SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 4 - Equações a Diferenças

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Equivalências

Sistemas Contínuos	**Sistemas Discretos**
Tempo: t	
Eq. Diferenciais Ordinárias (EDOs): $\dot{x}(t) + \lambda x(t) = u(t)$	
Solução EDO homogênea: $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$	

Equivalências

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Transformada de Laplace: $sX(s) + \lambda X(s) = U(s)$	
Função Transferência: $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+\lambda}$	
Estabilidade (Plano s): $\Re(-\lambda) < 0$	

Equivalências

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Tempo: t	Tempo: kT_0
Eq. Diferenciais Ordinárias (EDOs): $\dot{x}(t) + \lambda x(t) = u(t)$	Equações a Diferenças (EDs):
Solução EDO homogênea: $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$	Solução ED homogênea:

Índice

- Instantes isolados ou discretos de tempo
- Instante atual e passados
- Equações a Diferenças X Eq. Diferenciais Ordinárias (sistemas contínuos)

Exemplo

- Empréstimo de e_0 Reais
- Taxa de juros mensal $\Rightarrow i\%$
- Número de prestações $\Rightarrow L$
- Valor da prestação $\Rightarrow p$

Determinar p dados e_0, L e i

Exemplo

- Valor da dívida no mês $k \Rightarrow e(k), \quad k = 0, 1, \cdots$ com $e(0) = e_0$
- $e(k+1)$ dado $e(k)$

$$e(k+1) = \left(1 + \frac{i}{100}\right) e(k) - p$$

- Equação a Diferença

$$e(k+1) - \left(1 + \frac{i}{100}\right) e(k) = -p$$

Exemplo

- Solução: $r = (1 + \frac{i}{100}) \Rightarrow e(k+1) = re(k) - p$

$$
\begin{aligned}
e(0) &= e_0 \\
e(1) &= re(0) - p = re_0 - p \\
e(2) &= re(1) - p = r^2 e_0 - rp - p \\
e(3) &= re(2) - p = r^3 e_0 - r^2 p - rp - p \\
&\vdots \\
e(k) &= r^k e_0 - [r^{k-1} + \cdots + r^2 + r + 1]p
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Progressão geométrica de razão $r > 1$
- Solução: Função discreta $e(k)$

$$e(k) = r^k e_0 - \left(\frac{r^k - 1}{r - 1} \right) p$$

- Saldar dívida em L meses $\Rightarrow e(L) = 0$

$$p = \frac{r - 1}{1 - r^{-L}} e_0$$

Exemplo

- Caso 1: $i = 5\%$ e $L = 12$

$$r = \left(1 + \frac{i}{100}\right) = 1,05$$

- Prestação

$$p = \frac{r-1}{1-r^{-L}} e_0 = 0,1128 e_0$$

- Total pago

$$Lp = 1,3539 e_0$$

Exemplo

- Caso 2: $i = 5\%$
- Pagar 1 prestação no final de 12 meses

$$e(k+1) = re(k) \Rightarrow e(k) = r^k e_0$$

- Total pago

$$e(12) = 1,7959e_0$$

- Sistemas Lineares

$$a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = g(k)$$

- $g(k)$ conhecida para todo k
- $a_i \in \Re$ para todo i e constante
- $a_n = 1$

- Operador linear: $D[y(k)]$

$$D[y(k)] = \sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i)$$

- Equação a diferenças

$$D[y(k)] = g(k)$$

- Solução

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

- $D[y(k)] = 0 \Rightarrow$ Equação homogênea
- $D[y(k)] = g(k) \Rightarrow$ Equação não homogênea

- $D[y(k)] = a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0$
- Equação característica

$$a_n \mu^n + \cdots + a_1 \mu + a_0 = 0$$

- Se as n raízes $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ são distintas

$$y_h(k) = c_1 \mu_1^k + c_2 \mu_2^k + \cdots + c_n \mu_n^k$$

Solução homogênea $D[y(k)] = 0$

- Se existem raízes múltiplas, por exemplo, μ_1 com multiplicidade dois

$$y_h(k) = c_1\mu_1^k + c_2 k\mu_1^k + c_3\mu_3^k + \cdots + c_n\mu_n^k$$

Solução particular $D[y(k)] = g(k)$

- $g(k)$ definida para todo k
- $g(k), g(k+1), \cdots, g(k+m)$ formam um conjunto LD

$$b_m g(k+m) + \cdots + b_1 g(k+1) + b_0 g(k) = 0$$

Solução particular $D[y(k)] = g(k)$

- Operador linear: $N[g(k)]$

$$N[g(k)] = \sum_{i=0}^{m} b_i g(k+i)$$

- $N[g(k)] = b_m g(k+m) + \cdots + b_1 g(k+1) + b_0 g(k) = 0$

- Equação característica

$$b_m \lambda^m + \cdots + b_1 \lambda + b_0 = 0$$

Solução particular $D[y(k)] = g(k)$

- Se as m raízes $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ são distintas
- E diferentes das raízes $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$

$$y_p(k) = d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k + \cdots + d_m\lambda_m^k$$

