

Eletrromagnetismo Ondas na matéria – modelo clássico

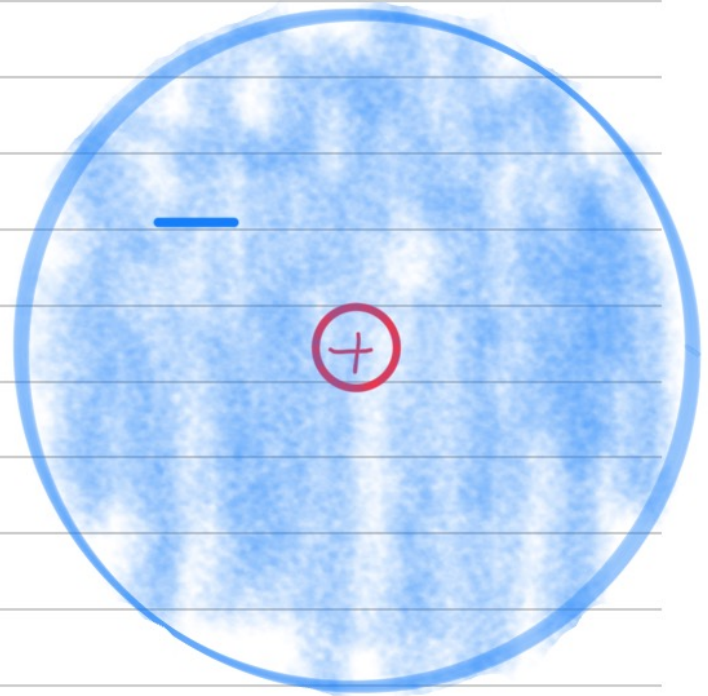
- Como podemos descrever as ondas se propagando em um meio qualquer – dadas as propriedades do meio?
- Podemos explicar a dispersão da luz?
- E a absorção? Como ocorre?
- Condutores são sempre opacos?

Modelo microscópico clássico \rightarrow aproximação de 1^o ordem

- Eléctrons em equilíbrio nos átomos

- Aplicação do campo externo leva a um deslocamento

- Resposta linear da força



- Aplicação do campo externo leva a um deslocamento

- Resposta linear da força

$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_- \quad F = -ky$$

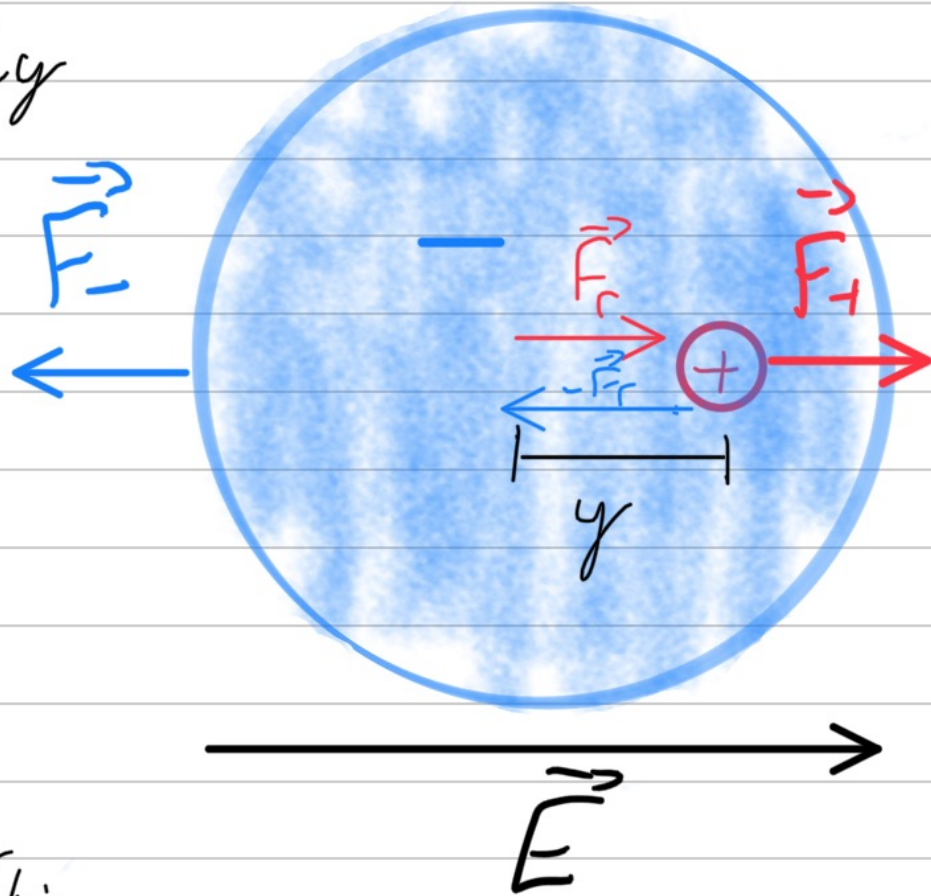
- Perturbação no equilíbrio

$$U(y) = U(0) + \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} y$$

$$+ \left. \frac{d^2U}{dy^2} \right|_{y=0} y^2$$

+ ...

} Ordem
não-linear



- Sistema massa-mola: $\vec{F}_k = -k y = -m \omega_0^2 y$

Força de restituição $U(y) - U(0) = \frac{k}{2} y^2$

Falta algo: dissipação $F_r = -m \gamma \frac{d}{dt} y$

Parte não-conservativa \rightarrow vários motivos:

aquecimento, vibração mecânica (fónons), irradiação

Campo externo: Força sobre o sistema \rightarrow oscilador forçado

$$F_e = q \cdot E = q E_0 \cos \omega t$$

Equação de movimento: $F = F_k + F_r + F_e$

$$m \frac{d^2}{dt^2} y = -m \omega_0^2 y - m \gamma \frac{d}{dt} y + q E_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + m_0^2 y = \frac{q}{m} E_0 \cos(\omega t) \Rightarrow y = \text{Re}[\tilde{y}(t)]$$

$$\text{Re} \left[\frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{y}}{dt} + m_0^2 \tilde{y} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \right] \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{-i\omega t}$$

↳ Uma de $\cos(\omega t) = \text{Re}[e^{-i\omega t}]$ será útil mais adiante

$$[-\omega^2 - i\omega\gamma + m_0^2] \tilde{y} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \tilde{y}_0 = \frac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} E_0$$

Dipolo induzido $\vec{p} = q \tilde{y} = q \tilde{y}_0 e^{-i\omega t}$

Polarização do material: N dipolos por unidade de volume

$$\vec{P} = \frac{Nq^2}{m} \left(\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \right) \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Polarização do material: N dipolos por unidade de volume

$$\vec{P} = \frac{Nq^2}{m} \left(\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \right) \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Se temos múltiplas ressonâncias ω_j no sistema

$$\vec{P} = \left(\sum_j \frac{f_j \cdot Nq^2/m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega} \right) \vec{E}$$

