SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 9 - Espaço de Estados Discreto

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Espaço de Estados

- Representação no Espaço de Estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) =& A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) =& C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

- **x**: estado
- **u**: entrada
- **y**: saída

Espaço de Estados

- Propriedades da exponencial

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$e^{0} = I$$

$$(e^{-At})^{-1} = e^{At}$$

Espaço de Estados

- Representação no Espaço de Estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) =& A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) =& C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

- Pré-multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{-At} obtém-se

$$\begin{aligned}e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-At}A\mathbf{x}(t) &= e^{-At}B\mathbf{u}(t)\\ \frac{d}{dt}(e^{-At}\mathbf{x}(t)) &= e^{-At}B\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

- Integrando de 0 a t

$$e^{-At}\mathbf{x}(\tau)|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) - e^0\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Espaço de Estados

- Solução em um período de amostragem

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{AT}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- Segurador de ordem zero:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT), \quad kT \leq \tau \leq kT+T$$

- Fazendo $\eta = kT + T - \tau$

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{AT}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{A\eta} d\eta B\mathbf{u}(kT)$$

- Define-se

$$F = e^{AT} \qquad G = \int_0^T e^{A\eta} d\eta B$$

Discretização no Espaço de Estados

- Sistema discreto:

$$\mathbf{x}(kT + T) = F\mathbf{x}(kT) + Gu(kT)$$

- sendo

$$\begin{aligned} F =& e^{AT} = I + AT\Psi \\ \Psi =& I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \cdots \\ G =& \int_0^T e^{A\eta} d\eta B = \Psi TB \end{aligned}$$

Discretização no Espaço de Estados

- Exemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

- Espaço de estados discreto

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Espaço de Estados Discreto

- Representação no espaço de estados

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= F\mathbf{x}(k) + Gu(k) \\ y(k) &= C\mathbf{x}(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Espaço de Estados para Função de Transferênica

$$G(z) = C(zI - F)^{-1}G + D$$

- Exemplo

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Estabilidade no Espaço de Estados

- Equação característica

$$det(zI - F) = 0$$

- Autovalores de F

$$det(\lambda I - F) = 0$$

- Pólos de $G(z) \Leftrightarrow$ autovalores de F
- Estabilidade: autovalores de F dentro do círculo unitário

Controle no Espaço de Estados

- Cálculo do **controlador**: realimentação do estado
- Cálculo do **observador**
- Combinação do controlador + observador: realimentação da saída

Controle por Realimentação do Estado

- Lei de controle

$$u(k) = -K\mathbf{x}(k) = [k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots \; k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- tal que

$$F - GK \;\; \text{seja estável}$$

Controle por Realimentação do Estado

- Equação característica desejada

$$(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = 0$$
$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

- Exemplo

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

- Pólos em: $z = 0.8 \pm 0.25j$ com $T = 0.1$ s

Controle por Realimentação do Estado

- Fórmula de Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha(F)$$

- Matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad F^2G \quad \cdots \quad F^{n-1}G]$$

- e

$$\alpha(F) = F^n + \alpha_1 F^{n-1} + \alpha_2 F^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$$

Observador

- Duas formas:
  - Preditor($\bar{\mathbf{x}}(k)$): estado $\mathbf{x}(k)$, usando as medidas até $y(k-1)$
  - Estimador ($\hat{\mathbf{x}}(k)$): estado $\mathbf{x}(k)$, usando as medidas até $y(k)$
- Controlador: $u = -K\hat{\mathbf{x}}$ ou $u = -K\bar{\mathbf{x}}$

Observador

- Dinâmica do Preditor:

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = F\bar{\mathbf{x}}(k-1) + Gu(k-1) + L_p(y(k-1) - C\bar{\mathbf{x}}(k-1))$$

- sendo

$$L_p = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Observador

- Erro de estimativa:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = (F - L_p C)\tilde{\mathbf{x}}(k-1),$$

- Se $(F - L_p C)$ é estável $\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(k) \rightarrow 0$

Observador

- Pólos desejados: $z_i = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

$$(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n) = 0$$

- Exemplo: Pólos do observador: $z = 0.4 \pm 0.4j$ e $T = 0.1$ s

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

Observador

- Estimador:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = F\hat{\mathbf{x}}(k-1) + Gu(k-1) + L_c(y(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k-1))$$

- Erro de estimativa

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = (F - FL_cC)\tilde{\mathbf{x}}(k-1),$$

- $L_p = FL_c$