Aula I - Conceitos Básicos

As três leis de Newton são formuladas de acordo com quatro conceitos cruciais: espaço, tempo, massa e força:

Espaço: Cada ponto P do espaço tri-dimensional "no qual vivemos" pode ser rotulado por um vetor posição $\vec{r}$ que especifica a distância e direção de P a partir da origem O. Utilizando os vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (ou $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$) podemos especificar $\vec{r}$ como

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$ onde

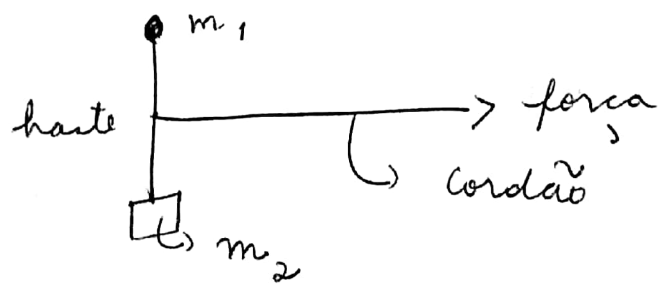
$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ denota o ~~~~ módulo do vetor ~~~~ $\vec{r}$ e com decomposições / projeções x, y, z.

Tempo $\Rightarrow$ A visão clássica de tempo é a de que ele é um parâmetro universal único t no qual todos os observadores estão de acordo.

Em outras palavras, se todos os observadores estiverem equipados com relógios precisos, e perfeitamente sincronizados, todos concordarão com o tempo em que um dado evento ocorreu. Entretanto, sabemos, de acordo a Relatividade Restrita que o tempo não é um conceito absoluto e que dois observadores em movimento relativo não concordam "com todos os tempos".

Massa e Força

A massa de um corpo caracteriza sua inércia, "sua resistência para ser acelerado". Para a medição da massa de um objeto precisamos de um mecanismo para comparar suas massas. Em princípio, a balança inercial pode realizar a medição da massa, conforme descrito a seguir:



Dois objetos a serem comparados são presos às extremidades de uma haste rígida e leve e então submetidos a um "puxão forte" em seu ponto médio.

Se $m_1 = m_2$, elas acelerão igualmente e a haste moverá sem girar.

Se $m_1 \neq m_2$, a haste girará à medida que se move.

Note que a balança inercial fornece uma método de comparação de massas. Na prática porém, seu uso é + complicado e um método + simples é "pesar" os objetos.

Se dois objetos têm a mesma massa e se tiverem o mesmo peso (quando pesados no mesmo local), então uma forma + simples de medição da massa é simplesmente comparar seus pesos.

Força

Todas as forças provém da interação entre diferentes partículas. Uma vez que essas interações são as mais diversas possíveis, um dos segmentos da ciência moderna tem sido na conclusão que há basicamente 3 tipos de forças na natureza

1) Forças gravitacionais → provém da interação entre diferentes objetos devido à suas massas;

$$|\vec{F}_{12}| = G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \qquad m_1 \xrightarrow{\quad r_{12}\quad} m_2 \qquad K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{Kg^2}$$

a força gravitacional é suficientemente pequena quando medida sobre pequenos objetos. Porém, ela assume papel importante quando os objetos são extremamente pesados e outras forças estão praticamente ausentes (ex: sistemas de escala astronômica

2) Forças eletromagnéticas → devido as cargas elétricas em movimento; $|\vec{F}_{12}| = K\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$ $\quad q_1 \xrightarrow{\ r_{12}\ } q_2 \quad K = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}$

3) Forças nucleares que dominam a interação entre partículas subatômicas se elas estão separadas por distâncias menores que 10^{-15} m. e nêutrons

Ela explica por ex. porque os prótons ~~entre~~ se mantém no núcleo, apesar da repulsão elétrica entre eles (prótons).

4) Força Nuclear fraca → $\underbrace{\text{alcance menor que as interações fortes (decaimento } \beta)}$

É instrutivo compararmos as magnitudes dos ≠s tipos de forças. Por ex, vamos considerar 2 prótons separados por 10^{-15} m, i.e, separados por um diâmetro nuclear.