- $(d_1, \cdots, d_m)$ são encontrados substituindo $y_p(k)$ na equação original

Exemplo

- Seja a equação a diferença

$$y(k+2) - y(k) = 3 \cdot 2^k$$

com $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$

Exemplo

- Seja a equação a diferença

$$y(k+2) - y(k) = 3 \cdot 2^k$$

com $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$

- Equação característica de $D[y(k)] = y(k+2) - y(k) = 0$

$$\mu^2 - 1 = 0$$

$$(\mu - 1)(\mu + 1) = 0$$

Exemplo

- Equação característica de $D[y(k)] = 0$

$$(\mu - 1)(\mu + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 1 \;\; e \;\; \mu_2 = -1$$

- Solução homogênea

$$y_h(k) = c_1(1)^k + c_2(-1)^k$$

Exemplo

- Solução particular

- $g(k) = 3 \cdot 2^k$ satisfaz:

$$g(k+1) - 2g(k) = 0$$

$$3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3 \cdot 2^k = 0$$

- Equação característica

$$\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

Exemplo

- Solução particular

$$y_p(k) = d_1(2)^k$$

- Substituindo na equação original:

$$y(k+2) - y(k) = 3 \cdot 2^k$$

$$d_1 \cdot 2^{k+2} - d_1 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^k$$

$$4d_1 \cdot 2^k - d_1 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^k$$

$$3d_1 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^k$$

- $d_1 = 1$

Exemplo

- Solução

$$y(k) = c_1(1)^k + c_2(-1)^k + 2^k$$

- Condições iniciais: $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$

$$y(0) = c_1(1)^0 + c_2(-1)^0 + 2^0 = c_1 + c_2 + 1 = 0$$
$$y(1) = c_1(1)^1 + c_2(-1)^1 + 2^1 = c_1 - c_2 + 2 = 1$$

- $\Rightarrow c_1 = -1$ e $c_2 = 0$
- Solução final

$$y(k) = -(1)^k + 2^k$$

Exemplo

- Equação original:

$$y(k+2) - y(k) = 3 \cdot 2^k$$

- Solução final

$$y(k) = -(1)^k + 2^k$$

- Substituindo

$$-(1)^{k+2} + 2^{k+2} - \left(-(1)^k + 2^k\right) = 3 \cdot 2^k$$

$$-(1)^k + 4 \cdot 2^k + (1)^k - 2^k = 3 \cdot 2^k$$

Equivalências

Sistemas Contínuos	Sistemas Discretos
Tempo: t	Tempo: kT_0
Eq. Diferenciais Ordinárias (EDOs): $\dot{x}(t) + \lambda x(t) = u(t)$	Equações a Diferenças (EDs): $x(k) - \mu x(k-1) = u(k)$
Solução EDO homogênea: $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$	Solução ED homogênea: $x(k) = x(0)\mu^k$

Exemplo

- Progressão aritmética de razão $r \in \Re$

$$y(k+1) - y(k) = r$$

com $y(0) = y_0$

Exemplo

- Progressão aritmética de razão $r \in \Re$

$$y(k+1) - y(k) = r$$

com $y(0) = y_0$

- Equação característica de $D[y(k)] = 0$

$$(\mu - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1$$

Exemplo

- $g(k) = r$ satisfaz

$$N[g(k)] = g(k+1) - g(k) = 0$$

- Equação característica de $N[g(k)] = 0$

$$(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

- Solução particular

$$y_p(k) = d_1 k (1)^k = d_1 k$$

Exemplo

- Substituindo na equação original: $d_1 = r$
- Solução
$$y(k) = c_1(1)^k + rk = c_1 + rk$$
- Condições iniciais $\Rightarrow c_1 = y_0$
- Note: $y(k)$ satisfaz
$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 0$$

Exemplo

- Soma dos k primeiros termos da progressão
- Solução

$$s(k+1) - s(k) = y(k)$$

com $s(0) = 0$

- Equação característica de $D[s(k)] = 0$

$$(\mu - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1$$

Exemplo

- $y(k)$ satisfaz

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 0$$

- Equação característica de $N[y(k)] = 0$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = 1$$

- Solução particular

$$s_p(k) = d_1 k(1)^k + d_2 k^2 (1)^k = d_1 k + d_2 k^2$$

Exemplo

- Substituindo na equação original: $d_1 = y_0 - r/2$ e $d_2 = r/2$
- Solução

$$s(k) = c_1(1)^k + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right) k + (r/2)k^2$$

- Condições iniciais $\Rightarrow c_1 = 0$
- Checagem: soma dos k primeiros números ímpares, $y_0 = 1$ e $r = 2$

Exercícios

1. Encontre o termo genérico $y(k)$ de uma progressão geométrica de razão $r \in \Re$
2. Encontre o termo genérico $s(k)$ da soma dos k primeiros termos da progressão do exercício 1, considerando $r = 3$ e $r = 1$.
3. Encontre a solução para a equação a diferença de segunda ordem
$$y(k+2) - y(k+1) - 2y(k) = 5.2^k$$
com $y(0) = 3$ e $y(1) = 0$