SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 7 - Equivalência entre Funções de Transferência Contínuas e Discretas

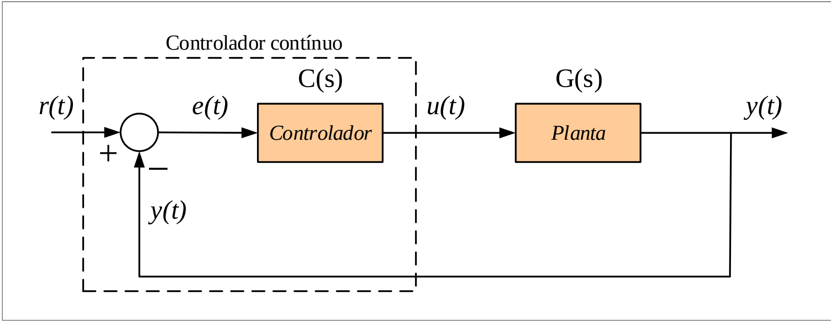
Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

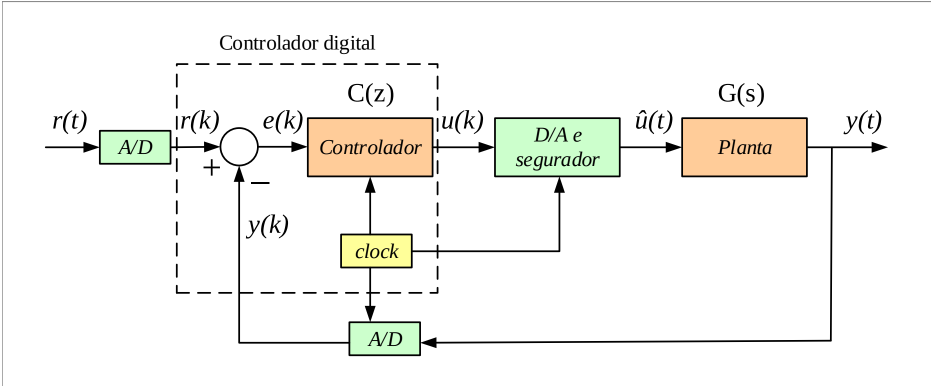
Índice

- Motivação
- Equivalência por Mapeamento de Pólos e Zeros
- Equivalência por Integração Numérica
- Equivalência por Segurador de Ordem Zero
- Exercício

- Planta Contínua → projeto → Controlador Contínuo

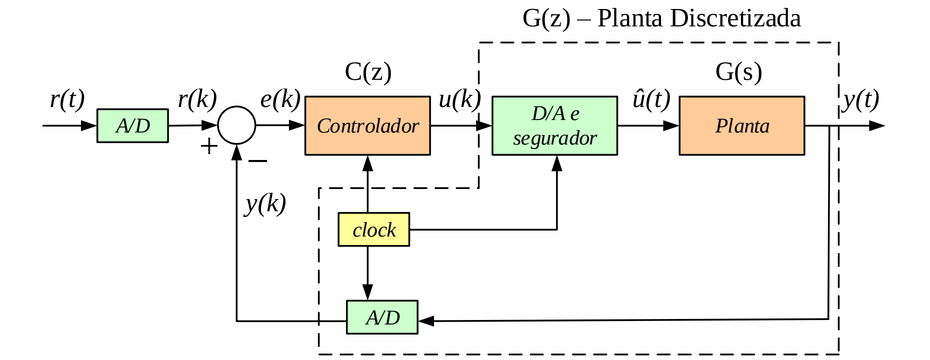


- Planta Contínua → projeto → Controlador Contínuo
- Controlador Contínuo → equivalência → Controlador Discreto



Equivalência entre Funções Transferência - Motivação 2

- Planta Contínua $\rightarrow$ equivalência $\rightarrow$ Planta Discretizada
- Planta Discretizada $\rightarrow$ projeto $\rightarrow$ Controlador Discreto



