Eletromagnetismo

Potencial elétrico - usos

- O potencial elétrico é uma forma prática de descrever o campo elétrico.
- Está intimamente ligado aos conceitos de trabalho e energia, mas não é simplesmente a energia contida em uma distribuição de cargas.
- Como podemos relacionar o potencial com as linhas de campo?
- Como podemos calcular a energia armazenada em uma distribuição de cargas?
- Como calcular o potencial no espaço?

Linhas de Campo e Equipotenciais

Temos então definidos o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ e o potencial elétrico $V(\vec{r})$, tal que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Motivo físico: Força conservativa

Motivo matemático:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \nabla V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Motivo físico: Força conservativa

Motivo matemático:

Onde usamos $\nabla \times \nabla V(\vec{r}) = 0$ pois

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial}{\partial x} f & \frac{\partial}{\partial y} f & \frac{\partial}{\partial z} f \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\right) f$$

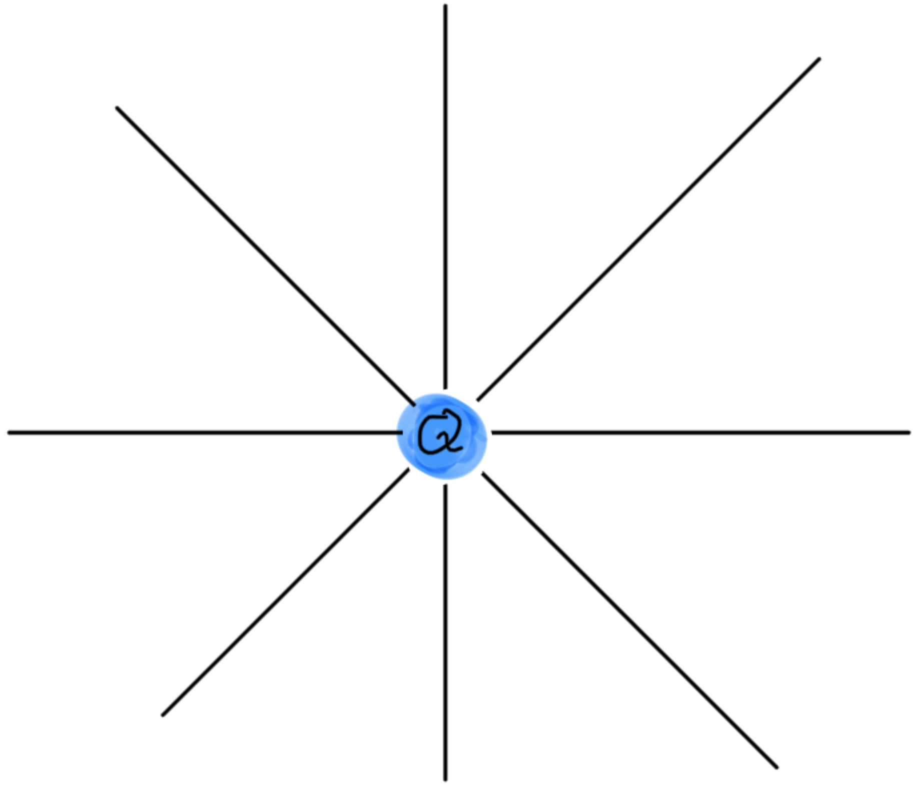
$$- \hat{j}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\right) f$$

$$+ \hat{k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right) f = 0$$

Temos então campo e potencial. Como visualizar?

