_0 e I_0. Vamos chamar o seu produto de $P_0 = V_0 I_0$. Vamos supor que você tenha um chuveiro e que você sabe que para o seu chuveiro P_0 =10 kW. Se eu te perguntar qual é a potência dissipada pelo seu chuveiro, você vai ter que me responder que é uma função do tempo com amplitude P_0 = 5 kW e eu vou ficar frustrado porque queria algum número e você me deu uma função.

Para resolver essa inconveniência, primeiro note que o período da função é o inverso da frequência da rede de distribuição. Por exemplo, quase todos os países possuem frequência de 50 ou 60 Hz. No Brasil, a frequência é de 60 Hz, o que equivale a um período de 0.017 segundos. Então a potência que o seu chuveiro dissipa é uma função do tempo, mas é uma função que se repete a cada intervalo de 0.017 segundos. Como esse intervalo é muito curto comparado com escalas do cotidiano, faz muito mais sentido você me contar qual é a potência média em um ciclo do chuveiro. Por isso que quando perguntamos qual é a potência de algum aparelho na verdade estamos perguntando qual é a potência média. Denotando a média pelo símbolo <>, temos que:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_0 I_0 \cos^2(\omega t+\phi)dt = V_0 I_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\phi)dt = \frac{V_0 I_0}{2}$$

onde o período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Equação 132

Assim, ao invés de me dizer que a potência do seu chuveiro é uma função cosseno quadrático com amplitude P_0 = 10 kW, se eu te perguntar qual é a potência do seu chuveiro, você me responde que é P = 5 kW, onde fica subentendido que a sua resposta é na verdade a média tomada sobre um ciclo (para o caso do Brasil, o ciclo é T = 0.017 segundos).

Porque estamos interessados quase sempre na potência média, e a potência média é dada pela amplitude da tensão vezes a amplitude da corrente, dividido por 2, então alguém resolveu que valia a pena definir um novo termo, chamado de tensão ou corrente eficazes, onde esse termo 2 já apareceria de cara.

Então, por definição, se a amplitude da tensão cosseinodal é V_0 e a amplitude da corrente cosseinodal é I_0, os seus valores eficazes são:

$$V_{RMS} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{RMS} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Equação 133

O termo RMS vem do inglês Root Mean Square. Estritamente falando, uma função periódica qualquer *f*(t), com período *T*, possuirá valor RMS dado por:

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

Equação 134

Então se *f*(*t*) for a função cosseno o valor RMS corresponde à amplitude dividido pela raiz de 2, como mostrado na Equação 133. Finalmente, em termos dos valores eficazes, a média da potência é, obviamente:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_0 I_0}{2} = V_{RMS} I_{RMS}$$

Equação 135

QUESTÃO 6.1

Nesta questão, suponha que a fonte seja cosseinodal.

1 - Escreva a forma geral para a tensão e a corrente em um capacitor. Repita o problema para um indutor.

2 – Escolha um dos casos (capacitor ou indutor) e encontre a potência "dissipada" pelo elemento (ou o capacitor, ou o indutor, tanto faz). Note que a potência instantânea não é zero.

3 – Faça um rabisco do gráfico da potência instantânea (potência x tempo).

4 – Calcule a potência média

5 – Explique fisicamente os resultados da parte 3 e 4 dessa questão.

.