Equação de Helmholtz

.. Equações de Maxwell de um meio homogêneo sem cargas

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3) \quad (\rho = 0)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

.. Equações constitutivas

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (5) (vetor de deslocamento elétrico)

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + M$ (6) (vetor de indução do campo magnético)

.. Aproximação linear num material homogêneo e isotrópico

$$\begin{cases} \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} & \text{(vetor de polarização elétrica)} \\ \vec{M} = \mu_0 \chi_M \vec{H} & \text{(vetor de magnetização)} \end{cases}$$

→ equações que relacionam os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ com as propriedades elétricas e magnéticas do material

$\Rightarrow$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$

→ permitividade elétrica do material

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}} \quad (7)$$

→ permitividade relativa do material

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_M \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H}$

→ permeabilidade magnética do material

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}} \quad (8)$$

→ permeabilidade relativa do material

ε_0 : permitividade elétrica do vácuo

μ_0 : permeabilidade magnética do vácuo

$\varepsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-14}$ F/cm

$\mu_0 = 1,2566 \times 10^{-8}$ H/cm

.. Na equação (1)

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

$\Rightarrow$ considerando que a parte temporal do campo é $e^{-i\omega t}$

(equivalente a Transformada de Fourier $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$)

.. Aplicando propiedades dos operadores vetoriais

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = i\omega \, \nabla \times B$$

com $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = i\omega \mu_0 \nabla \times (\mu \vec{H})$$

.. Material homogeneo $\Rightarrow$ espacialmente ε, μ são ctes

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0 = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = i\omega \mu_0 \mu (\nabla \times \vec{H})$$

Aplicando a eq (2) $\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega D$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = i\omega \mu_0 \mu (-i\omega \varepsilon_0 \varepsilon) \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} \cancel{+} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \vec{E}$$

.. Considerando $K_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ (modulo do vetor de onda no vacio)

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$: velocidade da luz no vacio

$c = 2{,}997925 \times 10^8$ m/seg

$\omega = K_0 c$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + K_0^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0$$; indice de refração do meio $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + K_0^2 n^2 \vec{E} = 0$$; $K = n K_0$: modulo do vetor de onda no meio

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0}$$ $\rightarrow$ eq. de Helmholtz

ou $$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}\right] + K^2 \vec{E} = 0}$$; $\vec{E} = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z$

.. – Densidade de energia e Intensidade do Campo eletromagnético

.. Definição do vetor de poynting "S"

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

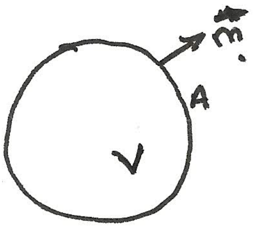
: representa o vetor da densidade de fluxo de energia transportada pelo campo eletromagnético dado em $\left[\text{Watts}/m^2\right]$

.. Energia emitida por um volume "V" de area "A"

$$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{m}\, dA$$

$\vec{m}$: vetor unitario normal à superficie A

$$= \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = \int_V (\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}) dV$$



Com $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon\, \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu\, \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) dV$$

$$= \int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} + \mu_0 \mu \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial t}\right) dV$$

$$= \int_V \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{\mu_0 \mu}{2} |\vec{H}|^2\right)}_{} dV$$

$\Rightarrow$ densidade de energia

$$\boxed{u = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{\mu_0 \mu}{2} |\vec{H}|^2} \qquad \left[\text{Joules}/m^3\right]$$

.. Para $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$ T. Fourier temporal e espacial $\Rightarrow \vec{K} \times \vec{H} = -i\omega \vec{D}$

$\Rightarrow \vec{K} \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ considerando $\begin{cases} \vec{K} = K\, \hat{e}_K \\ \vec{H} = H\, \hat{e}_H \\ \vec{E} = E\, \hat{e}_e \end{cases}$ vetores unitarios na direção respectiva dos campos

$\Rightarrow \hat{e}_K \times \hat{e}_H\, KH = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E\, \hat{e}_e$

$\Rightarrow \hat{e}_e = \hat{e}_K \times \hat{e}_H$ caracteristica das ondas transversais $\Rightarrow$

.. igualando os modulos ⇒

$$KH = -i\omega\,\varepsilon_0\varepsilon\,E$$

$$H = \frac{-i\omega\,\varepsilon_0\varepsilon\,E}{K} \qquad \text{com } K = K_0 m = \sqrt{\varepsilon\mu}\,K_0$$

e

$$\omega = K_0 c = K_0\,1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{K_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{-i(\cancel{K_0}/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})\,\varepsilon_0\varepsilon\,E}{\cancel{K_0}\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

impedância do médio

$$H = -i\,\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\,\mu_0\mu}}\,E \Rightarrow |H| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\,|E|$$

$$\Rightarrow \quad |H|^2 = \frac{(\varepsilon_0\varepsilon)^2}{(\varepsilon_0\varepsilon)(\mu_0\mu)}\,|E|^2 \Rightarrow |H|^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}\,|E|^2$$

substituindo na eq da densidade de energia

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon|\vec{E}|^2 + \tfrac{1}{2}\mu_0\mu|\vec{H}|^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon|E|^2 + \tfrac{1}{2}\cancel{\mu_0\mu}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\cancel{\mu_0\mu}}|\vec{E}|^2\right)$$

$$\boxed{u = \varepsilon_0\varepsilon|E|^2 = \mu_0\mu|H|^2}$$

.. Intensidade da onda electromagnetica "I"

I : se define como o valor médio temporal do modulo do vetor de poynting

$$I = \langle|S|\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T|\vec{E}\times\vec{H}|\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T|\vec{E}||\vec{H}|\,dt \quad \left(\text{para ondas transversais}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T|E|\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}|E|\right)dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\,\frac{1}{T}\int_0^T|E|^2\,dt$$

.. – Considerando a parte real do campo no seu dominio temporal $\text{Real}(\vec{E}) = |E|\cos\omega t$

$$\Rightarrow \quad I = \langle|S|\rangle_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\,\frac{1}{T}|E|^2\int_0^T\cos^2\omega t\,dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}|E|^2\,\frac{1}{\cancel{T}}\left(\frac{\cancel{T}}{2}\right)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\,|E|^2} \qquad |E| \rightarrow \text{Amplitude do Campo}$$