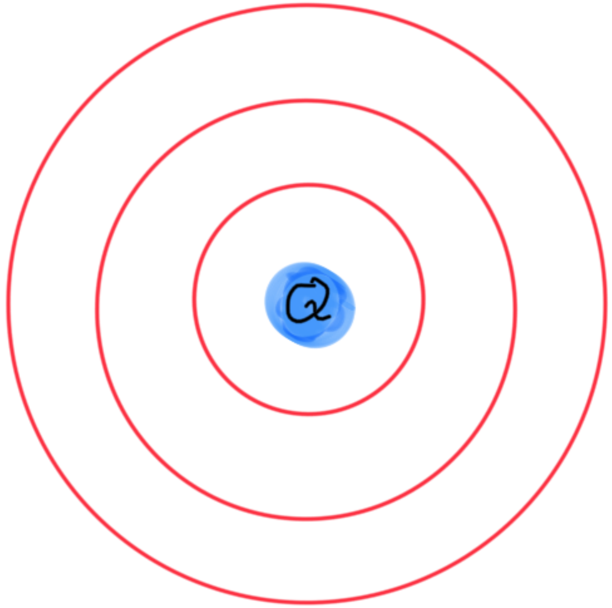
Linhas de campo: a direção de $\vec{E}$ é tangente à linha; a magnitude de $\vec{E}$ é proporcional à densidade de linhas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$



Equipotenciais: regiões do espaço onde $V(\vec{r})$ é constante.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



Relacionando as duas:

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\nabla V\cdot d\vec{l}$$

Relacionando as duas:

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\nabla V \cdot d\vec{l}$$

Explicitamente: $\nabla V \cdot d\vec{l} =$

$$\left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}V + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}V + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}V\right)\cdot\left(\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}V\,dx + \frac{\partial}{\partial y}V\,dy + \frac{\partial}{\partial z}V\,dz = dV\,!$$

$$\therefore\ dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V(r_A) - V(r_B) = \int_{r_A}^{r_B} dV = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ (como já havíamos visto)

$$\Delta V = V(r_A) - V(r_B) = \int_{r_A}^{r_B} dV = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ (como já havíamos visto)

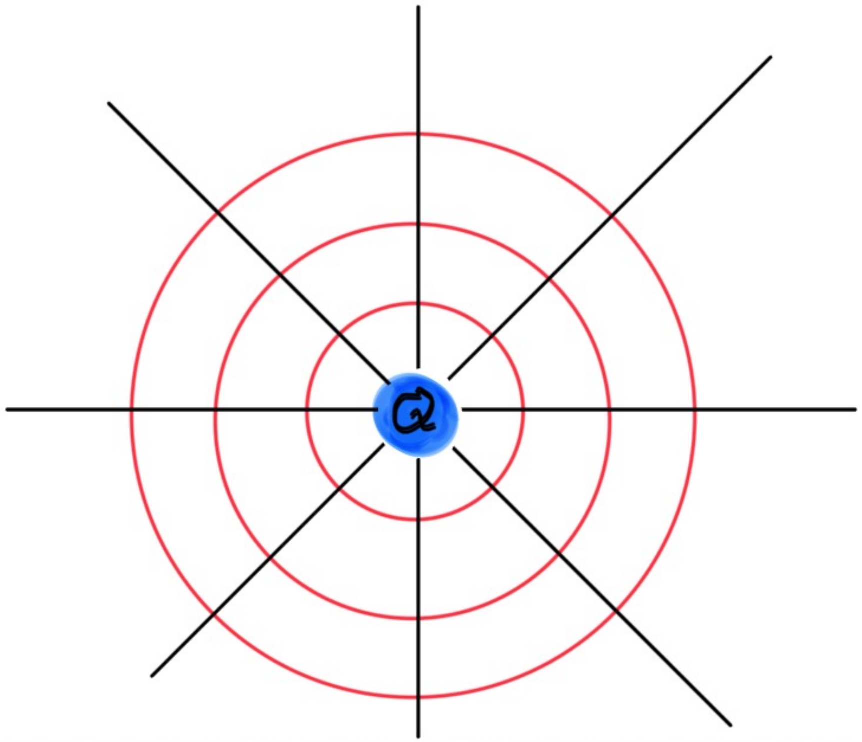
Deslocar-se em uma equipotencial $\Rightarrow \Delta V = 0 \rightarrow dV = 0$

$\therefore \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

paralelo à linha de campo

paralelo à superfície equipotencial

Linhas de campo são ortogonais às equipotenciais!