$|F_g| \approx 2 \cdot 10^{-34} N$

$|F_e| \approx 2 \cdot 10^{2} N$

$|F_N (forte)| \approx 2 \cdot 10^{3} N$

$F_N (fraca) \approx 10^{-13} F_N (forte) \approx 2 \cdot 10^{-10} N$.

Leis de Newton

Um dos efeitos de uma força aplicada a um corpo é alterar suas dimensões ou sua forma. Outro efeito é modificar seu estado de movimento.

De uma maneira geral, o movimento de um corpo pode ser considerado como composto de um movimento de translação e de rotação. No caso + geral, uma única força altera tanto o movimento de translação quanto o movimento de rotação.

Entretanto, quando várias forças são aplicadas simultaneamente seus efeitos podem se cancelar, resultando não haver mudanças nem movimento de movimento de translação nem de rotação.

Quando isto acontece, diz-se que o sistema está em equilíbrio.

Isto significa que no equilíbrio o corpo como um todo pode estar em repouso ou movimento com velocidade constante. Este é o enunciado da 1ª Lei de Newton "Todo corpo continua no seu estado de repouso ou movimento com velocidade constante a menos que seja obrigado a mud por meio de forças aplicadas".

Como os fenômenos são observados em relação a um determinado referencial, a especificação do mesmo é importante.

Um sistema inercial de referência é aquele em que um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme q do nenhuma força resultante atua sobre ele.

Nem todos os sistemas de referência são inerciais. Para vermos isto, considere por exemplo um veículo que está em repouso e a seguir começa a acelerar para a direita. Uma passageira sobre patins praticamente não possui nenhuma força resultante atuando sobre ela, visto que as rodas dos patins minimizam os efeitos do atrito e portanto, ~~a~~ a passageira tende a permanecer em repouso no sistema de referência inercial da Terra, de acordo com a 1ª Lei de Newton. Como o veículo acelera para direita, ela se move para trás em relação ao veículo. Um observador fixo do sistema de referência do veículo poderia ser levado a concluir que existe uma força resultante atuando sobre a passageira em cada caso. Esta conclusão está errada: a força resultante sobre a passageira é nula.

Isto ilustra que a 1ª Lei de Newton não vale para o referencial de um carro acelerado. Os referenciais onde ela vale, conforme vimos, são os referenciais inerciais, em que, na ausência de forças o corpo deve estar em repouso ou em M.R.U.

algum comentários se fazem necessários:

(1ª Lei de Newton)

1) Ela afirma que na ausência de forças aplicadas, um corpo permanece em repouso ou se move em movimento retilíneo uniforme.

Segue-se que uma vez colocado em movimento, não é necessário exercer uma força para mantê-lo neste estado.

Nossa experiência diária parece contradizer esta afirmativa, uma vez que ao empurrarmos um objeto que está em movimento e depois deixamos de empurrá-lo, ele não se move indefinidamente mas vai parando até ficar em repouso.

Acontece que o atrito existe (força de atrito) existe e faz com que o corpo vá parando.

Por outro lado, se a superfície fosse polida, o objeto percorreria uma distância maior até parar. No limite de uma superfície perfeitamente lisa, ele se movimentaria indefinidamente, mesmo na ausência de forças.

2) A 1ª Lei define, por implicação, um sistema inercial de referência.

Para entendermos o significado desta expressão, devemos reconhecer que o movimento de um corpo só pode ser especificado em relação a um outro.

3). A 1ª lei de Newton contém uma definição qualitativa de força, como "aquele que muda o estado de movimento de um corpo".

2ª Lei de Newton

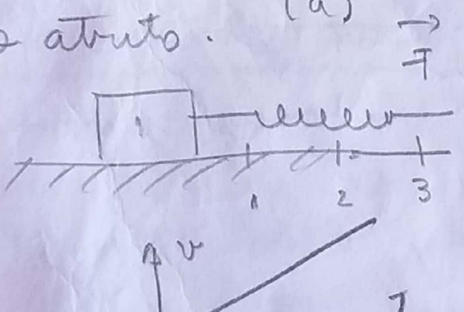
Uma das implicações da 1ª lei de Newton é que $\forall$ variação da velocidade $\vec{v}$ (módulo, direção ou sentido) em relação a um referencial inercial, ou seja, qualquer aceleração deve estar associada à ação de forças. Ou seja,

$$\vec{F} \propto \vec{a} \quad \left(\vec{F} \propto \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

Isto nos sugere encontrar uma relação mais precisa entre força e aceleração.

