Capítulo 1

Controlador PID discreto

1.1 Objetivo

O objetivo deste experimento é introduzir ao estudante as noções básicas de um controlador PID discreto para um motor de corrente contínua.

1.2 Modelo matemático

Um motor elétrico de corrente contínua é composto por uma parte móvel (rotor), definida por um conjunto de espiras (bobina), e uma parte fixa (estator), geradora de campo magnético. O seguinte esquema eletromecânico, Figura 1.1, representa o motor elétrico de corrente contínua:

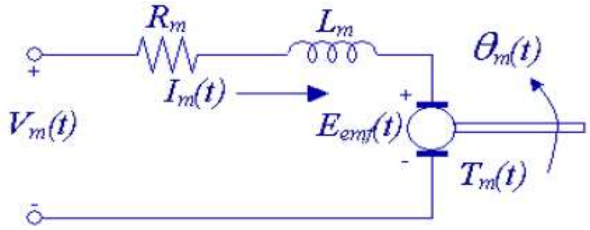

Figura 1.1: Diagrama eletromecânico do motor de corrente contínua.

sendo $V_m(t)$ a tensão aplicada à bobina, $I_m(t)$ a corrente, R_m a resistência de armadura, L_m a indutância característica do rotor, E_{emf} a força contraeletromotriz induzida na bobina pelo campo magnético do estator, $T_m(t)$ o torque desenvolvido pelo motor e $\theta_m(t)$ a posição angular do eixo do motor.

Usando a lei de Kirchhoff de tensão, obtém-se a equação abaixo:

$$V_m - R_m I_m - L_m \frac{dI_m}{dt} - E_{emf} = 0. \tag{1.1}$$

Como geralmente $L_m << R_m$, pode-se desconsiderar a indutância do motor, assim:

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m}. \tag{1.2}$$

Sabe-se que a força contraeletromotriz gerada pelo motor é proporcional à velocidade do rotor, ω_m, tem-se:

$$I_m = \frac{V_m - K_m \dot{\theta}_m}{R_m} \qquad (\dot{\theta}_m = \omega_m), \tag{1.3}$$

sendo K_m a constante contraeletromotriz.

Do ponto de vista mecânico, aplicando as leis de Newton-Euler ao movimento do rotor do motor:

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - \frac{T_l}{\eta_g K_g}, \tag{1.4}$$

sendo T_l o torque na carga, K_g a relação de engrenagens entre o motor e a carga, e η_g a eficiência da caixa de engrenagens.

Considerando o movimento da carga acoplada ao motor, temos:

$$J_l \ddot{\theta}_l = T_l - B_{eq} \dot{\theta}_l, \tag{1.5}$$

sendo B_{eq} o coeficiente viscoso de amortecimento.

A equação dinâmica do movimento é dada por:

$$J_l \ddot{\theta}_l = \eta_g K_g T_m - \eta_g K_g J_m \ddot{\theta}_m - B_{eq} \dot{\theta}_l. \tag{1.6}$$

Utilizando as transformações $\theta_m = K_g\theta_l$ e $T_m = \eta_m K_t I_m$ (sendo η_m a eficiência do motor e K_t a constante de torque do motor), a equação (1.6) pode ser reescrita como:

$$J_l\ddot{\theta}_l + \eta g K_g^2 J_m \ddot{\theta}_l + B_{eq}\dot{\theta}_l = \eta_g \eta_m K_g K_t I_m. \tag{1.7}$$

Finalmente, combinando as equações elétrica, (1.3), e mecânica, (1.7), temos:

$$J_{eq}R_m\ddot{\theta}_l + (B_{eq}R_m + \eta_g\eta_m K_m K_t K_g^2)\dot{\theta}_l = \eta_g\eta_m K_t K_g V_m, \tag{1.8}$$

sendo $J_{eq} = J_l + \eta_g J_m K_g^2$.

A função de transferência que estabelece a relação entre a posição angular da carga acoplada ao eixo, θ_l e a tensão aplicada ao motor, V_m, é dada por:

$$G(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g}{J_{eq}R_m s^2 + (B_{eq}R_m + \eta_g\eta_m K_m K_t K_g^2)s}. \tag{1.9}$$

Considerando os parâmetros descritos no Apêndice A, a função de transferência do motor CC utilizado nesta prática é dada por (Obs.: Atenção à transformação de unidades: radianos $\rightarrow$ graus.):

$$G(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{3674}{s^2 + 37s}. \tag{1.10}$$

1.3 Procedimento de laboratório

1.3.1 Ligações e conexões

A primeira tarefa é assegurar que todo o sistema está ligado corretamente. Se você está inseguro com a ligação, chame o professor.

Anote os resultados encontrados nas folhas de respostas apresentadas na Seção 1.5 e responda as demais questões. Estas folhas correspondem ao relatório da prática e devem ser entregues ao professor no final da aula.

1.3.2 Análise do Controle Proporcional

Inicialmente, considere o controlador proporcional, $u(k) = K_p(\theta_l^d - \theta_l)$.

