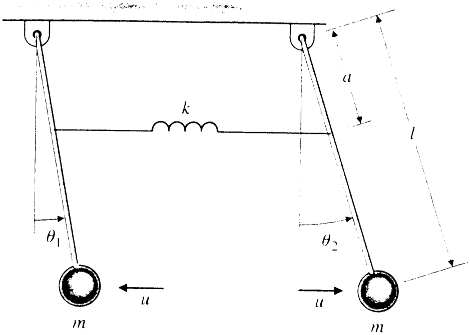
SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 3 - Espaço de Estados - Controle LQR e Controlador/Observador

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Dois pêndulos, acoplados por uma mola, são controlados por duas forças iguais e opostas, que são aplicadas aos pêndulos como mostrado na figura.



Controlabilidade

As equações de movimento linearizadas são:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu$$
$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu$$

a) Mostre que o sistema não é controlável. É possível associar um significado físico para os modos controláveis e não controláveis?

b) Existe uma forma de fazer o sistema ser controlável?

c) Defina valores para os parâmetros e projete um controlador por alocação de polos. Simule.

Controlabilidade

Espaço de estados: $\mathbf{x} = [\theta_1 \;\; \dot{\theta}_1 \;\; \theta_2 \;\; \dot{\theta}_2]^T$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}) & 0 & \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ka^2}{ml^2} & 0 & -(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} u$$

Controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{ml} & 0 & \frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) + \frac{ka^2}{m^3 l^3} \\ -\frac{1}{ml} & 0 & \frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) + \frac{ka^2}{m^3 l^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ml} & 0 & -\frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) - \frac{ka^2}{m^3 l^3} \\ \frac{1}{ml} & 0 & -\frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) - \frac{ka^2}{m^3 l^3} & 0 \end{bmatrix}$$

Não controlável pois $det(\mathcal{C}) = 0$

Novo estado: $\mathbf{z} = [\alpha \;\; \dot{\alpha} \;\; \beta \;\; \dot{\beta}]^T$, com $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ e $\beta = \theta_1 - \theta_2$

Equações dinâmicas:

$$
\begin{aligned}
ml^2\ddot{\alpha} &= -mgl\alpha \\
ml^2\ddot{\beta} &= -2ka^2\beta - mgl\beta + 2lu
\end{aligned}
$$

Espaço de Estados

- Sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$
$$y = C\mathbf{x} + Du$$

- Controlador: realimentação do estado

$$u = -K\mathbf{x}$$

- Alocação dos polos

Controle Ótimo Quadrático

- Sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

- Regulador Linear Quadrático (LQR)

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u}$$

- Q e R: matrizes de ponderação (simétricas e definidas positivas)

- Solução

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} = -R^{-1}B^{T}P\mathbf{x}$$

- P solução simétrica e definida positiva da Equação de Riccati

$$A^{T}P + PA - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0$$

Controle Ótimo Quadrático

- Exemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Matrizes de ponderação:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

- Matlab: K = LQR(A,B,Q,R)

Observador

- Observador ou estimador
- Reconstrução do estado $\mathbf{x}$ a partir de y
- Estado estimado: $\hat{\mathbf{x}}$
- Controlador: $u = -K\hat{\mathbf{x}}$

Observador

- Observador com dinâmica

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu$$

- Satisfatório se $\mathbf{x}(0)$ é conhecido e se fizermos $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$
- Incertezas em A e B

Observador

- Erro de estimativa:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

- Então

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

- Erro $\rightarrow 0$ se A estável

Observador

- Realimentação da diferença entre a saída (conhecida) e a saída estimada:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu + L(y - C\hat{\mathbf{x}})$$

- sendo

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Observador

- Erro de estimativa:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - LC)\tilde{\mathbf{x}},$$

- Se $(A - LC)$ é estável $\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$
- Independentemente de $u(t)$ e $\mathbf{x}(0)$

- Polos desejados: $s_i = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

$$(s-\beta_1)(s-\beta_2)\cdots(s-\beta_n) = 0$$

- Exemplo: Polos do observador: -5 e -10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = [1 \quad 0]$$

Observador

- Dualidade
- Controlador: $A - BK$
- Observador: $A - LC$
- Temos

$$(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$$

- Observador: Fórmula de Ackerman com $A = A^T$, $B = C^T$ e $K = L^T$

- Compensador: Controlador + Observador

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BK\hat{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + BK\tilde{\mathbf{x}}$$

- Dinâmica do sistema e do erro

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- Estabilidade do sistema

$$det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = 0$$

$$det\,[sI - A + BK] \cdot det\,[sI - A + LC] = 0$$

- **Princípio da Separação**: projetos do controlador e do observador podem ser feitos independentemente um do outro

Compensador: Controlador + Observador

- Dinâmica do Sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ y &= C\mathbf{x} + Du\end{aligned}$$

- Dinâmica do Compensador: Controlador + Observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (A - BK - LC)\hat{\mathbf{x}} + Ly \\ u &= -K\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

- Sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC - LDK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

Compensador: Controlador + Observador

- Exemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Polos do controlador: $\omega_n = 1$ rad/s e $\zeta = 0.707$
- Polos do observador: $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0.5$