Vemos portanto que a permissividade vai depender de

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)] \left\{ \begin{array}{l} \chi_e = \frac{N\kappa(\omega)}{\epsilon_0}; \kappa = \sum f_j \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega} \\ \text{(baixa densidade } N) \\ \chi_e = \frac{N\kappa(\omega)/\epsilon_0}{1 - \frac{N\kappa(\omega)}{3\epsilon_0}} \quad \text{(Clausius-Mosotti)} \end{array} \right.$$

Equação de onda: $\nabla^2 \vec{E} = \epsilon(\omega) \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Dispersão: velocidade depende da frequência

Soluções harmônicas com velocidades distintas

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-k_2 x} e^{i(k_1 x - \omega t)}$$

$$k = k_R + ik_I$$

$$\nabla^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = \epsilon(\omega) \mu(\omega) \cdot (-\omega^2) \vec{E}$$

$$k^2 = \mu \epsilon(\omega) \cdot \omega^2 \Rightarrow k = \sqrt{\mu \epsilon(\omega) \omega^2}$$

$$k^2 = \mu \epsilon (\omega) \cdot \omega^2 \Rightarrow k = \sqrt{\mu \epsilon (\omega) \omega^2}$$

Vimos na última aula: meios condutores $\rightarrow k_I \approx k_R$

$$e^{-k_I x} = e^{-\alpha x/2} \Rightarrow I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (\text{Lei de Beer})$$

$$\alpha = 2k_I$$

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I$$

Índice de refração: $n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega} k_R$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{c} n + i \frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tilde{n} \quad \tilde{n} = n + i \frac{\alpha}{2\pi}$$

$\lambda_0 \rightarrow$ compr. de onda no vácuo

Relação com $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_0} \sqrt{1 + \chi_e} \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{\chi_e}{2} \right)$$

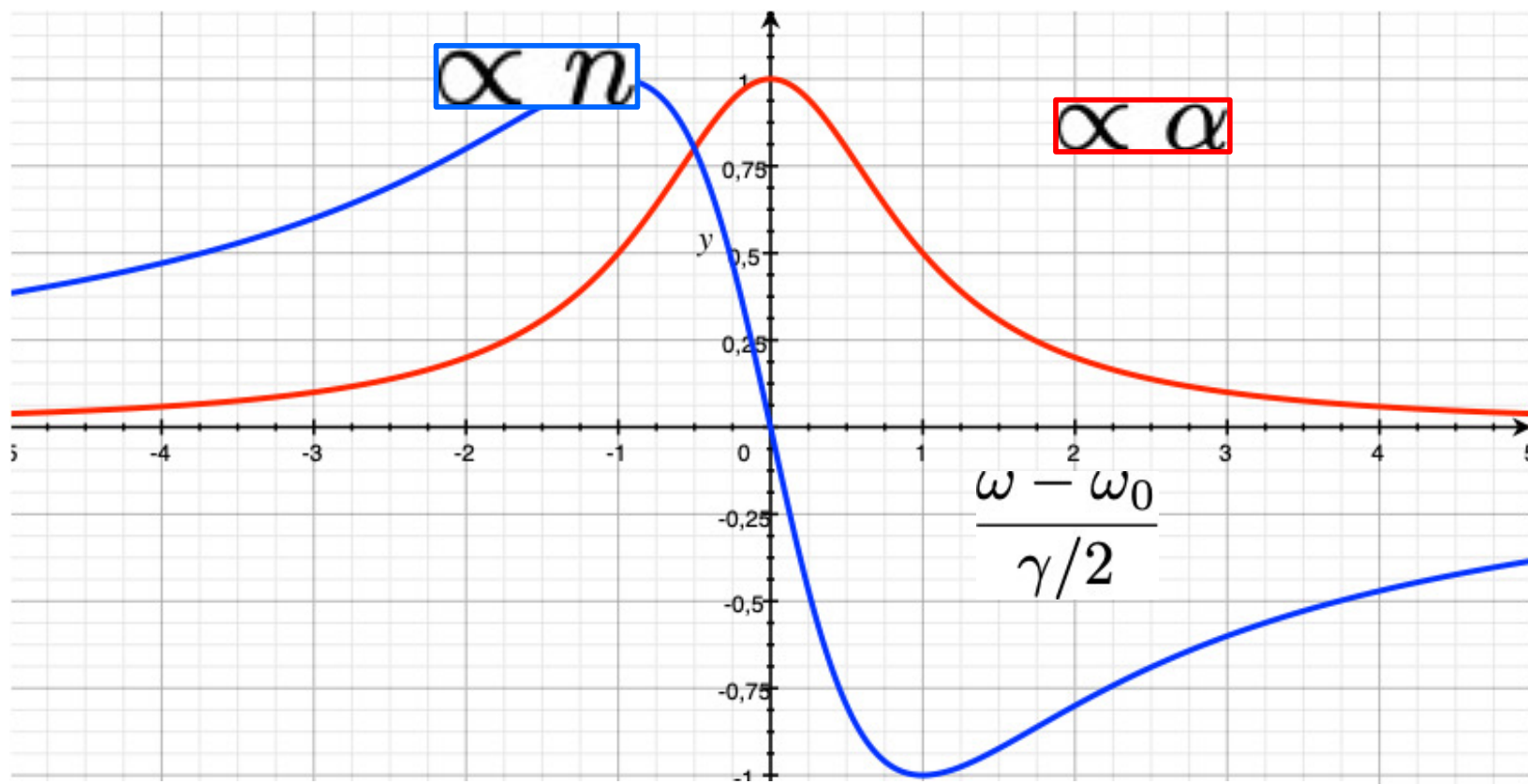
$$= \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j \cdot N q_j^2 / m}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i \gamma_j \omega} \right)$$

$$n \simeq 1 + \frac{N q^2}{2m\epsilon_0} \sum_i f_j \frac{\omega_j^2 - \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

$$\alpha \simeq \frac{N q^2 \omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_i f_j \frac{\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

$\omega \nearrow$ $n \nearrow$ \rightarrow dispersão regular

$\omega \nearrow$ $n \searrow$ \rightarrow dispersão anômala \rightarrow região absorviva