- Execute o arquivo **Motor.m** no ambiente de trabalho do Matlab. O valor de T_0 considerado é 30 ms.
- Encontre o valor máximo do ganho K_p tal que o sistema em malha fechada seja estável (polos de malha fechada devem pertencer ao círculo unitário).
- Abra o arquivo **Proporcional.vi**.
- Execute o controle proporcional considerando $T_0 = 30$ ms.
- Encontre o valor máximo do ganho K_p tal que a resposta ao degrau unitário seja estável.
- Verifique no Matlab o desempenho esperado (amortecimento e frequência natural) se este controlador proporcional fosse implementado analogicamente. Faça o Lugar das Raízes da planta contínua $G(s)$.
- Altere o valor de T_0 nos arquivos **Motor.m** e **Proporcional.vi** e analise novamente os valores de K_p máximos.

1.3.3 Controlador PID

No experimento descrito nesta seção será implementado o controlador PID discreto para o motor de corrente contínua.

Considere a aproximação dos termos integral e derivativo do controlador, ou seja, para T_0 pequeno,

$$u(k) = K_p \left[e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{v=0}^{k} e(v) + \frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1)) \right].$$

O controlador PID discreto recursivo é dado por:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

$$\begin{aligned}
q_0 =& K_p + \frac{K_d}{T_0} + K_i T_0,\\
q_1 =& -K_p - \frac{2K_d}{T_0},\\
q_2 =& \frac{K_d}{T_0},
\end{aligned}$$

sendo

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \qquad e \qquad K_d = K_p T_d.$$

- Execute o arquivo **MotorPID.m** no ambiente de trabalho do Matlab. O valor de T_0 considerado é 5 ms. Altere os valores de K_p, K_i e K_d. Verifique a resposta ao degrau unitário.

- Encontre valores de K_p, K_i e K_d tais que a reposta ao degrau unitário apresente sobressinal de 10% e tempo de subida $t_r = 60ms$. **Faça este ajuste de forma empírica**.

- Utilizando os valores obtidos no passo anterior, calcule os valores de q_0, q_1, q_2, z_1 e z_2, considerando uma parametrização do controle PID como:

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - z} = \frac{q_0(z - z_1)(z - z_2)}{z^2 - z}, \quad \frac{q_1}{q_0} = -(z_1 + z_2), \quad \frac{q_2}{q_0} = z_1 z_2.$$

- Abra o arquivo **PIDdiscreto.vi** e execute-o.

- Utilize os ganhos K_p, K_i e K_d encontrados anteriormente e verifique a resposta obtida. Quais as diferenças com relação à resposta simulada (Matlab)?

- Abra o arquivo **PIDdiscreto_2.vi**.

- Utilize os mesmos ganhos K_p, K_i e K_d, e compare os resultados obtidos com o PID recursivo. Utilize:

$$\begin{aligned}
K_c =& K_p\\
T_i(min) =& \frac{K_p}{60K_i},\\
T_d(min) =& \frac{K_d}{60K_p}.
\end{aligned}$$

1.4 Apêndice - A: Parâmetros do sistema

Tabela 1.1: Parâmetros do sistema

Símbolo	**Nome**	**Valor**	**Unidades**
K_t	Constante de Toque do Motor	0.00767	Nm/A
K_m	Constante da Força Contra Eletromotriz	0.00767	$V/(rad/s)$
R_m	Resistência da Armadura	2.6	Ω
K_g	Redução	70:1	
B_{eq}	Coeficiente Viscoso de Amortecimento	0.004	$Nm/(rad/s)$
J_m	Momento de Inércia do Rotor	$4.6e^{-7}$	kgm^2
J_l	Momento de Inércia Equivalente (Disco)	$2.13e^{-3}$	kgm^2
η_m	Eficiência do Motor	0.69	
η_g	Eficiência da Redução	0.9	

1.5 Relatório da Prática

Integrantes do Grupo:

1:____

2:____

3:____

4:____

5:____

6:____

1. Análise do Controle Proporcional

    a) Valor de K_p máximo, considerando o projeto via Lugar das Raízes:

    $$K_p = ...$$

    b) Valor de K_p máximo, considerando a resposta real do motor:

    $$K_p = ...$$

    c) Analise os valores encontrados e indique as possíveis causas de diferenças entre eles.
    R. ____

    ____

    ____

    ____

    d) Analise o desempenho do sistema em malha fechada (amortecimento e frequencia natural) se este controlador proporcional fosse implementado analogicamente. Faça o Lugar das Raízes da planta contínua $G(s)$.
    R. ____

    ____

2. Controlador PID

a) Valores de K_p, K_i e K_d:

$$K_p = \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad K_i = \ldots\ldots\ldots \qquad e \qquad K_d = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) Valores de q_0, q_1 e q_2:

$$q_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad q_1 = \ldots\ldots\ldots \qquad e \qquad q_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) Compare os resultados simulados (Matlab) e reais. Por que são diferentes?

R.

d) Avalie os efeitos dos ganhos K_p, K_i e K_d.

R.

e) Compare os resultados do controlador discreto recursivo e do controlador PID do LabVIEW.

R.