Trabalho e energia do campo eletrostático

Se movemos uma carga entre os pontos A e B, a força elétrica vai realizar um trabalho proporcional à variação de potencial

$$W_e = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} q\,\vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\left[V(r_B) - V(r_A)\right]$$

Para nós deslocarmos a carga, nós realizamos trabalho:

Aplicamos uma força $\vec{F} = -\vec{F}_e$

$$W = -W_e = q\left[V_B - V_A\right]$$

Para nós deslocarmos a carga, nós realizamos trabalho:

Aplicamos uma força $\vec{F} = -\vec{F_e}$

$$W = -W_e = q\left[V_B - V_A\right]$$

Por exemplo, para trazer uma carga do infinito ao ponto P $\quad W = q\left[V(\vec{r}) - V(\infty)\right]$

de onde convém definir o ponto no infinito com potencial nulo: $\quad V(\infty) = 0 \Rightarrow W = q\,V(\vec{r})$

Quanto custa <u>montar</u> uma distribuição de carga?

$1^{\underline{a}}$ cargas grátis → gera potencial $V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$

$2^{\underline{a}}$ carga → $W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2)$ → potencial $V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$

$3^{\underline{a}}$ carga → $W_3 = q_3 \left[V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left[\frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}\right]$

Trabalho total: $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i>j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} =$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Trabalho total: $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i>j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} =$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

$$V(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

potencial na posição $\vec{r}_i$

Note o Fator 1/2 !

E para o caso contínuo?

$$W = \frac{1}{2}\int V(\vec{r})\cdot dq = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,dv$$

usando aqui $v \to$ volume

Podemos fazer melhor: $\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E} \Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\cdot\vec{E})\cdot V\,dv$

Podemos fazer melhor: $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot V \, dv$

Note que $\nabla \cdot (\vec{E} \cdot V) =$

$$\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\hat{i} E_x \cdot V + \hat{j} E_y V + \hat{k} E_z \cdot V) =$$

$$= E_x \frac{\partial}{\partial x} V + V \frac{\partial}{\partial x} E_x + E_y \frac{\partial}{\partial y} V + V \frac{\partial}{\partial y} E_y + E_z \frac{\partial}{\partial z} V + V \frac{\partial}{\partial z} E_z =$$

$$= \left(E_x \frac{\partial}{\partial x} V + E_y \frac{\partial}{\partial y} V + E_z \frac{\partial}{\partial z} V\right) + \left(V \frac{\partial}{\partial x} E_x + V \frac{\partial}{\partial y} E_y + V \frac{\partial}{\partial z} E_z\right) =$$

$$= \vec{E} \cdot (\nabla V) \qquad + \quad V \cdot (\nabla \cdot \vec{E})$$

$$\therefore \quad W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\cdot\vec{E})\, V\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int \nabla\cdot(\vec{E}\, V)\, dv - \int \vec{E}\cdot\nabla V\, dv\right]$$

mas $-\nabla V = \vec{E}$, e $\int \nabla\cdot\vec{F}\, dv = \int \vec{F}\cdot d\vec{a}$ (Teorema de Gauss)

$$\Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\vec{E}\, V)\, d\vec{a}$$

Integrando em <u>todo</u> o espaço leva a um fluxo <u>nulo</u>

$$\Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, dv \rightarrow$$ Montar o campo demanda trabalho

Pelo campo sabemos o trabalho empregado

No campo colocamos energia.

$\Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \, dv \rightarrow$ Montar o campo demanda trabalho

Pelo campo sabemos o trabalho empregado

No campo colocamos energia.

Qual a energia de uma carga pontual? $E(0) \rightarrow \infty$

A energia não tem superposição.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \rightarrow \quad E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\,\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Belíssimo exemplo da Teoria Eletromagnética

Vamos usar as equações para calcular potenciais...

Aula 4: Resolvendo as equações de Poisson e Laplace

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1813) \quad ; \quad \nabla^2 V = 0 \quad (1782)$$

(Euler, D'Alembert 1762)

Um ponto importante a considerar:

→ Quantas soluções uma equação diferencial pode ter?