Equivalência por Mapeamento de Pólos e Zeros

1. Mapear os pólos de $H(s)$ de acordo com

$$z = e^{sT}$$

2. Mapear os zeros finitos de $H(s)$ de acordo com

$$z = e^{sT}$$

Equivalência por Mapeamento de Pólos e Zeros

3 Zeros de $H(s)$ no infinito ($s = j\omega \rightarrow \infty$)
   3.a Se nenhum atraso é desejado: todos os zeros de $H(s)$ no infinito $\Rightarrow$ zeros de $H(z)$ em -1
   3.b Se atraso é desejado: um zero de $H(s)$ no infinito $\Rightarrow$ zeros de $H(z)$ no infinito

4 Seleção do ganho

$$H(s)|_{s=0} = H_{ZP}(z)|_{z=1}$$

Equivalência por Mapeamento de Pólos e Zeros

- Exemplo com $T_0 = 1$ s:

$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

- Polo de $H(s)$: -2
- Polo de $H_{ZP}(z)$: $e^{-2T_0} = e^{-2} = 0,135$
- Zero no infinito de $H(s)$ mapeado para zero no infinito de $H_{ZP}(z)$

$$H_{ZP}(s) = \mathcal{C}\frac{1}{z-0,135}$$

4 Seleção do ganho

$$H(s)|_{s=0} = 1 = H_{ZP}(z)|_{z=1} = \mathcal{C}\frac{1}{0,865} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} = 0,865$$

Equivalência por Mapeamento de Pólos e Zeros

- Exemplo com $T_0 = 1$ s:

$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

- Polo de $H(s)$: -2
- Polo de $H_{ZP}(z)$: $e^{-2T_0} = e^{-2} = 0,135$
- Zero no infinito de $H(s)$ mapeado para zero no infinito de $H_{ZP}(z)$

$$H_{ZP}(s) = \mathcal{C}\frac{1}{z-0,135} = \frac{0,865}{z-0,135}$$

4 Seleção do ganho

$$H(s)|_{s=0} = 1 = H_{ZP}(z)|_{z=1} = \mathcal{C}\frac{1}{0,865} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} = 0,865$$

Equivalência por Integração Numérica

- Função de Transferência Contínua

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}$$

- Equação diferencial

$$\dot{u} + au = ae$$

Equivalência por Integração Numérica

- Na forma integral

$$u(t) = \int_0^t [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau$$

- Na forma discreta

$$u(kT) = \int_0^{kT-T} [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau + \int_{kT-T}^{kT} [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau$$

- Na forma de equação a diferenças

$$u(kT) = u(kT - T) + \{\text{área de } -au + ae \\ \text{sobre } kT - T \leq \tau < kT\}$$

- Regra retangular para frente (Euler)

$$u(kT) = u(kT - T) + T[-au(kT - T) + ae(KT - T)]$$

$$= (1 - aT)u(KT - T) + aTe(kT - T)$$

Equivalência por Integração Numérica

- Função de Transferência Discreta

$$H_F(z) = \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{z-1}{T}+a}$$

Equivalência por Integração Numérica

- Regra retangular para trás

$$u(kT) = u(kT - T) + T[-au(kT) + ae(kT)]$$

$$= \frac{u(kT-T)}{1+aT} + \frac{aT}{1+aT}e(kT)$$

- Função de Transferência Discreta

$$H_B(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}$$

Equivalência por Integração Numérica

- Regra trapezoidal

$$u(kT) = u(kT - T) + \frac{T}{2}[-au(kT - T) + ae(kT - T)$$
$$-au(kT) + ae(kT)]$$

$$= \frac{1 - aT/2}{1 + aT/2} u(kT - T) + \frac{aT/2}{1 + aT/2}[e(kT - T) + e(kT)]$$