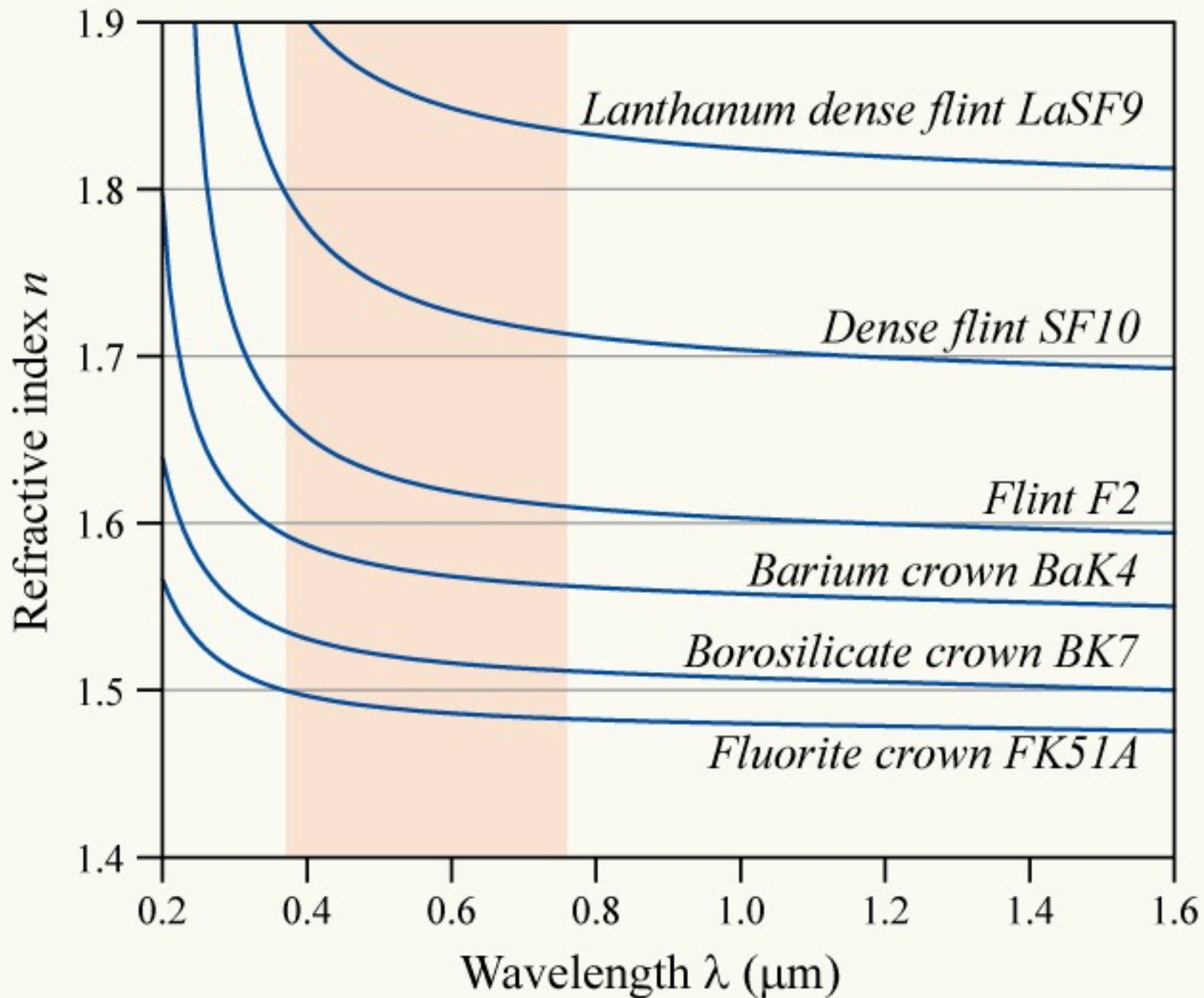
$$\gamma \ll \omega_0 \quad \omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = -\Delta \cdot 2\omega_0$$

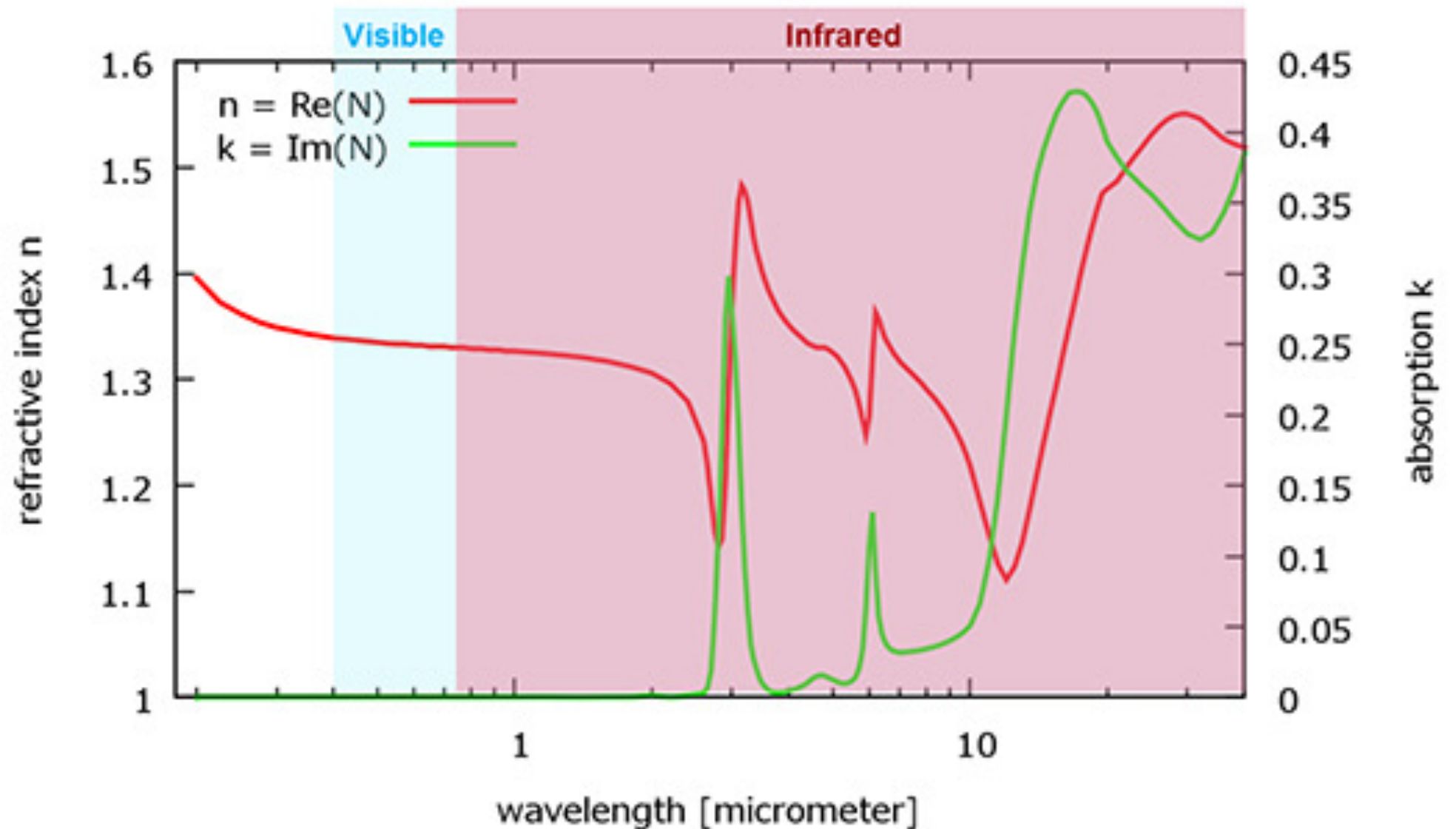
$$\Delta = -(\omega - \omega_0), \quad |\Delta| \ll \omega_0$$