Exemplos: Oscilador harmônico: $m\frac{d^2}{dt^2}x = -kx$

2 funções: $x_1 = A\cos(\omega t)$ $\quad x_2 = B\,\text{sen}(\omega t)$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$

Exemplos: Oscilador harmônico: $m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$

2 funções: $x_1 = A \cos(\omega t)$ $\quad x_2 = B \,\text{sen}(\omega t)$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$

A e B são parâmetros que satisfazem a condição de contorno: definidos $x(0)$, $v(0) = \frac{d}{dt} x \Big|_{t=0}$

temos $A = x(0)$; $B = v(0)/\omega$

$$\Longrightarrow x(t) = x(0) \cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega} \,\text{sen}(\omega t)$$

$\rightarrow$ Solução única

Unicidade de Solução: $\nabla^2 V = 0$ & $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Linearidade:

Eq. de Laplace: $\nabla^2 V = 0$; se V_1 é solução, V_2 também, combinações lineares são soluções $V = \alpha V_1 + \beta V_2$

$$\nabla^2 V = \alpha \nabla^2 V_1 + \beta \nabla^2 V_2$$

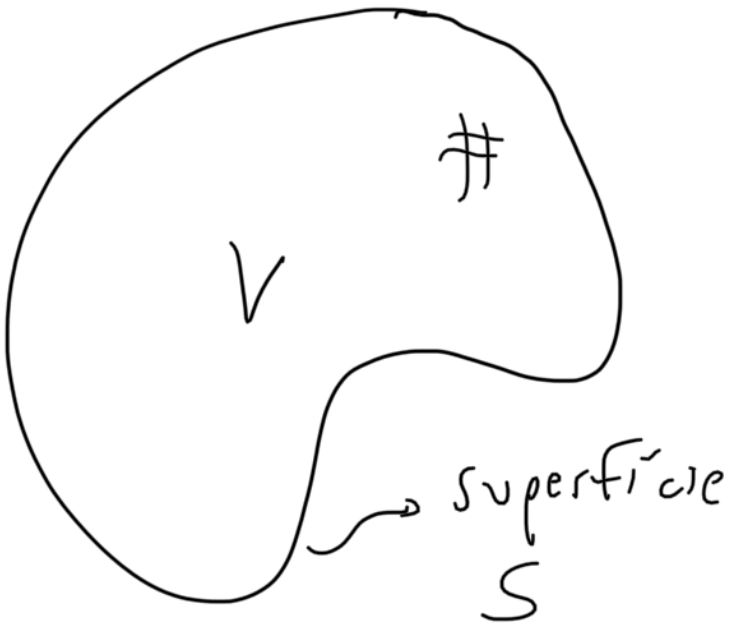
$$\alpha \underbrace{\nabla^2 V_1}_{0} + \beta \underbrace{\nabla^2 V_2}_{0} = 0$$

$\Rightarrow$ Dadas n soluções linearmente independentes V_i

$V = \sum_{i=1}^{n} a_i V_i$ é uma solução geral.

Resta determinar se, dadas as condições de contorno, V é única, ou seja, existe apenas uma solução para o conjunto de números $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$

Vamos aplicar este conceito à equação de Poisson:



Dadas $V_a = \sum_{i=1}^{n} a_i V_i$; $V_b = \sum_{i=1}^{n} b_i V_i$

Se estas soluções respondem às mesmas condições de contorno na fronteira $\underline{S}$ de um volume $\underline{V}$

$$V_a = V_b + C \,,$$

onde C é uma constante

Para demonstrar, vamos definir o que são as condições de contorno:

→ ou V é definido em S (condição de Dirichlet (1805-1859))

→ ou $\vec{E}\cdot\vec{n}$ é definido em S (cond. de Neumann)
(Carl Neumann, 1832-1925)

$$\text{Como } \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{n} = -\nabla V\cdot\hat{n} = -\frac{\partial V}{\partial n} \rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial n}$, a derivada do potencial ao longo da linha de campo, é definida.

