Introdução aos algoritmos recorrentes/recursivos: alguns exemplos

Nesta seção examinaremos alguns exemplos de **algoritmos recorrentes** (ou **recursivos**). A apresentação do conceito pode ser encontrada nesta página.

Fatorial implementado de modo recursivo

A função matemática *fatorial* descreve o númeto de permutações distintas de um conjunto finito. Sua definição é intrinsecamente recursiva:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n * \mathbf{f}(n-1), & n > 0 \end{cases}$$

Em termos práticos a função fatorial pode ser implementada como indicado abaixo, utilizando *recorrência de cauda*, ou seja, a chamada recursiva corresponde às últimas instruções da função.

Função fatorial implementada recursivamente

C

```
#include <stdio.h>
  // Fatorial recursivo
  int fatRec (int n) {
    if (n==0) return 1;     // final de
recorrencia
    return n * fatRec(n-1); // senao devolve n x
"o fatorial de n-1" (inducao)
    }

  int main (void) {
    int n;
    scanf("%d", &n);
    printf("O fatorial de %d e': %d\n", n,
fatRec(n));
    return 1;
    }
```

Python

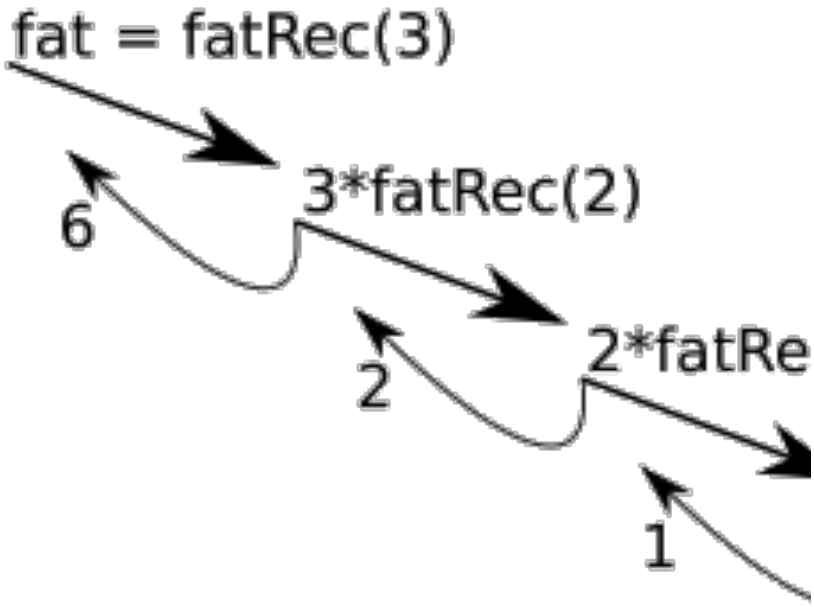
```
# Fatorial recursivo
  def fatRec (n) : # os finalizadores ';' sao
opcionais em Python
    if (n==0) : return 1;   # final de
recorrencia
    return n * fatRec(n-1); # senao devolve n x
"o fatorial de n-1" (inducao)

  def main () :
    n = int(input());
    print("O fatorial de %d e': %d" % (n,
fatRec(n)));

  main();
```

A execução de uma função recursiva é realizada empilhando-se o contexto de execução, de modo que no momento que a chamada recursiva termina, retorna-se ao contexto empilhado e, ao finalizado a chamada "inicial", o contexto é removido da pilha (*desempilhado*). Em detalhes, vejamos uma simulação da função *fatRec* acima apresentada para *n=3*.

```
Ord.  n  Imprimir
(esquema de execução)
   1  3  fatRec(3)
   2  2  fatRec(3) =
3*fatRec(2) -> fatRec(2)
   3  1  ^            ^
2*fatRec(1) -> fatRec(1)
   4  0  |            |
^           1*fatRec(0)
--> fatRec(0)
         |            |
|             ^
         |            |
|             |
   5  0  |            |
|             +-- 1 ..
final desse contexto n=0
   6  1  |            |
+--------- 1 = 1*1 ....
final do contexto
'fatRec(1)'
   7  2  |            +-
-------- 2 =
2*1 ..................
final do contexto
'fatRec(2)'
   8  3  +------ 6 =
3*2 ......................
.............. final do
contexto 'fatRec(3)'
```



Na primeira coluna, sob rótulo *Ord.*, está o tempo de execução, sendo os números a ordem de execução dos comandos. Na segunda coluna está o valor do *n* no contexto da chamada sendo simulada.

