Ondas e Marés

Equações Básicas do Movimento

Olga T. Sato, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2022

Laboratório de Oceanografia por Satélites

Roteiro

Laboratório de Oceanografia por Satélites

Equações que governam o movimento

- $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ (Conservação de massa)
- $\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} + \rho\, 2\,\vec{\Omega}\times\vec{u} = \rho[\vec{g} - \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})] - \vec{\nabla}p + \vec{F}$ (Momento)
- $\rho = \rho(p, T, S)$ (Estado)
- $\frac{D}{Dt}(\rho c_v T) = \vec{\nabla}\cdot(k_T\vec{\nabla}T) + Q_T$ (Conservação de Energia Interna)
- $\frac{DS}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(K_S\vec{\nabla}S) + Q_S$ (Conservação de Sal)

As incógnitas do problema são:

$$u \quad v \quad w \quad p \quad \rho \quad T \quad S$$

Equação da continuidade de massa

Apresentada na forma de derivada material.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}$$

Para um fluido incompressível:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Isso faz com que a equação da continuidade se reduza à:

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0.$$

LOS Laboratório de Oceanografia por Satélites

Equação do Momento

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \rho\, \mathbf{2}\, \vec{\Omega} \times \vec{u} = \rho[\vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})] - \vec{\nabla} p + \vec{F},$$

onde:

- $\vec{g} = -g\hat{z}$ é a aceleração da gravidade ($g = 9,81 m \cdot s^{-2}$) e $\hat{z}$ é o versor na direção vertical;
- $\vec{F}$ representa a soma de todas as outras forças por unidade de volume que agem sobre o fluido, incluindo as forças de maré, bem como as moleculares e as forças de fricção.

Laboratório de Oceanografia por Satélites

Outras Leis de Conservação

- Energia Interna: $\frac{D}{Dt}(\rho c_v \theta) = \vec{\nabla} \cdot (k_T \vec{\nabla} \theta) + Q_T,$

  onde c_v representa o calor específico a volume constante, k_T é a condutividade térmica e Q_T representa todas as fontes e sorvedouros de calor do sistema.

- Conservação de sal: $\frac{DS}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (K_S \vec{\nabla} S) + Q_S,$

  onde K_S denota o coeficiente de difusão molecular do sal e Q_S inclui todas as fontes e sorvedouros de sal como por exemplo o derretimento e formação de gelo, precipitação e evaporação.

LOS
Laboratório de Oceanografia por Satélites

Condições de Contorno

Somente com as equações gerais que governam o movimento não podemos ainda resolver problemas específicos, e.g. ondas que se propagam numa superfície. Precisamos conhecer algo mais: condições iniciais ou de contorno.

- Condições iniciais: relacionam-se com o valor que alguma propriedade tem num determinado tempo, no caso, no início. Por exemplo, qual era a velocidade do vento numa determinada localidade quando você comecou a sua série temporal.
- Condições de contorno: relacionam-se com o valor de alguma propriedade num determinado ponto no espaço.

Condições de Contorno

- Contorno sólido: Sobre uma superfície sólida, a velocidade perpendicular à ela deve ser nula: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, onde $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície.
- Contorno material: superfície não sólida.
  1. No equilíbrio, a pressão de cada lado do contorno deve ser a mesma: $p_1 = p_2$. Na interface ar-mar ($z = \eta$): $p_{oceano} = p_{atmosfera}$.
  2. Em $z = \eta$, a altura da superfície varia com a velocidade vertical w:

$$\frac{D}{Dt}(z - \eta) = 0 \rightarrow z = \eta.$$

Como $Dz/Dt = w$, esta segunda condição pode ser escrita como:

$$w = \frac{D\eta}{Dt} \rightarrow z = \eta,$$

LOS
Laboratório de Oceanografia por Satélites

Roteiro

A Equação de Onda: suposições

- Ondas são perturbações pequenas e por isso, o efeito produzido por elas por ser linearizado.
- Amplitude da onda η deve ser pequena.
- Velocidade das partículas da água devido à passagem da onda é pequena.
- Cuidados! 'Pequeno' é um termo relativo. Veremos mais tarde qual deve ser a comparação.
- Vantagem: termos quadráticos nas equações podem ser desprezadas.

Laboratório de Oceanografia por Satélites

A Equação de Onda

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \eta,$$

onde η é qualquer tipo de perturbação:

- deslocamento da superfície livre de um líquido,
- variação da densidade num meio compressível, ou a
- vibração de uma corda ou membrana.

e c é uma constante.

Matematicamente, essa é uma equação diferencial parcial linear hiperbólica.

Laboratório de Oceanografia por Satélites

Solução da Equação de Onda

Ondas que se propagam somente na direção x podem ser descritas como:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

A solução da equação de onda é: $\eta(x,t) = f(x - ct)$. Mas $\eta(x,t) = g(x + ct)$ também resolve a equação de onda. Então, a soma das duas também é solução:

$$\eta(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

onde f e g são funções arbitrárias. Essa é a solução de D'Alembert.

Laboratório de Oceanografia por Satélites

A Equação de Onda Senoidal

$$\eta = a\ sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right].$$

Podemos definir:

- k é o número de onda, onde $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.
- ω é a frequência, onde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- c é a velocidade de fase, onde $c = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k}$

$$\eta = a\ sin\,(kx - \omega t).$$

Demonstração!

Onda em 3D

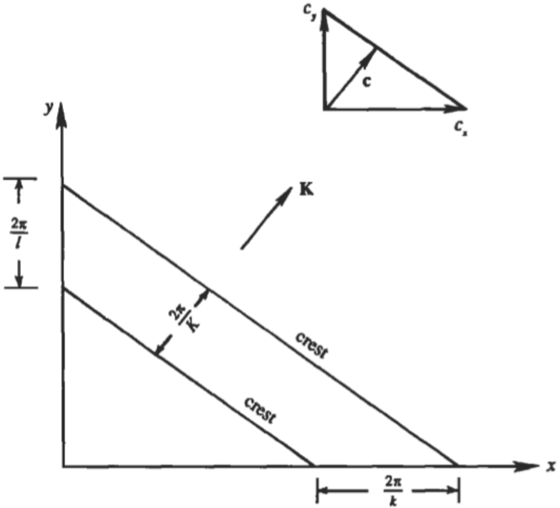
Lembrando sempre que na forma completa temos:

$$\eta = a\ sin\,(kx + ly + mz - \omega t) \; = \; a\ sin(\vec{K} \cdot \vec{x} - \omega t),$$

onde $\vec{K} = (k, l, m)$ é um vetor conhecido como o vetor número de onda cuja magnitude é dada por $K^2 = k^2 + l^2 + m^2$.

Laboratório de Oceanografia por Satélites

Representação gráfica de uma frente de onda



A velocidade de fase como vetor:

$$\vec{c} = \frac{\omega}{K}\frac{\vec{K}}{K},$$

onde $\vec{K}/K$ representa o vetor unitário na direção $\vec{K}$. As componentes são:

$$c_x = \frac{\omega}{k}, \quad c_y = \frac{\omega}{l}, \quad c_z = \frac{\omega}{m}.$$

LOS
Laboratório de Oceanografia por Satélites