→ ou condições mistas (Cauchy 1789-1857)

Demonstração: Se V_a e V_b satisfazem

a equação de Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Sua subtração satisfaz a equação de Laplace

$$V = V_a - V_b \Rightarrow \nabla^2 V = \nabla^2 V_a - \nabla^2 V_b = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$\Rightarrow V$ satisfaz eq. de Laplace

Usando o fato de que $\nabla \cdot (\phi \cdot \nabla \psi) =$

$$\nabla \phi \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$$

Usando o Fato de que $\nabla \cdot (\phi \cdot \nabla \psi) =$

$$\nabla \phi \, \nabla \psi + \phi \, \nabla^2 \psi$$

$$\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[\phi \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi\right] =$$

$$= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi$$

$$\phi \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi =$$

$$\nabla \phi \, \nabla \psi + \phi \, \nabla^2 \psi$$

Como $\int \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\,dv = \oint_S \phi\,\nabla\psi\cdot\hat{n}\,dA$ (Lei de Gauss)

Usando $\phi = \psi = V$

$$\int(\nabla\phi\,\nabla\psi + \phi\,\nabla^2\psi)\,dv = \int|\nabla V|^2 dv + \int V\cdot\underbrace{\nabla^2 V}_{=0}\,dv = \oint_S V\,\underbrace{\nabla V\cdot\hat{n}}_{=\frac{\partial V}{\partial n}}\,da$$

$$\Rightarrow \int|\nabla V|^2 dv = \oint_S V\cdot\frac{\partial}{\partial n}V\,da$$

Se V_a e V_b satisfazem as mesmas condições de contorno, na superfície S temos $V_a = V_b \Rightarrow V = 0$

Ou se $V_a = V_b + C$, na superfície S elas atendem a condição de Neumann $\rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial n}V_a = \frac{\partial}{\partial n}V_b \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}V = 0$

Portanto, se V_a e V_b são soluções simultâneas

$$\oint V \cdot \frac{\partial}{\partial n} V \, da = 0$$

Como $|\nabla V|^2 \geq 0$, $\int |\nabla V|^2 dV \geq 0$

Mas $\int |\nabla V|^2 dv = \oint_S V \cdot \frac{\partial}{\partial n} V \, da = 0$

Isto só é possível se $\nabla V = 0$ em todo o volume.

$\therefore$ $V_a = V_b + C$ → As duas soluções são idênticas, a menos de uma constante! ∇

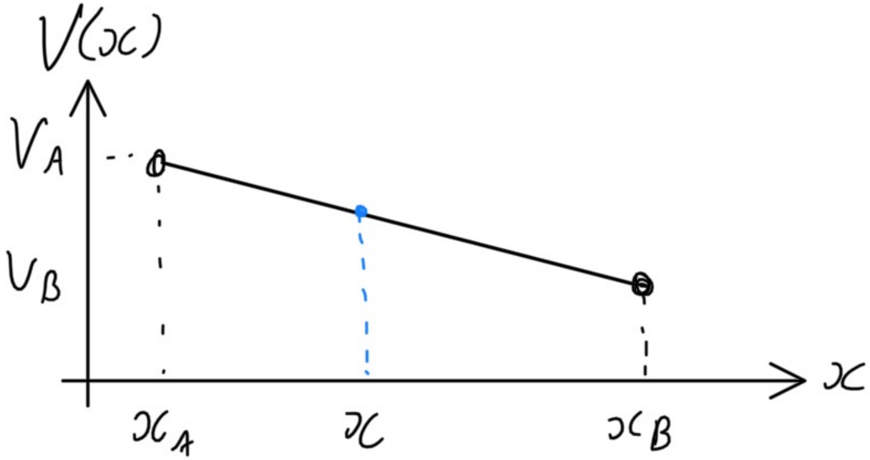
Resolvendo a Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0$$

$$1D \rightarrow V = V(x) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}V = 0$$