Note que na ordem de cada instrução, separamos o comando `k * fatRec(k-1)` em duas instruções, primeiro obter o valor de `fatRec(k-1)`, digamos `FK`, e depois a instrução `k * FK`.

Um exemplo mostrando o comportamento da função recursiva

Podemos alterar o código da função recursiva *fatRec* acima para percebermos mais claramente os contextos de execução e os **níveis de recorrência**. Por *nível de recorrência* deve-se entender o número de vezes que a recorrência é invocada, por exemplo, para *n=0*, teremos nível de recorrência *0*, para *n=1*, nível *1* e assim por diante.

Abaixo os códigos em *C* e em *Python*, imprimindo a chegada ao contexto *n*, deslocando-se horizontalmente a impressão de acordo com o nível da recorrência ("indentação"). Por essa razão, precisaremos passar um parâmetro adicional, que sempre terá o valor inicial do *n*.

Função fatorial implementada recursivamente	
C	**Python**

```c
#include <stdio.h>
  char brancos[] = "
";
  int fatRec (int N, int k) {
    int aux;
    printf("%*.s", 2*(N-k), brancos); // truque:
nivel rec. maior => deslocar mais
    printf("Entrei em fat(%d)\n", k);
    if (k==0) aux = 1;             // final de
recorrencia
    else aux = k * fatRec(N, k-1); // senao
devolve k x "o fatorial de k-1"
    printf("%*.s", 2*(N-k), brancos);
    printf("Saindo de fat(%d): devolve %d\n", k,
aux);
    return aux;
    }

  int main (void) {
    int n, fat;
    scanf("%d", &n);
    printf("Antes de iniciar chamada a
fat(%d)\n", n);
    fat = fatRec(n, n);
    printf("Apos chamada a fat(%d)\n", n);

    return 1;
    }
```

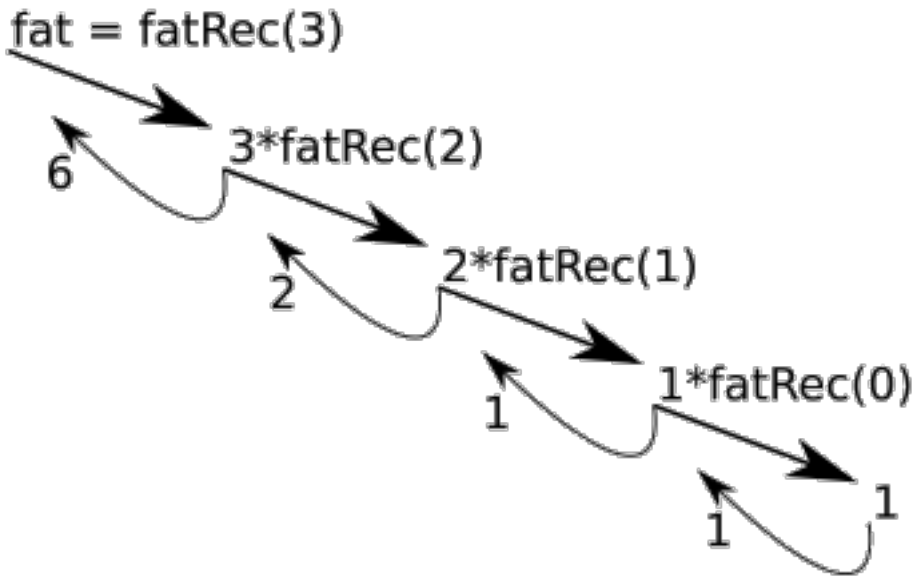
```python
from __future__ import
print_function; # para Python 2
  # Fatorial recursivo
  def fatRec (N, k) : # os finalizadores ';' sao
opcionais em Python
    print((N-k) * "  ", end=""); # truque: nivel
rec. maior => deslocar mais
    print("Entrei em fat(%d)" % k);
    if (k==0) : aux = 1;      # final de
recorrencia
    else : aux = k * fatRec(n, k-1); # senao
devolve k x "o fatorial de k-1"
    print((N-k) * "  ", end=""); # truque: nivel
rec. maior => deslocar mais
    print("Saindo de fat(%d): devolve %d" % (k,
aux));
    return aux;

  def main () :
    n = int(input());
    print("Antes de iniciar chamada a fat(%d)" %
n);
    fatRec(n, n);
    print("Apos chamada a fat(%d)" % n);

  main();
```

