SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 2 - Espaço de Estados - Controle e Controlabilidade

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Controle no Espaço de Estados

- Cálculo do **controlador**: realimentação do estado
- Cálculo do **observador**
- Combinação do controlador + observador: realimentação da saída

Controle por Realimentação do Estado

- Lei de controle

$$u = -K\mathbf{x} = -[k_1 \ \ k_2 \ \ \cdots k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Espaço de Estados

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} - BK\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} &= (A - BK)\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Objetivo: Encontrar K tal que

$$A - BK \ \text{ seja estável}$$

- Equação característica desejada

$$(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = 0$$
$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pólos em: -2 e -3

Controle por Realimentação do Estado

- Pólos em: -2 e -3
- Equação característica desejada

$$(s+2)(s+3) = 0$$
$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

- Malha fechada

$$K = \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \right]$$

$$A - BK = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \right]$$

$$A - BK = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & -k_2 \end{array} \right]$$

Controle por Realimentação do Estado

- Cálculo dos polos de Malha fechada

$$det(sI - (A - BK)) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det(sI - (A - BK)) = det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 + k_1 & s + k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$det(sI - (A - BK)) = s^2 + k_2 s + 1 + k_1 = 0$$

- Comparando com a Eq. Característica desejada:

$$s^2 + k_2 s + 1 + k_1 = s^2 + 5s + 6$$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 &= 6 \\ k_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 5 \\ k_2 &= 5 \end{aligned}$$

- $p = [-2; -3] \quad \Rightarrow \quad K = place(A, B, p)$

Controle por Realimentação do Estado

- Forma canônica controlável

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação caraterística

$$s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -a_1 + \alpha_1, \;\; k_2 = -a_2 + \alpha_2, \; \cdots, \; k_n = -a_n + \alpha_n,$$

Controle por Realimentação do Estado

- Transformar o sistema para a forma canônica controlável
- Obter o ganho K_c dados os pólos desejados
- Calcular o ganho $K = K_c T^{-1}$

Controle por Realimentação do Estado

- Fórmula de Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha(A)$$

- com

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Eq. Característica: $s^2 + 5s + 6$

$$\alpha_1 = 5$$
$$\alpha_2 = 6$$

- Exemplo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(A) = A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I$$

$$\alpha(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

- Matriz de Controlabilidade

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Fórmula de Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha(A)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$$

- Função Matlab: K = acker(A,B,p)

Estudo da Controlabilidade

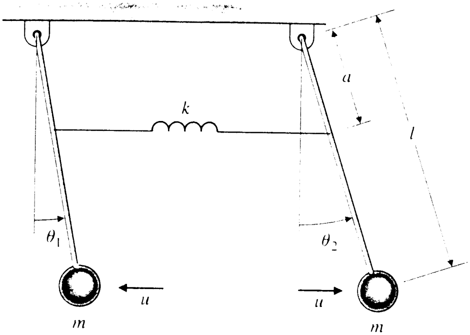
- Definição: O sistema (A,B) é controlável se existe uma entrada de controle (contínua) $u(t)$ que altera o estado do sistema de uma condição inicial x_0 para uma condição final desejada x_f num intervalo de tempo finito.

- Condição: Matriz de Controlabilidade

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

deve ser não singular.

Dois pêndulos, acoplados por uma mola, são controlados por duas forças iguais e opostas, que são aplicadas aos pêndulos como mostrado na figura.



Controlabilidade

As equações de movimento linearizadas são:

$$
\begin{aligned}
ml^2\ddot{\theta}_1 &= -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu \\
ml^2\ddot{\theta}_2 &= -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu
\end{aligned}
$$

a) Mostre que o sistema não é controlável. É possível associar um significado físico para os modos controláveis e não controláveis?

b) Existe uma forma de fazer o sistema ser controlável?

c) Defina valores para os parâmetros e projete um controlador por alocação de polos. Simule.