Topologia Geral versão 2023
Notas de Aula
MAT317 (Bacharelado em Matemática) e
MAT5741 (Mestrado em Matemática)

Artur Hideyuki Tomita
Departamento de Matemática
IME-USP

Sumário

Sobre estas notas e o que veremos neste curso

Estas notas são uma modificação das notas de aulas preparadas para o curso de Topologia Geral do IME-USP durante a pandemia em 2021.

O objetivo destas notas é tentar escrever como se estivéssemos numa aula presencial então algum blá blá desnecessário e repetitivo pode (e vai) acontecer se comparado a um livro. Em algum momento escrever as notas durante a pandemia se tornou um processo desgastante, e alguns títulos de secção foram escolhidos para alívio cômico de quem escreveu, mas talvez não faça sentido para quem for ler...

Como o objetivo é uma nota online, eu não vou otimizar para economizar folhas de papel.

Cada capítulo se refere a uma aula não presencial.

Comentários mais desnecessários vão estar em itálico.

O nosso objetivo é trabalhar com diversos conceitos topológicos, apresentar técnicas e exemplos que consideramos interessantes. O material é mais extenso do que qualquer curso de topologia que eu tenha dado antes então eu convido os interessados a ler tudo mesmo que isto não seja visto em aula.

Iremos introduzir alguns conceitos quando isto se tornar necessário, mesmo que comumente isto fosse aparecer num apêndice ou num capítulo introdutório. A ideia é que estas notas possam ser lidas como uma aula em ordem linear.

Para facilitar a busca, criamos algumas seções em cada aula com o nome do conceito que será estudado. Ao invés de tentar esgotar o assunto quando ele for introduzido, iremos tentar ir introduzindo os conceitos quando se parecer um bom momento e voltar quando se parecer necessário. Por exemplo, a parte de métricos aparece logo no início para darmos um exemplo de topologia gerada por bases de abertos, mas depois só voltamos a falar de métrica depois de algumas aulas. Também iremos 'separar' os axiomas de separação e apresentá-los aos poucos, enunciando-os quando alguma demonstração comece a 'pedir' o axioma de separação. Por exemplo, iremos adiar a definição de normalidade até que tenhamos preparado o caminho para definir imersão e então provar o Lema de Urysohn quando formos provar o primeiro teorema básico de metrização. Iremos provar que produtos enumeráveis de espaços completamente metrizáveis é completamente metrizável em outro momento também. Quando formos falar sobre compacidade, iremos primeiro nos ater ao produto finito e apenas em outro capítulo falar sobre o Teorema de Tychonoff (o produto arbitrário de compactos é compacto). Apenas quando tivermos mais ferramentas para aplicações iremos falar da compactificação de Stone Čech e iremos usá-lo para mostrar alguns subespaços que servem de exemplos.

Iremos eventualmente falar sobre boa ordem, ordinais e o Axioma da Escolha e apresentar alguns exemplos utilizando explicitamente as equivalências do Axioma da Escolha, mas iremos apenas apresentar o mínimo para que isto possa ser feito. Pretendemos apresentar algumas construções que não fazem parte de um primeiro curso, mas darão um pouco mais da ideia da variedade de exemplos existentes.

Estamos incluindo diversos resultados que não são cobertos num primeiro curso (nem num segundo curso), mas espero que dêem uma ideia das técnicas que aparecem. Em particular incluimos alguns resultados sobre espaços de Baire usando jogos topológicos e outro usando conjuntos estacionários e c.u.b.'s.

Capítulo 1

Topologia. Abertos. Bases e Sub-bases de Abertos.

Usaremos os abertos do $\mathbb{R}^n$ para pensarmos sobre a noção intuitiva de vizinhança para então definir topologia. A partir da definição do que são os abertos da topologia, definimos formalmente vizinhanças, sistemas fundamentais de vizinhança e bases de abertos. Veremos também que é mais natural definir uma topologia usando bases de abertos e sistemas fundamentais de vizinhanças abertas.

1.1 'Está aberta a temporada de topologia'.

1.1.1 Aberto e Noção intuitiva de Aberto. Definição de Topologia.

Vemos o termo aberto inicialmente em intervalo aberto no Cálculo Diferencial e Integral I. Já no Cálculo Diferencial e Integral II, passamos a ouvir falar em bolas abertas e conjunto aberto. A noção de bola aberta no $\mathbb{R}^n$ (as bolas abertas de $\mathbb{R}$ são intervalos abertos) está relacionada à distância Euclidiana. Um conjunto é vizinhança de um ponto se existe uma bola aberta centrada nesse ponto que está contido no conjunto. Um conjunto é aberto se ela é uma reunião de bolas abertas. Equivalentemente, um conjunto é aberto se e somente se é vizinhança de todos os seus pontos.

A noção mais geral de distância é a noção de espaço métrico. A partir disso definimos bolas abertas e então vizinhanças e abertos como descrito acima. Uma outra forma de tentar generalizar a topologia do $\mathbb{R}^n$ foi usando sequências convergentes sugerida por Fréchet, mas a noção de espaço métrico se tornou mais popular.

Neste ponto haveria quem prefira definir espaços métricos e divagar sobre topologias de espaços métricos, porém, por que deveríamos tentar associar uma métrica a uma topologia quando o 'porto seguro de usar uma métrica´ para definir topologia estaria em pensar que ainda estamos trabalhando com $\mathbb{R}^n$?

Vamos dedicar algum tempo falando de pseudométricas, que apesar de parecer apenas uma 'régua' que mede pior as coisas, elas acabam aparecendo em situações que não podem ser descritas por uma métrica. Isso não será feito junto com as métricas apenas por que métricas parecem ser mais naturais a partir de $\mathbb{R}^n$ *do que uma situação onde dois pontos distintos podem ter distância* 0.

Apesar de métrica ser uma noção mais geral, ela ainda não descreve todos os espaços que aparecem naturalmente. Por exemplo, o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a topologia da convergência pontual é um exemplo de um espaço que não é descrito por uma métrica.

Para intuir sobre a definição de topologia vamos pensar em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$ se quiser pensar em desenhos num plano).

Definição 1.1. Dado um ponto $x \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$ com $x \in A$, dizemos que A é uma vizinhança de x na topologia usual de $\mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que $]x-\delta, x+\delta[\subseteq A$, ou seja se A contém todos os pontos suficientemente 'próximos' de x.

Um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ é aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$ se para todo $x \in U$ existe um $\delta_{x,U} > 0$ tal que $]x-\delta_{x,U}, x+\delta_{x,U}[\subseteq U$. *Normalmente só utilizamos* δ *para não sobrecarregar a notação, mas deve se ter em mente que o* δ *depende do* x *e do* U.

O conjunto de todos os abertos definidos como acima é chamado de topologia usual da reta $\mathbb{R}$.

O conceito de vizinhança é o conceito central da ideia 'geométrica' de uma topologia. A vizinhança, mesmo sem usar o conceito de distância, dá uma noção de pontos em seu entorno. A vizinhança é a relação do ponto com seu entorno, mas não podemos definir simplesmente para cada ponto quem são suas vizinhanças sem se preocupar com quem são as vizinhanças dos outros pontos. É necessário que exista uma inter-relação entre as vizinhanças de cada ponto. Esse problema não aparece claramente em $\mathbb{R}$ devido a simetria da distância e da desigualdade triangular em $\mathbb{R}$.

Com isto, apesar de ser mais natural pensar nas vizinhanças de cada ponto, a definição mais simples é definir o que se espera dos conjuntos abertos e definir as noções a partir daí. A noção intuitiva do que esperamos que abertos satisfaçam vem da topologia usual de $\mathbb{R}$:

a) noção intuitiva do que vizinhanças devem satisfazer e

b) a ideia de que um conjunto é aberto se e somente se é (*) vizinhança de todos os seus pontos.

É natural esperar que todo ponto tenha alguma vizinhança. Assim, X deve ser vizinhança de todos os seus pontos. Com isto, é natural que X seja um aberto. O vazio também satisfaz $(*)$ por vacuidade, com isto é natural que seja um aberto. Se um conjunto é vizinhança de um ponto, é de se esperar que um conjunto maior ainda o seja. É natural esperar que a intersecção de duas vizinhanças seja uma vizinhança.

1.1.2 Definição de Topologia.

O ponto principal da topologia não é 'julgar' quem deveria ser aberto. É verificar que uma família de conjuntos (uma topologia) satisfaz as propriedades desejadas para serem uma família de abertos. Ou seja, não importa se há motivação geométrica para os abertos, basta que elas satisfaçam as propriedades para serem os abertos de uma topologia.

Antes de prosseguirmos com a definição de topologia, iremos relembrar a notação de união e intersecção de uma família de conjuntos (*uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ é também um conjunto, mas a ênfase está nos elementos de $\mathcal{A}$*).

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{A}$, dizemos que $\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}$ é a reunião de $\mathcal{A}$. Ou seja $x \in \bigcup \mathcal{A}$ se e somente se existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Quando $\mathcal{A}$ é uma família finita enumerada $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$, podemos escrever a reunião como $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ ou $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{A}$, dizemos que $\bigcap \mathcal{A} := \{x : \forall A \in \mathcal{A} \text{ temos } x \in A\}$ é a intersecção de $\mathcal{A}$. Ou seja, $x \in \bigcap \mathcal{A}$ se e somente se $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Quando $\mathcal{A}$ é uma família finita enumerada $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$, podemos escrever a intersecção como $A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1}$ ou $\bigcap_{k=0}^{n-1} A_k$.

Definição 1.2. Seja X um conjunto não vazio e τ um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Dizemos que τ é uma topologia sobre X se satisfaz as seguintes condições:

i) $\emptyset, X \in \tau$.

ii) se $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \tau$ então $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

iii) se $U, V \in \tau$ então $U \cap V \in \tau$.

Note que para ser uma topologia basta verificarmos que elas satisfazem as três condições acima. Por ser uma noção muito geral, concluir resultados gerais sobre todos os espaços topológicos têm alcance limitado. Os resultados mais interessantes valem para classes de espaços topológicos com propriedades adicionais. Antes, é preciso estudar ferramentas para construir topologias, já que usar a definição não é a melhor forma de verificar propriedades do espaço.

Usando indução finita, temos que a condição *iii*) é equivalente a

se $U_0, \ldots U_n \in \tau$ então $U_0 \cap \ldots U_n \in \tau$. Ou seja, a intersecção finita de abertos é um conjunto aberto.

Exercício 1.3. Note que a topologia usual da reta é uma topologia.

Definição 1.4. Dada uma topologia τ sobre X, dizemos que $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico com a topologia τ (é comum dizer que X é espaço topológico quando não há risco de confusão sobre a topologia τ utilizada.

Dada uma topologia τ, se $U \in \tau$, dizemos que U é τ-aberto ou aberto, se no contexto estiver claro que estamos falando da topologia τ.

Usando dessas notações temos que um conjunto τ é uma topologia se $\emptyset$ e X são abertos, a união arbitrária de abertos é aberta e a intersecção finita de abertos é um aberto.

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio e $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$. A primeira é chamada as vezes de topologia caótica ou antidiscreta. A segunda é chamada de topologia discreta.

Fica a cargo do leitor notar que ambas são topologias.

Exemplo 1.6. Seja Y um conjunto infinito, $x_0 \notin Y$ e $X = Y \cup \{x_0\}$. Seja $\tau_3 = \mathcal{P}(Y) \cup \{X\}$, $\tau_4 = \mathcal{P}(Y) \cup \{X \setminus F : F \subseteq Y, \text{subconjunto finito}\}$.

Fica a cargo do leitor verificar que τ_3 é uma topologia. Vamos verificar que τ_4 é uma topologia. Temos $\emptyset \in \mathcal{P}(Y)$ e $X = X \setminus \emptyset$, logo $\emptyset$ e X são τ_4-abertos.

Seja $\mathcal{U}$ um subfamília de τ_4 não vazio. Vamos mostrar que a união dessa família pertence a τ_4. Se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ então $\bigcup \mathcal{U} \subseteq Y$ e pertence a $\mathcal{P}(Y) \subseteq \tau_4$. Se $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{P}(Y)$, então existe $F \subseteq Y$ finito tal que $X \setminus F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Assim, $Y \setminus F \subseteq Y \cap \bigcup \mathcal{U}$. Logo, $E := Y \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq F$ é finito. Portanto $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus E$ pertence a τ_4.

Finalmente considere dois elementos de τ_4. Se são da forma $X \setminus F_1$ e $X \setminus F_2$ com F_1 e F_2 subconjuntos finitos de Y temos que $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$, onde $F_1 \cup F_2 \subseteq Y$ é finito. Assim, a intersecção de ambas é um elemento de τ_4. O outro caso é quando pelo menos um deles é subconjunto de Y. Assim, a intersecção também é subconjunto de Y e portanto pertence a τ_4. Essa topologia é a compactificação por um ponto do conjunto discreto Y. Veremos eventualmente que esta topologia é compacta.

Note que ambas as topologias acima não são nem caóticas e nem discretas.

1.2 Base de abertos.

Para estudar a topologia podemos pensar em usar um conjunto significativo que recupere a topologia, chamada de base de abertos (ou base quando está claro que estamos falando de abertos). Para o estudo da topologia em diversas ocasiões basta usar uma base ou uma base com propriedades especiais.

1.2.1 Definição de Base de Abertos

Definição 1.7. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ (ou que B é uma base de abertos quando não há confusão sobre qual a topologia τ ou simplemente uma base quando está claro que estamos falando de abertos), se $\mathcal{B} \subseteq \tau$ e para todo $x \in X$ e $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Para evitar algumas trivialidades é comum assumir que todos os abertos da base são não-vazios.

Fica a cargo do leitor verificar que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma base se e somente se para cada $U \in \tau$ existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{B}' = U$. *Nota: a união da família vazia é o conjunto vazio.*

Fixado uma topologia, podemos buscar bases para elas que nos tragam alguma informação sobre a topologia. Por exemplo, para fazer a contagem do número de abertos na reta real, usamos o fato que os intervalos de extremidades racionais formam um base de $\mathbb{R}$.

Porém ao invés de produzir uma topologia e buscar uma base interessante para ela, podemos começar com o conjunto que queremos que seja base para definir a topologia. Isto será chamado de topologia gerada pela base. *Isto por exemplo é feito em $\mathbb{R}^n$, quando dizemos que um conjunto é aberto se e somente se é reunão de bolas abertas. Aqui é importante notar que a desigualdade triangular é usada para chegar a propriedade de base, mas não é necessária para termos uma base. Talvez começar com espaços métricos e as bolas para gerar topologias acabe criando essa expectativa da necessidade de métrica para termos topologias.* A próxima definição é exatamente o que precisamos para gerar topologias a partir de uma base:

Definição 1.8. Dado um conjunto não vazio X, dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base para uma topologia se

$B1)$ para cada $x \in X$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$ (em outras palavras, $\mathcal{B}$ é não vazio e $\bigcup \mathcal{B} = X$).

$B2)$ para cada $U, V \in \mathcal{B}$ e para cada $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Lema 1.9. Se $\mathcal{B}$ é uma base para o espaço topológico X então $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades $B1)$ e $B2)$.

Demonstração. Tome $x \in X$. Como X é um aberto, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq X$. Assim, $B1)$ está satisfeita.

Se $U, V \in \mathcal{B}$ e $x \in U \cap V$ então $U \cap V \in \tau$, logo existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. $\square$

Note que uma família de τ-abertos satisfazendo $B1$) e $B2$) não precisa ser uma base da topologia τ dada.

Por exemplo, tome $\mathcal{B} = \{]x, +\infty[\colon x \in \mathbb{R}\}$. Essa família satisfaz $B1$) e $B2$) mas não é uma base para a topologia usual da reta.

Com isto, é preciso tomar um pouco de cuidado. O conjunto $\mathcal{B}$ satisfazendo $B1$) e $B2$) é base da **topologia gerada pela base** $\mathcal{B}$ (a topologia vai ser definida a seguir).

1.2.2 Topologia gerada por Base de Abertos.

Definição 1.10. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia. Diremos que $\tau_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$. Dizemos que $\tau_{\mathcal{B}}$ é a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$.

O teorema abaixo justifica os nomes dados acima.

Teorema 1.11. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia. Seja $\tau = \tau_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$. Então τ é uma topologia sobre X e $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia τ.

Demonstração. Primeiro iremos verificar que τ é uma topologia. Já vimos anteriormente o argumento de que $\emptyset$ e X são τ-abertos, para isto basta usar a família vazia e toda a base. Tome $\mathcal{U} \subseteq \tau$. Pela definição de τ, existe, para cada $U \in \mathcal{U}$ uma família $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$. Então temos que $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup(\bigcup\{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\})$ e $\bigcup\{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{U}$ é τ-aberto.

Falta apenas verificar que a intersecção de dois elementos de τ está em τ. Sejam U e V dois elementos de τ. Se a intersecção de ambas for vazia, então terminamos pois $\emptyset \in \tau$. Vamos supor que $U \cap V$ é não vazio. Pela definição de τ, existem $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ subconjuntos de $\mathcal{B}$ tais que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$ e $V = \bigcup \mathcal{B}_V$. Fixe $x \in U \cap V$. Então existe $U_x \in \mathcal{B}_U$ tal que $x \in U_x$ e $V_x \in \mathcal{B}_V$ tal que $x \in V_x$. Pela $B2$), como $x \in U_x \cap V_x$ com $U_x, V_x \in \mathcal{B}$, existe $W_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V$. Assim, $U \cap V = \bigcup\{W_x : x \in U \cap V\} \in \tau$.

Pela definição de τ, segue que $\mathcal{B}$ é uma base para τ. □

Exemplo 1.12. Os quadrados abertos em $\mathbb{R}^2$ são uma base para a topologia de $\mathbb{R}^2$. Note que a intersecção de dois quadrados nem sempre é um quadrado, mas todo ponto da intersecção está contida num quadrado. Como alguns já podem ter visto, a topologia gerada coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

1.2.3 Topologia gerada por uma métrica usando bolas abertas como Base de Abertos.

Definição 1.13. Dizemos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma métrica se as seguintes propriedades estão satisfeitas:

$M0$) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$

$M1$) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$.

$M2$) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

$M3$) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

A bola aberta $B_d(x, \epsilon)$ é o conjunto $\{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Exemplo 1.14. O conjunto das bolas abertas de X gera uma base para uma topologia (fica a cargo do leitor verificar). Dizemos que esta é a topologia gerada pela métrica d.

1.3 Sub-bases e topologia gerada por sub-bases.

Veremos no decorrer do curso que é útil pensarmos em pedaços 'graúdos' para gerar uma base.

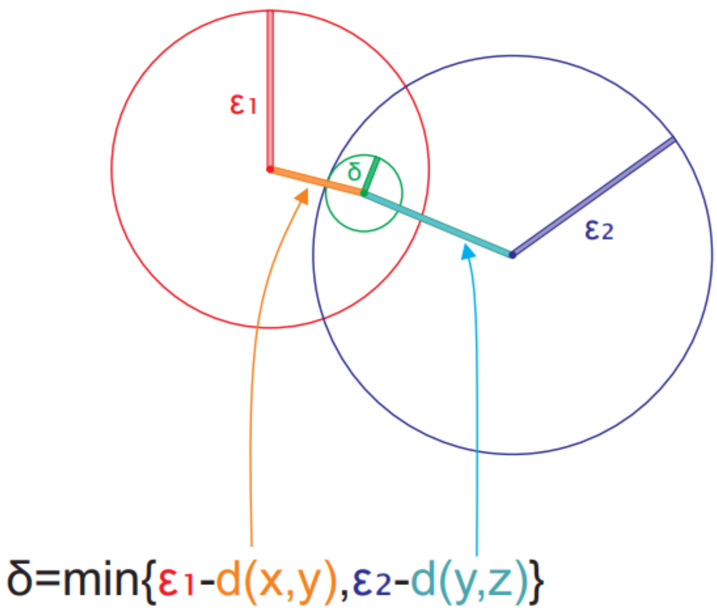

Figura 1.1: Desigualde triangular

1.3.1 Definição de Sub-base de Abertos. Definição de ordens lineares.

Definição 1.15. Uma família de conjuntos abertos $\mathcal{S}$ num espaço topológico X é uma subbase para X se $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ subconjunto finito não vazio de } \mathcal{S}\}$ forma uma base de abertos de X.

