SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 1 - Espaço de Estados

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Espaço de Estados

- Forma de representação de sistemas dinâmicos
- Modelos mais complexos (MIMO - Multiple Input Multiple Output)
- Vetores e matrizes
- Conecta variáveis internas (espaços) com variáveis externas (entradas e saídas)

Espaço de Estados

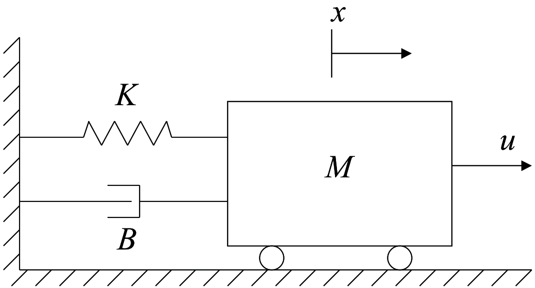
- Representar equações diferenciais como um conjunto de EDOs de primeira ordem
- Formato

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}$: estado
- $\mathbf{u}$: entrada
- $\mathbf{y}$: saída

Espaço de Estados

- Considere o seguinte sistema mecânico:



Espaço de Estados

- Sistema
$$\begin{aligned} M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx &= u \\ y &= x \end{aligned}$$

- Define-se as variáveis do estado
$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

- Tem-se
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u \end{aligned}$$

Espaço de Estados

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

- Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

Espaço de Estados

- Saída (posição):

$$y = x = x_1$$

- Na forma matricial

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

- Representação no espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$
$$y = C\mathbf{x} + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

- Saída (posição e velocidade):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Na forma matricial: $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + Du$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Exemplo $D \neq 0$
- Saída (aceleração):

$$\mathbf{y} = \dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

- Na forma matricial: $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + Du$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

- Exemplo: *Drive* de disco rígido

$$
\begin{aligned}
I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) &= T \\
I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) &= 0
\end{aligned}
$$

- Encontrar a representação no espaço de estados sendo a saída θ_2

Espaço de Estados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{I_1} & -\frac{b}{I_1} & \frac{k}{I_1} & \frac{b}{I_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I_2} & \frac{b}{I_2} & -\frac{k}{I_2} & -\frac{b}{I_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

- Exemplo: $G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_c \mathbf{x} + B_c u \\ y &= C_c \mathbf{x} + D_c u\end{aligned}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

- Forma canônica modal: $G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= A_m \mathbf{z} + B_m u \\ y &= C_m \mathbf{z} + D_m u \end{aligned}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = 0$$

Transformação de Estados

- Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= F\mathbf{x} + Gu \\ y &= H\mathbf{x} + Ju\end{aligned}$$

- Matriz não singular T
- Transformação linear

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z}$$

Transformação de Estados

- Equação dinâmica

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} = T\dot{\mathbf{z}} &= FT\mathbf{z} + Gu \\
\dot{\mathbf{z}} &= T^{-1}FT\mathbf{z} + T^{-1}Gu \\
\dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + Bu
\end{aligned}
$$

- Equação da saída

$$
y = HT\mathbf{z} + Ju = C\mathbf{z} + Du
$$

Transformação de Estados

- Forma geral para forma canônica controlável

$$AT^{-1} = T^{-1}F$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 F \\ t_2 F \\ t_3 F \end{bmatrix}$$

- $t_2 = t_3 F$
- $t_1 = t_2 F = t_3 F^2$

Transformação de Estados

- Forma geral para forma canônica controlável

$$T^{-1}G = B$$

$$\begin{bmatrix} t_1 G \\ t_2 G \\ t_3 G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $t_3 G = 0$
- $t_2 G = t_3 FG = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3 [G \;\; FG \;\; F^2 G] = [0 \; 0 \; 1]$
- $t_1 G = t_3 F^2 G = 1$

Transformação de Estados

- Forma geral para forma canônica controlável

$$t_3 = [0 \quad 0 \quad 1]\mathcal{C}^{-1}$$

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad F^2G]$$

- Matrix de Controlabilidade
- Forma geral

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]$$

Transformação de Estados

- Caso geral

$$t_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]\mathcal{C}^{-1}$$

- Matriz de Transformação

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n F^{n-1} \\ t_n F^{n-2} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados para Função de Transferênica

- Espaço de Estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ y &= C\mathbf{x} + Du\end{aligned}$$

- Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

- Ou

$$\begin{aligned}(sI - A)X(s) &= BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Espaço de Estados para Função de Transferênica

- Ou

$$\begin{aligned} X(s) =& (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) =& CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

- Fução Transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Espaço de Estados para Função de Transferênica

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Solução:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Solução:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)s-3}\begin{bmatrix} s & 3 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2-2s-3}\begin{bmatrix} s & 3 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2-2s-3}\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2-2s-3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2-2s-3}$$

Estabilidade no Espaço de Estados

- Equação característica

$$det(sI - A) = 0$$

- Autovalores de A

$$det(\lambda I - A) = 0$$

- Pólos de $G(s) \Leftrightarrow$ autovalores de A
- Estabilidade: autovalores de A com parte real negativa