$$\frac{n-1}{k} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \approx \frac{-\Delta \cdot 2\omega_0}{\Delta^2 + 4\omega_0^2 + \gamma^2 \omega_0^2} = -\frac{2\Delta}{\omega_0 \gamma^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\gamma}\right)^2}$$

$$\frac{n-1}{k} = -\frac{1}{\omega_0 \gamma^2} \frac{x}{1+x^2} \quad x = \frac{2\Delta}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{k^2} = \frac{\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \approx \frac{\gamma}{\omega_0^2 \gamma^2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\omega_0^2 \gamma} \frac{1}{1+x^2}$$





<https://wiki.anton-paar.com/br-pt/principios-basicos-da-refratometria/>

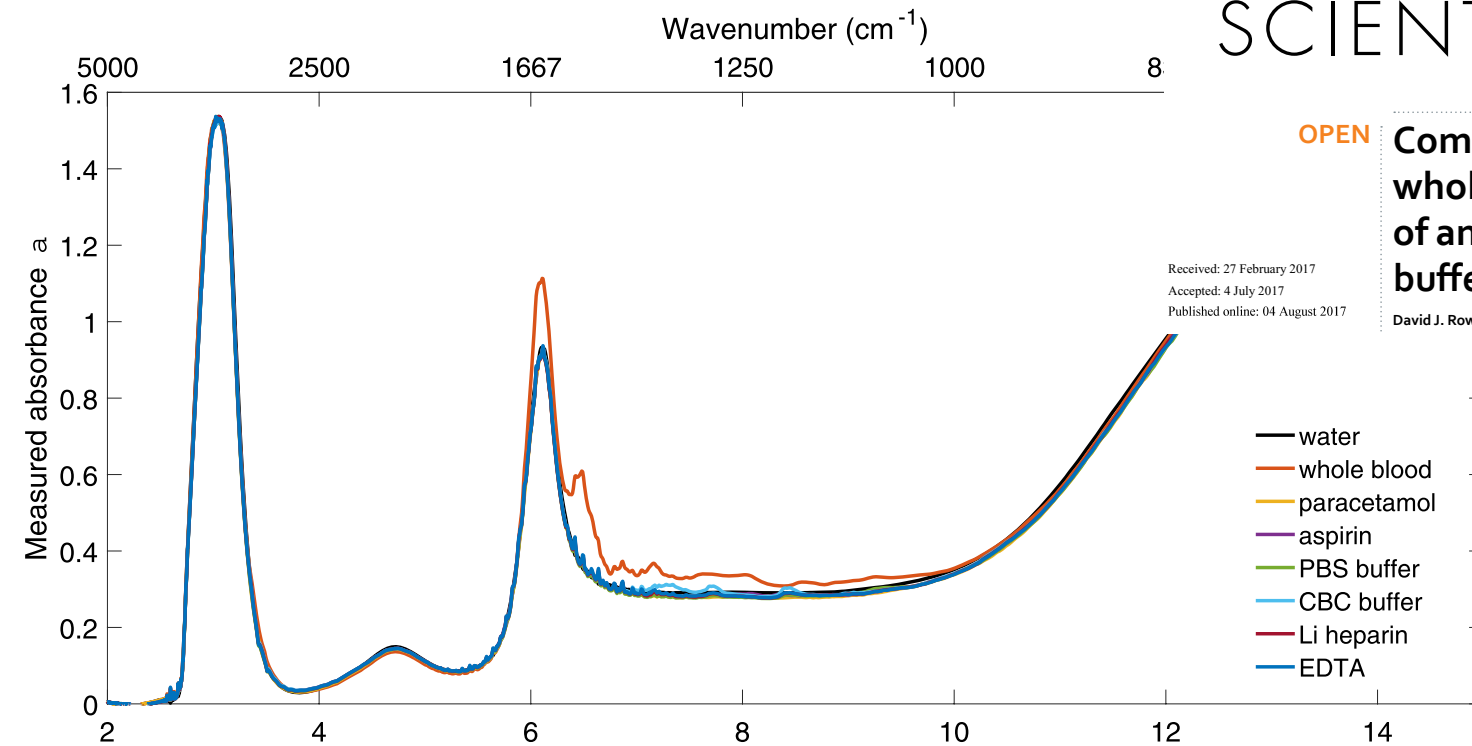
Todo pico de absorção está ligado a uma dispersão!

Relação de Kramers-Kronig (1926)

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1\right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \operatorname{Im}\left[\frac{\epsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right] d\omega'$$

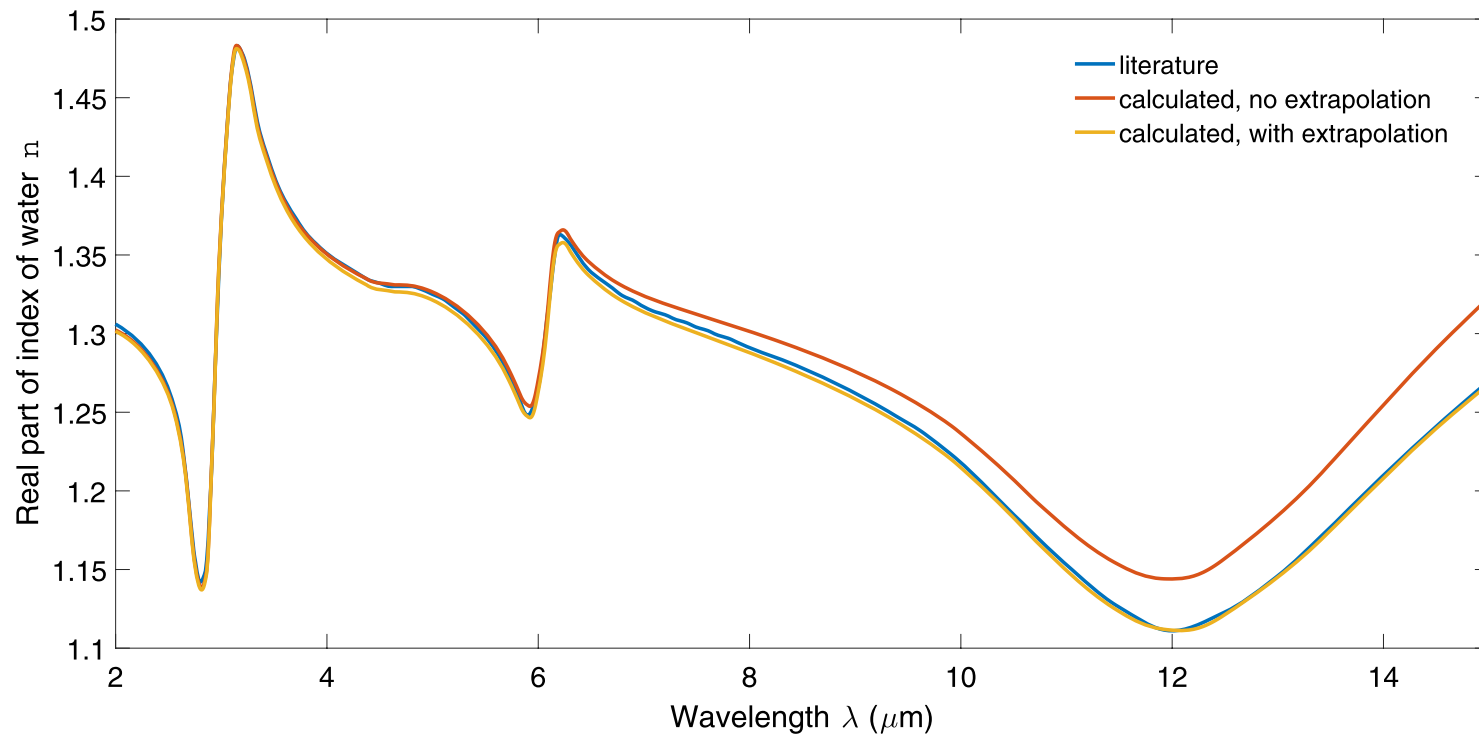
Apesar das singularidades no integrando ($\omega' = \omega$) elas se cancelam e o problema é resolvido.

