

SEM 538 - Sistemas de Controle II

Aula 5 - Transformada Z

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Tempo: t	Tempo: kT_0
Eq. Diferenciais Ordinárias (EDOs): $\dot{x}(t) + \lambda x(t) = u(t)$	Equações a Diferenças (EDs): $x(k) - \mu x(k - 1) = u(k)$
Solução EDO homogênea: $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$	Solução ED homogênea: $x(k) = x(0)\mu^k$

Equivalências

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Transformada de Laplace: $sX(s) + \lambda X(s) = U(s)$	Transformada Z
Função Transferência: $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+\lambda}$	
Estabilidade (Plano s): $\Re(-\lambda) < 0$	

- Definição
- Exemplos
- Propriedades
- Transformada Z Inversa
- Solução de Equações a Diferenças

- Função discreta

$$x(kT_0), \quad k = 0, 1, \dots, \infty$$

Exemplo: $x(kT_0) = \text{sen}(2\pi kT_0)$, com $T_0 = 0, 1\text{s}$

- Transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)z^{-k}$$

- Exemplo 1: $x(kT_0) = 1$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

- Série geométrica

$$f(r) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

- converge para $f(r) = \frac{a}{1-r}$

- Exemplo 1: $x(kT_0) = 1$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

- Fazendo $a = 1$ e $r = z^{-1}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

- Exemplo 2: $x(kT_0) = a^{kT_0}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT_0} z^{-k} = 1 + a^{T_0} z^{-1} + a^{2T_0} z^{-2} + \dots$$

- Fazendo $a = 1$ e $r = a^{T_0} z^{-1}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a^{T_0} z^{-1}} = \frac{z}{z - a^{T_0}}$$

- Exemplo 3: $x(kT_0) = e^{-akT_0}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_0} z^{-k} = 1 + (e^{aT_0} z)^{-1} + (e^{aT_0} z)^{-2} + \dots$$

- Fazendo $a = 1$ e $r = (e^{aT_0} z)^{-1}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - (e^{aT_0} z)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}}$$

- Exemplo 4: $x(kT_0) = \cos(kT_0)$

$$\cos(\theta kT_0) = \frac{e^{jkT_0} + e^{-jkT_0}}{2}$$

- Usando o Exemplo 3

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z/2}{z - e^{jT_0}} + \frac{z/2}{z - e^{-jT_0}} \\ &= \frac{z(z - \cos(T_0))}{z^2 - 2\cos(T_0)z + 1} \end{aligned}$$

- Calcule a Transformada Z das seguintes funções discretas

① $x(kT_0) = kT_0$

② $x(kT_0) = \text{sen}(kT_0)$

③ $x(kT_0) = e^{-akT_0} \cos(kT_0)$

④ $x(kT_0) = 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0, \dots$

- Superposição (linearidade)

$$Z\{\alpha x_1(kT_0) + \beta x_2(kT_0)\} = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- Deslocamento para a direita

$$Z\{x(k - d)\} = z^{-d}X(z)$$

- Deslocamento para a esquerda

$$Z\{x(k + d)\} = z^d \left[X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(q)z^{-q} \right]$$

- Exemplos:

$$Z\{x(k + 1)\} = z[X(z) - x(0)]$$

$$Z\{x(k + 2)\} = z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$$

- Amortecimento

$$Z\{x(kT_0)e^{-akT_0}\} = X(ze^{aT_0})$$

- Teorema do Valor Inicial

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- Teorema do Valor Final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

- Exemplo: $X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0,5)}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{2z}{(z - 1)(z - 0,5)} = 4$$

- Método da Expansão em Frações Parciais

$$X(z) = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{z-a} + \frac{Dz}{z^2 + cz + d} + \dots$$

- Solução

$$x(k) = A + Bk + Ca^k + De^{-a_1k} \text{sen}(\theta_1 k) + \dots$$

- Exemplo: $X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0,5)}$

$$X(z) = \frac{4z}{z-1} + \frac{-4z}{z-0,5}$$

- Solução

$$x(k) = 4 - 4 \cdot 0,5^k = 4(1 - 0,5^k)$$

Solução de Equação a Diferenças

- Exemplo

$$y(k + 1) + 2y(k) = u(k), \quad y(0) = 1$$

- Transformada Z

$$zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = U(z)$$

- Sendo $u(k) = 1$ (degrau unitário) e $y(0) = 1$

$$zY(z) - z + 2Y(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Solução de Equação a Diferenças

- Isolando $Y(z)$ e fatorando

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{2}{3} \frac{z}{z+2}$$

- Solução

$$y(k) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (-2)^k$$

- Encontre a solução das equações a diferenças usando a Transformada Z

① $y(k + 1) - y(k) = 2^k$

com $y(0) = 1$

② $y(k + 2) - 3y(k + 1) + 2y(k) = u(k + 1) + 2u(k)$

com $y(0) = 1, y(1) = 0, u(k) = -2^k$

Equivalências

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Tempo: t	Tempo: kT_0
Eq. Diferenciais Ordinárias (EDOs): $\dot{x}(t) + \lambda x(t) = u(t)$	Equações a Diferenças (EDs): $x(k) - \mu x(k - 1) = u(k)$
Solução EDO homogênea: $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$	Solução ED homogênea: $x(k) = x(0)\mu^k$

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Transformada de Laplace: $sX(s) + \lambda X(s) = U(s)$	Transformada Z $X(z) - \mu z^{-1}X(z) = U(z)$
Função Transferência: $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+\lambda}$	
Estabilidade (Plano s): $\Re(-\lambda) < 0$	