Equivalência por Integração Numérica

- Função de Transferência Discreta

$$H_T(z) = \frac{a}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + a}$$

- Transformação bilinear ou de Tustin
- Mapeamento $s - z$

$$s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Equivalência por Integração Numérica

- Exemplo ($T_0 = 1$ s):

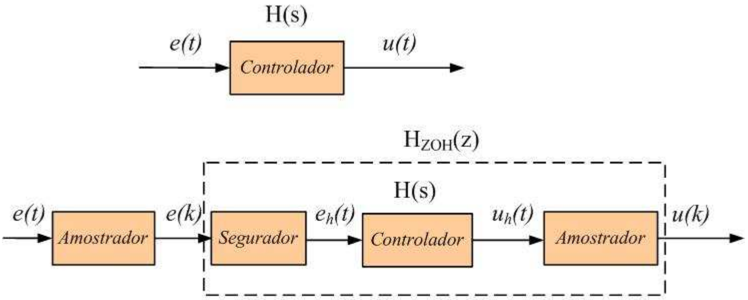
$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$H_T(z) = \frac{2}{\frac{2}{T_0}\frac{z-1}{z+1} + 2}$$

$$H_T(z) = \frac{2(z+1)}{2(z-1) + 2(z+1)}$$

$$H_T(z) = \frac{z+1}{2z}$$

Equivalência por Segurador de Ordem Zero



□

Equivalência por Segurador de Ordem Zero

- Resposta ao impulso unitário: pulso unitário de duração T_0

$$x_h(t) = 1(t) - 1(t - T_0)$$

- Função transferência

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s}$$

- Segurador de Ordem Zero

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

- Segurador $+ H(s)$

$$H_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} H(s)$$

Equivalência por Segurador de Ordem Zero

- Transformada z

$$H_{ZOH}(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}H(s)\right\}$$

$$H_{ZOH}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}$$

- Exemplo:

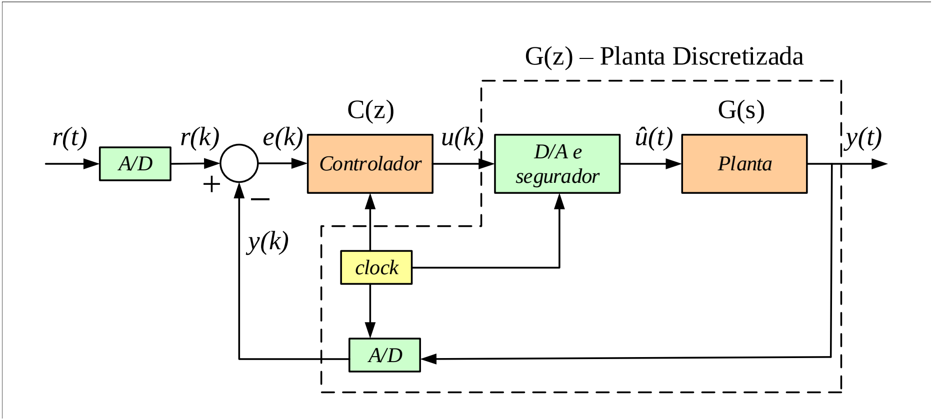
$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$H_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\}$$

$$H_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z}\frac{z(1-0,135)}{(z-1)(z-0,135)}$$

$$H_{ZOH}(z) = \frac{0,865}{z-0,135}$$

Equivalência por Segurador de Ordem Zero



Equivalência por Segurador de Ordem Zero

- Relação entre $G_{ZOH}(z)$ e $G(s)$

$$G_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Comandos Matlab

- Equivalência por Segurador de Ordem Zero:

$$Gd = c2d(G, T_0, \text{`}zoh\text{`})$$

- Equivalência por Mapeamento de Pólos e Zeros:

$$Gd = c2d(G, T_0, \text{`}matched\text{`})$$

- Equivalência por Integração Numérica - Bilinear - Tustin:

$$Gd = c2d(G, T_0, \text{`}tustin\text{`})$$

- Exemplo