Aplicações: Raios-X (p. ex. sabe-se a absorção $\Rightarrow n$)



OPEN **Complex refractive index spectra of whole blood and aqueous solutions of anticoagulants, analgesics and buffers in the mid-infrared**

David J. Rowe¹, David Smith² & James S. Wilkinson¹



Lei de Cauchy (1836)

$$\text{Se } |\omega_j - \omega| \gg \gamma_j \quad n \approx 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right) \quad \omega < \omega_j$$

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum \frac{f_j}{\omega_j^4}$$

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

→ útil em meios transparentes
(gases e vidros)

ω e f. refrativo $A \approx 1,4 - 1,7$

ω e f. dispersivo $B \approx 3 \cdot 10^{-3} - 13 \cdot 10^{-3} (\mu\text{m})^2$

Propagação de ondas e dispersão de pulsos

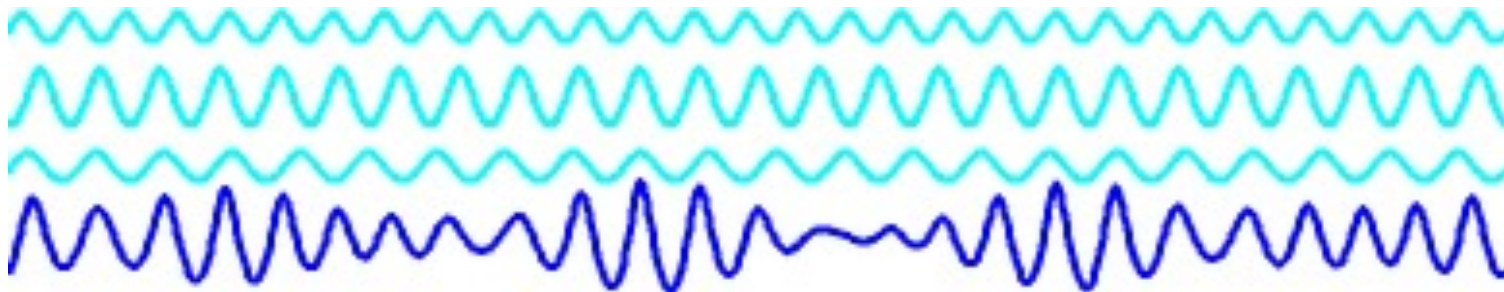
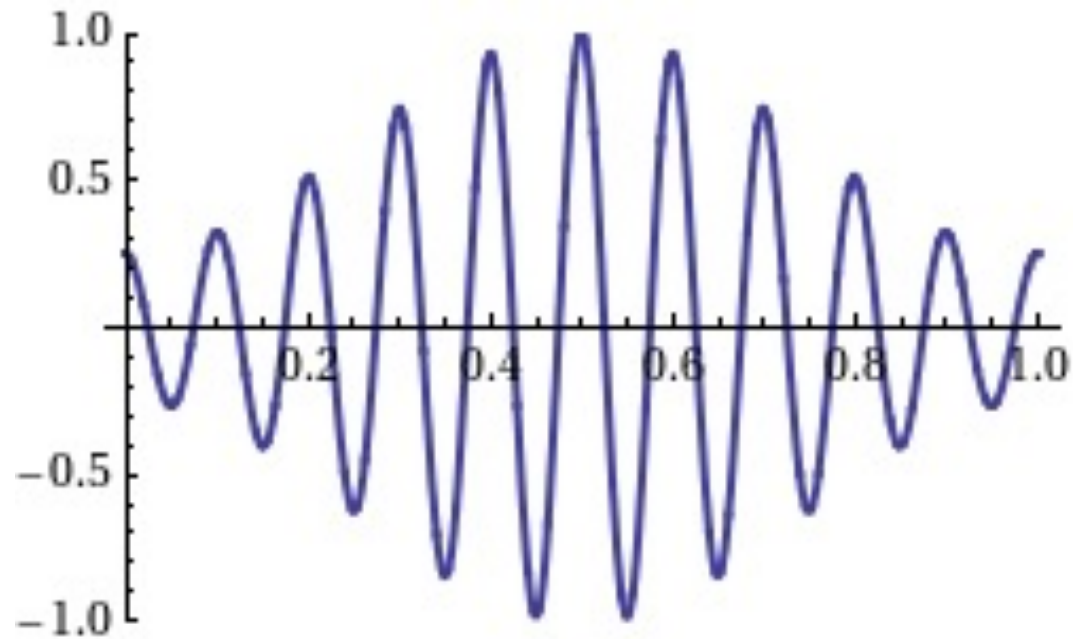
Velocidade de grupo: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