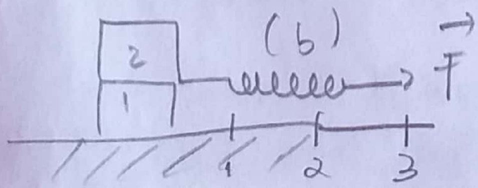
Para isto, vamos comparar a força em diferentes situações. Considere experiências idealizadas que poderiam ser feitas com discos deslizantes sobre uma camada de gás, para minimizar o atrito.

(a)

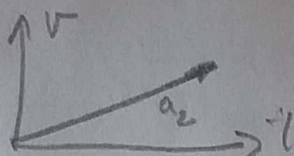


A força é medida pela distensão da mola e é aplicada ao disco D, que desliza com movimento uniformemente acelerado na direção de $\vec{F}$.

(b)



A força que atua é a mesma (mesma marcação), porém existem dois discos empurrados. Neste caso, a aceleração caiu pela metade.



Ou seja,

$$\vec{F} = k_1 \vec{a_1} = k_2 \vec{a_2}$$ de forma que $\vec{a_2} = \dfrac{\vec{a_1}}{2}$.

assim: $k_1 |\vec{a_1}| = k_2 \dfrac{|\vec{a_1}|}{2} \Rightarrow k_1 = \dfrac{k_2}{2}$.

Sabe-se que $m_2 > m_1$. Ou seja k pode ser identificada com a massa do corpo.

Isto nos dá a relação

$$\vec{F} = \underbrace{m \vec{a}}_{kg \; m/s^2} \qquad [F] = kg\, m/s^2 = 1N. \; (S.I)$$

força resultante.

3ª Lei de Newton

Uma força atuando sobre um corpo é sempre resultado de uma interação ~~de um co~~ com outro corpo, de modo que as forças sempre ocorrem aos pares.

Por ex: ao chutarmos uma rocha, sentimos uma dor, em virtude da rocha também exercer uma força sobre nosso pé.

Estes e muitos outros exemplos servem para ilustrar que um corpo (1) que exerce uma força sobre um corpo (2), o corpo (2) também exercerá uma força sobre o corpo (1). (4)

Essas forças, decorrentes da interação, possuem mesmo módulo, direção e sentidos contrários.

Este resultado constitui a formulação da 3ª lei de Newton.

Assim:

$$\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}.$$

Se escrevermos a 2ª lei de Newton para cada um dos corpos, teremos que

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{2(1)}$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{1(2)}.$$

mas $\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}$ de forma que

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0,$$

ou seja, $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = cte$, $\forall$s que sejam as forças de interação entre os corpos 1 e 2.

Algumas forças especiais

Força gravitacional ⇒ É a força de atração de um corpo com a Terra. Não consideraremos aqui atração entre corpos ≠s, em virtude desta força ser praticamente desprezível, qdo comparada com outras forças.

$$\vec{T}_g \equiv \vec{F}_{1(T)} = -G\frac{m_1 m_T}{R^2}\vec{J} \approx -\underbrace{\frac{G m_T}{R^2}}_{g} m_1 \vec{J} = -m_1 g \vec{J}$$

dirigida p/ baixo

R é a distância entre o corpo e o centro da Terra $\approx R_T \Rightarrow G\, m_T/R^2 \approx 9{,}78\, m/s^2$

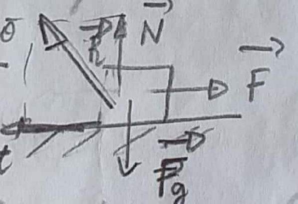
Peso ⇒ É a força necessária para impedir que o corpo caia livremente, medida por alguém do solo.

Ex: Uma bola com peso 3N exigiria uma força de 3N para equilibrá-la.

De uma maneira geral, dada a força de atração gravitacional $\vec{F_g}$, precisaríamos de uma força de $\vec{P} = -\vec{F_g} = m\vec{g}$ para equilibrá-lo.