Já vimos isso: $V(x) = \alpha x + \beta$

Definida por dois pontos



→ Sem máximos fora dos extremos

→ Valor no ponto ⇒ média local

$$V(x) = \frac{V(x+\Delta) + V(x-\Delta)}{2}$$

2D

$$V = V(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V = 0$$

3D

$$V = V(x,y,z) \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V = 0$$

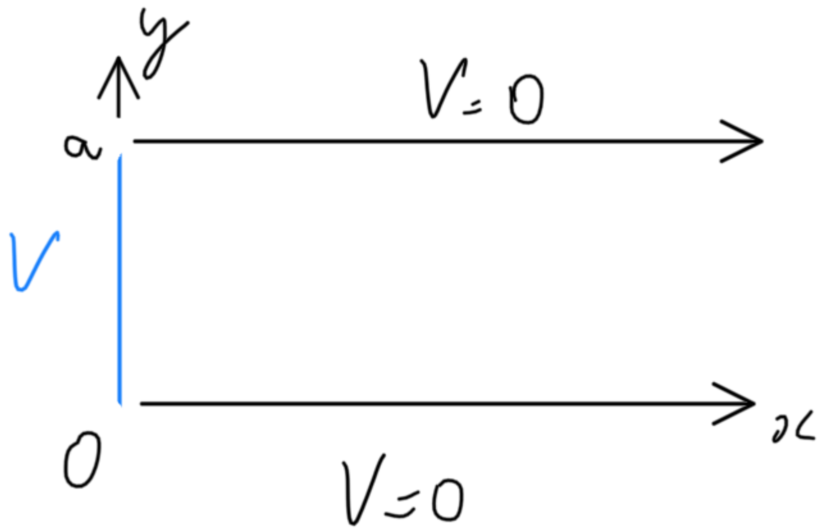
Como vimos, não há <u>máximo local</u> fora da borda

Vale ainda a média local

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint V \cdot dl \quad ; \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint V \cdot da$$

(círculo) (esfera)

Problema em 2D



Duas linhas muito longas, em potencial nulo, com uma borda em potencial V

Conjunto de soluções : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} V + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} V = 0$

Método de separação de variáveis:

$$V(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$Y(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = -X(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)$$

$$\times \frac{1}{X\cdot Y}$$

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X}_{\text{depende só de } x} = -\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y}_{\text{depende só de } y}$$

a igualdade vale para qualquer valor de (x,y)

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y = \alpha \to \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y = \alpha \to \text{constante}$$

Se $\alpha = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y = 0 \Rightarrow Y(y) = Cy + D$$

I

Se $\alpha > 0$

$\alpha = k^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X = k^2 X \Rightarrow X(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y = -k^2 Y \Rightarrow Y(y) = C\cos ky + D\,\mathrm{sen}\,ky$$

II

Se $\alpha < 0$

$-\alpha = k^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X = -k^2 X \Rightarrow X(x) = A\cos ky + B\,\mathrm{sen}\,ky$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y = k^2 Y \Rightarrow Y(y) = Ce^{-ky} + De^{ky}$$

III

Temos três famílias de soluções! As condições de contorno estabelecem qual usamos

Na proposta: $V(x,y) \Rightarrow \begin{cases} V(0,y) = V & (0 < y < a) \\ V(x,0) = 0 & (x > 0) \\ V(x,a) = 0 & (x > 0) \\ \lim\limits_{x \to \infty} V(x,y) = 0 & (0 < y < a) \end{cases}$

Caso I: $V(x,y) = (Ax+B)(Cy+D)$

$$V(0,y) = B(Cy+D) = V \Rightarrow C=0, \quad B \cdot D = V$$

$$V(x,0) = (Ax+B)D = 0 \Rightarrow D=0$$

$$V(x,a) = (Ax+B)(Ca+\cancelto{0}{D}) = 0 \Rightarrow C=0$$

$$\lim_{x\to\infty} V(x,y) = \lim_{x\to\infty} (Ax+B)\underbrace{(Cy+D)}_{\text{limitada}} \Rightarrow A=0$$

Não serve!