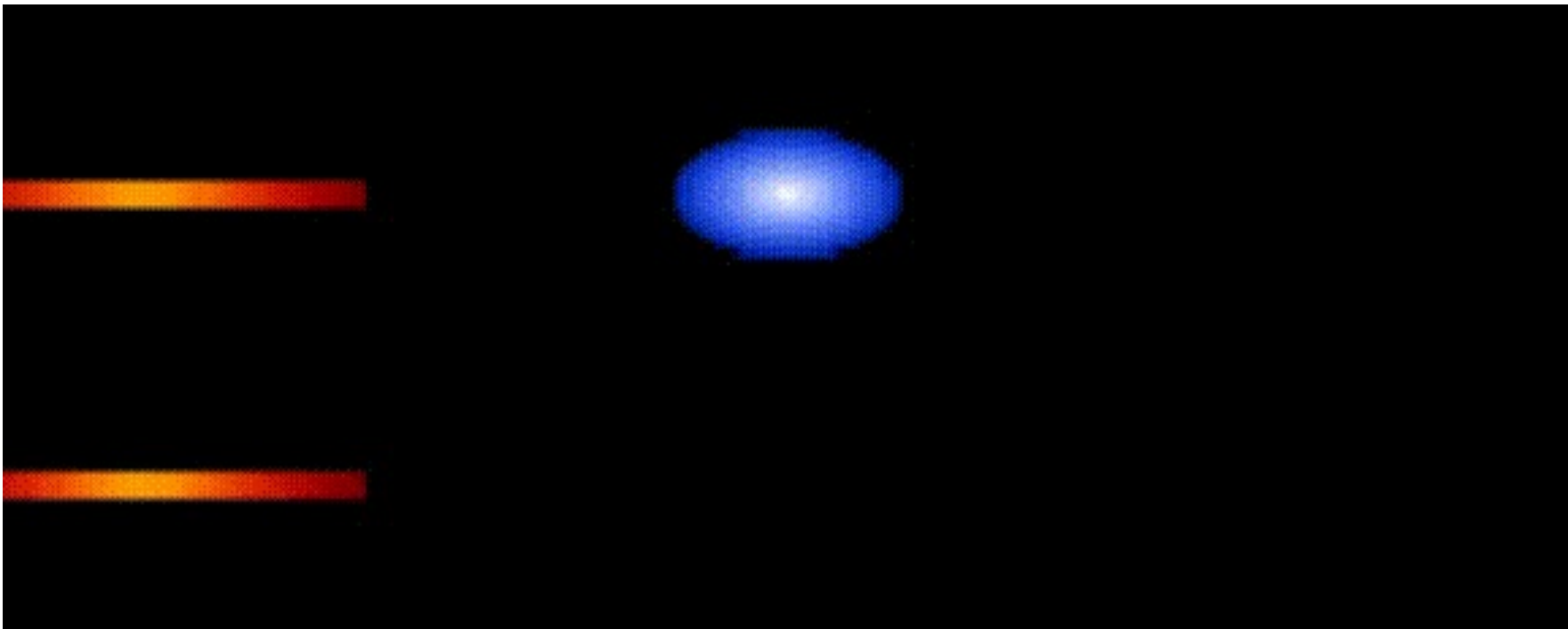
$$k = \frac{\omega}{c} \cdot n(\omega) \quad \frac{dk}{d\omega} = \frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{v_g}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{c}{n + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

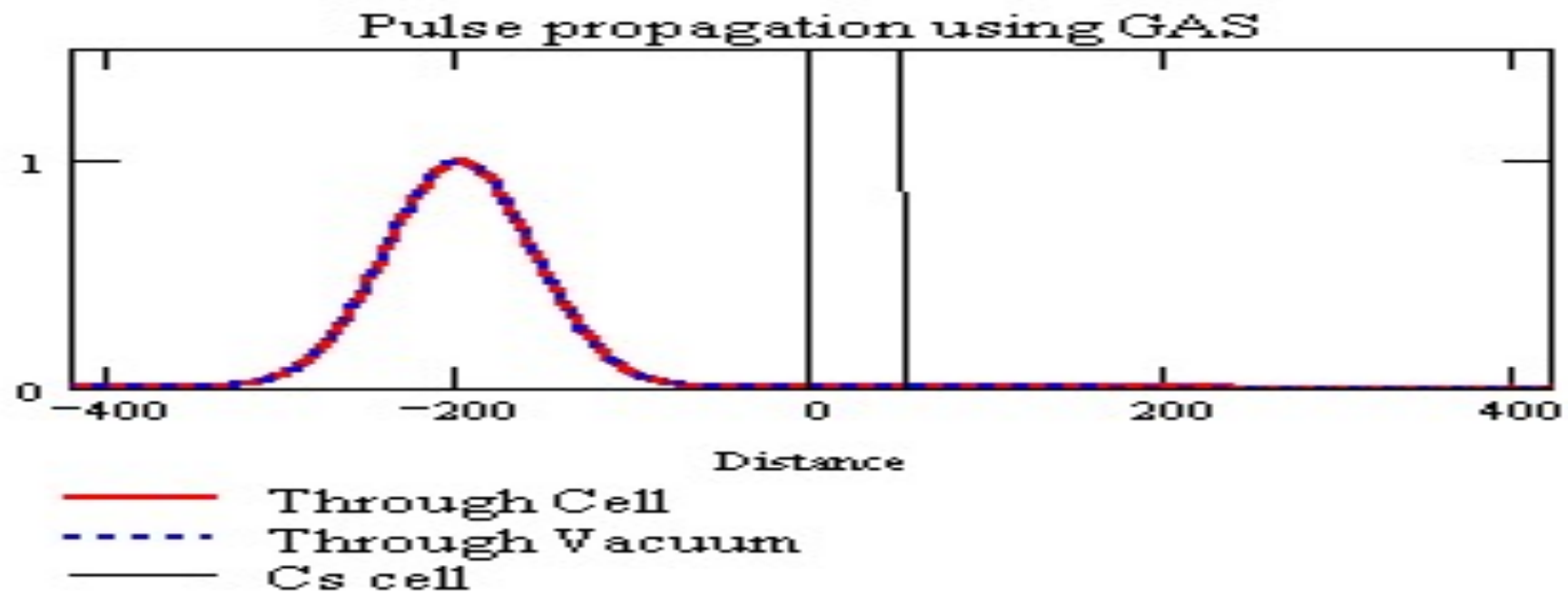
Controle de dispersão
altera a velocidade!

