

1. Considere perturbações entre duas camadas de líquidos homogêneos e imiscíveis cuja escala típica do movimento é muito pequena comparada com a espessura dessas camadas. As variações na altura dessas perturbações é dada pela função $\gamma = \Gamma e^{i(kx - \omega t)}$, onde k é o número de onda e ω é a frequência. Nesse caso, o fluxo é assumido como irrotacional.
- Escreva as componentes da equação do momento para cada uma das camadas. A partir de definições e suposições apropriadas para esse caso, escreva as condições de contorno. Explique.
 - Deduza as equações para as componentes das velocidades do fluido em cada camada. Baseando-se nessas equações que você deduziu, na crista e no cavado dessa onda, qual o sentido da velocidade horizontal na camada superior e na inferior? Faça um diagrama para mostrar a velocidade de fase e a componente horizontal do movimento a partir da interface nas duas camadas.
 - A partir da dedução da relação de dispersão, deduz a velocidade de fase. Qual é a magnitude e a direção da velocidade de fase em cada uma das camadas.
 - A energia potencial por unidade de área horizontal da onda na interface é dada por $E_p = \frac{g\Delta\rho\Gamma^2}{4}$, onde $\Delta\rho$ é a diferença entre as densidades das duas camadas. Se essa mesma energia potencial fosse utilizada por uma onda de gravidade de superfície sobre um líquido de densidade ρ , a amplitude da elevação da superfície η_o seria dada por $\eta_o = \sqrt{\frac{4E_p}{\rho g}}$ (assuma que ρ seja igual à do líquido da camada inferior no caso dos dois fluidos). Assumindo $\eta_o = 0.1m$, qual dos dois casos apresenta a maior amplitude: onda de gravidade na interface entre água salgada (1027 kg m^{-3}) e água doce (999 kg m^{-3}) ou entre água salgada e óleo de girassol (925 kg m^{-3})? Para cada caso, calcule quanto será a amplitude da onda na interface. O que você conclui sobre o efeito das diferenças da densidade na amplitude das ondas na interface?
2. Ondas de gravidade que se propagam na interface entre uma camada superior finita e a inferior infinita apresentam duas soluções para sua relação de dispersão:

$$\left(\frac{\omega^2}{gk} - 1\right) \left(\frac{\omega^2}{gk} [\rho_1 \sinh kH + \rho_2 \cosh kH] - (\rho_2 - \rho_1) \sinh kH\right) = 0$$

Sabendo que a relação entre as amplitudes das ondas nas duas interfaces (η na superfície e ζ entre as duas camadas) é dada por:

$$b = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{gk}{\omega^2}\right) e^{-kH} + \frac{a}{2} \left(1 - \frac{gk}{\omega^2}\right) e^{kH}$$

- Determine uma expressão de η em função de ζ para o caso barotrópico e demonstre que para o caso baroclínico a relação é:

$$\eta = -\zeta \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}\right) e^{-kH}$$

- Assumindo que a altura observada na superfície seja a mesma para os dois casos, determine a relação entre a altura da interface do caso barotrópico e o baroclínico.
- Mostre para qual situação a amplitude na interface é maior: quando a camada superior está sujeita à aproximação de águas rasas ou não?