Exemplo 1.16. A família de intervalos $\{]x, +\infty[: x \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[: x \in \mathbb{R}\}$ é uma subbase para a topologia usual de $\mathbb{R}$. De fato, basta notar que $]x, y[=]x, +\infty[\cap]-\infty, y[$.

Note que tal sub-base para uma topologia como acima pode ser definida para qualquer espaço linearmente ordenado. Um espaço é linearlmente ordenado se ele está munido de uma ordem linear.

Definição 1.17. Dizemos que $<$ é uma ordem linear sobre X se
a) $x \not< x$ para todo $x \in X$.
b) Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$, para todo x, y e z em X.
c) para todo $x, y \in X$ temos que $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.

1.3.2 Topologia gerada por uma Sub-base. Topologia da ordem a partir da Sub-base.

Lema 1.18. Seja $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$. Então $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ subconjunto finito não vazio de } \mathcal{S}\}$ é uma base para uma topologia τ. Além disso, $\mathcal{S}$ é uma sub-base para τ.

Demonstração. Primeiro iremos verificar que $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades para ser a base de abertos de uma topologia. Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, segue que $\bigcup \mathcal{B} = X$ e $B1)$ está satisfeita.

Se $U, V \in \mathcal{B}$, existem $\mathcal{S}_U$ e $\mathcal{S}_V$ subconjuntos não vazios de $\mathcal{S}$ tal que $U = \bigcap \mathcal{S}_U$ e $V = \bigcap \mathcal{S}_V$. Então $U \cap V = \bigcap(\mathcal{S}_U \cup \mathcal{S}_V)$, logo $\mathcal{B}$ satisfaz $B2)$.

Então $\mathcal{B}$ é base da topologia τ gerada pela base $\mathcal{B}$. Pela definição de $\mathcal{B}$ a partir de $\mathcal{S}$, segue que $\mathcal{S}$ é sub-base de τ. □

Definição 1.19. Dada uma $\mathcal{S}$ nas condições acima, chamamos a topologia τ de topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$.

Exemplo 1.20. A topologia gerada pela sub-base $\{\{y \in X : y < x\} : x \in X\} \cup \{\{y \in X : x < y\} : x \in X\}$ é a topologia da ordem.

Capítulo 2

Vizinhanças. Topologias geradas por bases locais e bases de fechados. Fechos.

2.1 Vizinhanças.

Agora que temos a definição de topologia podemos formalizar a definição de vizinhança.

2.1.1 Vizinhanças.

Definição 2.1. Dizemos que A é uma vizinhança (τ-vizinhança se for necessário explicitar a topologia) de x se existe um aberto V na topologia τ tal que $x \in V \subseteq A$. Se A é um aberto, dizemos que A é uma vizinhança aberta.

Eventualmente iremos usar termos como vizinhança compacta, vizinhança conexa, vizinhança conexa por caminhos que muitas vezes não são vizinhanças abertas. *Em alguns textos, vizinhança significa vizinhança aberta, então verifique a definição utilizada.*

As vizinhanças estão relacionadas ao estudo das propriedades locais do espaço topológico. Para utilizar as vizinhanças não precisamos usar todas elas. Basta tomar um conjunto significativo. Veremos exemplos disso quando formos estudar algumas propriedades locais.

Definição 2.2. Dado $x \in X$, onde X é um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x se todos os elementos de $\mathcal{V}_x$ são vizinhanças de x e para cada vizinhança U de x, existe uma vizinhança $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq U$.

Na definição acima não estamos considerando que as vizinhanças são abertas. Quando quisermos que sejam abertas iremos dizer que temos um sistema fundamental de vizinhanças abertas. *Em alguns textos o sistema fundamental de vizinhanças já consiste de vizinhanças abertas, assim é necessário verificar qual a definição utilizada no texto.*

2.1.2 Sistemas fundamentais de vizinhanças. Bases locais.

Definição 2.3. Um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x também será chamado de base local de x.

Exemplo 2.4. No caso do $\mathbb{R}^n$, temos que as bolas abertas de raio $\frac{1}{n}$ com n inteiro positivo formam uma base local para o ponto. *Este fato é usado para descrever algumas propriedades usando convergência de sequências, como os pontos no fecho de um conjunto e da continuidade de uma função.*

Podemos pensar que $\mathcal{V}_x$ descreve a topologia do ponto x. Para ter um noção da topologia precisamos considerar um sistema fundamental de vizinhanças para cada ponto de X.

Definição 2.5. Dizemos que $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de X se $\mathcal{V}_x$ é um sistema de vizinhanças de x para cada $x \in X$.

Um sistema fundamental de vizinhanças abertas de X também será chamado de sistema de bases locais de X.

Exercício 2.6. Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base de X então $\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ é uma base local para x.

Mostre que se $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema de bases locais de X então $\bigcup_{x\in X} \mathcal{V}_x$ é uma base de X.

2.2 Topologias geradas por bases locais.

2.2.1 Topologia gerada por bases locais.

Da mesma forma do que base, iremos escrever as propriedades que uma família deve possuir para se tornar um sistema fundamental de vizinhanças abertas. *Existem textos que discutem definir a topologia a partir de um sistema fundamental de vizinhanças arbitrário, mas isso não pareceu muito prático para chegar à topologia.* Note que para usarmos um candidato a sistema de vizinhanças que gere uma topologia, deve existir uma relação entre as vizinhanças de pontos distintos.

Definição 2.7. Dizemos que $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas (ou bases locais) para uma topologia se

$BL1)$ $\emptyset \neq \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $x \in U$, para todo $x \in X$ e para todo $U \in \mathcal{V}_x$.

$BL2)$ se $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{V}_x$ então existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

$BL3)$ se $x \in X$, $U \in \mathcal{V}_x$ e $y \in U$ então existe $W \in \mathcal{V}_y$ tal que $W \subseteq U$.

Note que a condição 3 acima para o sistema fundamental de bolas abertas centradas no ponto em $\mathbb{R}^n$ estão satisfeitas usando a desigualdade triangular.

Se tomarmos um subconjunto de uma topologia com as propriedades $BL1) - BL3)$, não é suficientes para ser um sistema fundamental de vizinhanças abertas dessa topologia. Mas ela é um sistema fundamental de vizinhanças abertas da topologia que ela gera.

Teorema 2.8. Dado um sistema fundamental de vizinhanças abertas $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ para uma topologia, temos que $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{V}_x$ é uma base para uma topologia de X e $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para $\tau_{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Para verificar $B1)$, segue da definição de $\mathcal{B}$ e de $BL1)$ que $x \in \bigcup \mathcal{V}_x \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Para verificar $B2)$, tome dois elementos U, V em $\mathcal{B}$. Tome $z \in U \cap V$. Pela definição de $\mathcal{B}$, existe $x \in X$ tal que $U \in \mathcal{V}_x$. Pela $BL3)$, existe $W \in \mathcal{V}_z$ tal que $W \subseteq U$. De modo análogo, existe $O \in \mathcal{V}_z$ tal que $O \subseteq V$. Como $W, O \in \mathcal{V}_z$, segue de $BL2)$ que existe $T \in \mathcal{V}_z$ tal que $T \subseteq W \cap O \subseteq U \cap V$. Assim, T testemunha $B2)$ para z, U e V. Logo $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia $\tau_{\mathcal{B}}$.

Fixe $x \in X$. Vamos verificar que $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para x. Como $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, segue que os elementos de $\mathcal{V}_x$ são $\tau_{\mathcal{B}}$-abertos. Então resta mostrar que é um sistema fundamental de vizinhanças de x. Tome $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ é base de $\tau_{\mathcal{B}}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Pela definição de $\mathcal{B}$, existe $y \in X$ tal que $V \in \mathcal{V}_y$. Como $x \in V$, segue de $BL3)$ que existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $W \subseteq V \subseteq U$. Assim, temos que $W \subseteq U$ com $W \in \mathcal{V}_x$. Logo $\mathcal{V}_x$ é um sistema de vizinhanças de x. □

Dada uma família satisfazendo $BL1)$ e $BL2)$, podemos definir uma topologia usando a sub-base $\mathcal{S} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{V}_x$. Sem $BL3)$, não podemos afirmar que $\mathcal{V}_x$ é uma base local em x da topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$.

Exemplo 2.9. A topologia de qualquer espaço métrico pode ser definida pelo sistema de vizinhanças $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$, onde $\mathcal{V}_x = \{B(x, \epsilon) : \epsilon > 0\}$ são as bolas abertas centradas em x. A princípio, poderíamos ter uma outra topologia se usassemos $\mathcal{V}_x = \{B(x, \epsilon) : \epsilon = \frac{1}{2^n}$ para algum $n \in \mathbb{N}\}$, mas a topologia será a mesma.

Iremos futuramente verificar condições para que sistemas fundamentais de vizinhanças sobre o mesmo conjunto gerem a mesma topologia.

2.2.2 A reta de Sorgenfrey. O plano de Niemtyski.

Exemplo 2.10. A reta de Sorgenfrey. (ver Figura 2.1) Seja X o conjunto dos números reais. Considere a topologia τ gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças abertas $\mathcal{V}_x = \{[x, x+\epsilon[: \epsilon > 0[\}$, para cada $x \in X$.

Demonstração. Temos que verificar que as condições para ser sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia estão satisfeitas.

Claramente, $\mathcal{V}_x$ é não vazio e $x \in [x, x+\epsilon[$ para todo $\epsilon > 0$, logo $BL1)$ está satisfeita.

Dois elementos de $\mathcal{V}_x$ são da forma $[x, x+\epsilon[$ e $[x, x+\delta[$ para ϵ e δ reais positivos. Assim, a intersecção de ambas é $[x, x+\min\{\epsilon, \delta\}[\in \mathcal{V}_x$ e $BL2)$ está satisfeita.

Fixe $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Tome $y \in [x, x+\epsilon[$. Como $y < x+\epsilon$, podemos fixar $\delta > 0$ tal que $y+\delta < x+\epsilon$. Assim, $[y, y+\delta[\in \mathcal{V}_y$ e $[y, y+\delta[\subseteq [x, x+\epsilon[$. Assim, $BL3)$ está satisfeita. □

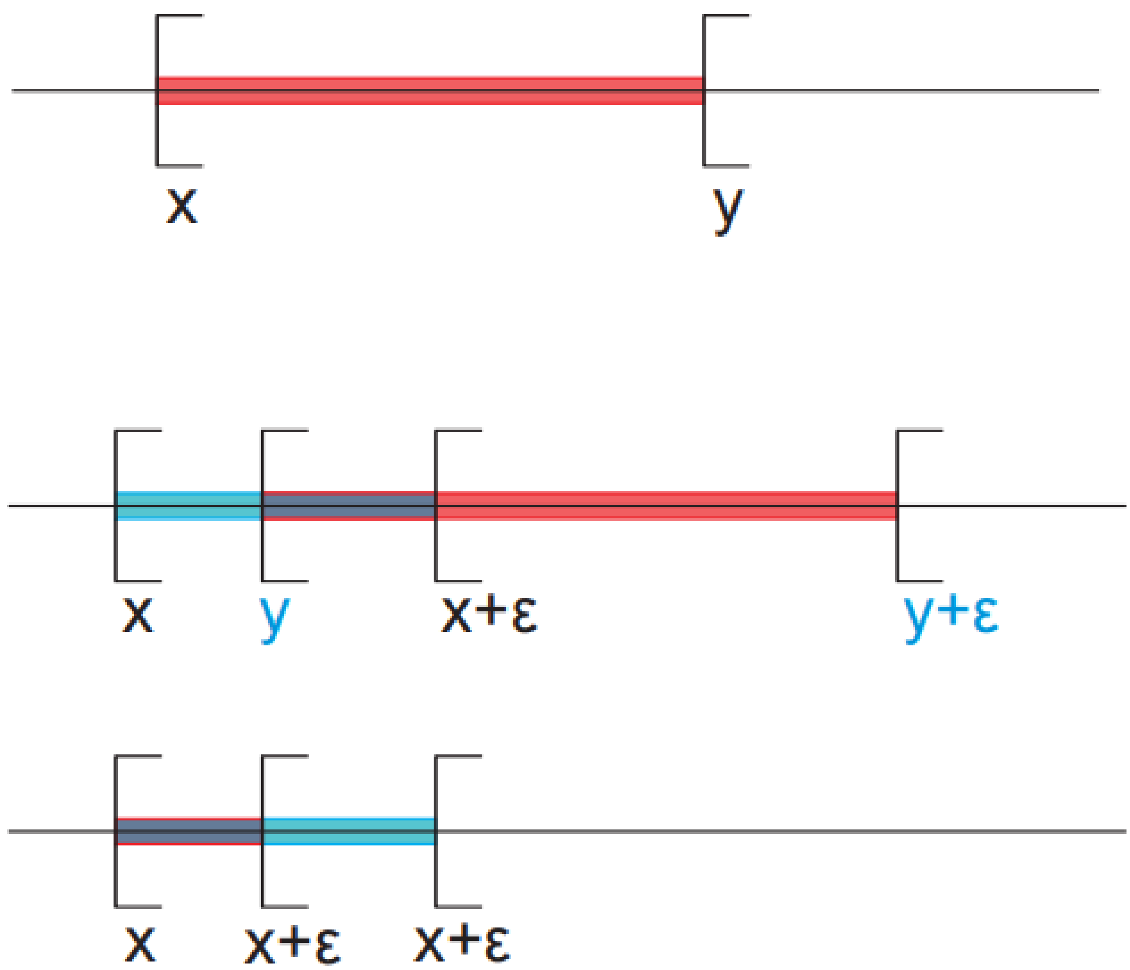

Figura 2.1: A reta de Sorgenfrey.

Vamos ver outro exemplo de topologia gerada por sistema fundamental de vizinhanças.

Exemplo 2.11. O plano de Niemtyski. (ver figura 2.2) Seja X o conjunto $\{((x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0)\}$. Vamos denotar por $B((x, y), \epsilon)$ as bolas abertas na topologia Euclidiana.

Para $a = (x, y)$ com $y > 0$ seja $\mathcal{V}_a = \{B((x, y), \epsilon) : 0 < \epsilon < y\}$ e para $a = (x, 0)$ seja $\mathcal{V}_a = \{B((x, \epsilon), \epsilon) \cup \{(x, 0)\} : \epsilon > 0\}$.

Claramente $BL1)$ está satisfeita.

Se (x,y) com $y > 0$ então as vizinhanças são bolas centradas no mesmo ponto e por isso satisfazem $BL2$). Para $(x,0)$ as bolas $B((x,\epsilon),\epsilon)$ é tangente ao eixo das abscissas no ponto $(x,0)$. Vamos verificar que se $\delta < \epsilon$ então $B((x,\delta),\delta) \subseteq B((x,\epsilon),\epsilon)$. Se $(r,s) \in B((x,\delta),\delta)$ então $d((r,s),(x,\epsilon)) \leq d((r,s),(x,\delta)) + d((x,\delta),(x,\epsilon)) < \delta + (\epsilon - \delta) = \epsilon$. Assim $BL2$) também está satisfeitas para estes pontos. Assim, $BL2$) está satisfeita.

Seja $a = (x,y)$ com $y > 0$. a vizinhança em $\mathcal{V}_a$ é uma bola U centrada em a com a segunda coordenada positiva. Todo ponto $b \in U$ nesta bola possui também uma bola aberta centrada em b contida em U (pois estamos trabalhando neste caso com bolas na topologia Euclidiana de $\mathbb{R}^2$). Assim $BL3$) está satisfeita neste caso. Seja $a = (x,0)$. Se $b = a$ então a própria vizinhança satisfaz a condição $BL3$) para este ponto. Se $b \neq a$ então b está numa bola aberta Euclidiana V com todos os pontos acima da abscissa, e a segunda coordenada de b é positiva. Assim, as vizinhanças de b são bolas Euclidianas e existe uma delas dentro de V. Assim $BL3$) também está satisfeita.

Temos uma topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças abertas.

Sim, estas topologias tem nome por que elas servem a um propósito maior do que serem exemplos de topologias geradas por um sistema fundamental de vizinhanças. Elas irão aparecer mais pra frente como contra-exemplos.

2.3 'Mas se é fechado, como pode ser aberto?'.

Uma noção intuitiva de que um ponto está próximo de um conjunto, mesmo sem a noção de distância, é dada pelo fecho de um conjunto. Para isto iremos primeiro definir conjuntos fechados.

2.3.1 Fechados e fechos.

Definição 2.12. Dada uma topologia τ sobre um conjunto X, dizemos que F é um conjunto fechado (τ-fechado se a topologia não estiver clara) se $X \setminus F \in \tau$.

A definição acima diz que um conjunto é fechado se e somente se o seu complementar é aberto.

A primeira coisa que podemos notar é que $\emptyset$ e X são conjuntos fechados. *Assim, a noção de aberto e fechado difere da ideia de porta ou janela aberta/fechada. Ou seja, como em muitos outros casos, o uso da palavra cotidiana não serve para intuir seu uso na matemática.*

Em inglês, um conjunto aberto e fechado é chamado de clopen. Esse termo geralmente aparece quando existe uma quantidade significativa deles (quando existe uma base de clopens, que são os espaços zero-dimensionais) ou quando há apenas os inevitáveis $\emptyset$ e X (quando o espaço é chamado de conexo).

O termo 0-dimensional se refere a dimensão 0. Existem alguns tipos de dimensão definidos para espaços topológicos e em cada um delas se espera que o $\mathbb{R}^n$ tenha dimensão n.

Exemplo 2.13. Num espaço caótico ou no espaço discreto, todos os abertos são clopens. Na reta real, não há clopens não triviais, ou seja, $\mathbb{R}$ é conexo (isto será visto eventualmente neste curso).

Definição 2.14. Dado um subconjunto A de um espaço topológico X com uma topologia τ, o fecho de A é o menor fechado que contém A. Denotaremos o fecho de A por $\overline{A}$ ou $cl(A)$ (ou $\overline{A}^{\tau}$, $\overline{A}^{X}$, $cl_\tau(A)$ ou $cl_X(A)$ quando for necessário especificar melhor).

Para que está definição faça sentido é necessário provar que existe o menor fechado. Isto é feito usando a relação de inclusão.

Vamos primeiro lembrar a relação de De Morgan: $X \setminus (\bigcup \mathcal{A}) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$ e $X \setminus (\bigcap \mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$. A prova do Lema abaixo segue da definição de topologia e o uso do complementar.

Lema 2.15. O conjunto $\mathcal{F}$ de todos os fechados do espaço X com a topologia τ satisfaz:

$F1$) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{F}$.

$F2$) Se $\emptyset \neq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ então $\bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}$.

$F3$) Se $F, G \in \mathcal{F}$ então $F \cup G \in \mathcal{F}$.

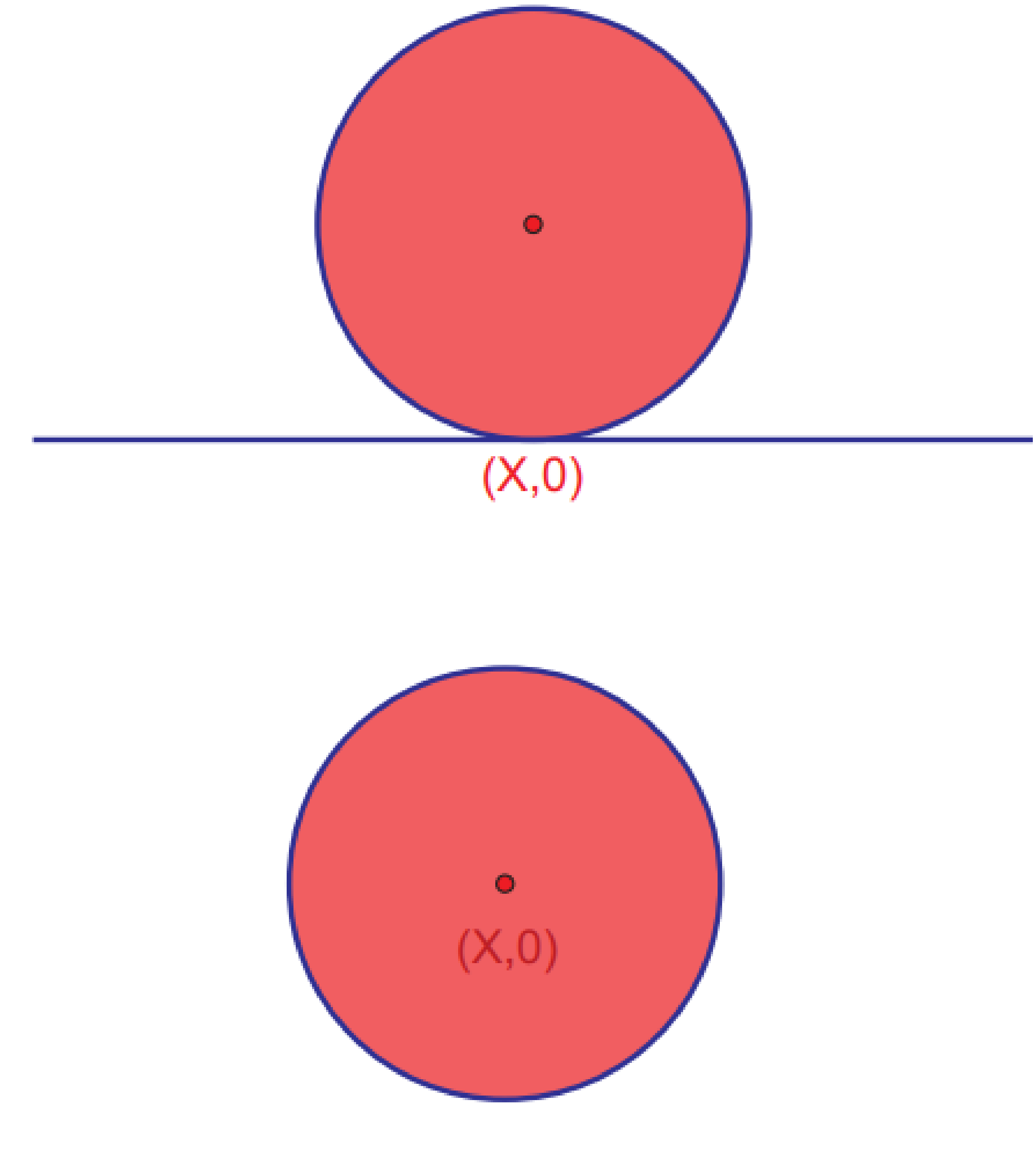

Figura 2.2: O plano de Niemitzky.

2.4 'Não sei se está próximo, mas ainda não encostou'.

2.4.1 Quando um ponto está no fecho.

Proposição 2.16. Dado um espaço topológico X, o fecho de um subconjunto de X está bem definido.

Demonstração. Seja A um subconjunto de X. Se A for vazio, então A é fechado e é o menor fechado que contém A.

Se A é não vazio, tome $\mathcal{A} = \{F : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}$. Como X é fechado, segue que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Assim, $B = \bigcap \mathcal{A}$ é um fechado que contém A. Para ver que B é o menor fechado, se F é um fechado contendo A então $F \in \mathcal{A}$, logo $B = \bigcap \mathcal{A} \subseteq F$. □

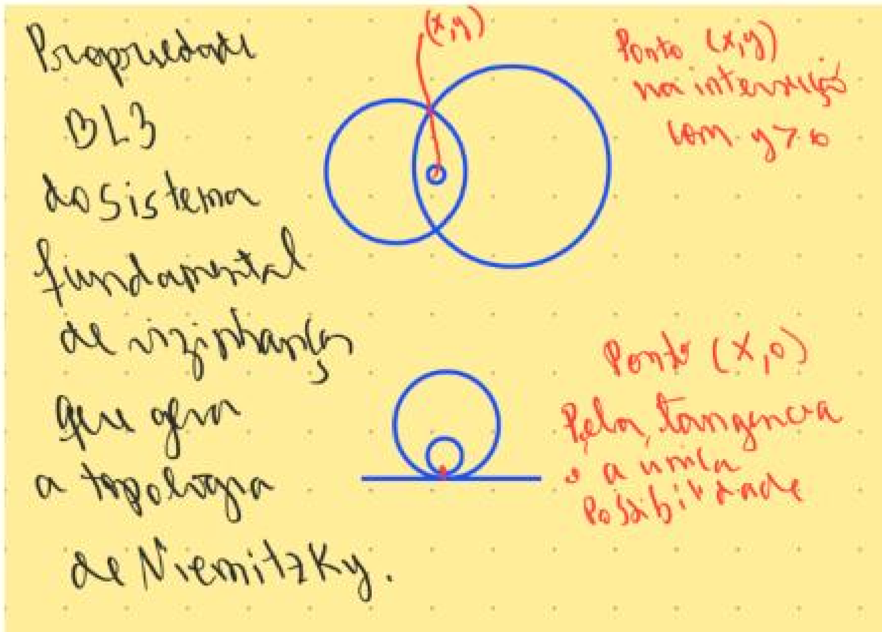

Figura 2.3: O plano de Niemitzky - a propriedade BL3.

Verificar se um ponto x pertence ao fecho de um conjunto é uma propriedade local.

Lema 2.17. Dado um ponto $x \in X$, $A \subseteq X$ e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x, são equivalentes.
a) $x \in \overline{A}$.
b) para toda vizinhança aberta U de x temos $U \cap A \neq \emptyset$.
c) $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{V}_x$.

Demonstração. Basta mostrarmos que $a) \to b)$, $b) \to c)$ e $c) \to a)$. Suponhamos que $b)$ não esteja satisfeita. Então existe uma vizinhança aberta de x tal que $U \cap A = \emptyset$. Então $F = X \setminus U$ é um fechado que contém A. Logo, pela definição do fecho de A, segue que $\overline{A} \subseteq F$. Portanto, $\overline{A} \cap U = \emptyset$. Como $x \in U$, segue então que $x \notin \overline{A}$.

Suponha que $b)$ vale. Dada uma vizinhança $U \in \mathcal{V}_x$, temos que existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq U$. Como V é vizinhança aberta de x, segue da hipótese que $A \cap V \neq \emptyset$. Como $A \cap V \subseteq A \cap U$, temos que $A \cap U$ é não vazio e vale a condição $c)$.

Suponhamos que $a)$ não está satisfeita. Então $x \in X \setminus \overline{A}$. Como $X \setminus \overline{A}$ é um aberto, segue que existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq X \setminus \overline{A}$. Assim, $V \cap \overline{A} = \emptyset$. Como $A \subseteq \overline{A}$, segue que $V \cap A = \emptyset$. Assim $c)$ não está satisfeita e $c) \to a)$ segue da contrapositiva. □

Podemos 'fixar' os que serão os fechados ou o operador fecho para definir uma topologia como foi feita para bases ou um sistema fundamental de vizinhanças abertas. Deixaremos a cargo do leitor notar que se começarmos com uma família que satisfaz $F1) - F3)$ então os complementares irão gerar uma topologia e essa família será a família dos fechados dessa topologia. O caso do fecho será deixado para quando definirmos o operador interior.

2.5 Topologias definidas por bases de fechados.

Pode se definir uma base de fechados para obter todos os fechados.

2.5.1 Definição de Base de Fechados.

Definição 2.18. Seja $\mathcal{C}$ uma família de fechados num espaço topológico X. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma base de fechados se para todo $F \subseteq X$ fechado de X, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $F = \bigcap \mathcal{C}'$. (Para que isto bata com a ideia da união vazia, iremos assumir que a intersecção da família vazia é X).

O próximo lema relaciona uma base de fechados a uma base de abertos.

Lema 2.19. $\mathcal{C}$ é base de fechados se e somente se $\mathcal{B} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ é uma base de abertos.

Demonstração. $(\to)$ Seja U um aberto da topologia. Podemos supor que U não é vazia, pois neste caso tomamos a família vazia que é um subconjunto de $\mathcal{B}$. Então $X \setminus U$ é fechado distinto de X e existe $\mathcal{C}'$ não vazio tal que $X \setminus U = \bigcap \mathcal{C}'$. Por De Morgan, temos que $U = \bigcup \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}'\}$.

$(\leftarrow)$ Seja F um fechado de X. Se $F = X$ segue da intersecção da família vazia. Suponhamos que $F \neq X$. Então $X \setminus F$ é um aberto não vazio. Portanto, como $\mathcal{B}$ é uma base de abertos, segue que existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $X \setminus F = \bigcup \mathcal{B}'$. Pela definição de $\mathcal{B}$, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B}' = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}'\}$. Logo por De Morgan, temos que $F = \bigcap \{X \setminus (X \setminus C) : C \in \mathcal{C}'\} = \bigcap \mathcal{C}'$. □

Definição 2.20. Dizemos que uma família $\mathcal{C}$ é uma base de fechados para uma topologia se
$BF1)$ para todo $x \in X$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C$.
$BF2)$ se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e $x \notin C_1 \cup C_2$ então existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C_1 \cup C_2 \subseteq C$ e $x \notin C$.

2.5.2 Topologia gerada por Base de Fechados.

Lema 2.21. Se $\mathcal{C}$ é uma família que satisfaz $BF1)$ e $BF2)$ então existe uma topologia em que $\mathcal{C}$ é uma base de fechados para esta topologia.

Demonstração. Considere a família $\mathcal{B} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$. Fica a cargo do leitor notar que $\mathcal{B}$ satisfaz $B1)$ e $B2)$. Considere a topologia τ gerada pela base de abertos $\mathcal{B}$. Então $\mathcal{B}$ é uma base de abertos para τ e temos então que $\mathcal{C}$ será uma base de fechados para τ. □

Exemplo 2.22. Seja X um conjunto não enumerável e seja $\mathcal{C}$ a família de todos os subconjuntos enumeráveis (finitos ou não) de X. Então $\mathcal{C}$ é base de fechados para uma topologia. Esta topologia é chamada de co-enumerável.

Demonstração. Para cada $x \in X$ temos que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $x \notin \emptyset$. Assim $BF1$) está satisfeita. Para verificar $BF2$), basta notar que a união de dois elementos de $\mathcal{C}$ é um elemento de $\mathcal{C}$ (união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável). □

2.5.3 Coming next...

Iremos definir pontos de acumulação de um conjunto e comentar um pouco sobre convergência de sequências. Mostrando que esta noção é insuficiente para espaços topológicos arbitrários. Iremos definir continuidade local e continuidade, usando as noções topológicas vista até agora para verificar a continuidade de uma função. Iremos definir homeomorfismos. Basicamente, espaços homeomorfos são iguais do ponto de vista da topologia de seus espaços. Finalmente iremos comentar sobre propriedades topológicas que são a propriedades a serem estudadas em topologia.

Capítulo 3

Sequências. Densos. Axiomas de enumerabilidade.

3.1 Ponto de Acumulação de Conjuntos e Sequências.

Para $\mathbb{R}^n$ e para espaços métricos em geral, as sequências aparecem frequentemente. Vamos dar aqui a definição que usa vizinhanças que equivale à definição usando ϵ's devido ao sistema fundamental usando bolas abertas.

3.1.1 Ponto de acumulação de conjunto. Ponto de acumulação de sequência.

Definição 3.1. Um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de um subconjunto $A \neq \emptyset$ de um espaço topológico X se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ (ou seja, toda vizinhança de x contém um ponto de A distinto de x.)

Proposição 3.2. Se x é um ponto de acumulação de B e $B \subseteq A$ então x é ponto de acumulação de A.

Uma sequência em X é uma função do conjunto dos naturais em X, mas comumente escrevemos $(x_n : n \in \mathbb{N})$. A imagem da sequência será denotada por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fazendo uma analogia com pisadas, a imagem seriam as pegadas e a sequência seria marcar cada passo dado com um número... tipo quando o Snoopy ensina o Charlie Brown dançar.

Definição 3.3. Dizemos que x é um ponto de acumulação da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se para toda vizinhança U de x e todo $N \in \mathbb{N}$, existe $m \geq N$ tal que $x_m \in U$.

Neste caso, dizemos que a sequência se acumula em x.

Note que se x é um ponto de X e $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é a sequência constante x, então x é um ponto de acumulação da sequência, mas x não é ponto de acumulação da imagem $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

Fazendo analogia da pisada na neve, um ponto x é de acumulação da sequência se toda vez que você fixa uma vizinhança U de x e está nevando constantemente, de tempos em tempos vai ter uma pegada nova em cima de U.

Lema 3.4. Seja x um ponto de X, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência em X e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x. Temos que x é ponto de acumulação da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se e somente se para todo $U \in \mathcal{V}_x$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ é infinito (note que ser subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ equivale a ser um conjunto ilimitado em $\mathbb{N}$).

Definição 3.5. Dizemos que x é um limite da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se para toda vizinhança U de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ para todo $m \geq N$.

Neste caso dizemos que a sequência converge para x.

Continuando com a analogia da pisada enquanto está nevando, uma sequência converge se para cada vizinhança U de x, a partir de algum momento, todas as pegadas visíveis vão estar dentro de U. Ou seja, a partir de algum momento, a sequência só anda em cima de U.

Como abaixo de qualquer natural existe apenas um número finito de naturais, a definição anterior é equivalente a

Lema 3.6. Seja x um ponto de X, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência em X e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x. Temos que x é um limite da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se e somente se para todo $U \in \mathcal{V}_x$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ é cofinito (ou seja seu complementar em relação a $\mathbb{N}$ é finito).

3.1.2 'Seguindo os passos da sequência': subsequências.

Podemos imaginar que na sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$, cada x_n é onde o n-ésimo pisão em X foi dado. Às vezes, a sequência está indo para alguma direção em particular (quando têm limite) ou não. Pensando que uma sequência é pular de um ponto a outro de X, a subsequência seria seguir a ordem dos pulos da sequência, mas dando pulos maiores no meio do caminho e não pisar em todos os lugares por onde a sequência pisou.

Voltando ao exemplo das pegadas numeradas. Se removermos alguns passos no meio do caminho teriamos um subconjunto de números e poderíamos continuar pisando seguindo a ordem ou reenumerar os passos que sobraram.

Denotaremos uma subsequência de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ como a restrição da função conjunto A e a denotaremos por $(x_n : n \in A)$ (que seria usarmos as pegadas numerados que sobraram). Podemos eventualmente usar a enumeração crescente de $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ e escrever a subsequência como $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ (que seria reetiquetar as pegadas numeradas).

Definição 3.7. Dada uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ dizemos que $(y_k : k \in \mathbb{N})$ é uma subsequência se existe uma função estritamente crescente $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x_{\phi(k)} = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Podemos escrever a subsequência como $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$, onde $n_k = \phi(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ ou $(x_n : n \in A)$ onde $A = \phi[\mathbb{N}]$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Para passar de A para n_k, basta considerar $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ com $n_k = \phi(k)$ crescente. Para passar de n_k ou ϕ para A basta tomar $Im\ \phi = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = n_k\}$.

Proposição 3.8. Se $(x_n : n \in A)$ acumula em x então $(x_n : n \in \mathbb{N})$ acumula em x.

Se x é limite de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ então x é limite de $(x_n : n \in A)$.

Teorema 3.9. Seja $x \in X$ e seja A um subconjunto de X. Então

A) Se $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que converge para x então $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência que acumula em x.

B) Se $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que acumula em x então x é um ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nem sempre ser ponto de acumulação de uma sequência implica que o ponto será limite de alguma subsequência.

A propriedade abaixo vale em particular para $\mathbb{R}^n$ e espaços métricos em geral.

3.1.3 Convergência de sequências em pontos com base local enumerável.

Teorema 3.10. Seja $x \in X$ um ponto para o qual existe um sistema fundamental de vizinhanças $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ (alguns autores dizem em inglês que X é 'first countable' em x). Seja A um subconjunto de X. Então são equivalentes:

a) x é ponto de acumulação de A.

b) existe $B \subseteq A$ enumerável tal que x é ponto de acumulação de B.

c) existe uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que se acumula em x.

d) existe uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que converge para x.

Demonstração. Para qualquer espaço topológico, temos que d) implica c), c) implica b) e b) implica a). Assim, restaria mostrar que a) implica d). Por motivos didáticos vamos mostrar que a) implica b), a) implica c) e a) implica d).

$a) \to b)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $V_n \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Fixe $x_n \in V_n \cap (A \setminus \{x\})$. Então $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se acumula em x (note que $x \notin B$). De fato, U é uma vizinhança de x então existe k tal que $V_k \subseteq U$. Assim, $x_k \in V_k \cap (B \setminus \{x\}) \subseteq U \cap (B \setminus \{x\})$. Assim, $U \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Agora, para mostrar que a) implica c) ou d) a sequência pode falhar (fica a cargo do leitor pensar num exemplo).

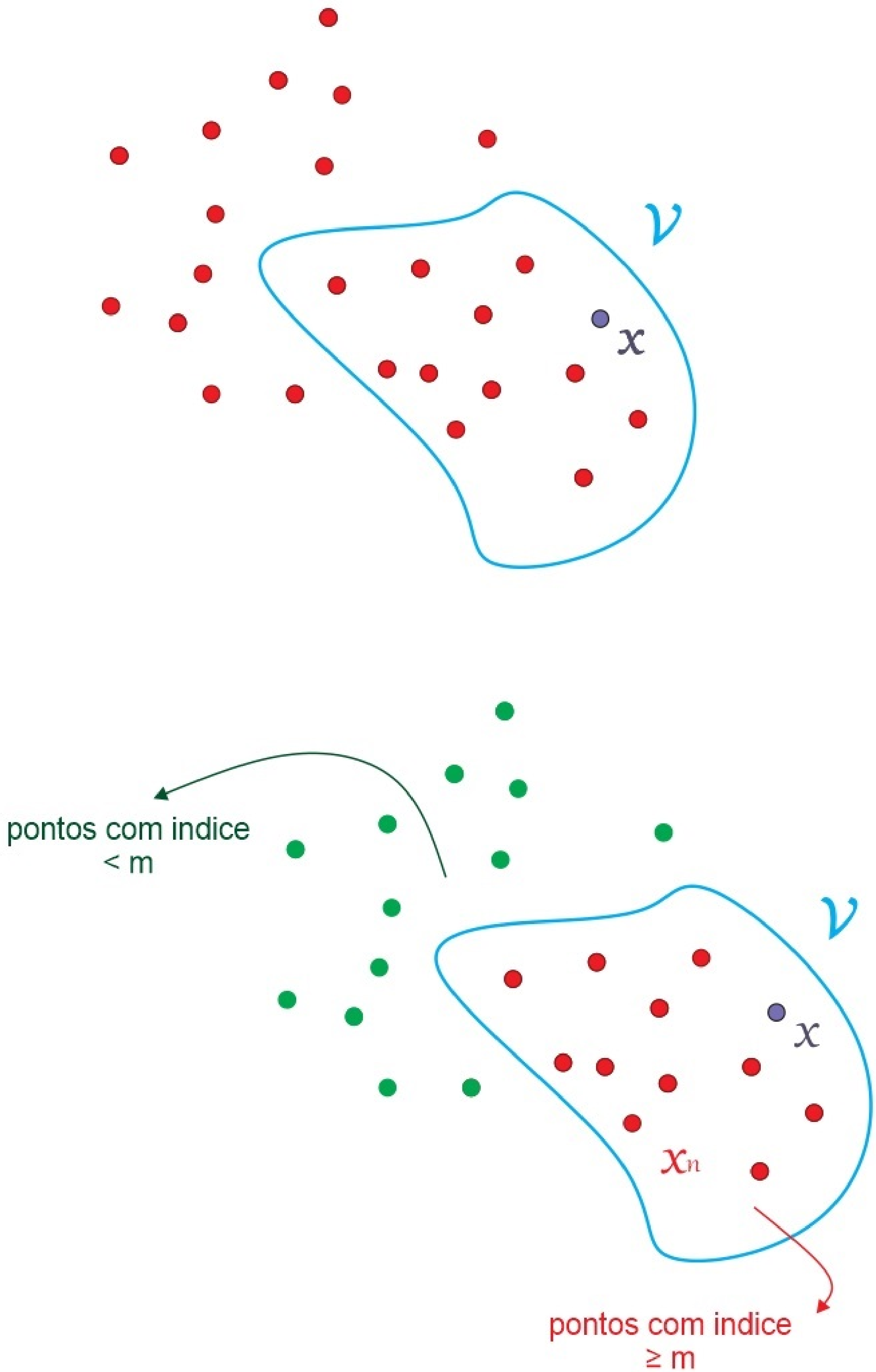

Figura 3.1: Pontos de acumulação e limites de sequências.

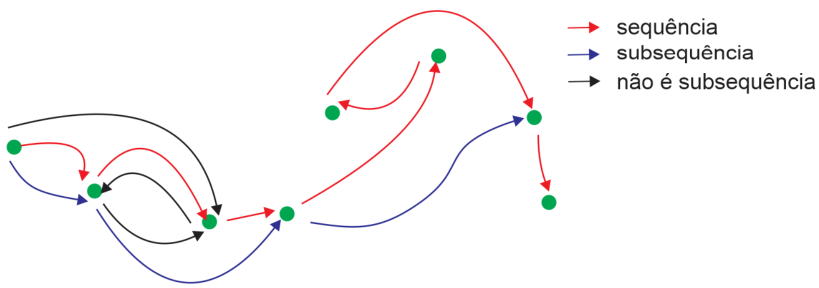

Figura 3.2: Sequências convergentes em pontos com base local enumerável.

Primeiramente, a interesecção finita de vizinhanças é uma vizinhança. Assim, vamos tomar $W_n = \bigcap\{V_m : m \leq n\}$. Temos que $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência $\subseteq$-decrescente de vizinhanças de x. Além disso, $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças, pelo fato de $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ ser um sistema fundamental de vizinhanças.

a) $\rightarrow$ *c*). Tome uma sequência $(x_k : k \in \mathbb{N})$ tal que $x_k \in W_k \cap A$. Fixado U vizinhança de x, existe m tal que $W_m \subseteq U$. Seja N um natural arbitrário e tome $k \geq \max\{N, m\}$. Então $x_k \in W_k \subseteq W_m \subseteq U$. Logo a sequência acumula em x.

a) $\rightarrow$ *d*). Usando a mesma sequência, no argumento acima, temos que $x_k \in U$ para todo $n \geq m$. Logo $\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin U\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$ ($\{n \in \mathbb{N} : n < m\} = m$, *se usarmos a notação de ordinais*) e portanto a sequência converge. $\square$

Exercício 3.11. Mostre que se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade em $x \in X$ então toda sequência que acumula em x possui uma subsequência que converge para x. (*Para espaços arbitrários isto não é verdade*).

3.1.4 Quando sequências não conseguem descrever a topologia.

Abaixo temos um exemplo em que sequências não são sempre suficientes para recuperar a topologia.

Exemplo 3.12. Seja X o conjunto do reais com a topologia co-enumerável. Seja A o conjunto dos reais positivos. Todo fechados distinto de X é enumerável. Assim, o menor fechado que contém A é o X. Tome $(x_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência de A. Como $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável, é um conjunto fechado. Segue que $X \setminus B$ é vizinhança de qualquer real não positivo y. Usando este aberto, concluímos que a sequência não acumula em y. Portanto nenhuma sequência em A converge para y.

Com isto, para trabalhar com convergência que descreva a topologia, é necessário definir um conceito mais geral do que sequências. Isto será feito de duas maneiras que são 'duais': filtros e redes.

3.2 'I see points of D everywhere. All the time' - densos.

3.2.1 Definição de denso.

Definição 3.13. Dizemos que um ponto é isolado se $\{x\}$ é um conjunto aberto.
Dizemos que $D \subseteq X$ é um conjunto denso se $\overline{D} = X$.

Um conjunto denso se 'aproxima de qualquer ponto de X'. Fica a cargo do leitor notar que os pontos isolados são elementos de qualquer conjunto denso.

Exemplo 3.14. Tanto $\mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$ na topologia usual.

Vimos anteriormente como fazemos para saber se um ponto pertence ao fecho. Agora veremos algo similar para saber quando D é denso.

Lema 3.15. Seja $\mathcal{B}$ uma base de um espaço topológico X com $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Um conjunto $D \subseteq X$ é denso se e somente se $D \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{B}$.

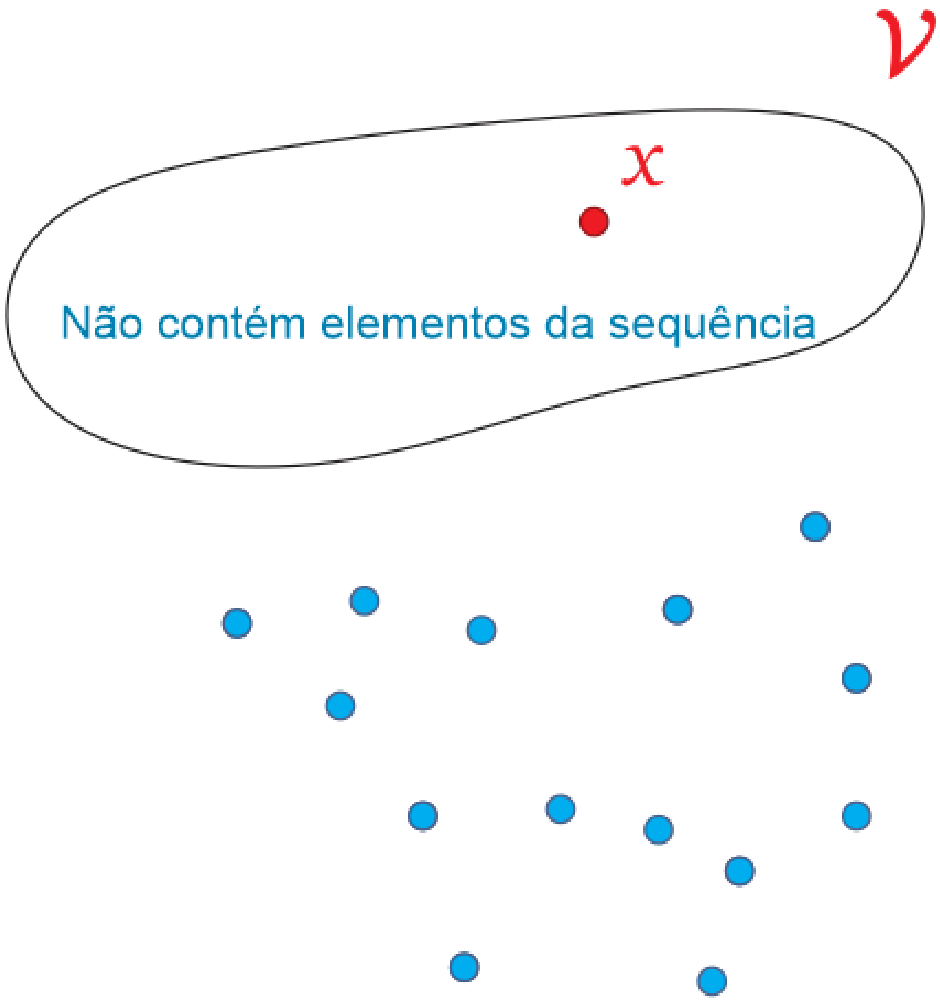

Figura 3.3: Sequências são insuficientes para descrever esta topologia.

Demonstração. ($\rightarrow$) Se D é denso, então tome $U \in \mathcal{B}$. Fixe $x \in U$. Como $x \in X = \overline{D}$ e Ué vizinhança de x, segue que $U \cap D \neq \emptyset$.

($\leftarrow$) Seja $x \in X$ e V uma vizinhança de x. Como $\mathcal{B}$ é uma base, segue que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$. Por hipótese, $U \cap D \neq \emptyset$. Logo, $V \cap D \neq \emptyset$ para toda vizinhança V de x. Com isto, temos que $x \in \overline{D}$. Como x era um ponto arbitrário de x, temos que $X = \overline{D}$ e D é denso em X. □

Para recuperarmos o fecho de um aberto, basta tomarmos o fecho de algum subconjunto de um denso:

Proposição 3.16. Se D é denso em X e U é aberto em X então $\overline{D \cap U} = \overline{U}$.

Demonstração. Como $U \cap D \subseteq U$, segue que $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$. Seja $x \in \overline{U}$. Então temos que para todo V vizinhança aberta de x vale $U \cap V \neq \emptyset$. Como $U \cap V$ é aberto e D é denso, temos que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$. Assim, $(U \cap D) \cap V \neq \emptyset$ para toda a vizinhança aberta V de x. Logo, $x \in \overline{U \cap D}$. □

3.2.2 Os três axiomas de enumerabilidade.

Definição 3.17. Dizemos que X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se todo ponto de $x \in X$ possui um sistema fundamental de vizinhaças $\mathcal{V}_x$ em x onde $\mathcal{V}_x$ é enumerável.

Dizemos que X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se existe uma base de abertos $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é enumerável.

Dizemos que X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade se existe um conjunto denso D de X tal que D é enumerável. Nesse caso, também dizemos que X é separável

Teorema 3.18. Se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X satisfaz o primeiro e o terceiro axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base. Então $\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ é um sistema de vizinhanças de X. Para cada $U \in \mathcal{B}$ (podemos assumir que $\emptyset \notin \mathcal{B}$) fixe $x_U \in U$. Então $D = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ é denso em X.

Se $\mathcal{B}$ é enumerável então $\mathcal{V}_x$ e D descritos acima também são enumeráveis. $\square$

Exemplo 3.19. 1) Seja X um espaço discreto não enumerável. Então X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, mas X não satisfaz nem o segundo nem o terceiro axioma de enumerabilidade.

2) Seja X não enumerável com a topologia co-finita. Então X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, mas não satisfaz o primeiro e o segundo axioma de enumerabilidade.

3)A reta de Sorgefrey satisfaz o primeiro e o terceiro axioma da enumerabilidade, mas não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Demonstração. 1) O conjunto $\{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças. O único conjunto denso de X é o próprio X, assim X não satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. Como X não satisfaz o terceiro axioma, também não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

2) Todo conjunto infinito de X intersecta qualquer aberto não vazio. Assim um conjunto infinito enumerável de X é denso. Portanto X satisfaz o terceiro axioma da enumerabilidade.

Fixe $x \in X$. uma família enumerável $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vizinhanças abertas de x, temos que existe F_n finito tal que $V_n = X \setminus F_n$. O conjunto $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é enumerável. Assim, existe $y \neq x$ tal que $y \in X \setminus F$. Assim, $X \setminus \{y\}$ é uma vizinhança de x. Como $y \in V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que $V_n \not\subseteq X \setminus \{y\}$. Assim $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é um sistema de vizinhanças de x. Assim, X não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e consequentemente, também não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

3) Claramente $\{[x, x + \frac{1}{2^n}[: n \in \mathbb{N}\}$ é uma base local para x na reta de Sorgenfrey, assim o espaço satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Claramente $\mathbb{Q}$ é denso na reta de Sorgenfrey, assim também satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Suponha que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos da reta de Sorgenfrey. Então para cada $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subseteq [x, x+1[$. Temos que se $x < y$ então $x \notin [y, y+1[$ e portanto $x \notin V_y$. Como $x \in V_x$, segue que $V_x \neq V_y$. Assim existe uma função injetora de X em $\mathcal{B}$. Como X é não enumerável, segue que $\mathcal{B}$ é não enumerável. Logo X não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. $\square$

3.2.3 Toda base de abertos contém uma base de abertos de tamanho mínimo.

Vamos agora ver que se o espaço não possui uma base finita, então toda base de abertos possui uma base contida nela com tamanho infinito mínimo.

Teorema 3.20. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}$ duas bases de abertos. Então existe um subconjunto de $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$ indexado por um subconjunto de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ que forma uma base. Em particular, se $\mathcal{B}$ é enumerável então existe uma base enumerável contida em $\mathcal{V}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{D} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : (\exists W \in \mathcal{V}) U \subseteq W \subseteq V\}$. Para cada $(U, V) \in \mathcal{D}$, fixe $W_{(U,V)} \in \mathcal{V}$ (aqui é feito uso do Axioma da Escolha). Vamos provar que $\{W_{(U,V)} : (U, V) \in \mathcal{D}\}$ é uma base. De fato, tome O um aberto não vazio e seja $x \in O$. Então existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq O$. Como $\mathcal{V}$ também é base, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $x \in W \subseteq V$. Usando novamente que $\mathcal{B}$ é base temos $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq W$.

Assim, $(U, V) \in \mathcal{D}$ e $x \in U \subseteq W_{(U,V)} \subseteq V \subseteq O$. Em particular, $x \in W_{(U,V)} \subseteq O$. $\square$

Exercício 3.21. Note se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são sistemas fundamentais de vizinhanças de x então existe uma subfamília de $\mathcal{V}_2$ indexada por $\mathcal{V}_1$ que é um sistema fundamental de vizinhanças de x. Em particular, se X tem uma base local enumerável em x então todo sistema de vizinhanças de x contém uma subfamília que é um sistema enumerável de vizinhanças.

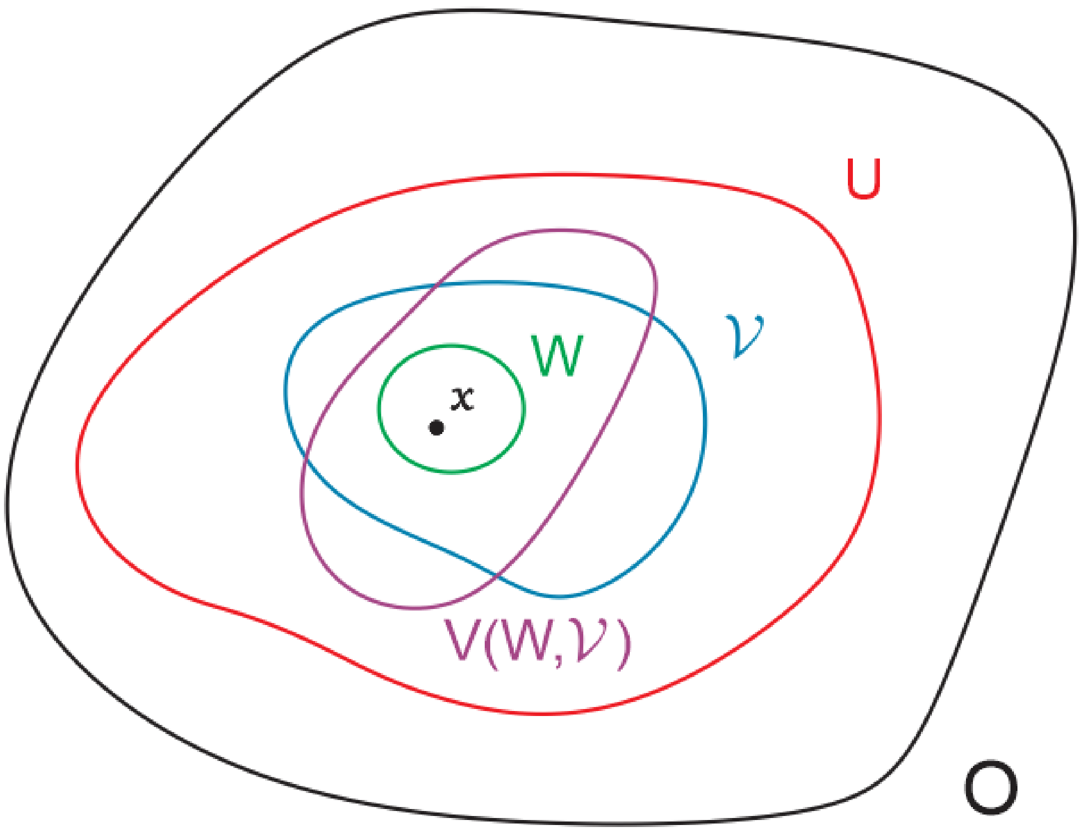

Figura 3.4: Usando pares de elementos de uma base para enumerar bases.

Capítulo 4

Continuidade. Propriedades Topológicas. Homeomorfismos. Topologias mais finas e menos finas.

4.1 Continuidade em um ponto. Continuidade.

4.1.1 Continuidade local. De volta a ϵ e δ. Equivalências à continuidade local.

Funções contínuas relacionam diferentes espaços topológicos. Podemos pensar a continuidade de f como uma propriedade global ou como uma propriedade para cada ponto. No $\mathbb{R}^n$ isto é feito usando ϵ and δ, mas como comentado anteriormente isso se refere ao sistema fundamental de vizinhanças usando bolas abertas centradas nos pontos x e $f(x)$.

Definição 4.1. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é contínua em x se para todo W aberto que contém $f(x)$ então existe V aberto contendo x tal que $f[V] \subseteq W$ (aqui $f[V]$ é a imagem de V pela função f).

A definição usando ϵ e δ é a equivalência c).

Lema 4.2. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Seja $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x e $\mathcal{W}$ um sistema fundamental de vizinhanças de $f(x)$. São equivalentes:
a) f é contínua em x.
b) se W é uma vizinhança de $f(x)$ então $f^{-1}[W]$ é uma vizinhança de x.
c) se $W \in \mathcal{W}$ então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $f[V] \subseteq W$.
d) se $W \in \mathcal{W}$ então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq f^{-1}[W]$.
e) se $x \in \overline{A}$ então $f(x) \in \overline{f[A]}$.

Demonstração. $(a) \to b)$). Tome W uma vizinhança de $f(x)$, então existe um aberto V tal que $f(x) \in V \subseteq W$. Por hipótese f é contínua em x, assim existe U aberto contendo x tal que $f[U] \subseteq V$. Logo, $x \in U \subseteq f^{-1}[f(U)] \subseteq f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[W]$. Assim, $f^{-1}[W]$ é uma vizinhança de x.

$(b) \to c)$). Tome $W \in \mathcal{W}$ então por hipótese temos que $f^{-1}[W]$ é uma vizinhança x. Então existe U aberto em x tal que $x \in U \subseteq f^{-1}[W]$. Como $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subseteq U \subseteq f^{-1}[W]$. Assim $f[V] \subseteq f[f^{-1}[W]] \subseteq W$.

$(c) \leftrightarrow d)$). Temos que $f[V] \subseteq W$ se e somente se $V \subseteq f^{-1}[W]$.

$(c) \to a)$). Tome W um aberto que contém $f(x)$. Então existe $O \in \mathcal{W}$ tal que $O \subseteq W$. Por hipótese, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $f[U] \subseteq O$. Tome V um aberto contendo x tal que $V \subseteq U$. Então $f[V] \subseteq f[U] \subseteq O \subseteq W$. Logo $x \in V$ e $f[V] \subseteq W$.

$(\underline{(a)} \to e)$). Vamos assumir a) e seja A tal que $x \in \overline{A}$. Suponhamos que $f(x) \notin \overline{f[A]}$. Então $Y \setminus \overline{f[A]}$ é um aberto contendo $f(x)$. Pela continuidade, temos que existe V um aberto V de x tal que $f[V] \subseteq Y \setminus \overline{f[A]}$. Logo, $V \subseteq f^{-1}[Y \setminus \overline{f[A]}] = X \setminus f^{-1}[\overline{f[A]}]] \subseteq X \setminus f^{-1}[f[A]]] \subseteq X \setminus A$. Logo, $V \cap A = \emptyset$ e $x \notin \overline{A}$, uma contradição. Assim, $f(x) \in \overline{f[A]}$.

$(e) \to a)$). Suponhamos que f não é contínua em x. Então existe W aberto de Y contendo $f(x)$ tal que para cada V aberto de X contendo x temos que $f[V] \not\subseteq W$.

Para cada V como acima, fixe um ponto x_V tal que $f(x_V) \notin W$.

Seja $A = \{t \in X : \exists V$ aberto contendo x tal que $t = x_V\}$. Claramente, $A \cap V \neq \emptyset$ para cada V aberto contendo x. Assim, $x \in \overline{A}$. Por outro lado, $f[A] \cap W = \emptyset$ (logo $f[A] \subseteq Y \setminus W$). Portanto temos que $\overline{f[A]} \cap W = \emptyset$, pois W é aberto em Y . Como $f(x) \in W$, segue que $f(x) \notin \overline{f[A]}$. $\square$

Veremos depois que existem outras equivalências de continuidade em um ponto. Agora iremos passar a falar sobre continuidade global. Aqui aparece um bom motivo para termos introduzido sub-bases.

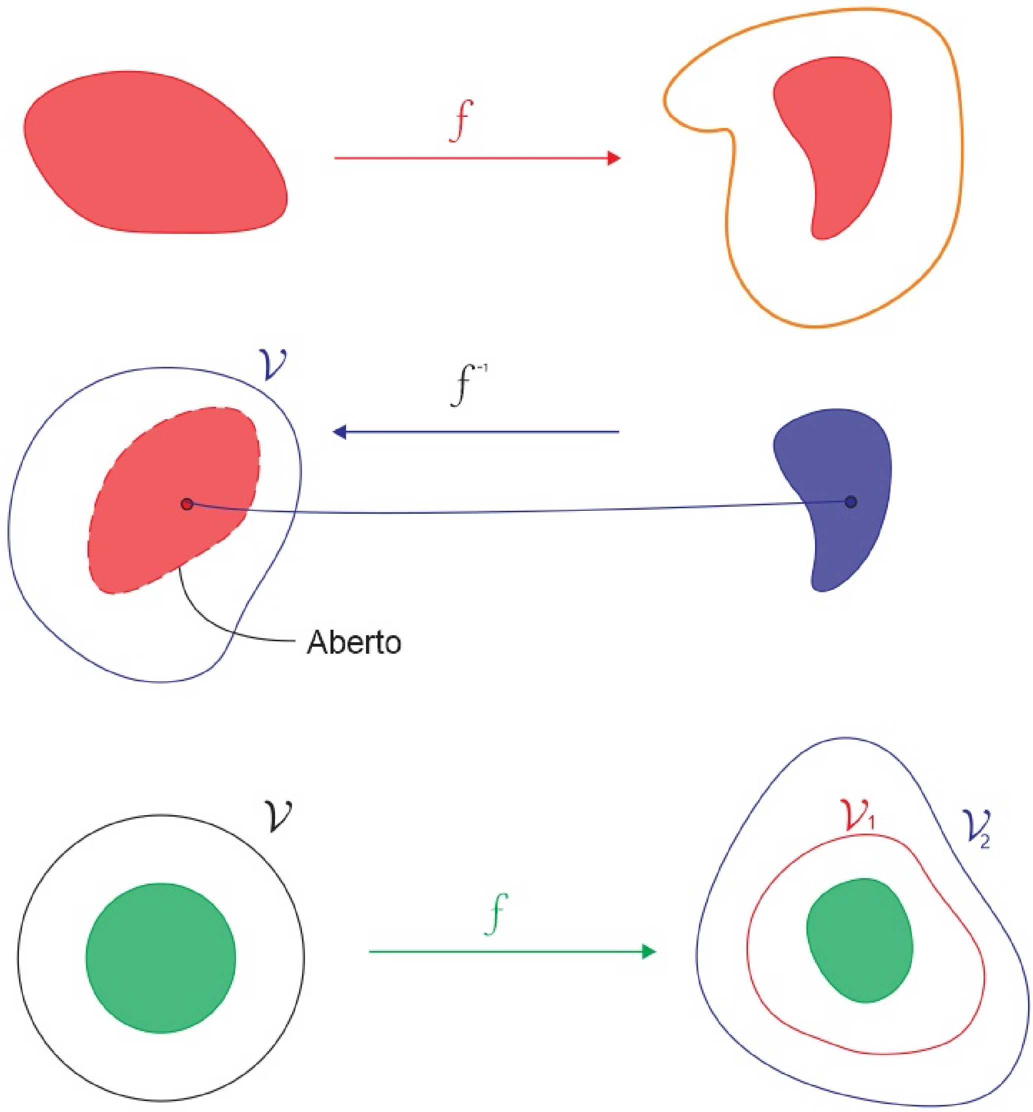

Figura 4.1: Equivalência de continuidade local.

4.1.2 Continuidade. Equivalências à continuidade.

Definição 4.3. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua se f é contínua em x para todo $x \in X$.

Lema 4.4. São equivalentes:

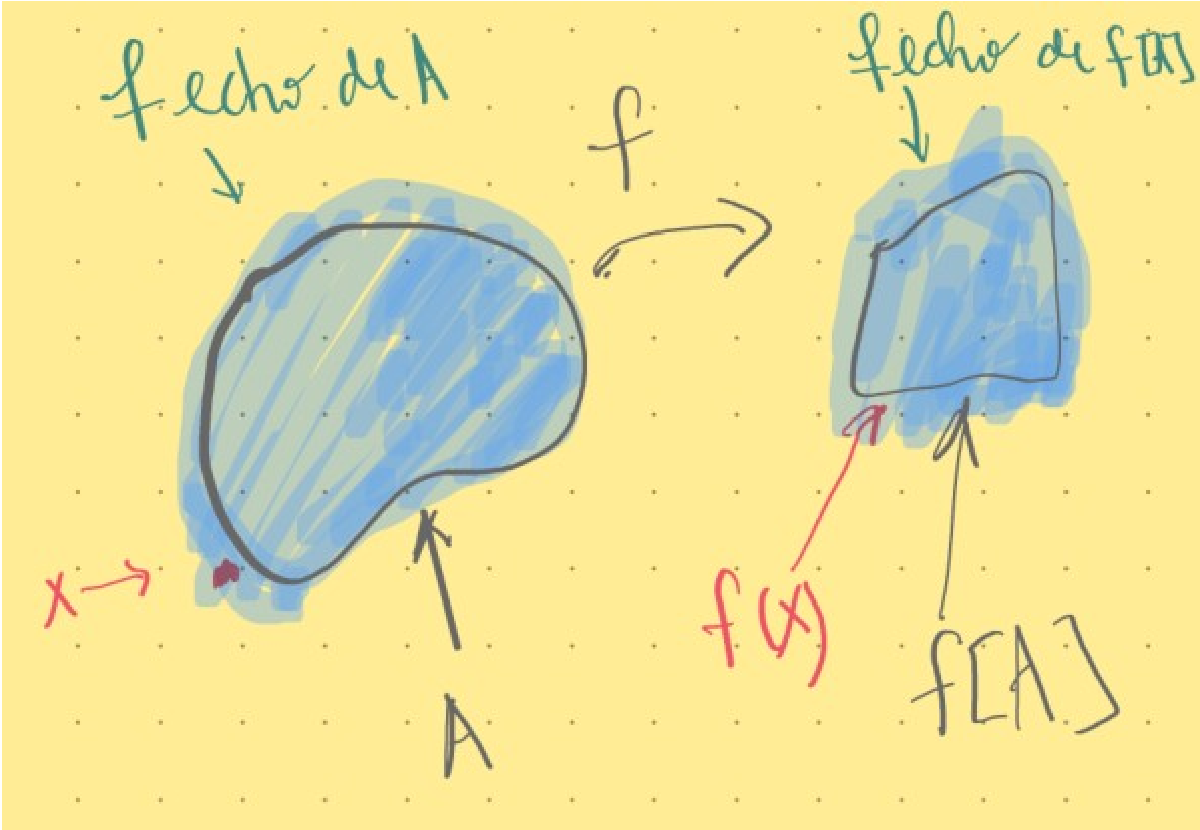

Figura 4.2: Equivalência de continuidade local.

a) f é contínua.
b) $f^{-1}[W]$ é aberto, para todo W aberto de Y.
c) se $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de Y então $f^{-1}[W]$ é aberto, para todo $W \in \mathcal{B}$.
d) $f^{-1}[F]$ é um fechado de X, para todo F fechado em Y.
e) $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$, para todo subconjunto A de X.
f) $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$, para todo subconjunto A de X.
g) se $\mathcal{S}$ é uma sub-base de abertos de Y então $f^{-1}[W]$ é aberto, para todo $W \in \mathcal{S}$.

Demonstração. $(a) \to b))$.

Seja W um aberto de Y. Como a imagem inversa do vazio é o vazio que é um aberto, podemos supor que W é não-vazio. Então W é vizinhança de $f(x)$ para todo x tal que $f(x) \in W$. Assim, $f^{-1}[W]$ é vizinhança de x para todo $x \in f^{-1}[W]$. Portanto $f^{-1}[W]$ é um aberto.

$(b) \to c))$. Segue do fato que todo elemento de $\mathcal{B}$ é um aberto.

$(c) \to b))$. Dado um aberto W de Y existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $W = \bigcup \mathcal{B}'$. Aplicando a imagem inversa, temos que $f^{-1}[W] = \bigcup\{f^{-1}[O] : O \in \mathcal{B}'\}$ que é um aberto, pois por hipótese $f^{-1}[O]$ é aberto (*note que* $O \in \mathcal{B}$).

$(b) \leftrightarrow d))$. Segue de $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A]$ e que um conjunto é aberto se e somente se é complementar de um fechado.

$(a) \leftrightarrow e))$. Temos que para cada A, para cada $x \in X$ $x \in \overline{A}$ implica $f(x) \in \overline{f[A]}$ se e somente se $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Se vale $e)$, fixado x e variando A tal que $x \in \overline{A}$, pela equivalência de continuidade de f em x, temos que f é contínua em x. Variando x, vemos que f é contínua em X.

Fixado A e tomando x tal que $x \in \overline{A}$, como f é contínua em x, segue das equivalências de continuidade em x que $f(x) \in \overline{f[A]}$. Assim, vale $e)$ para A. Como A é arbitrário, vale $e)$.

$(e) \leftrightarrow f))$ segue da relação $f[B] \subseteq C$ se e somente se $B \subseteq f^{-1}[C]$.

$(b) \leftrightarrow g))$ a direção não trivial segue de $f^{-1}[\bigcap \mathcal{C}] = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} f^{-1}[C]$, para qualquer família de subconjuntos $\mathcal{C}$ de Y.

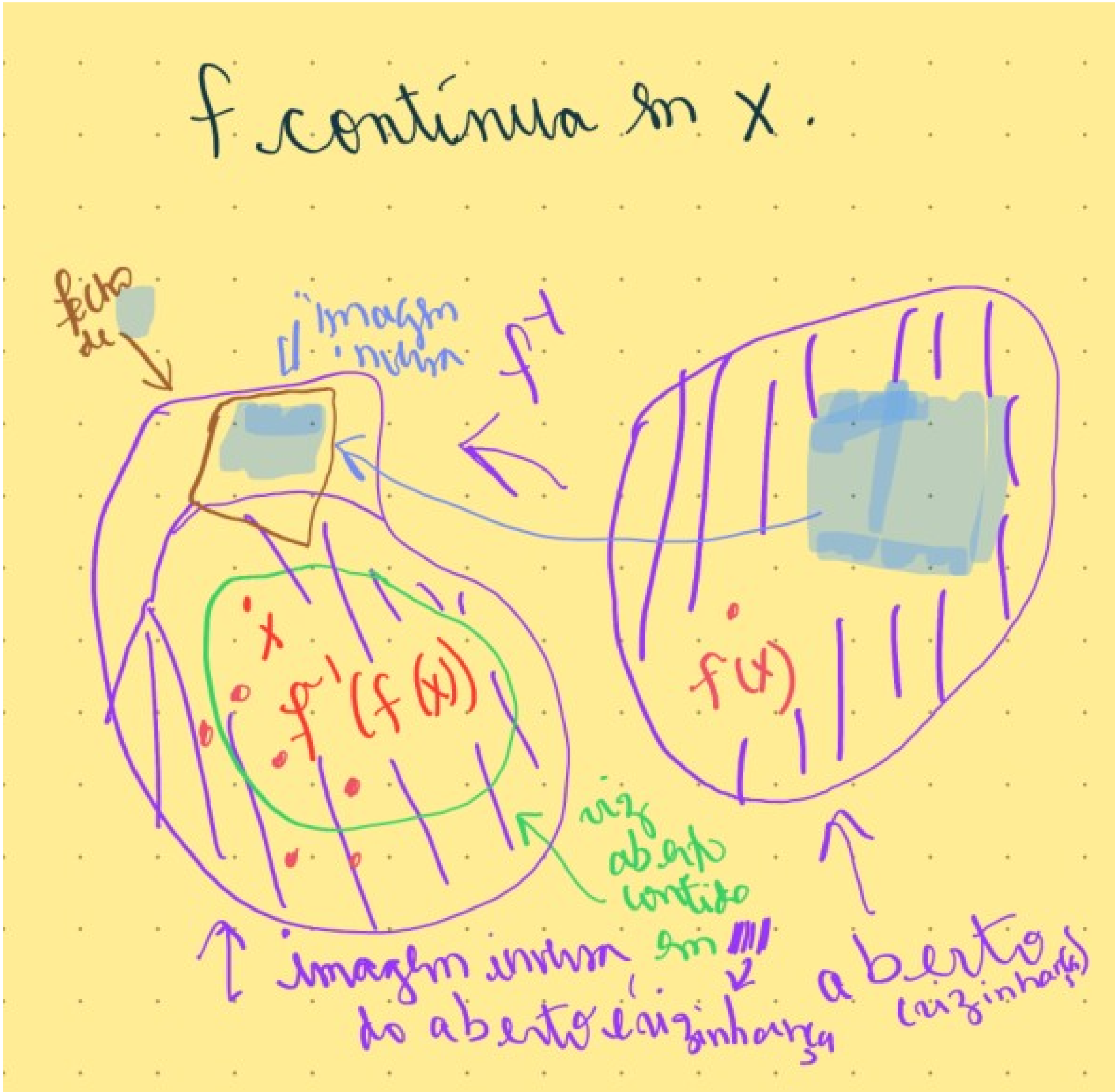

Figura 4.3: Suponha que f é contínua em x e assuma que $f(x) \notin \overline{f[[A]}$.

$(d) \to f)$) Temos que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ e $f[A] \subseteq \overline{f[A]}$, logo $A \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$. Por hipótese, $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ é fechado. Portanto, $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$. □

4.2 ‘É a mesma coisa do ponto de vista topológico’.

4.2.1 Homeomorfismos.

Como em outras estruturas matemáticas, estamos interessados nas propriedades do objeto e não no conjunto utilizado em si.

Definição 4.5. Dizemos que $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se e somente se f é uma bijeção e f e f^{-1} são funções contínuas. Nesse caso, dizemos que X e Y são homeomorfos.

Note que para espaços vetorias uma bijeção linear já implica que a função inversa é linear, mas no caso de continuidade, isto não é verdade.

Exemplo 4.6. Seja X o conjunto dos reais com a topologia discreta. Seja id a função identidade. Então $id : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, mas $id : \mathbb{R} \to X$ não é contínua.

Demonstração. Para ver que a primeira identidade é contínua basta notar que na topologia em X todo subconjunto é aberto. Para ver que a segunda identidade não é contínua em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}$, basta notar que $\{x\}$ é aberto em X, mas $\{x\}$ não é aberta em $\mathbb{R}$. □

Exemplo 4.7. O $\mathbb{R}$ e o intervalo $]-1,1[$, ambos com a topologia usual da ordem são homeomorfas usando $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Seja $g(x) = \frac{x}{1+x}$, $x > -1$. Para $x \geq 0$ temos que $f(x) = g(x)$ e $g'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$. Assim $g'(x) = f'(x)$ para $x > 0$ e o cálculo à direita da derivada de f no ponto zero concide com o cálculo da derivada de g no ponto 0.

Seja $h(x) = \frac{x}{1-x}$ para $x < 1$. Para $x \leq 0$ temos que $f(x) = h(x)$ e $h'(x) = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Assim $h'(x) = f'(x)$ para $x < 0$ e o cálculo à direita da derivada de f no ponto zero concide com o cálculo da derivada de h no ponto 0.

Assim $f'(x) = h'(x)$ para $x \leq 0$ e $f'(x) = g'(x)$ para $x \geq 0$. Portanto f é uma função contínua e crescente em $\mathbb{R}$, portanto a função é injetora. Como $lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Assim, f é uma função bijetora. Pelo teorema da função inversa, a função inversa é contínua em cada ponto, logo f^{-1} é contínua.

4.2.2 Propriedade topológica.

Definição 4.8. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma propriedade topológica se dados X e Y homeomorfos então X possui a propriedade $\mathcal{P}$ se e somente se Y possui $\mathcal{P}$.

Assim, do ponto de vista das propriedades topológicas, dois espaços homeomorfos são a mesma coisa.

Exemplo 4.9. Cada um dos três axiomas de enumerabilidade são propriedades topológicas. Ser discreto é uma propriedade topológica. Não ter pontos isolados é uma propriedade topológica.

Ser metrizável (possuir uma métrica tal que a topologia seja gerada pela métrica) é uma propriedade topológica. Basta pegar o homeomorfismo e definir a métrica usando o homeomorfismo $f : X \to Z$, com $d_Z(f(x), f(y)) := d_X(x, y)$.

Ser um espaço ordenado também é uma propriedade topológica, também passando a ordem linear usando o homeormorfismo.

4.3 'Minha topologia tem mais abertos do que a sua'.

4.3.1 Topologias mais fina. Topologia menos fina.

Dadas duas topologias sobre o mesmo conjunto, podemos comparar as topologias por inclusão.

Definição 4.10. Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias sobre um conjunto X não vazio.

Dizemos que τ_1 é mais fina ('finer' em inglês) do que τ_2 se $\tau_1 \supseteq \tau_2$. Neste caso, também dizemos que τ_2 é uma topologia menos fina (ou mais grossa - 'coarser' em inglês) do que τ_2.

A topologia discreta no conjunto dos reais é mais fina que a topologia Euclidiana, ou a topologia Euclidiana é menos fina que a topologia discreta.

Podemos considerar também ao invés de duas topologias, uma família T de topologias em X.

Definição 4.11. Seja T uma família não vazia de topologias em X.

Dizemos que uma topologia τ sobre X é mais fina que as topologias em T se τ é mais fina que τ' para toda $\tau' \in T$.

Dizemos uma topologia τ sobre X é menos fina que as topologias em T se τ é menos fina que τ' para toda $\tau' \in T$.

Exemplo 4.12. A topologia discreta em X é a topologia mais fina entre as topologias em X.

A topologia caótica é a topologia menos fina dentre as topologias em X.

Podemos tentar encontrar topologia que ficam 'mais próximas' das topologias de uma família:

Definição 4.13. Seja T uma família não vazia de topologias em X.

Dizemos que uma topologia τ sobre X é a topologia mais fina gerada por T se τ é mais fina que T e se τ^* é mais fina do que T então τ^* é mais fina que τ. Ou seja, τ é a topologia menos fina dentre as topologias mais finas do que T.

Dizemos que uma topologia τ sobre X é a topologia menos fina gerada por T se τ é menos fina que T e se τ^* é menos fina do que T então τ^* é menos fina que τ. Ou seja, τ é a topologia mais fina dentre as topologias menos finas do que T.

Vamos verificar que a definição acima está bem definida.

Lema 4.14. Seja T uma família não vazia de topologias em X. Então a topologia gerada pela subbase $\bigcup T$ é a topologia mais fina gerada por T e $\bigcap T$ é a topologia menos fina gerada por T. *Note que, em geral, a união de topologias não é uma topologia.*

Demonstração. No primeiro caso, $\mathcal{S} = \bigcup T$ é sub-base para uma topologia, pois, $\bigcup \mathcal{S} = X$. Considere a topologia τ gerada pela subbase $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ contém cada topologia em T, temos que a topologia τ é mais fina que T. Seja τ^* uma topologia mais fina que T. Então temos que $\tau^* \supseteq \bigcup T = \mathcal{S}$. Como τ^* é uma topologia, temos que $\tau^* \supseteq \tau$.

No segundo caso, vamos mostrar que $\bigcap T$ é uma topologia. Como $\emptyset$ e X estão em todas as topologias em T segue que $\emptyset$ e X pertencem a $\bigcap T$. Se $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \bigcap T$ então $\mathcal{U} \subseteq \tau'$ para todo $\tau' \in T$. Assim, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau'$ para cada $\tau' \in T$. Com isto, $\bigcup \mathcal{U} \in \bigcap T$. Finalmente, se $U, V \in \bigcap T$ então $U, V \in \tau'$ para cada $\tau' \in T$. Então temos que $U \cap V \in \tau'$ para cada $\tau' \in T$. Logo, $U \cap V \in \bigcap T$. Com isto, $\bigcap T$ é uma topologia. Como $\bigcap T$ é um subconjunto de cada topologia em T, segue que $\bigcap T$ é menos fina do que T. Se τ^* é uma topologia menos fina do que T então $\tau^* \subseteq \bigcap T$, logo τ^* é menos fina do que $\bigcap T$. □

Assim, se $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua, podemos pensar que a topologia de Y pode ser passada para o conjunto X e teremos uma topologia menos fina do que a topologia em X.

4.3.2 Como comparar topologias usando Bases de Abertos.

Vamos agora usar bases para comparar quando duas topologias são homeomorfas por uma bijeção.

Lema 4.15. Seja $f : X \to Y$ uma bijeção entre dois espaços topológicos. Seja $\mathcal{B}_X$ uma base de abertos de X e $\mathcal{B}_Y$ uma base de abertos de Y. Então f é um homeomorfismo se e somente se

1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_Y$ tal que $f(x) \in V \subseteq f[U]$ e

2) para cada $y \in Y$ e $O \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y \in O$, existe $W \in \mathcal{B}_X$ tal que $f^{-1}(x) \in W \subseteq f^{-1}[O]$.

Demonstração. Note que, como f é bijetora, a condição 1) equivale a f^{-1} contínua e a condição 2) equivale a f contínua. □

Quando f é a identidade, teremos:

Corolário 4.16. Seja $\mathcal{B}_1$ uma base de abertos para uma topologia τ_1 em X e $\mathcal{B}_2$ uma base de abertos para uma topologia τ_2 de X. Então $\tau_1 = \tau_2$ se e somente se

1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in V \subseteq U$ e

2) para cada $y \in X$ e $O \in \mathcal{B}_2$ tal que $y \in O$, existe $W \in \mathcal{B}_1$ tal que $y \in W \subseteq O$.

Fica a cargo do leitor um resultado similar para sistemas fundamentais de vizinhanças

Lema 4.17. Seja $f : X \to Y$ uma bijeção entre dois espaços topológicos. Seja $\mathcal{V}_X$ um sistema fundamental de vizinhanças de X e $\mathcal{V}_Y$ um sistema fundamental de vizinhanças de Y. Então f é um homeomorfismo se e somente se

1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{V}_{X,x}$, existe $V \in \mathcal{V}_{Y,f(x)}$ tal que $V \subseteq f[U]$ e

2) para cada $y \in Y$ e $O \in \mathcal{V}_{Y,y}$ existe $W \in \mathcal{V}_{X,f^{-1}(y)}$ tal que $W \subseteq f^{-1}[O]$.

Quando f é a identidade, teremos:

Corolário 4.18. Seja $\mathcal{V}_1$ um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia τ_1 em X e $\mathcal{V}_2$ um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia τ_2 de X. Então $\tau_1 = \tau_2$ se e somente se

1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{V}_{1,x}$, existe $V \in \mathcal{V}_{2,x}$ tal que $V \subseteq U$ e

2) para cada $y \in X$ e $O \in \mathcal{V}_{2,y}$ existe $W \in \mathcal{V}_{1,y}$ tal que $W \subseteq O$.

Exercício 4.19. Seja X um espaço métrico e para cada $x \in X$ fixe $\mathcal{V}_x$ uma sequência de bolas abertas centradas em x tal que seus raios convergem a 0. Então a topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças é a topologia gerada pela métrica.

Exemplo 4.20. As topologias geradas em $\mathbb{R}^2$ pelas distâncias de $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ dadas por $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$, $\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ e $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ são as mesmas. As bolas da primeira são redondas, a da segunda são quadradas e da terceira são losangos centradas em um ponto x e cada uma dessas bolas contém bolas menores centradas em x dos três tipos (fica a cargo do leitor encontrar tais bolas encaixadas uma nas outras). Assim as topologias geradas pelas três são as mesmas.

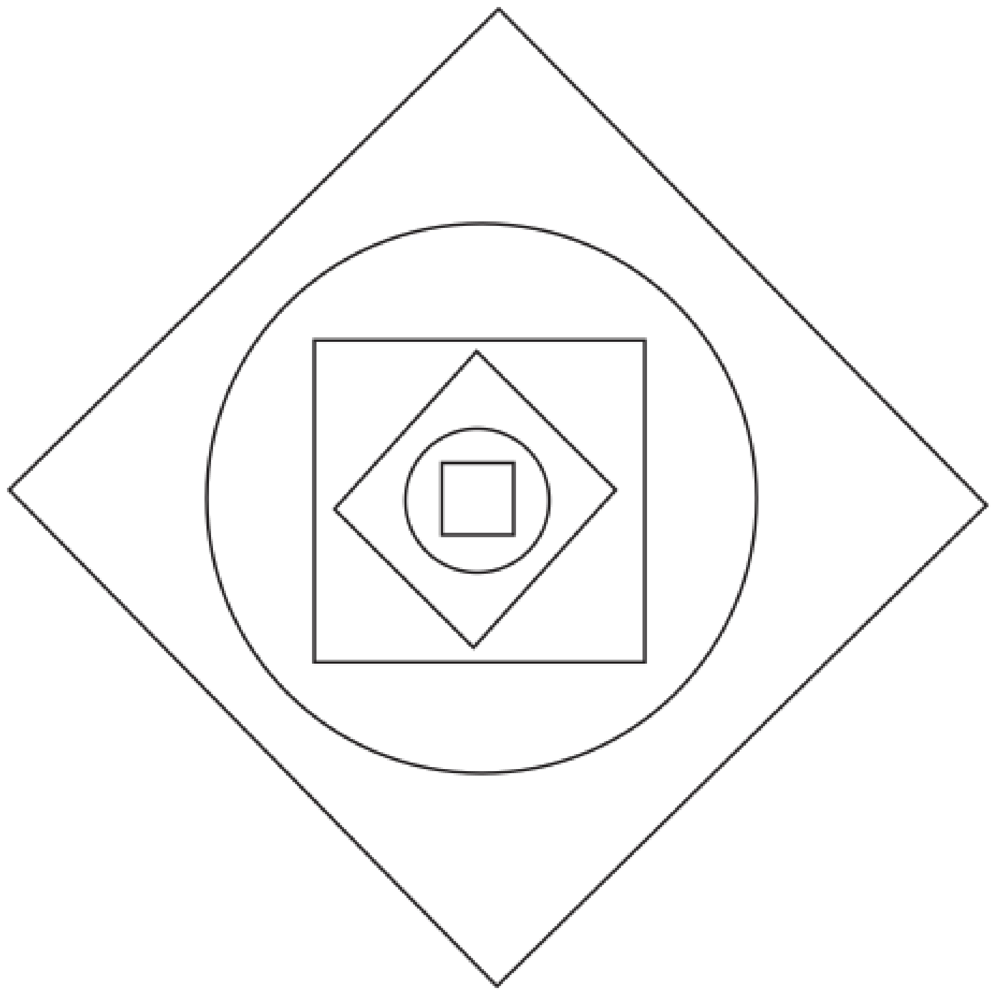

Figura 4.4: As bolas em três métricas que geram a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$..

Capítulo 5

Topologia inicial. Convergência enumerável. Separação de pontos.

5.1 Imitando quem está na sua frente.

5.1.1 Topologia gerada por funções contínuas. Topologia inicial.

Dada $f : X \to Y$ uma função contínua, podemos considerar a topologia menos fina sobre X para a qual f seja contínua. Podemos começar com a topologia discreta em X, pois nela f é sempre contínua e tomar a topologia menos fina que torne f contínua.

Esta topologia pode ser a mesma que a topologia de X ou pode ser menos fina. Note que se f é uma bijeção então f será um homeomorfismo. Assim, a ideia é colocar uma topologia em X que se assemelhe mais à topologia de Y via o uso de f.

Podemos fazer o mesmo para uma família de funções.

Definição 5.1. Seja $\mathcal{F} \neq \emptyset$ uma família de funções $f : X \longrightarrow Y_f$, onde τ_f é a topologia de Y_f. A topologia gerada por $\mathcal{F}$ é a topologia menos fina que torna todas as funções em $\mathcal{F}$ contínuas.

Dada uma família f de funções como acima, dizemos que temos a topologia inicial de $\mathcal{F}$ (ou seja, colocamos topologias no contradomínio para gerar uma topologia no domínio).

Veremos a seguir a topologia acima está bem definida.

Teorema 5.2. A topologia gerada por $\mathcal{F}$ é a topologia gerada pela sub-base $\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\}$. Se $\mathcal{S}_f$ é uma sub-base de τ_f então $\mathcal{S} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}}\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{S}_f\}$ é uma sub-base que gera a topologia gerada por $\mathcal{F}$.

Demonstração. Seja τ a topologia gerada pela sub-base $\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\}$. Fixada $g \in \mathcal{F}$ temos que $g^{-1}[U] \in \tau$ para cada $U \in \tau_g$. Assim, g é contínua. Reciprocamente, seja τ^* um topologia que torna f contínua para cada $f \in \mathcal{F}$. Então para cada $U \in \tau_f$ temos que $f^{-1}[U] \in \tau^*$. Assim, $\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\} \subseteq \tau^*$. Portanto, $\tau \subseteq \tau^*$. Portanto τ é a topologia menos fina que torna todas as funções de $\mathcal{F}$ contínuas. (*Note que isso não significa que apenas as funções em $\mathcal{F}$ são contínuas*).

Vamos mostrar agora que $\mathcal{S}$ é uma sub-base. Seja τ' a topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ está contida na sub-base utilizada para gerar τ, segue que $\tau' \subseteq \tau$. Para cada $g \in \mathcal{F}$, temos que $g^{-1}[U] \in \mathcal{S} \subseteq \tau'$ para cada $U \in \mathcal{S}_g$. Como $\mathcal{S}_g$ é uma sub-base de τ_g, segue que g é contínua em τ'. Logo $\tau \subseteq \tau'$. Assim temos que $\tau = \tau'$. □

A topologia inicial gerada por funções facilita identificar a continuidade de uma função $g : Z \to X$.

Teorema 5.3. Seja $\mathcal{F} \neq \emptyset$ uma família de funções $f : X \longrightarrow Y_f$, onde τ_f é a topologia de Y_f. E seja X munida com a topologia inicial de $\mathcal{F}$.

Então $g : Z \to X$ é contínua se e somente se $f \circ g : Z \to Y_f$ é contínua para cada $f \in \mathcal{F}$.

Demonstração. ($\to$). Dado um aberto U em Y_f, temos que $(f \circ g)^{-1}[U] = g^{-1}[f^{-1}[U]]$. Como f é contínua segue que $f^{-1}[U]$ é aberto em X. Como g é contínua, segue que $g^{-1}[f^{-1}[U]]$ é aberto em Z.

topologia inicial.jpg

Figura 5.1: Abertos na topologia inicial.

($\leftarrow$). Seja $z \in Z$ e W um aberto de X contendo $g(z)$. Pela definição da topologia em X, existe $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ e U_i aberto em Y_{f_i} para $1 \leq i \leq n$ tal que $g(z) \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq W$. Logo, $f_i \circ g(z) \in U_i$ para $1 \leq i \leq n$. Como $f_i \circ g$ é contínua, existe $V_i \subseteq Z$ aberto contendo z tal que $f_i \circ g[V_i] \subseteq U_i$ para $1 \leq i \leq n$. Então $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ é um aberto contendo z e $V \subseteq V_i \subseteq (f_i \circ g)^{-1}[U_i] = g^{-1}[f_i^{-1}[U_i]]$ para $1 \leq i \leq n$. Portanto $V \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} g^{-1}[f_i^{-1}[U_i]] = g^{-1}[\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i]] \subseteq g^{-1}[W]$. Portanto g é contínua em z. Como z é arbitrário, segue que g é contínua em Z. $\square$

Veremos exemplos disto daqui a algumas aulas. Em Análise Funcional, dado um espaço normado, a topologia inicial dos funcionais lineares contínuos é a topologia fraca.

5.2 Onde a convergência enumerável ainda dá conta do recado. Ou não.

5.2.1 Espaços de Fréchet. Espaços sequenciais.

Uma forma de generalizar a ideia da topologia para espaços mais gerais foi trabalhar com as sequências convergentes.

Definição 5.4. Dizemos que X é um espaço de Fréchet se para todo $A \subseteq X$ e todo $x \in \overline{A}$, existe uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em A tal que a sequência converge para x.

Nos espaços de Fréchet, todos os pontos do fecho de A podem ser atingido a partir de uma sequência de A

Uma segunda noção mais fraca é a noção de sequencial.

Definição 5.5. Um espaço X é sequencial se para todo conjunto A tal que A não é fechado, existe $x \in \overline{A} \backslash A$ e $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em A tal que a sequência converge para x.

Note que no caso de sequencial, existe algum x e alguma sequência convergente a x que testemunha que um conjunto não é fechado. No caso de um espaço Frechet, todo ponto todo x no fecho de A que não está em A possui uma sequência testemunhando isto.

5.2.2 Continuidade de funções em espaços sequenciais.

Teorema 5.6. Seja $f : X \to Y$, onde X é um espaço sequencial. Então

f é contínua em X se e somente se para todo $x \in X$ e para toda sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X convergente para x temos que $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge para $f(x)$.

Demonstração. A ida vale para qualquer espaço topológico X, a sequencialidade é usada apenas na volta.

$(\to)$. Tome $x \in X$ e $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X convergente para x. Seja V uma vizinhança de $f(x)$. Como f é contínua, segue que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. Pela convergência de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ para x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para todo $n \geq N$. Assim, $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq N$. Portanto $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge para $f(x)$.

$(\leftarrow)$ Vamos supor por contradição que f não é contínua. Então por uma das equivalências de continuidade, existe um fechado F de Y tal que $f^{-1}(F)$ não é fechado em X. Como X é sequencial, existe $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em $f^{-1}(F)$ que converge para um ponto $x \notin f^{-1}(F)$. Por hipótese, temos que $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência de F que converge para $f(x)$. Como F é um fechado, segue que $f(x) \in F$. Assim, $x \in f^{-1}(F)$, uma contradição. □

5.2.3 Continuidade local em espaços de Fréchet.

A propriedade de Fréchet pode ser usada para continuidade local:

Teorema 5.7. Seja $f : X \to Y$, onde X é um espaço de Fréchet. Seja $x \in X$. Então

f é contínua em x se e somente se para todo para toda sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X convergente para x temos que $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge para $f(x)$.

Demonstração. $(\to)$. A prova vale para qualquer espaço topológico X e foi feita na ida do caso sequencial.

$(\leftarrow)$. Seja $A \subseteq X$ tal que $x \in \overline{A}$. Por uma das equivalência de continuidade local, basta mostrar que $f(x) \in \overline{f[A]}$. Como X é Frechet, segue que existe uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em A convergente para x. Por hipótese, $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ em $f[A]$ converge para $f(x)$. Assim, $f(x) \in \overline{f[A]}$. Como A é arbitrário, segue que f é contínua em x. □

Como discutido anteriormente, sequências convergentes são insuficientes para convergência de espaços topológicos. Assim, a ideia é trocar $\mathbb{N}$ por uma conjunto de índices mais geral. Aqui vamos apenas citar um exemplo usando o sistema fundamental de vizinhanças de um ponto como um conjunto de índices. O conjunto de índices deve ter alguma ordem. E nesta ordem, todos os índices devem 'ir' para uma mesma 'direção e sentido' (por exemplo, se indexarmos por $\mathbb{Z}$ teríamos dois sentidos distintos e isso não daria um bom conjunto de índices para convergência.)

Frechet e sequencial.jpg

Figura 5.2: Espaços de Fréchet e espaços sequenciais.

5.2.4 Um exemplo de convergência mais geral: rede.

Exemplo 5.8. Seja x um ponto de acumulação de um conjunto A e seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x. Vamos considerar em $\mathcal{V}_x$ a order parcial do $\subseteq$. Por ser um sistema fundamental de vizinhanças, note que dado dois elementos quaisquer de $\mathcal{V}_x$ existe um outro elemento que está abaixo de ambos (a direção e sentido seria 'encolher cada vez mais em torno do ponto x')

Para cada $W \in \mathcal{V}_x$, tome $x_W \in W$. Vamos dizer que $(x_W : W \in \mathcal{V}_x)$ converge se para cada U vizinhança de x, existe $W^* \in \mathcal{V}_x$ tal que $W \subseteq W^*$ então $x_W \in U$. Note que com essa indexação temos convergência: para cada U vizinhança de x, existe W^* tal que $W^* \subseteq U$. Então se $W \subseteq W^*$ com $W \in \mathcal{V}_x$, temos $x_W \in W \subseteq W^* \subseteq U$.

Note a similaridade desse tipo de escolha com o de sequências quando temos um sistema enumerável de vizinhanças.

5.2.5 Coming next...

Como vimos anteriormente, existem espaços topológicos em que as sequências convergentes podem ter mais de um ponto de acumulação, algo que não ocorre em $\mathbb{R}^n$. Para que possamos tratar de espaços mais interessantes de forma geral, iremos introduzir os axioma de separação que exigem a existência de mais abertos. Porém ao colocar mais abertos, colocamos mais fechados e a relação entre pontos e fechados pode ser 'estragada' assim é necessário ter axiomas entre pontos e fechados. Os axioma de separação mais fortes garantem a relação entre pontos e fechados e de fechados com existência de um número maior de funções contínuas. Os axiomas de separação são propriedades topológicas. Iremos ir adotando os axiomas aos poucos com alguma motivação de uso ao invés de listar todos de uma vez. Na próxima aula iremos introduzir os axiomas que separam pontos.

Vimos anteriormente que sequências convergentes podem ter mais de um limite. Vamos agora começar a adicionar condições sobre a topologia para que os limites de sequências convergentes sejam únicos. Vimos também que sequências são insuficientes para recupar o fecho de um conjunto.

5.3 Separando pontos: Espaços T_0, T_1 e Hausdorff (T_2).

Se não conseguissemos enxergar os pontos, mas apenas saber se eles estão ou não dentro dos abertos, teríamos que todos os pontos na topologia caótica não podem ser distinguidos. Alguns autores usam o termo U separa x de y se $x \in U$ e $y \notin U$. No caso de T_0 existe algum aberto que separa x de y ou separa y de x. No caso de um espaço T_1 cada ponto é separado do outro por um aberto (veja Figura 5.3).

5.3.1 Espaços T_0, T_1 e T_2.

Definição 5.9. Veja Figura 5.3 Seja X um espaço topológico.

Dizemos que X é T_0 se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe um aberto U tal que ($x \in U$ e $y \notin U$) ou ($x \notin U$ e $y \in U$).

Dizemos que X é T_1 se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe um aberto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$. (Note que invertendo a ordem temos um aberto V tal que $y \in V$ e $x \notin V$).

Note que se fixarmos uma base de abertos, as testemunham para T_0 ou T_1 podem ser tomadas nessa base.

Lema 5.10. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base de abertos.

X é T_0 se e somente se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe $U \in \mathcal{B}$ tal que ($x \in U$ e $y \notin U$) ou ($x \notin U$ e $y \in U$).

X é T_1 se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Exemplo 5.11. O espaço caótico com dois ou mais pontos não é T_0.

O espaço gerado pela base $\{]x, +\infty[\colon x$ é número real $\}$ é um espaço T_0 que não é T_1.

Proposição 5.12. Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos e $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Então X é T_0 se e somente se $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos.

Demonstração. Se $x \neq y$ então podemos supor que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$ (trocando a ordem entre x e y caso contrário). Então $U \in \mathcal{B}_x$ mas $U \notin \mathcal{B}_y$. Assim, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Se $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ então existe $U \in (\mathcal{B}_x \setminus \mathcal{B}_y) \cup (\mathcal{B}_y \setminus \mathcal{B}_x)$. Vamos supor que $U \in \mathcal{B}_y \setminus \mathcal{B}_x$. Então $y \in U$ e $x \notin U$. Caso $U \in \mathcal{B}_x \setminus \mathcal{B}_y$ temos que $x \in U$ e $y \notin U$. Portanto X é T_0. □

Corolário 5.13. Se X é um espaço T_0 e $\mathcal{B}$ é uma base de abertos então existe uma função injetora de X em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Demonstração. Basta considerar a função $X \ni x \mapsto \mathcal{B}_x \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. □

Note que em particular, o tamanho de um espaço X que é T_0 é limitado pelo tamanho das partes da sua topologia.

Exemplo 5.14. O espaço caótico pode ser arbitrariamente grande e o conjunto das partes da sua topologia tem quatro elementos.

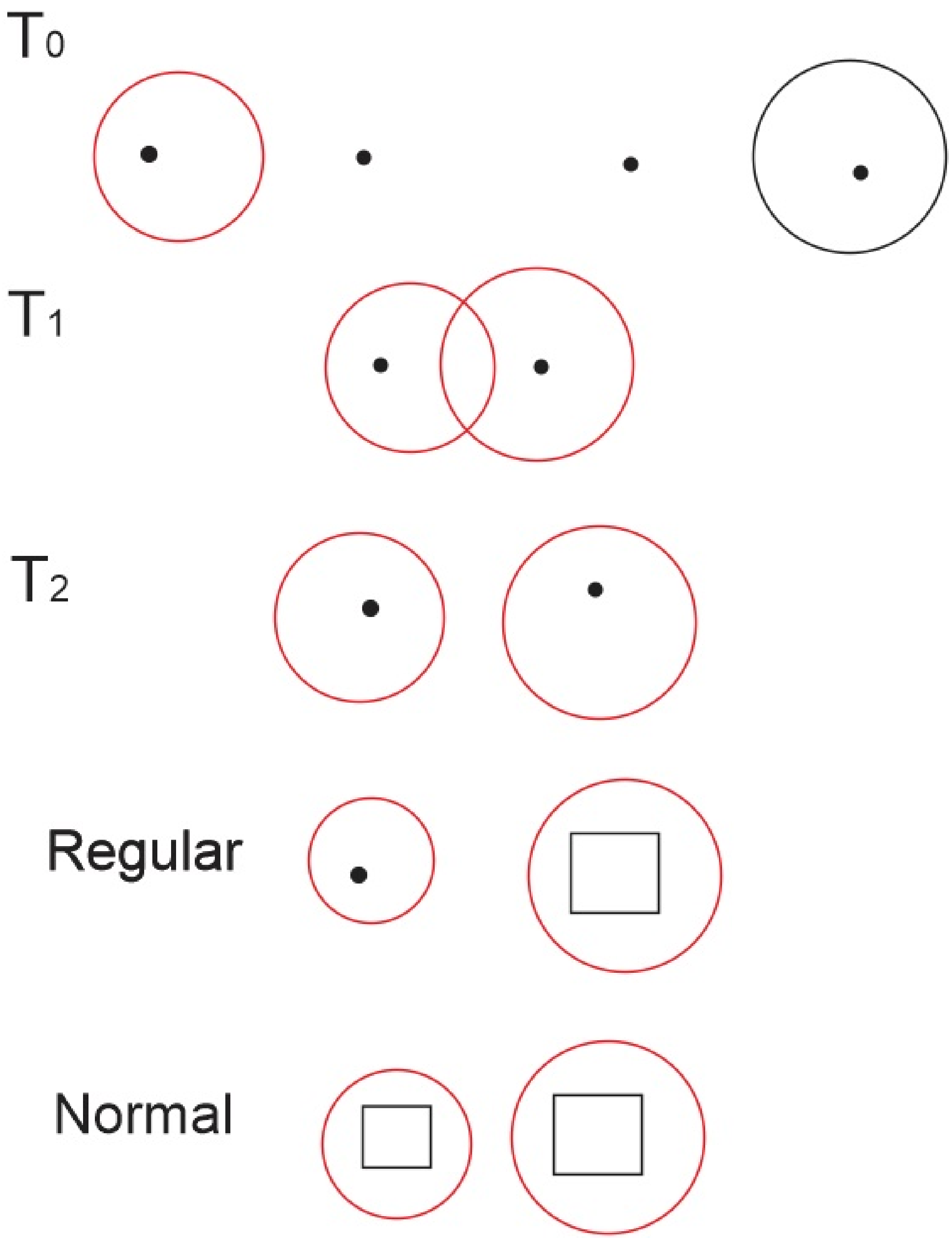

Figura 5.3: Separação de pontos.

Proposição 5.15. Um espaço X é T_0 se e somente se $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ para todo $x, y \in X$ distintos.

Demonstração. Suponha que existe U aberto tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Então $y \in X \setminus U$, logo $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U \not\ni x$. Assim, $x \notin \overline{\{y\}}$. Como $x \in \overline{\{y\}}$, segue que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Se y pode ser separado de x por um aberto, temos uma situação similar. Assim, se X é T_0 temos que existe um aberto que separa um dos dois pontos do outro e assim $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

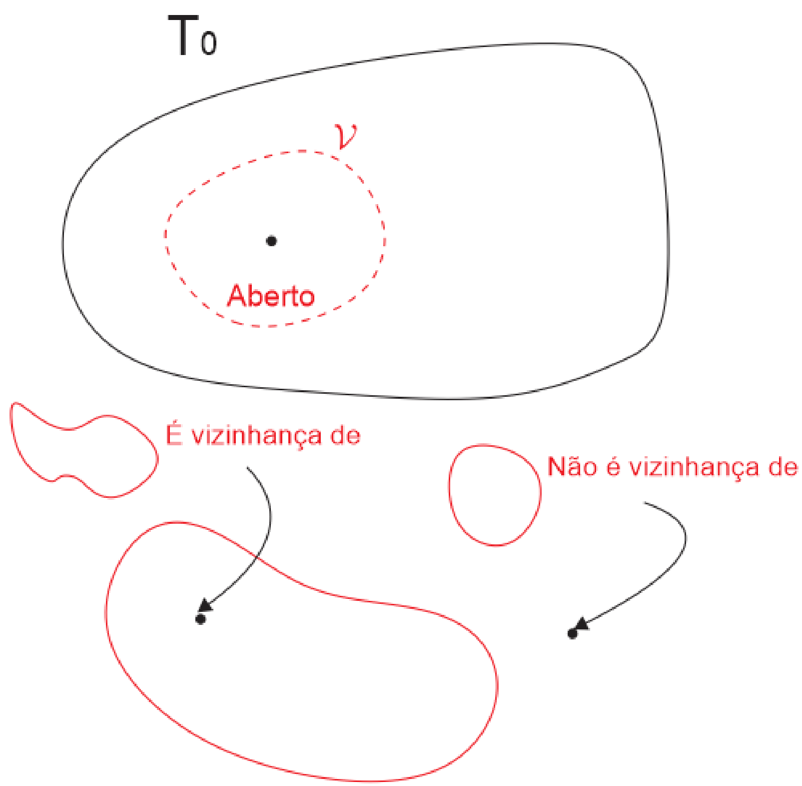

Figura 5.4: Equivalência de espaços T_0.

Se $x \in \overline{\{y\}}$ então $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. Similarmente se $y \in \overline{\{x\}}$ então $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. Assim, se $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ então ou $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$. No primeiro caso, temos que $X \setminus \overline{\{y\}}$ separa x de y e no segundo caso, temos que $X \setminus \overline{\{x\}}$ separa y de x. Assim, X é T_0. □

Proposição 5.16. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{V}_x$ um sistema de vizinhanças de x para cada $x \in X$.

São equivalentes:

1) X é um espaço T_1

2) $\{x\}$ é um conjunto fechado para todo $x \in X$.

3) $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$.

Demonstração. (1) $\to$ 2)). Suponhamos que X é T_1. Seja $x \in X$. Para cada $y \in X$ distinto de x, existe um aberto U_y tal que $x \notin U_y$ e $y \in U_y$. Assim $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$ é um conjunto aberto. Logo $\{x\}$ é um fechado.

(2) $\to$ 3)). Assuma 2). Se x e y são pontos distintos de X então $\{y\}$ é fechado, então $U_y = X \setminus \{y\}$ é um aberto tal que $x \in U_y$ e $y \notin U_y$. Como $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x, temos que existe $W_y \in \mathcal{V}_x$ tal que $W_y \subseteq U_y$. Portanto $x \in \bigcap \mathcal{V}_x \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} W_y \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y = \{x\}$. Portanto $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.

(3) $\to$ 1)). Assuma 3) e sejam x, y pontos distintos de X. Como $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$, segue que existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin U$. Como $U \in \mathcal{V}_x$, segue que $x \in U$. Logo X é T_1. □

Abaixo vemos que um espaço T_1 pode ser sequências que convergem para muitos pontos.

Exemplo 5.17. Seja X um espaço infinito com a topologia co-finita. Então se a sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência injetora em X então a sequência converge para x, para todo $x \in X$.

Demonstração. Seja $x \in X$ e V uma vizinhança aberta de x. Então $X \setminus V$ é finito. Como $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é injetora, existe N tal que $x_n \notin X \setminus V$ para todo $n \geq N$. Como V é uma vizinhança aberta arbitrária, segue que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ converge para x. □

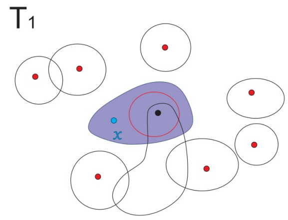

Figura 5.5: Equivalência de espaços $T1$.

Assim, para que tenhamos limite único precisamos de axiomas de separação em que os abertos não separem apenas os pontos, mas que separem os pontos 'no entorno do outro ponto'.

Definição 5.18. Dizemos que um espaço topológico X é T_2 ou Hausdorff se para cada par x, y de pontos distintos de X existe U, V abertos tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Exemplo 5.19. O espaço X com X não enumerável com a topologia co-enumerável é um espaço T_1 que não é T_2.

5.3.2 'Este aberto é pequeno demais para dois limites': Espaços Hausdorff.

Lema 5.20. Seja X um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base de abertos e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x para cada $x \in X$. São equivalentes:
1) X é Hausdorff.
2) para cada $x, y \in X$ distintos existem $U, V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
3) para cada $x \in X$ o conjunto $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$.

Demonstração. A condição 1) $\leftrightarrow$ 2) é trivial de um lado e usa o fato de ser base do outro.
(1) $\rightarrow$ 3)). Fixe x e tome $y \in X$ distinto de x. Então existem abertos W e V tais que $x \in W$ e $y \in V$ com $W \cap V = \emptyset$. Como $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças, existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subseteq W$. Logo $U \subseteq X \setminus V$. Portanto, $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Logo, $y \notin \overline{U}$. Assim $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$.
(3) $\rightarrow$ 1)). Sejam x e y distintos em X. Por hipótese, existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin \overline{W}$. Como W é vizinhança de x, tome U aberto tal que $x \in U \subseteq W$ e $V = X \setminus \overline{W}$. Então $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V \subseteq W \cap X \setminus \overline{W} = \emptyset$. □

Teorema 5.21. Seja X um espaço topológico T_2. Então uma sequência convergente possui um único limite.

Demonstração. Suponha que x e y são limites de $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Suponhamos que x e y são distintos, então existem U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Existe n_x e n_y tais que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_x$ e $x_n \in V$ para todo $n \geq n_y$. Tomando $n > \max\{n_x, n_y\}$ temos que $x_n \in U \cap V$, contradizendo que $U \cap V = \emptyset$. Assim, $x = y$ e o limite é único. □

Apenas por curiosidade, existe um axioma da separação para espaços em que toda sequência possui um único limite, chamado de $T1\frac{1}{2}$.

5.3.3 Comparando duas funções contínuas em espaços Hausdorff.

Vamos terminar esta secção com um último resultado relacionando a importância da propriedade de Hausdorff em questões de continuidade.

Teorema 5.22. Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas tais que Y é Hausdorff. Seja $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é um subconjunto fechado de X.

Demonstração. Vamos mostrar que $X \setminus E$ é um conjunto aberto. Seja $y \in X \setminus E$. Então $f(y) \neq g(y)$. Como Y é Hausdorff, existem U e V abertos disjuntos tais que $f(y) \in U$, $g(y) \in V$. Como f e g são contínuas, segue que $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(V)$ são vizinhanças abertas de x. Então $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de y. Se $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ então $f(x) \in U$ e $g(x) \in V$. Como $U \cap V = \emptyset$, segue que $f(x) \neq g(x)$. Logo $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \setminus E$. Portanto $X \setminus E$ é aberto e E é fechado. □

espacos T2.png

Figura 5.6: Equivalência de espaços T_2 ou Hausdorff.

Corolário 5.23. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas, onde X é um espaço topológico arbitrário e Y é um espaço topológico Hausdorff. Se existe um denso D de X tal que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in D$ então $f = g$.

Exercício 5.24. Se $F \subseteq X$ finito e X é Hausdorff então existem aberto $\{U_x : x \in F\}$ dois a dois disjuntos tais que $x \in U_x$ para cada $x \in F$.

limite unico.jpg

Figura 5.7: Sequências em espaços Haudorff tem no máximo um limite.

Hausdorff e diagonal.jpg

Figura 5.8: $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ é fechado para Y Hausdorff.

Capítulo 6

Filtros. Interior. Topologias geradas por Fecho e Interior.

6.1 Filtros

6.1.1 Definição de Filtros.

Dado um conjunto A e um ponto de acumulação de x podemos tentar capturar esta informação usando a intersecção de A com as vizinhança de x. Podemos pensar nisso também quando temos um 'buraco' no espaço e usar abertos para identificar o buraco, esta é a noção intuitiva que queremos capturar com o filtro.

A convergência de um filtro pode ser pensados como se estivéssemos dando um 'zoom' num conjunto, onde nossas 'lentes' são os abertos.

Definição 6.1. Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um filtro de conjuntos se

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2) se $A \subseteq B \subseteq X$ e $A \in \mathcal{F}$ então $B \in \mathcal{F}$.
3) se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Note que o filtro depende apenas do conjunto X.

Exemplo 6.2. Dado um conjunto infinito X, temos que $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}$ é um filtro.

Dado $a \in X$ o conjunto $\{A \subseteq X : a \in A\}$ é um filtro. Dizemos que esse é o filtro principal gerado por a.

A família de todas as vizinhanças de um ponto $x \in X$ formam um filtro.

A família de todos os conjuntos que contém um aberto densos de X formam um filtro (intersecç ao finita de abertos densos é um aberto denso).

Em geral, vemos os elementos de um filtro como elementos grandes (este termo faz bastante sentido quando se pensa, por exemplo, nos conjuntos de medida 1 dentro do intervalo $[0, 1]$.) O maior elemento do filtro sobre X é o próprio X e pensamos que os elementos menores do filtro contém informação mais relevante.

A noção dual de filtro de conjuntos é o ideal (por exemplo, o ideal dos conjuntos de medida nula, é um σ-ideal), mas para convergência em espaços topológicos o dual são as redes, que definiremos em outra aula.

Podemos ver um filtro como um conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$ e considerar ponto de acumulação e limite de uma família indexada de conjuntos $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$.

Definição 6.3. Um ponto de acumulação x de uma família de conjuntos indexado pelo filtro $\mathcal{F}$ se para toda vizinhança U de x e todo $F \in \mathcal{F}$ existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F' \subseteq F$ e $A_G \cap U \neq \emptyset$ para cada $G \subseteq F'$ com $G \in \mathcal{F}$.

Um ponto x é limite de uma família de conjuntos indexado pelo filtro $\mathcal{F}$ se para toda vizinhança U de x e existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A_G \subseteq U$ para cada $G \subseteq F$ com $G \in \mathcal{F}$.

Vamos agora relacionar filtros ao espaço topológico. Após a definição iremos relacionar com a noção de convergência acima.

Definição 6.4. Seja X um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X.

Dizemos que x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.

Dizemos que x é um limite de $\mathcal{F}$ se todas as vizinhanças de x pertencem a $\mathcal{F}$.

Podemos pensar que os elementos dos filtro são os seus próprios índices e considerar convergência de conjuntos.

Lema 6.5. Um ponto x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ se e somente se x é ponto de acumulação da família indexada $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$, onde $A_F = F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Temos que $x \in \overline{F}$ se e somente se $F \cap U \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$ e U vizinhança de x se e somente se $A_F \cap U \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Para a ida, se x é ponto de acumulação de x, temos que $A_F \cap U \neq \emptyset$ para cada U vizinhança de x e $F \in \mathcal{F}$. Assim, x é ponto de acumulação de $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$. Para a volta, se $F \in \mathcal{F}$ e U vizinhança de x, existe $F' \subseteq F$ com $F' \subseteq F$ tal que $A_G \cap U \neq \emptyset$ para cada $G \subseteq F'$ com $G \in \mathcal{F}$. Em particular, temos que $\emptyset \neq A_{F'} \cap U = F' \cap U \subseteq F \cap U$. Assim, temos que $x \in \overline{F}$. Como F é um elemento arbitrário de $\mathcal{F}$, segue que x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. □

Lema 6.6. Um ponto x é limite de $\mathcal{F}$ se e somente se x é limite da família indexada $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$, onde $A_F = F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Para a ida, seja U uma vizinhança de x. Como $\mathcal{F}$ converge para x, temos que $U \in \mathcal{F}$. Assim, para todo $F \subseteq U$ com $F \in \mathcal{U}$, temos que $A_F = F \subseteq U$. Assim, temos que $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ converge para x. Para a volta, seja U uma vizinhança de x. Como $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ converge para x, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A_G \subseteq U$ para todo $G \subseteq F$ com $G \in \mathcal{F}$. Em particular temos que $F = A_F \subseteq U$. Como $\mathcal{F}$ é filtro e $F \subseteq U$, segue que $U \in \mathcal{F}$. Assim, x é limite do filtro $\mathcal{F}$. □

6.1.2 Ponto de acumulação e convergência de filtros.

Lema 6.7. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X. Se $x \in X$ é um limite de $\mathcal{F}$ então x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Para isto, basta mostrarmos que $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Fixado, $A \in \mathcal{F}$, isto é equivalente a mostrar que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo U vizinhança de x. Por hipótese, $U \in \mathcal{F}$, portanto $U \cap A \in \mathcal{F}$. Pela definição de filtro, temos que os elementos de $\mathcal{F}$ são não vazios. Logo $U \cap A \neq \emptyset$ portanto x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. □

Lema 6.8. Seja X um espaço Haudorff e $\mathcal{F}$ um filtro convergente. Então o limite de $\mathcal{F}$ é único. Reciprocamente, se todos os filtros convergentes tem limite único então o espaço é Hausdorff.

Demonstração. Se $\mathcal{F}$ converge para x e y com $x \neq y$ então $\mathcal{F}$ contém todas as vizinhanças abertas de x e de y. Em particular contém uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tal que $U \cap V = \emptyset$, o que não é possível, pois $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Seja X um espaço que não é Hausdorff e sejam x e y dois pontos que testemunham este fato. Considere o conjunto $\mathcal{C} = \{U : U \text{ é vizinhança de } x \text{ ou de } y\}$. Dada uma família finita não vazia $\mathcal{C}'$ de elementos de $\mathcal{C}$, o conjunto $\bigcap \mathcal{C}'$ contém $U \cap V$, onde U é vizinhança aberta de x e V é vizinhança aberta de y. Assim, $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$. Portanto $\mathcal{C}$ é uma base para um filtro $\mathcal{F}$. Claramente $\mathcal{F}$ converge para x e para y. □

Como na construção de topologias, em muitos casos é mais conveniente usar uma família que gera o filtro.

Definição 6.9. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{C}$ tem a propriedade de intersecção finita (PIF) se para toda família finita não vazia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ temos $\mathcal{C}' \neq \emptyset$.

Note que todo filtro tem PIF.

Definição 6.10. Dado uma família $\mathcal{C}$ de X com PIF, dizemos que o filtro gerado por $\mathcal{C}$ é a família $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \exists \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \text{ tal que } \mathcal{C}' \text{ é finito e não vazio e } \bigcap \mathcal{C}' \subseteq A\}$.

Lema 6.11. O filtro gerado acima é de fato um filtro.

Demonstração. Temos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ então $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois cada elemento de $\mathcal{F}$ contém algum $\bigcap \mathcal{C}'$ e $\bigcap \mathcal{C}'$ é não vazio.

2) Dado $A \subseteq B$ com $A \in \mathcal{F}$, a testemunha de que $A \in \mathcal{F}$ também testemunha que $B \in \mathcal{F}$.

3) Se $A, B \in \mathcal{F}$ então existem $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$ tal que $\bigcap \mathcal{C}_A \subseteq A$ e $\bigcap \mathcal{C}_B \subseteq B$. Assim, $\bigcap(\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B) \subseteq A \cap B$ e portanto $A \cap B \in \mathcal{F}$. □

6.1.3 Bases de filtros. Extensão de filtro.

Definição 6.12. Dizemos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ é uma sub-base para o filtro $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}$ é o filtro gerado por $\mathcal{C}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma base para o filtro $\mathcal{F}$ se é uma sub-base tal que para cada $\mathcal{C}' \subseteq C$, existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $F \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$.

Note que se $\mathcal{C}$ é base para um filtro $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq F\}$.

Dizemos que uma família $\mathcal{C}$ é fechada por intersecções finitas se $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$ para todo subconjunto finito $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. Claramente uma sub-base fechada por intersecções finitas é uma base, assim, a noção de sub-base de filtro lembra a noção de sub-base de abertos.

Definição 6.13. Dizemos que um filtro $\mathcal{G}$ estende o filtro $\mathcal{F}$ se $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$

As extensões de um filtro em termos de convergência correspondem às subsequências.

Proposição 6.14. Se $\mathcal{F}$ possui x como ponto de acumulação então existe um filtro $\mathcal{G}$ estendendo $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G}$ converge para x.

Demonstração. Seja $\mathcal{V}_x$ todas as vizinanças de x e $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \mathcal{V}_x$. Usando o fato de que x é ponto de acumulação $\mathcal{F}$ e que todos os elementos de $\mathcal{V}_x$ são vizinhanças de x, temos que $\mathcal{C}$ tem PIF (verifique). Seja $\mathcal{G}$ o filtro gerado por $\mathcal{C}$. Claramente $\mathcal{G}$ estende $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ converge para x. □

A prova do seguinte fato é deixada ao leitor.

Proposição 6.15. Seja $\mathcal{C}$ uma base para um filtro $\mathcal{F}$ sobre X, onde X é um espaço topológico. Então x é ponto de acumulação de x se e somente se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} \overline{A}$.

Lema 6.16. Dado um filtro $\mathcal{F}$ sobre X e uma função $f : X \to Y$, vamos denotar por $f[\mathcal{F}]$ o conjunto $\{f[A] : A \in \mathcal{F}\}$. O conjunto $f[\mathcal{F}]$ tem PIF.

6.1.4 Filtros e continuidade.

Teorema 6.17. Seja $x \in X$ e $f : X \to Y$. São equivalentes:

a) f é contínua em x.

b) para todo filtro $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F}$ acumula em x então o filtro gerado for $f[\mathcal{F}]$ acumula em $f(x)$.

c) para todo filtro $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F}$ converge para x então o filtro gerado for $f[\mathcal{F}]$ converge para $f(x)$.

Demonstração. $(a) \to b))$. Dado $A \in \mathcal{F}$, temos que $x \in \overline{A}$, por uma das equivalências de continuidade, segue que $f(x) \in \overline{f[A]}$. Pela proposição deixada como exercício, segue que $f(x)$ é ponto de acumulação do filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$.

$(a) \leftarrow b))$ Dado A tal que $x \in \overline{A}$, considere o filtro $\mathcal{F}$ gerado por $\{A\}$. Então por hipótese temos que $f(x) \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} \overline{f[C]}$. Em particular, temos que $f(x) \in \overline{f[A]}$.

$(a) \to c))$. Seja $\mathcal{F}$ um filtro que converge para x. Se V é uma vizinhança de $f(x)$, temos pela continuidade de f em x que existe U vizinhança de x tal que $f[U] \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ converge para x, temos que $U \in \mathcal{F}$. Assim, V é um elemento do filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$. Portanto o filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$ converge para $f(x)$.

$(c) \to b))$ Seja $\mathcal{F}$ um filtro que acumula em x. Então existe um filtro $\mathcal{G}$ estendendo $\mathcal{F}$ que converge para x. Por hipótese, o filtro gerado por $f[\mathcal{G}]$ converge para $f(x)$. Portanto o filtro gerado por $f[\mathcal{G}]$ acumula em $f(x)$. Como $f[\mathcal{G}] \supseteq f[\mathcal{F}]$, segue que $f(x) \in \bigcap_{A \in \mathcal{G}} \overline{f[A]} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{f[A]}$.

Portanto $f(x)$ é um ponto de acumulação do filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$. □

6.2 'O aberto dentro de você'.

6.2.1 Definição de Interior.

Já vimos a definição de fecho.

Definição 6.18. Dado um espaço topológico X e $A \subseteq X$ o interior de A, denotado por $\mathring{A}$ ou $Int(A)$ é o maior aberto contido em A.

Vamos mostrar que o interior está bem definido.

Lema 6.19. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os abertos contidos em A. Então $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\mathring{A} = \bigcup \mathcal{A}$.

Demonstração. O conjunto $\mathcal{A}$ contém $\emptyset$, assim $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A}$ é uma família de abertos contidos em A segue que $\bigcup \mathcal{A}$ é um aberto com $\bigcup \mathcal{A} \subseteq A$. Dado U um aberto contido em A, temos que $U \in \mathcal{A}$. Então $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Assim, $\bigcup \mathcal{A} = \mathring{A}$. □

O interior simplifica a tomada do aberto que testemunha que um conjunto é vizinhança de um ponto.

Lema 6.20. Um conjunto V e vizinhança de x se e somente se $x \in \mathring{V}$.

Demonstração. Se V é uma vizinhança de x, então existe um aberto U tal que $x \in U \subseteq V$. Pela definição de interior, segue que $U \subseteq \mathring{V}$. Portanto $x \in \mathring{V}$.

Reciprocamente, se $x \in \mathring{V}$, temos que $\mathring{V}$ é um aberto contido em V. Assim, V é vizinhança de x. □

Já vimos como utilizar bases de abertos, base de fechados e sistemas fundamentais de vizinhanças abertas para construir topologias, iremos agora mencionar também como obter topologias usando operadores fecho e interior.

6.3 Fecho vs Interior.

O lema seguinte mostra a relação entre tomar interior e fecho sucessivamente:

Lema 6.21. $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$ para todo subconjunto A de um espaço topológico X.

Demonstração. $\overline{\mathring{\overline{A}}} \supseteq \mathring{\overline{A}}$ e portanto $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \supseteq \mathring{\overline{A}}$. Por outro lado, $\mathring{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$, portanto, $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subseteq \overline{A}$. Assim, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subseteq \mathring{\overline{A}}$ □

Assim como fechados e abertos são relacionados por complementares, o fecho e o interior também o são. Por motivos de visualização vamos usar a notação alternativa de fecho e interior.

Teorema 6.22. $Int(A) = X \setminus Cl(X \setminus A)$ e $Cl(A) = X \setminus Int(X \setminus A)$ para todo subconjunto A de um espaço topológico X.

Demonstração. Temos que $Int(A) \subseteq A$. Assim, $X \setminus Int(A) \supseteq X \setminus A$. Como $Int(A)$ é aberto, segue que $X \setminus Int(A)$ é um fechado, logo $X \setminus Int(A) \supseteq Cl(X \setminus A)$. Usando novamente De Morgan, temos que $Int(A) \subseteq X \setminus Cl(X \setminus A)$. Para verificar a recíproca, $Cl(X \setminus A) \supseteq X \setminus A$. Usando De Morgan, temos que $X \setminus Cl(X \setminus A) \subseteq X \setminus (X \setminus A) \subseteq A$. Como $X \setminus Cl(X \setminus A)$ é um aberto contido em A, segue que $X \setminus Cl(X \setminus A) \subseteq Int(A)$. Com isto, $Int(A) = X \setminus Cl(X \setminus A)$.

Pelo primeiro ítem temos que $Int(B) = X \setminus Cl(X \setminus B)$ para todo subconjunto B de X. Tomando $B = X \setminus A$, teremos $Int(X \setminus A) = X \setminus Cl(X \setminus (X \setminus A)) = X \setminus Cl(A)$. Por De Morgan, temos $X \setminus Int(X \setminus A) = Cl(A)$. □

Corolário 6.23. $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ para todo subconjunto A de um espaço topológico X.

Demonstração. Já vimos que $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$. Substituindo A por $X \setminus A$, temos que

$\mathring{\overline{\mathring{\overline{X \setminus A}}}} = \mathring{\overline{X \setminus A}}$, para todo subconjunto A de um espaço topológico X. Usando a relação de fecho e interior com complementos, temos $\mathring{\overline{X \setminus A}} = Int(X \setminus \mathring{A}) = X \setminus \overline{\mathring{A}}$.

Similarmente, temos que $\mathring{\overline{\mathring{\overline{X \setminus A}}}} = X \setminus \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. Assim, segue que $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$. □

6.4 Topologias geradas pelos Operadores Fecho e Interior.

Vamos agora descrever as propriedades de operador fecho e o operador interior para definirmos uma topologia.

Teorema 6.24. Dado um espaço topológico, o operador fecho tem as seguintes propriedades:
$OF1$) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
$OF2$) $A \subseteq \overline{A}$, para todo subconjunto A de X.
$OF3$) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, para todos os subconjuntos A e B de X.
$OF4$) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, para todo subconjunto A de X.

Demonstração. O vazio é fechado, assim o seu fecho é o vazio. O fecho de A contém A. O fecho de A é um fechado e o fecho de um fechado é ele próprio. Assim $OF1$), $OF2$) e $OF4$) estão satisfeitas.

Para $OF3$), $\overline{A} \cup \overline{B}$ é um fechado contendo $A \cup B$, assim $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Por outro lado, $A \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\overline{A \cup B}$ é fechado, assim $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Analogamente, $B \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\overline{A \cup B}$ é fechado, assim $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Portanto, $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Portanto $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ □

Teorema 6.25. Seja $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ um operador tal que
$OF1$) $\phi(\emptyset) = \emptyset$.
$OF2$) $A \subseteq \phi(A)$, para todo subconjunto A de X.
$OF3$) $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$, para todos os subconjuntos A e B de X.
$OF4$) $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$, para todo subconjunto A de X.

Então existe uma topologia tal que ϕ é o operador fecho desta topologia. Diremos que esta é a topologia gerada pelo operador fecho ϕ.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{F \subseteq X : \phi(F) = F\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é uma base para fechados para uma topologia. De fato, $\emptyset \in \mathcal{C}$ e se $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ então $\phi(F_1 \cup F_2) = \phi(F_1) \cup \phi(F_2) = F_1 \cup F_2$. Assim, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$.

Seja τ a topologia gerada pela base de fechados $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{C}$ é uma base de fechados para τ. Vamos verificar que $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os fechados. Por $OF1$) temos que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Por$OF2$) temos que $X \subseteq \phi(X) \subseteq X$. Assim, $X \in \mathcal{C}$. Já vimos acima que a união de dois elementos de $\mathcal{C}$ pertence a $\mathcal{C}$. Falta mostrar que se $\emptyset \neq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ então $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$. Para isto, temos que verificar que $\phi(\bigcap \mathcal{C}') = \bigcap \mathcal{C}'$. Por $OF2$), temos que $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \supseteq \bigcap \mathcal{C}'$. Para mostrar a outra inclusão, tome $F \in \mathcal{C}'$. Então $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \subseteq \phi(\bigcap \mathcal{C}') \cup \phi(F) = \phi((\bigcap \mathcal{C}') \cup F) = \phi(F) = F$. Como vale para todo $F \in \mathcal{C}'$, segue que $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$. Assim, $\mathcal{C}$ são todos os fechados da topologia τ. Seja $\overline{A}$ o fecho de A na topologia τ.

Pela definição de $\mathcal{C}$ e pelo fato dela ser a família de todos os fechados de τ, temos que $\phi(F) = F = \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{C}$. Tome agora A um subconjunto arbitrário de X.

Por $OF4$), $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$, assim, pela definição de $\mathcal{C}$, temos que $\phi(A) \in \mathcal{C}$ com $A \subseteq \phi(A)$. Assim, pela definição de fecho temos $\overline{A} \subseteq \phi(A)$. Por outro lado $\phi(A) \subseteq \phi(A) \cup \phi(\overline{A}) = \phi(A \cup \overline{A}) = \phi(\overline{A}) = \overline{A}$, por $OF2$) e pelo fato que $\overline{A} \in \mathcal{C}$. Assim $\phi(A) = \overline{A}$ para todo A e ϕ é o fecho de A na topologia τ. □

Exemplo 6.26. Dizemos que um conjunto A é sequencialmente fechado se os limites de todas as sequência convergente em A estão em A. Como vimos anteriormente, se um espaço é sequencial, então um conjunto sequencialmente fechado é um fechado. O fecho de um conjunto é sequencialmente fechado. Podemos tomar a intersecção de todos os sequencialmente fechados que contém um conjunto A e definir o fecho sequencial de A.

O fecho sequencial satisfaz as propriedades $OF1$)-$OF4$) e a topologia gerada pelo fecho sequencial é mais fina que a topologia original (será estritamente mais fina se o espaço original não for sequencial).

Se começarmos com um espaço em que as sequências convergentes são apenas as eventualmente constantes, então todo conjunto é fechado na topologia gerada pelo fecho sequencial. Assim, a topologia associada ao fecho sequencial neste caso é discreta.

Agora iremos descrever o operador interior:

Teorema 6.27. Dado um espaço topológico, o operador interior tem as seguintes propriedades:
$OI1$) $\mathring{X} = X$.
$OI2$) $\mathring{A} \subseteq A$, para todo subconjunto A de X.
$OI3$) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, para todos os subconjuntos A e B de X.
$OI4$) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$, para todo subconjunto A de X.

Demonstração. Fica a cargo do leitor verificar essa relação usando a definição de interior.

As relações acima podem também ser verificadas usando complementos:

Como $\overline{\emptyset} = \emptyset$, segue que $\mathring{X} = Int(X \setminus \emptyset) = X \setminus \overline{\emptyset} = X \setminus \emptyset = X$.

Como $X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$, segue que $A = X \setminus (X \setminus A) \supseteq X \setminus \overline{X \setminus A} = Int(X \setminus (X \setminus A)) = \mathring{A}$

De $\overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = \overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}$ segue que $Int(A \cap B)) = Int(X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))) = X \setminus \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = X \setminus (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) = (X \setminus \overline{X \setminus A}) \cap (X \setminus \overline{X \setminus B})) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

De $\overline{\overline{X \setminus A}} = \overline{X \setminus A}$, segue que $\mathring{\mathring{A}} = Int(Int(A)) = X \setminus \overline{X \setminus Int(A)} = X \setminus \overline{\overline{X \setminus A}} = X \setminus \overline{X \setminus A} = \mathring{A}$. $\square$

Agora veremos como definir uma topologia usando um operador interior.

Teorema 6.28. Seja $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ um operador tal que

$OI1)$ $\psi(X) = X$.

$OI2)$ $\psi(A) \subseteq A$, para todo subconjunto A de X.

$OI3)$ $\psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B)$, para todos os subconjuntos A e B de X.

$OI4)$ $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$, para todo subconjunto A de X.

Então existe uma topologia tal que ψ é o operador interior desta topologia. Diremos que esta é a topologia gerada pelo operador interior ψ.

Demonstração. Podemos definir um operador fecho para uma topologia usando $\phi(A) = X \setminus \psi(X \setminus A)$. As propriedades de operador fecho para ϕ seguem do uso da complementação e da propriedades de ψ. Tome a topologia gerada por ϕ (em que ϕ será o operador fecho). Usando complementares, teremos que ψ será o operador interior desta topologia. $\square$