O peso de um corpo é = ao módulo F_g da força gravitacional sobre o corpo.

Forças de Contato



* Força Normal

Quando estamos de pé sobre uma cadeira, embora a Terra nos "puxe" para baixo, permanecemos em repouso. A razão é que a cadeira exerce uma força sobre nós dirigida para uma direção que anula a força gravitacional que a Terra exerce sobre nós. Esta força é denominada força normal $\vec{F_N}$ e é devido ao contato entre o corpo e a cadeira (neste caso). Como estamos em repouso, a 2ª Lei de Newton diz que

$$F_N - F_g = 0 \Rightarrow |\vec{F_N}| = |\vec{F_g}|$$

$$\text{Mas } |\vec{F_g}| = mg \Rightarrow |\vec{F_N}| = mg$$

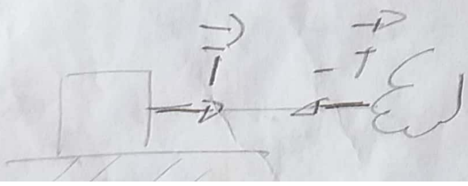
* Força de atrito

Se empurrarmos ou tentamos empurrar um corpo sobre uma superfície, há uma resistência ao movimento devido à uma interaç entre o corpo e a superfície (o corpo pára depois de um certo tempo). Tal ~~interação~~ resistencia se denomina força de atrito e é dirigida ao longo da superfície (// à superfície)

Forças de atrito também podem atuar quando não há movimento relativo. Por ex, uma força horizontal aplicada a um caixão pesado repousando sobre o chão pode não ser suficiente para movê-lo, porque o chão exerce no caixão, uma força de atrito igual e oposta.

Tensão
↓

É a força que uma corda (cabo, fio ou outros objetos do tipo) exercem sobre um corpo quando esta está esticada. Seu sentido está ao longo da corda e se afasta do corpo.



3ª Lei de Newton

Uma força atuando sobre um corpo é sempre resultado de uma interação com outro corpo, de modo que as forças sempre "atuam" aos pares. Dentre os exemplos citamos uma pessoa chutando uma rocha. Ela sentirá dor, em virtude da rocha também exercer uma força sobre o pé da pessoa.

De uma maneira geral, dado um corpo $\underline{\underline{1}}$ que exerce uma dada força $\vec{F}_{2(1)}$ sobre o corpo 2, o mesmo corpo 2 exercerá uma força $\vec{F}_{1(2)}$ sobre o corpo 1. As forças $\vec{F}_{2(1)}$ e $\vec{F}_{1(2)}$ possuem mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários. Este resultado constitui a formulação da 3ª lei de Newton.

$$\text{Assim} \quad \vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}$$

Conforme veremos na próxima aula, a 3ª lei de Newton está diretamente relacionada com um importante teorema de conservação, conforme descreveremos a seguir.

Teoremas de Conservação

As leis de Newton, descrevendo/ regindo, o movimento de um corpo (de forma geral) leva à 3 importantes leis/ teoremas de conservação. Embora as leis de Newton não valham na Mecânica Quântica, os três teoremas de conservação possuem/ apresentam uma contrapartida da Mec. Quântica, ilustrando dessa forma, suas importâncias e grandes aplicabilidades para descrição de diversos sistemas físicos, muitas vezes, não apenas na Mecânica, como também em outras áreas como o Eletromagnetismo e Mecânica Quântica.

OS 3 importantes teoremas de conservação são:

- Conservação da Energia Mecânica
- Conservação do Momento Linear
- Conservação do Momento Angular

Conservação da energia Mecânica

A energia cinética de um corpo é dada por

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right),$$

onde de acordo com a 2ª lei de Newton $\vec{F} = m \vec{a}$ ou ainda

$$m \frac{dv_x}{dt} = f_x \qquad \left(\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \right)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = f_y \qquad \vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \Big)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = f_z$$

Tomando a derivada temporal da energia cinética da partícula, temos

$$\frac{dT}{dt} = m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) \quad (*1)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{(usamos as relações acima)}$$

de forma que a derivada / variação temporal da energia cinética é a potência instantânea da partícula.