Velocidade de Grupo X velocidade de fase





<https://www.learner.org/series/physics-for-the-21st-century/manipulating-light/interview-with-featured-scientist-lene-hau/>





Superluminal light pulse propagation via rephasing in a transparent anomalously dispersive medium

A. Dogariu, A. Kuzmich, H. Cao, and L. J. Wang

[Author Information](#) ▼

 Open Access

<https://doi.org/10.1364/OE.8.000344>

https://figshare.com/articles/media/Media_1_Superluminal_light_pulse_propagation_via_rephasing_in_a_transparent_anomalously_dispersive_medium/4953140

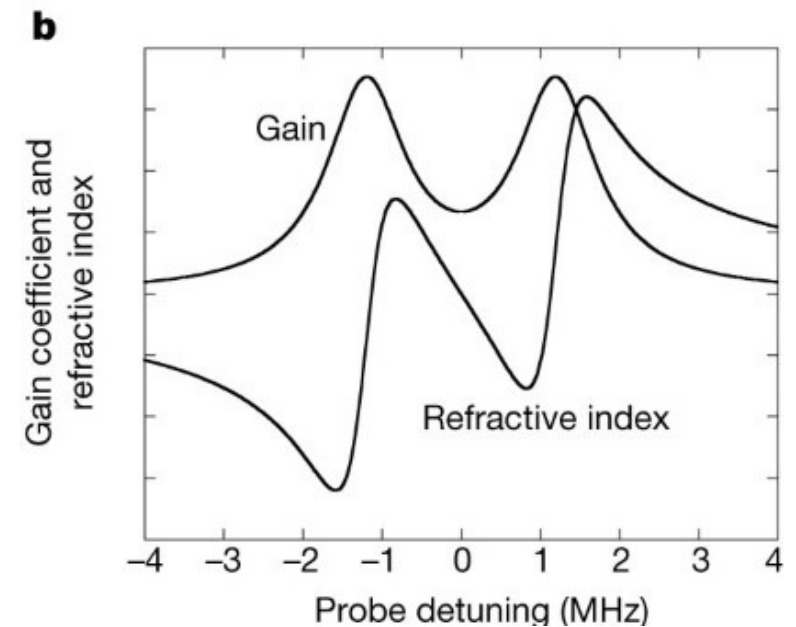
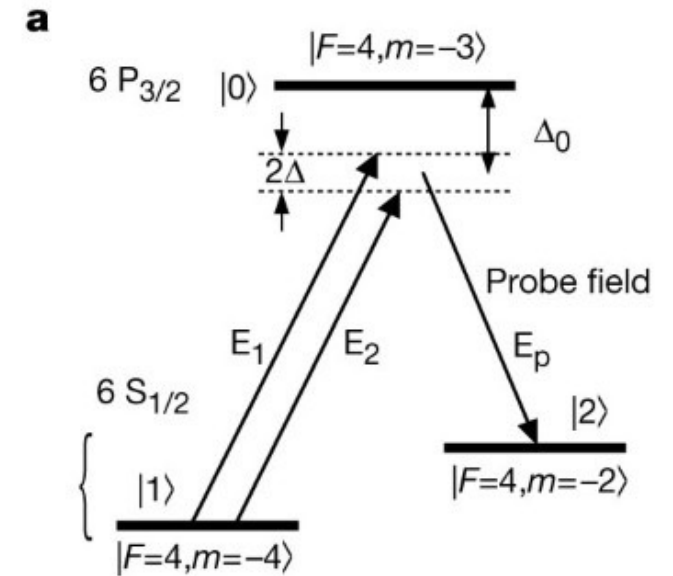
https://figshare.com/articles/media/Media_2_Superluminal_light_pulse_propagation_via_rephasing_in_a_transparent_anomalously_dispersive_medium/4953146

Gain-assisted superluminal light propagation

L. J. Wang , A. Kuzmich & A. Dogariu

Nature **406**, 277–279 (2000) | [Cite this article](#)

12k Accesses | 1123 Citations | 44 Altmetric | [Metrics](#)



Elétrons em condutores e plasmas

Elétron livre: $F = \cancel{F_R} + F_p + F_e$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\cancel{\nu} \frac{dy}{dt} + \frac{q}{m} E_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow y = \text{Re} [\tilde{y}_0 e^{-i\omega t}]$$

$$\tilde{y}_0 = \frac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\nu\omega} E_0$$

$$\tilde{y}_0 = - \frac{q/m}{\omega^2 + i\nu\omega} E_0$$

Corrente $J = (N \cdot f q) \frac{dy}{dt}$

$N \rightarrow n^{\circ}$ de moléculas

$f \rightarrow$ elétrons livres/molécula

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = - \frac{q/m}{m(m+i\gamma)} \cdot -im e^{-i\omega t} E_0 = \frac{q/m}{\gamma - im} E$$

com $E = E_0 e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \vec{J} = \sigma(\omega) \vec{E} \quad \sigma(\omega) = \frac{Nf q^2}{m} \cdot \frac{1}{\gamma - im}$$

Condutividade tem parte imaginária?

$$\omega \ll \gamma \quad \sigma \approx \frac{Nf q^2}{m \gamma} = \sigma(0)$$

Quando importa! Considere o cobre, $\sigma(\omega) = 6 \cdot 10^7 / \Omega \cdot m$

Densidade $\rho = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$N = \rho \cdot \frac{N_A}{M_g} = 9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{23}}{6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} \approx 9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\gamma \approx \frac{N \cdot q^2}{\sigma \cdot m} = \frac{9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(6 \cdot 10^7 / \Omega \cdot m) (9 \cdot 10^{-31} \text{ kg})} \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

$$f \sim \frac{\gamma}{2\pi} \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ Hz} \approx 6 \text{ THz}$$

Força ótica: $m \gg \rho \rightarrow \sigma(\omega) \approx i\sigma(\omega) \frac{\rho}{m}$

Caso interessante: Plasma diluído $n \rightarrow 0$

$$\sigma = i \left(\frac{N_f q^2}{m \omega} \right) \quad k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \sigma \mu \omega$$
$$= \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Com $\omega_p = q \sqrt{\frac{N_f}{m \epsilon_0}}$ \rightarrow frequência de plasma

Se $\omega > \omega_p$ $k^2 > 0$, propagação da onda

$$\text{Vel. de fase: } v = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} > c$$

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Se $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-\alpha x} e^{-i \omega t}$

Profundidade c/ω_p ($\omega < \omega_p$)

Note que $v_p \propto \sqrt{N}$ \rightarrow meio denso: opaco em altas frequências!

