

Equações diferenciais de 1ª ordem (1)

Dada a equação diferencial (linear)

de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ (1)

devemos procurar por uma função $\alpha(x)$ de forma que
ao multiplicar a eq. $\alpha(x) \frac{dy}{dx} + \alpha(x)p(x)y = \alpha(x)q(x)$ (2)
obtemos a seguinte forma

$$\frac{d}{dx} [\alpha(x)y] = \alpha(x)q(x) \quad (3)$$

Neste caso a Eq. (3) é dada por

$$y \frac{d\alpha(x)}{dx} + \alpha(x) \frac{dy}{dx} = \alpha(x)q(x).$$

Substituindo (2) em (3) temos

$$y \frac{d\alpha(x)}{dx} + [\alpha(x)q(x) - \alpha(x)p(x)y] = \alpha(x)q(x).$$

e então temos

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = \alpha(x)p(x).$$

A função $\alpha(x)$ é dada por $\alpha(x) = \exp\left[\int^x p(x')dx'\right]$

Uma vez que a Eq. (2) tem solução,

$$\alpha(x) y = \int^x \alpha(x') q(x') dx' + C$$

temos

$$y^{(x)} = \alpha^{-1}(x) \left[\int^x \alpha(x') q(x') dx' + C \right]$$

$$= \exp \left[- \int^x p(x') dx' \right] \left[\int^x \alpha(s) q(s) ds + C \right]$$

ou

$$y(x) = \exp \left[- \int^x p(x') dx' \right] \left\{ \int^x \exp \left[\int^s p(t) dt \right] q(s) ds + C \right\}$$

a função $y(x)$ é a solução da equação diferencial para $p(x)$ e $q(x)$

arbitrários. Agora vamos considerar/illustrar considerando $v(t)$ para a equação diferencial (exemplo 1)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v + \frac{f_0}{m} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right), \quad v(0) = 0$$

$$\text{onde } p(x) = \frac{b}{m} \text{ e } q(x) = \frac{f_0}{m} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

Outro método, não tão útil neste caso, mas ⁽²⁾ que será importante quando estudarmos uma equação diferencial linear de 2ª ordem é obtermos a solução geral como uma soma de duas soluções.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

onde $\frac{d y_h(x)}{dx} + p(x) y_h(x) = 0$ ⁽¹⁾ e

a solução da equação homogênea e

$$\frac{d y_p(x)}{dx} + p(x) y_p(x) = q(x) \quad (2)$$

é uma solução chamada de particular.

Vamos mostrar a seguir que para obtermos

$y(x)$ basta acharmos $y_h(x)$ e uma solução particular. Para isto, vamos mostrar primeiramente que se $y(x)$

for solução, $y_h(x)$ e $y_p(x)$, são fazendo

(1) e (2) também são.

$$\frac{d}{dx} [y_h(x) + y_p(x)] + p(x) [y_h(x) + y_p(x)] = f(x)$$

Neste caso

por ser solução da homogênea

$$\frac{d}{dx} [y_h(x)] + p(x) y_h(x) + \frac{d}{dx} y_p(x)$$

$$p(x) y_p(x) = f(x)$$

por ser uma
solução particular.

Além disso $y(x) - y_p(x)$ é solução da equação homogênea, dado que

$$\frac{d}{dx} [y(x) - y_p(x)] + p(x) [y(x) - y_p(x)] = 0 \quad (3)$$

pois $\frac{d}{dx} y(x) + p(x) y(x) = f(x)$

e $\frac{d}{dx} y_p(x) + p(x) y_p(x) = f(x)$

e então substituindo as duas equações
obtemos (3)

Portanto $y(x)$ pode ser obtida encontrando-
se $y_p(x)$ e $y_h(x)$.

(3)

Uma forma de obtermos $y_p(x)$ será descrita a seguir quando os coeficientes forem constantes.

$$\frac{d}{dx} y(x) + P y(x) = q(x)$$

Dada a forma $q(x)$, podemos supor que $y_p(x)$ tenha a forma de $q(x)$. Por exemplo

$$q(x) = \tilde{A} e^{\alpha x} \quad (\text{conhecida})$$

Assumindo que

$$y_p(x) = B e^{\alpha x} + D$$

$$y_p'(x) = \alpha B e^{\alpha x}$$

obtemos

$$\alpha B e^{\alpha x} + P(B e^{\alpha x} + D) = \tilde{A} e^{\alpha x}$$

De onde obtemos

$$B(\alpha + P) = \tilde{A}$$

$$e P D = 0$$

$$B = \frac{\tilde{A}}{\alpha + P}$$

$$\boxed{D = 0}$$

portanto

$$y_p(x) = \frac{\tilde{A}}{\alpha + P} e^{\alpha x}$$

Como $y_h(x) = e^{-Px} + E \Rightarrow y(x) = \frac{\tilde{A}}{\alpha + P} e^{\alpha x} + C e^{-Px} + E$
 onde E é obtido a partir das condições iniciais.