Por outro lado uma vez que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2\right) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt}$$, temos que

$$\frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l}, \qquad (*2)$$

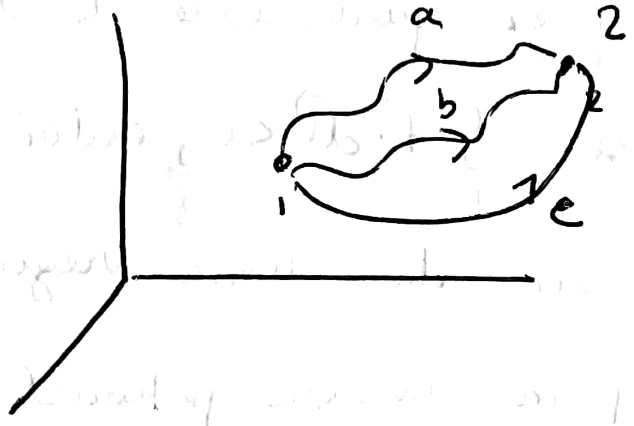
de forma que a equação (*1) é equivalente à equação (*2) e implica que a variação da energia cinética da partícula entre dois pontos quaisquer (entre 1 e 2 aqui) é igual ao trabalho realizado pela <u>força resultante</u> $\vec{F}$ sobre a partícula entre os mesmos pontos 1 e 2.!

A relação acima é geral e é válida para quaisquer tipos de forças ~~Lda~~ satisfazendo a 2ª Lei de Newton.

Se $\frac{1}{2}m v_2^2 > \frac{1}{2}m v_1^2$, então a energia cinética da partícula aumentou de forma que $\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l}$ (o trabalho resultante da força sobre a partícula é positivo). Caso $\frac{1}{2}m v_2^2 < \frac{1}{2}m v_1^2$,

$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} < 0$, de forma que o trabalho realizado pela força resultante sobre a partícula é negativo.

Vamos agora examinar o trabalho realizado entre dois pontos quaisquer $\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dl}$ ao longo de diferentes trajetórias, conforme especificado / exemplificado abaixo:



Para algumas forças (força gravitacional, força elástica, força eletrostática), a integral $\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dl}$ não depende da trajetória (especificada pela relação entre $\vec{F}$ e $\vec{dl}$), mas depende somente de seus valores calculados em 1 e em 2. Essas forças são chamadas de forças conservativas e possuem uma grande importância. Nesses casos:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dl} = -(U_2 - U_1), \quad (*2)$$ onde

U_2 e U_1 correspondem à energia potencial da partícula nos pontos 2 e 1, respectivamente.

De acordo com a expressão acima, se $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} > 0$, então $U_2 < U_1$ de forma que a partícula irá de uma "região" de energia potencial maior para energia potencial menor (ex: queda livre de uma partícula).

Por outro lado, se $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} < 0$, então $U_2 > U_1$ e a partícula irá de uma região de energia potencial menor para energia potencial maior (ex: partícula em "subida" sob a ação da força gravitacional).

Para essas forças, chamadas de conservativas,
A equação (*2') ainda pode ser escrita dessa forma quando a força $\vec{F}$ for associada ao gradiente da função escalar U

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

onde $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$

e então

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) =$$

$$-\int_1^2 dU = -(U_2 - U_1),$$

onde usamos a definição de diferencial exata: $U = U(x,y,z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

$$dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Portanto, para forças conservativas

$$T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1)$$ ou ainda

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2,$$

de forma que a quantidade $T + U$, denominada energia mecânica, se conserva ao longo da trajetória entre os pontos 1 e 2.

Podemos ainda escrever a conservação da energia mecânica sob a forma diferencial:

$$\int_1^2 dT = -\int_1^2 dU \Rightarrow d(T+U) = 0,$$

e portanto $T + U =$ constante!