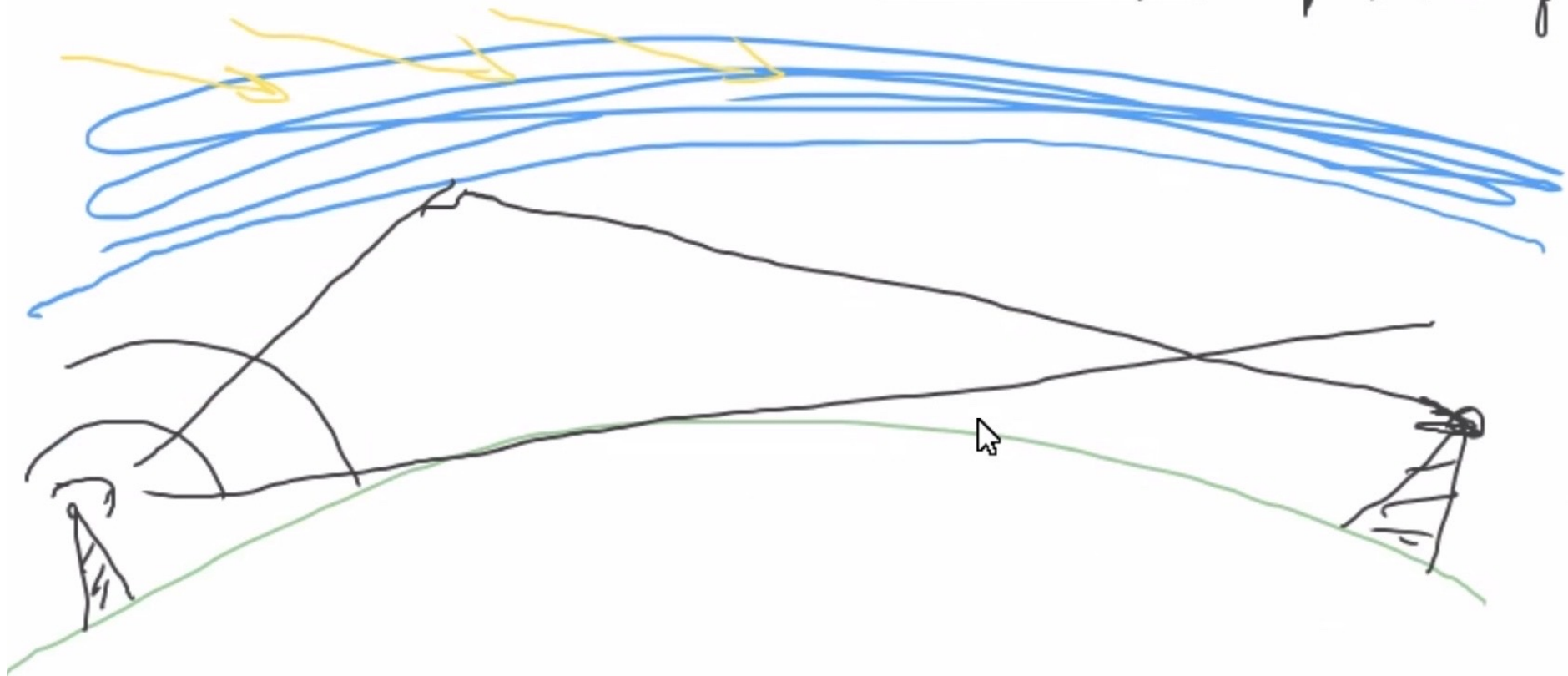
Ionosfera: 50 - 1000 km $N_f \sim 10^{11}/m^3$, $v_p \sim 3$ MHz

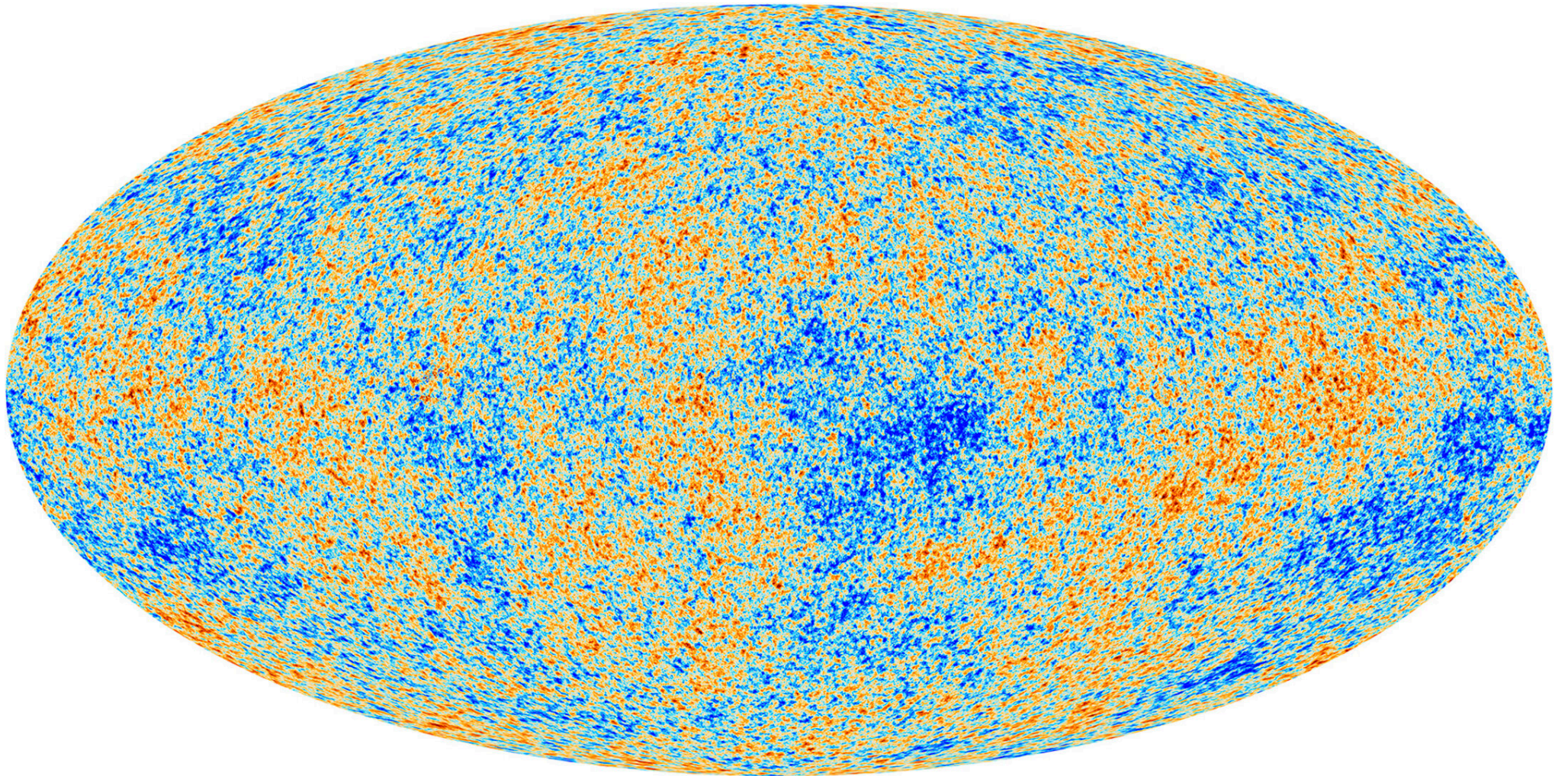
Reflete ondas longas

Note que $v_p \propto \sqrt{N}$ \rightarrow meio denso : opaco em alta frequências!

Ionosfera : 50 - 1000 km $N_f \sim 10^{11}/m^3$, $v_p \sim 3$ MHz

Reflete ondas longas \rightarrow baixas freq





The Cosmic Microwave Background as seen from the Planck satellite. Credit: ESA
https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB