

SEM 538 - Sistemas de Controle II

Aula 6 - Função de Transferência Discreta e Mapeamento s - z

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Tempo: t	Tempo: kT_0
Eq. Diferenciais Ordinárias (EDOs): $\dot{x}(t) + \lambda x(t) = u(t)$	Equações a Diferenças (EDs): $x(k) - \mu x(k-1) = u(k)$
Solução EDO homogênea: $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$	Solução ED homogênea: $x(k) = x(0)\mu^k$

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Transformada de Laplace: $sX(s) + \lambda X(s) = U(s)$	Transformada Z $X(z) - \mu z^{-1}X(z) = U(z)$
Função Transferência: $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+\lambda}$	
Estabilidade (Plano s): $\Re(-\lambda) < 0$	

- Função de Transferência Discreta
- Diagrama de Blocos
- Estabilidade
- Mapeamento $s - z$

- Equação a Diferenças

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_mu(k-m)$$

- Transformada Z

$$Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + \dots + a_nz^{-n}Y(z) = b_0U(z) + b_1z^{-1}U(z) + \dots + b_mz^{-m}U(z)$$

- Função de Transferência Discreta

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}$$

- Se $n \geq m$

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_mz^{n-m}}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

- Raízes de $b(z) = 0 \Rightarrow$ zeros $\Rightarrow z_i$
- Raízes de $a(z) = 0 \Rightarrow$ pólos $\Rightarrow p_i$

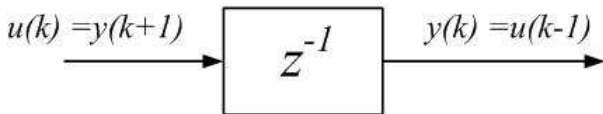
Função de Transferência Discreta

- Significado físico de z

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-1} \Rightarrow Y(z) = z^{-1}U(z)$$

- Atraso de um período

$$y(k) = u(k - 1)$$



Função de Transferência Discreta

- Relação entre a resposta ao pulso unitário e a Função de Transferência
- Entrada

$$u(k) = 1, \quad k = 0$$

$$u(k) = 0, \quad k \neq 0$$

- Transformada z

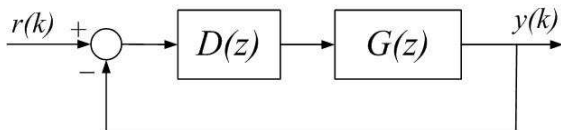
$$U(z) = 1$$

- Sendo $U(z) = 1$

$$Y(z) = G(z)$$

- A Função de Transferência Discreta de um sistema é a Transformada z da resposta deste sistema ao pulso unitário

Diagrama de Blocos



- Malha Fechada

$$MF(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Seja o sistema

$$G(z) = \frac{z}{z - p_1} = \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}}$$

- Equação a diferenças

$$y(k) - p_1 y(k - 1) = u(k)$$

- Considerando $y(0) \neq 0$ e $u(k) = 0$

$$y(1) = p_1 y(0)$$

$$y(2) = p_1 y(1) = p_1^2 y(0)$$

$$\vdots$$

$$y(k) = p_1^k y(0)$$

- Considerando $y(0) \neq 0$ e $u(k) = 0$

$$y(1) = p_1 y(0)$$

$$y(2) = p_1 y(1) = p_1^2 y(0)$$

$$\vdots$$

$$y(k) = p_1^k y(0)$$

- $y(k)$ converge para zero se $|p_1| < 1$

ESTABILIDADE

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Transformada de Laplace: $sX(s) + \lambda X(s) = U(s)$	Transformada Z: $X(z) - \mu z^{-1}X(z) = U(z)$
Função Transferência: $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+\lambda}$	Função Transferência: $G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{z}{z-\mu}$
Estabilidade (Plano s): $\Re(-\lambda) < 0$	Estabilidade (Plano z): $ \mu < 1$

- Função contínua: $y(t) = e^{-at}$

$$Y(s) = \frac{1}{s + a}$$

- Pólo de $Y(s)$: $p_s = -a$
- Função discreta: $y(kT_0) = e^{-akT_0}$

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_0}}$$

- Pólo de $Y(z)$: $p_z = e^{-aT_0}$

- Relação entre os pólos

$$p_z = e^{p_s T_0}$$

- Forma geral do mapeamento

$$z = e^{sT_0}$$

- Plano z

- Seja $s = \sigma \pm j\omega$

$$\begin{aligned}z &= e^{(\sigma T_0 \pm i\omega T_0)} \\ &= e^{\sigma T_0} [\cos(\omega T_0) \pm j\text{sen}(\omega T_0)]\end{aligned}$$

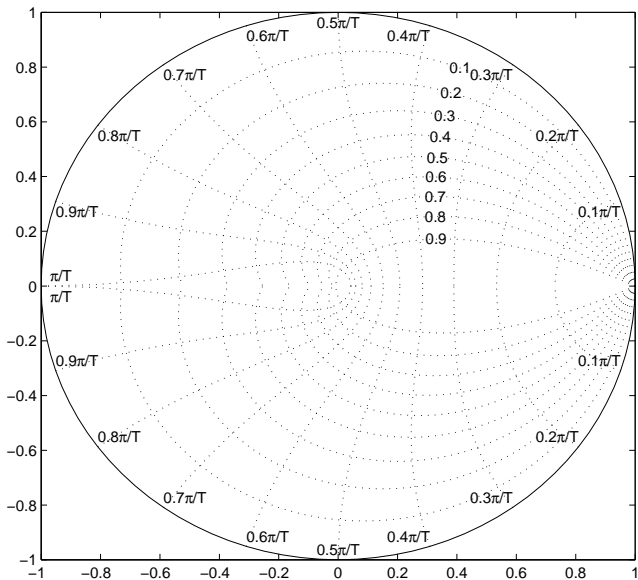
- Relações importantes

$$|z| = e^{\sigma T_0} \quad \angle z = \pm \omega T_0$$

Mapeamento $s - z$

Plano s	Plano z
Eixo real negativo: $\infty < \sigma \leq 0, \omega = 0$	Eixo real: $0 \leq z \leq 1$
Eixo real positivo: $0 \leq \sigma < \infty, \omega = 0$	Eixo real: $1 \leq z < \infty$
Eixo imaginário: $-\pi/T_0 \leq \omega \leq \pi/T_0, \sigma = 0$	Círculo de raio 1: $ z = 1$
ω constante: $\omega = c$	Reta radial: $0 \leq z \leq 1, \angle z = cT_0$
σ constante: $\sigma = c$	Círculo raio $0 \leq r \leq 1$: $ z = e^{cT_0}$

Mapeamento $s - z$



- A resposta de um sistema à entrada pulso unitário é dada por

$$y(k) = (\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right),$$

com $T_0 = 1$ s.

- Encontre a função de transferência de malha aberta do sistema. Quais são os pólos? O sistema é estável?

- A partir da função de transferência, encontre a equação a diferenças que descreve o sistema e a sequência de valores de $y(k)$ para a entrada pulso unitário.
- Considere o sistema em malha fechada com realimentação negativa e ganho proporcional K . Encontre K tal que o sistema é estável, com amortecimento $\zeta = 0,5$ e frequência natural $\omega_n = 0,6$ rad/s.