Como um último comentário, uma força será conservativa se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, isto é, se seu rotacional for nulo! Nesses casos, $\vec{F}$ será conservativa e poderá ser escrita como o negativo do gradiente de uma energia potencial

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U.$$

apêndice: se $\vec{F}$ é conservativa, então $\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\int_2^1 \vec{F} \cdot \vec{dl} \Leftrightarrow$

$\oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \Longrightarrow \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{da} = 0$

Teorema de Stokes, então

finalmente, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Por outro lado, quando uma força $\vec{F}$ (como a força de atrito por exemplo) não for conservativa, o trabalho realizado ao longo de uma trajetória dependerá da própria trajetória. Nesse caso, não podemos escrevê-la como o negativo do gradiente de um potencial (energia potencial)

Num caso geral, temos tanto forças conservativas como forças não conservativas. Assim,

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

(relação geral válida para qualquer força)

$$= \underbrace{\int_1^2 \vec{F}_c \cdot \vec{dl}}_{\text{trabalho realizado pelas forças conservativas}} + \underbrace{\int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot \vec{dl}}_{\text{trabalho realizado pelas forças não conservativas}}$$

Portanto

$$\int_1^2 dT = \overbrace{-\int_1^2 dU}^{\text{para forças conservativas, a integral pode ser relacionada com a energia potencial}} + \int_1^2 \vec{F}_{nc}\cdot\vec{dl}$$

e então a variação da energia mecânica $T+U$ é dada por

$$\Delta(T+U) = \int_1^2 d(T+U) = \int_1^2 \vec{F}_{nc}\cdot\vec{dl}, \qquad (*3)$$

que é justamente o trabalho realizado pelas forças não conservativas. Ou seja, a quantidade de energia mecânica variada $\Delta(T+U)$ é justamente o trabalho realizado pelas forças não conservativas.

Se $\Delta(T+U)<0$, ou seja, caso a energia mecânica diminua, então $\int_1^2 \vec{F}_{nc}\cdot\vec{dl} < 0$!

A relação (*3) expressa um princípio de conservação de energia mais geral que a energia mecânica! e implica na conversão de energia mecânica em outras formas de energia!

Finalmente, vamos considerar o caso em que a energia potencial depende explicitamente do tempo. Dada a relação geral

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

temos que nesse caso

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$= \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l} + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

$$= - \vec{F} \cdot d\vec{l} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Se a força for conservativa, temos $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$.

Comparando as equações acima, temos

$$dT = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

ou ainda

$$d(T+U) = \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

e finalmente

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{\partial U}{\partial t},$$

de forma que a variação temporal da energia mecânica é justamente a variação ~~temporal~~ da energia potencial com relação ao tempo!

Conservação do momento linear

Conforme vimos anteriormente, a 2ª lei de Newton fornece uma relação matemática específica para determinar a mudança da velocidade sobre diferentes "influências", denominadas forças. Ela estabelece que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

No caso de partícula cuja massa não varia com o tempo, podemos reescrever o lado direito da 2ª lei de Newton da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$

onde a quantidade $m\vec{v}$ é denominada vetor momento linear. Ou seja, a variação temporal do vetor momento linear é igual a resultante das forças (força resultante)!

Consideremos agora um sistema de $\underline{\underline{N}}$ partículas, onde cada partícula $\underline{\underline{i}}$ tem massa m_i, velocidade (vetor) $\vec{v}_i$ e está sujeita as seguintes forças:

$\vec{F}_{i(j)}$ → força atuando sobre a partícula i devido à interação j. Essa força será chamada de "interna".

$\vec{F}_i^{(ext)}$ → força externa ("não constitui" um par ação-reação) ex: força gravitacional atuando sobre a partícula i).

Comentário importante: Embora todas as forças sempre constituam um par ação-reação, algumas forças (o peso por exemplo) ~~...~~ às vezes atua como uma "força externa" já que a Terra muitas vezes não "entra" nas equações de movimento.