Assim, se rodarmos qualquer uma das versões para *n=3*, teremos a seguinte impressão:

```
Antes de
iniciar
chamada a
fat(3)
Entrei em
fat(3)
  Entrei em
fat(2)
    Entrei em
fat(1)
      Entrei
em fat(0)
      Saindo
de fat(0):
devolve 1
    Saindo de
fat(1):
devolve 1
  Saindo de
fat(2):
devolve 2
Saindo de
fat(3):
devolve 6
Apos chamada
a fat(3)
```



Outro exemplo de recursividade em *C* e em *Python*: busca binária

Se analisarmos a frequência de uso dos variados tipos de algoritmo, provavelmente o campeão de uso é a *busca* de elemento em vetor/lista/conjunto. Para que essa busca seja eficiente, geralmente mantemos os dados ordem (e.g., crescente), assim podemos empregar um algoritmo de busca muito rápido, a *busca binária*.

A **busca binária** é feita sobre listas ordenadas, adotando o seguinte esquema:
1. *busca(vet, x, ini, fim)* // busca o elemento *x* em *vet* entre as posições *ini* e *fim*;
2. *se (ini > fim), então* devolva que não existe mais intervalo onde procurar
3. *meio = (ini + fim) / 2;* // usando a divisão inteira
4. *se (vet[meio] == x), então* devolva que encontramos na posição *meio*
5. *se (vet[meio] < x), então x* não pode estar na primeira metade, busque entre *meio+1* e *fim*
6. *se (vet[meio] > x), então x* não pode estar na segunda metade, busque entre *ini* e *meio-1*

Note que na descrição acima, o algoritmo é naturalmente recursivo, então faremos essa implementação em *C* e em *Python*.

Busca binária implementada recursivamente

C

```
int busca (int vet[], int x, int ini, int fim) { //
busca x entre vet[ini] e vet[fim]
  int meio;
  if (ini>meio) return -1; // nao tem mais onde
procurar!
  meio = (ini+fim) / 2; // pegar indice do elemento do
meio
  if (vet[meio]==x)
    return meio; // encontrei na posicao meio
  else
  if (vet[meio] < x) // vet[ini]...vet[meio] NAO
contem x
    // entao busque (recursivamente) entre vet[meio+1]
e vet[fim]
    return busca(vet, x, meio+1, fim);
  else // vet[meio]...vet[fim] NAO contem x
    // entao busque (recursivamente) entre vet[ini] e
vet[meio-1]
    return busca(vet, x, ini, meio-1);
  } // nunca executaria esta linha - por que?
```

Python

```
def busca (vet, x, ini, fim) : # busca x
entre vet[ini] e vet[fim]
  if (ini>meio) : return -1; # nao tem mais
onde procurar!
  meio = (ini+fim) / 2; # pegar indice do
elemento do meio
  if (vet[meio]==x) :
    return meio; # encontrei na posicao meio
  elif (vet[meio] < x) : #
vet[ini]...vet[meio] NAO contem x
    # entao busque (recursivamente) entre
vet[meio+1] e vet[fim]
    return busca(vet, x, meio+1, fim);
  else : # vet[meio]...vet[fim] NAO contem x
    # entao busque (recursivamente) entre
vet[ini] e vet[meio-1]
    return busca(vet, x, ini, meio-1);
  # nunca executaria esta linha - por que?
```

Simulando e depurando a busca binária

Da mesma forma que inserimos várias linhas de impressão para ajudar a entender as recorrência na função fatorial, inclusive usando um truque para visualizar o nível da recorrência, faremos o mesmo com o algoritmo de busca binária.