$V(x,y)=0$

Caso II: $V(x,y) = (Ae^{-kx} + Be^{kx})(C\cos ky + D\,\text{sen}\,ky)$

$V(x,0) = 0 = (Ae^{-kx} + Be^{kx}) \cdot C \Rightarrow C = 0$

$V(x,a) = 0 = (Ae^{-kx} + Be^{kx}) \cdot D\,\text{sen}\,ka \Rightarrow \quad \text{sen}\,ka = 0$

$ka = n \cdot \pi \Rightarrow k_n = n\frac{\pi}{a}$

conjunto de soluções

$$\lim_{x \to \infty} V(x,y) = \lim_{x \to \infty} (D.A\,e^{-kx} + D.B\,e^{kx})\,\text{sen}(k.a) = 0$$

$$\Rightarrow D \cdot B = 0$$

$$V(0,y) = (D.A)\,\text{sen}\,k_n y$$

Soluções do tipo: $V_n(x,y) = C_n e^{-n\pi\frac{x}{a}}\,\text{sen}(n\pi\frac{y}{a})$

Soluções do tipo: $V_n(x,y) = C_n e^{-n\pi \frac{x}{a}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{y}{a}\right)$

só $n > 0$, porque?

Todos são soluções?

$\Rightarrow$ Devemos buscar o caso mais geral

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{y}{a}\right) = V$$

Truque: projeção! Família de funções $\operatorname{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right)$

$$\int_0^a V(0,y) \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right) dy = \int_0^a V \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right) dy$$

Truque: projeção! Família de funções $\text{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right)$

$$\int_0^a V(0,y)\,\text{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right) dy = \int_0^a V\,\text{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right) dy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \text{sen}\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \text{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right) dy = V \int_0^a \text{sen}\left(m\pi \frac{y}{a}\right) dy$$

substituindo variáveis $\pi \frac{y}{a} = \theta \qquad dy = \frac{a}{\pi} d\theta$

$$\frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} \text{sen}(n\theta) \cdot \text{sen}(m\theta)\, d\theta = \frac{a}{\pi} V \int_0^{\pi} \text{sen}(m\theta)\, d\theta$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{(e^{ia} - e^{-ia})}{2i} \cdot \frac{(e^{ib} - e^{-ib})}{2i} =$$

$$= \frac{\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right) - \left(e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}\right)}{-4}$$

$$= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(m\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos[(n-m)\theta]\, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos[(n+m)\theta]\, d\theta$$

$$\text{se } n \neq m \Rightarrow = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(n-m)\theta}{n-m}\right]\Big/_0^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+m)\theta}{n+m}\right]\Big/_0^{\pi} = 0$$

$$\text{se } n = m \Rightarrow = \frac{1}{2} [\theta]\Big/_0^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2n}\Big/_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta)\cdot \operatorname{sen}(m\theta)\, d\theta = \frac{a}{\pi} V \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(m\theta)\, d\theta$$

$$\frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{\pi}{2}\, \delta_{nm} = -\frac{a}{\pi} V \cdot \frac{1}{m} \underbrace{\cos(m\theta)\Big|_0^{\pi}}$$

δ_{nm}:

$$\left.\begin{matrix} =1,\ n=m \\ =0,\ n\neq m \end{matrix}\right\} \leftarrow \text{Delta de Kroenecker}$$

$$\begin{matrix} =-2 \text{ se } m \text{ ímpar} \Rightarrow m=2i+1 \\ =0 \text{ se } m \text{ par } m=2i \end{matrix}$$

$$C_m = \frac{4}{\pi}\frac{V}{m} \quad \text{se } m=2i+1 \ ; \quad 0 \quad \text{se } m=2i$$

Enfim!

$$V(x,y) = V\cdot \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1}\cdot \exp\left[-(2i+1)\pi\frac{x}{a}\right]\cdot \operatorname{sen}\left[(2i+1)\pi\frac{y}{a}\right]$$

Enfim!

$$V(x,y) = V_0 \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \cdot \exp\left[-(2i+1)\pi \frac{x}{a}\right] \cdot \operatorname{sen}\left[(2i+1)\pi \frac{y}{a}\right]$$

Caso III: Podemos mostrar que não satisfaz,

ou lembrar da unicidade: uma resposta é

a resposta

$\Rightarrow$ Palpite $V(x,y) = X(x)\,Y(y)$ dá a resposta!