Exemplo 1

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v + \frac{F_0}{m} (1 - e^{-b/m t})$$

Pelo método 1

$$v(t) = e^{-\frac{b}{m} t} \left\{ \int_0^t \exp \left[\frac{b}{m} v \right] \frac{F_0}{m} (1 - e^{-\frac{b}{m} v}) dv + C \right\}$$

$$v(t) = e^{-\frac{b}{m} t} \left\{ \frac{F_0}{m} \left[\int_0^t (e^{\frac{b}{m} v} - 1) dv + C \right] \right\}$$

$$= e^{-\frac{b}{m} t} \left\{ \frac{F_0}{m} \left[\frac{m}{b} \left(e^{\frac{b}{m} t} - 1 \right) - t \right] + C \right\}$$

$$= \left\{ \frac{F_0}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m} t}) - \frac{F_0 t}{m} e^{-\frac{b}{m} t} + C e^{-\frac{b}{m} t} \right\}$$

Dado que $v(0) = 0$ encontremos

$$0 = C \Leftrightarrow$$

$$v(t) = \frac{F_0}{b} - \frac{F_0}{b} e^{-\frac{b}{m} t} \left(1 + \frac{b t}{m} \right)$$

Pelo método 2

(4)

$$v_h(t) = A e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$v_p(t) = \underbrace{\tilde{C} t e^{-\frac{b}{m} t} + B e^{-\frac{b}{m} t}} + D$$

Da Da a forma da força

$$\frac{dv_p}{dt} = -\frac{b}{m} \tilde{C} t e^{-\frac{b}{m} t} + \tilde{C} e^{-\frac{b}{m} t} - \frac{b}{m} B e^{-\frac{b}{m} t}$$

Uma vez que $\frac{dv_p}{dt} = -\frac{b}{m} v_p + \frac{F_0}{m} (1 - e^{-\frac{b}{m} t})$

temos:

$$-\frac{b}{m} \tilde{C} t e^{-\frac{b}{m} t} + \tilde{C} e^{-\frac{b}{m} t} - \frac{b}{m} B e^{-\frac{b}{m} t} = -\frac{b}{m} \left[\tilde{C} t e^{-\frac{b}{m} t} + B e^{-\frac{b}{m} t} + D \right]$$

$$+ \frac{F_0}{m} (1 - e^{-\frac{b}{m} t})$$

Iguando os termos, temos:

$$-\frac{b}{m} \tilde{C} = -\frac{b}{m} \tilde{C}$$

$$\tilde{C} - \frac{b}{m} B = -\frac{b}{m} B - \frac{F_0}{m} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\tilde{C} = -\frac{F_0}{m}}$$

$$-\frac{b}{m} D + \frac{F_0}{m} = 0 \Leftrightarrow D = \frac{F_0}{b}$$

Portanto :

$$v_p(t) = -\frac{f_0}{m} t e^{-\frac{b}{m} t} + \frac{f_0}{b}$$

(1)

e finalmente

$$v(t) = A e^{-\frac{b}{m} t} - \frac{f_0}{m} t e^{-\frac{b}{m} t} + \frac{f_0}{b}$$

$$\text{Como } v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1 - \frac{f_0}{b}$$

e finalmente

$$v(t) = -\frac{f_0}{m} t e^{-\frac{b}{m} t} + \frac{f_0}{b} - \frac{f_0}{b} e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$= \frac{f_0}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m} t}) - \frac{f_0}{m} t e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$= \frac{f_0}{b} - \frac{f_0}{b} \left(1 + \frac{b}{m} t\right) e^{-\frac{b}{m} t}$$

Método alternativo para obtermos

a

solução particular: Dada a eq. diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = r$,

Suponha que sejam conhecidas duas soluções da equação homogênea, $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Uma forma de encontrarmos uma solução particular consiste em encontrarmos duas funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de forma que

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x),$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são (novamente) conhecidas.

Tomando a 1ª derivada com relação a x temos

$$y_p'(x) = [u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x)] + [u_1(x) y_1'(x) + u_2(x) y_2'(x)] \quad (1)$$

Impondo a condição $u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) = 0$

e ainda calculando $y_p''(x)$ temos

$$y_p''(x) = u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) + \quad (2)$$

$$u_1(x) y_1''(x) + u_2(x) y_2''(x) \text{ e}$$

substituindo (1) e (2) em $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$

temos:

$$u_1(x) [y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] +$$

$$u_2(x) [y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)]$$

$$+ u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) = r(x)$$

Cada termo dentro dos colchetes corresponde a uma solução da homogênea $[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] = 0$ e $[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = 0$

e portanto temos:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = r(x) \\ e \quad u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$$

As equações acima são suficientes para encontrarmos $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Resolvendo o sistema linear encontramos:

$$u_2'(x) = \frac{y_1(x)r(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}$$

e

$$u_1'(x) = \frac{-y_2(x)r(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}$$

Integrando os termos em x obtemos:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

onde

$$u_1(x) = - \int \frac{y_2(t)r(t)dt}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)},$$

$$e \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(t)r(t)dt}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)}$$

O termo no denominador $y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$

denomina-se Wronskiano $W(x; y_1, y_2)$ de y_1 e y_2 e satisfaz a seguinte propriedade: Ou $W(x, y_1, y_2)$ se anula identicamente ou não se anula em nenhum ponto de validade da equação diferencial.

De fato, dadas as soluções da eq. homogênea

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

obtemos, ao multiplicarmos a primeira equação por y_2 e a ~~primeira~~ por y_1 , a seguinte relação:

$$(y_1'' y_2 - y_2'' y_1) + p(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 0$$

Uma vez que $\frac{dW}{dx} = y_1(x) y_2''(x) - y_1''(x) y_2(x)$

$$\text{de forma que } \frac{dW}{dx} + p(x)W = 0 \quad - \int^x p(s) ds$$

$$\text{e então } W(x; y_1, y_2) = C \text{ e}$$

sendo C uma constante. Portanto, vemos ($C \neq 0$) que $W(x; y_1, y_2)$ ou nunca se anula ou se anula identicamente ($C = 0$) no intervalo considerado de validade da equação diferencial.