Busca binária recursiva com mensagens para visualizar nível de recorrência

C

```
// busca x entre vet[ini] e vet[fim]
```

Python

```
# busca x entre vet[ini] e vet[fim]
def busca (vet, x, ini, fim, N, k) :
```

```c
int busca (int vet[], int x, int ini, int fim,
int N, int k) {
  int meio = (ini+fim) / 2; // pegar indice do
elemento do meio
  printf("%*.s", 2*(N-k), brancos); // para
fazer indentacao
  printf("Entrei em busca(%d,%d): meio = %d\n",
ini, fim, meio);
  if (ini > meio) {
    printf("%*.s", 2*(N-k), brancos);
    printf("Nao ha mais onde buscar: %d
> %d)\n", ini,fim);
    return -1; // nao tem mais onde procurar!
    }
  if (vet[meio]==x) {
    printf("%*.s", 2*(N-k), brancos);
    printf("Achei %d na posicao %d!\n", x,
meio);
    return meio; // encontrei na posicao meio
    }
  else
  if (vet[meio] < x) { // vet[ini]...vet[meio]
NAO contem x
    printf("%*.s", 2*(N-k), brancos);
    printf("Busque na segunda metade: %d
e %d\n", meio + 1, fim);
    // entao busque (recursivamente) entre
vet[meio+1] e vet[fim]
    return busca(vet, x, meio+1, fim, N, k-1);
    }
  printf("%*.s", 2*(N-k), brancos);
  printf("Busque na primeira metade: %d e %d\n",
ini, meio - 1);
  // entao busque (recursivamente) entre
vet[ini] e vet[meio-1]
  return busca(vet, x, ini, meio-1, N, k-1);
  }

int main (void) {
  int vet[] = { -1, 0, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 9 };
  int n = 9, resp;
  //int x = 7; // buscar 7
  int  x = 2; // buscar 2
  printf("Antes de iniciar chamada a
busca(%d)\n", x);
  resp = busca(vet, x, 0, n, n, n);
  printf("Apos chamada a busca(%d)\n", x);
  if (resp>-1) printf("Encontrei em %d: de
fato %d = %d\n", resp, x, vet[resp]);
  else printf("NAO encontrei %d\n", x);
  return 0;
  }
```

```python
  global conta;
  conta += 1;
  if (conta>10) : return -1;
  meio = (ini+fim) / 2; # pegar indice do
elemento do meio
  print((N-k) * "  ", end=""); # truque: nivel
rec. maior => deslocar mais
  print("Entrei em busca(%d,%d): meio = %d" %
(ini,fim, meio));
  if (ini>meio) :
    print((N-k) * "  ", end=""); # truque: nivel
rec. maior => deslocar mais
    print("Nao ha mais onde buscar: %d > %d)" %
(ini,fim));
    return -1; # nao tem mais onde procurar!
  if (vet[meio]==x) :
    print((N-k) * "  ", end="");
    print("Achei %d na posicao %d!" % (x,meio));
    return meio;
  elif (vet[meio] < x) : # vet[ini]...vet[meio]
NAO contem x
    print((N-k) * "  ", end="");
    print("Busque na segunda metade: %d e %d" %
(meio + 1, fim));
    # entao busque (recursivamente) entre
vet[meio+1] e vet[fim]
    return busca(vet, x, meio+1, fim, N, k-1);
  else : # vet[meio]...vet[fim] NAO contem x
    print((N-k) * "  ", end="");
    print("Busque na primeira metade: %d e %d" %
(ini, meio - 1));
    # entao busque (recursivamente) entre
vet[ini] e vet[meio-1]
    return busca(vet, x, ini, meio-1, N, k-1);

def main () :
  vet = [ -1, 0, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 9 ];
  n = len(vet);
  #x = 7; # buscar 7
  x = 2; # buscar 2
  print("Antes de iniciar chamada a busca(%d)" %
x);
  resp = busca(vet, x, 0, n, n, n);
  print("Apos chamada a busca(%d)" % x);
  if (resp>-1) : print("Encontrei em %d: de
fato %d = %d" % (resp, x, vet[resp]));
  else : print("NAO encontrei %d" % x);

main();
```

Procure criar uma função recursiva, eventualmente com mais de uma chamada como é o caso da função de busca binária acima, com as mensagens e usando o truque para fazer indentação. Então procure simular manualmente sua função, depois rode sua implementação e veja se o resultado foi o esperado. Cuidado com recorrência infinita (que equivale a laça infinito), por exemplo, utilize uma variável global `conta=0` e dentro de sua função, use como primeira linha algo como `conta += 1; if (conta>20) return -1;` (no *Python* lembre-se de declarar como global com a linha: `global conta`).

Leônidas de Oliveira Brandão
http://line.ime.usp.br

Alterações:
2020/08/15: novo formato, pequenas revisões
2020/08/13: novo formato, pequenas revisões
2020/06/18: nova imagem "img/img_fatorial_def.png" e "img/img_fatorial_fat3.png";
2019/06/03: extensáo da seção "Exemplo de função ou definição recursiva";
2018/06/15: primeira versão.