As equações de movimento são dadas por

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{1(3)} + \dots + \vec{F}_{1(N)} + \vec{F}_1^{(ext)}$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{2(1)} + \vec{F}_{2(3)} + \dots + \vec{F}_2^{(ext)}$$

$$\vdots$$

$$m_N \frac{d\vec{v}_N}{dt} = \vec{F}_{N(1)} + \vec{F}_{N(2)} + \dots + \vec{F}_{N(N-1)} + \vec{F}_N^{(ext)}$$

Somando todas as equações acima, temos

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N) = \vec{F}_1^{(ext)} + \vec{F}_2^{(ext)} + \dots + \vec{F}_N^{(ext)},$$

uma vez que $\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}$ e portanto todas as forças "internas" cancelam-se

Portanto se $\vec{F}_1^{(ext)} + \vec{F}_2^{(ext)} + \ldots \vec{F}_N^{(ext)} = \vec{0}$, a quantidade $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$ será constante e portanto conservada. O vetor momento linear é uma grandeza bastante importante e aparece em diversos sistemas além da Mecânica clássica, como por exemplo na Mecânica Quântica. Além disso, no contexto da Mecânica clássica, eles são importantes por exemplo em colisões, onde as forças internas (muito intensas porém atuando durante um intervalo de tempo muito curto) faz com que se possa desprezar as forças externas, de forma que o vetor momento linear se conserva após a colisão. Estudaremos um pouco sobre a conservação do vetor momento linear ao longo deste curso.

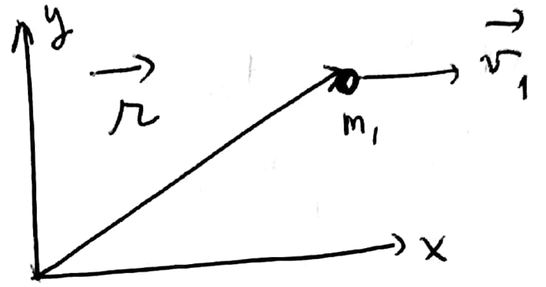
Momento Angular

Uma quantidade (grandeza) que apresenta um papel fundamental na Dinâmica (por exemplo no movimento de corpos celestes ou dinâmica de rotação) é o vetor momento angular $\vec{L}$ definido por

$\vec{p}$ = vetor momento linear

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$ onde $\vec{r}$ = vetor distância da origem ao vetor $\vec{p}$.

A figura abaixo ilustra os vetores $\vec{r}$, $\vec{p}$ e $\vec{L}$.



O vetor $\vec{L}$ é perpendicular simultaneamente a $\vec{r}$ e $\vec{p}$, dada a natureza do produto vetorial!

Note que o momento angular (vetor) possuirá em geral diferentes valores dependendo da origem (especificado pelo vetor $\vec{r}$).
Tomando a derivada de $\vec{L}$ com relação ao tempo, temos que

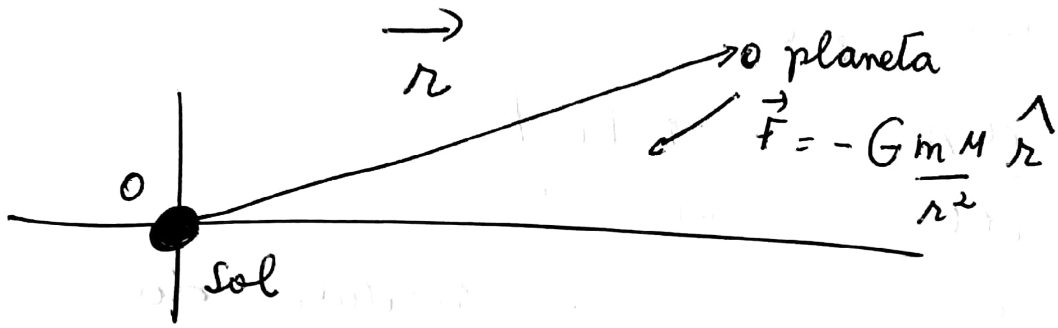
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Como $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e $\vec{v}$ é paralelo à $\vec{p}$, segue que $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$ e então

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau}$$

O produto $\vec{r} \times \vec{F}$ é denominado torque $\vec{\tau}$ sobre a partícula devido à força $\vec{F}$.
Note que $\vec{\tau}$ calculado sobre diferentes "pontos" (diferentes $\vec{r}$'s) resultarão em torques diferentes.

Em particular se $\vec{r} \times \vec{F}$ for nulo, segue que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ e portanto o vetor momento angular será constante. Isto é o que ocorre quando uma partícula é sujeita à uma força central, conforme ilustrado a seguir.



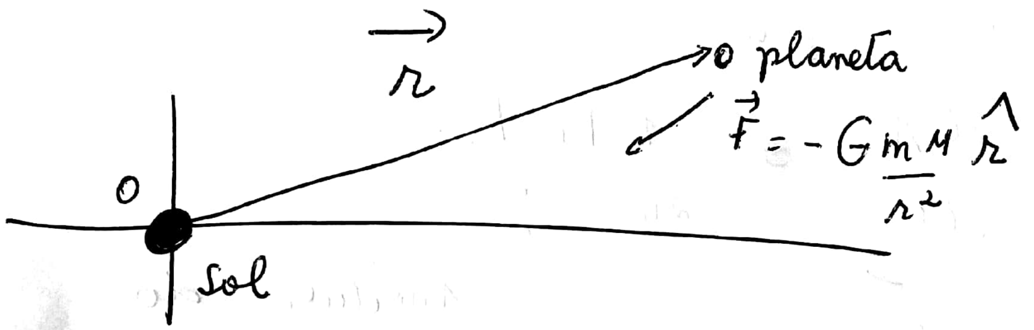
Uma força é dita central quando seu módulo depende apenas da distância entre os corpos e a direção é dirigida ao longo da "linha reta" que une os dois corpos.

Neste caso o torque atuando sobre o planeta é dado por (torque calculado a partir da origem em que está o Sol)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \right).$$

Como $\vec{r}$ é anti-paralelo à $\vec{F}$ (em qualquer ponto em que o planeta esteja) $\vec{\tau} = \vec{0}$. Portanto $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{0}$, de forma que

Em particular se $\vec{r} \times \vec{F}$ for nulo, segue que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ e portanto o vetor momento angular será constante. Isto é o que ocorre quando uma partícula é sujeita à uma força central, conforme ilustrado a seguir.



Uma força é dita central quando seu módulo depende apenas da distância entre os corpos e a direção é dirigida ao longo da "linha reta" que une os dois corpos.

Neste caso o torque atuando sobre o planeta é dado por (torque calculado a partir da origem em que está o Sol)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \left(-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \right).$$

Como $\vec{r}$ é anti-paralelo à $\vec{F}$ (em qualquer ponto em que o planeta esteja) $\vec{\tau} = \vec{0}$. Portanto $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{0}$, de forma que

— o vetor momento angular $\vec{L}$ do planeta é sempre conservado.

Conforme mostraremos adiante, a conservação do vetor momento angular terá diversas consequências no movimento de uma partícula sujeita à uma força central, como por exemplo, na obtenção da 2ª lei de Kepler. Mais especificamente mostraremos que

$$\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{\text{variação temporal da área varrida pelo planeta}} = \frac{1}{2m} \underbrace{|\vec{\ell}|}_{\text{módulo do vetor momento angular}},$$

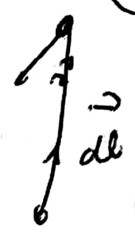
Como $|\vec{\ell}|$ é constante, $\Delta A = cte. \Delta t$, ou seja, "varre áreas =s" em "tempos iguais"!

Além disso, como a força central é conservativa

$$\left(\vec{\nabla} \times \left(-G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \right) = 0 \right),$$ a energia total também é conservada!

Em outras palavras

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r}\cdot\vec{dl}$$



$$\hat{r}\cdot\vec{dl} = \hat{r}\cdot(\hat{r}\,dr + \vec{dl}_\perp)$$

direção ⊥ perpendicular à $\hat{r}\,dr$!

$$= dr$$

de forma que

$$U_2 - U_1 = -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \quad e$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = +\frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

e portanto

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$$

Muitas vezes é comum escolhermos um sistema de referência no infinito, de forma que $U(-\infty) = 0$. Neste caso

$$U(r) - U(-\infty) = -\int_{-\infty}^{r} \frac{GMm}{r'^2}\,dr'$$

$$\boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

A energia potencial em qualquer ponto r fica definida.

Nós usaremos as duas leis de conservação, energia mecânica e momento angular, para descrevermos o movimento de uma partícula sujeita à uma força central do tipo

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Para mostrarmos a 2ª lei de Kepler é mais conveniente