SEM5946 | SEM0576
Veículos Autônomos Aéreos

Aula #10: Propulsão com hélices

Prof. Assoc. Marcelo Becker
becker@sc.usp.br

Prof. Dr. André Carmona Hernandes
andre.hernandes@ufscar.br

Fonte: https://wingtra.com/drone-photogrammetry-vs-lidar/

São Carlos, 01/07/20

Conteúdo

- Introdução

Introdução

- Hélices

Atuação

- “Take-home messages”
- Próxima aula…

Conclusão

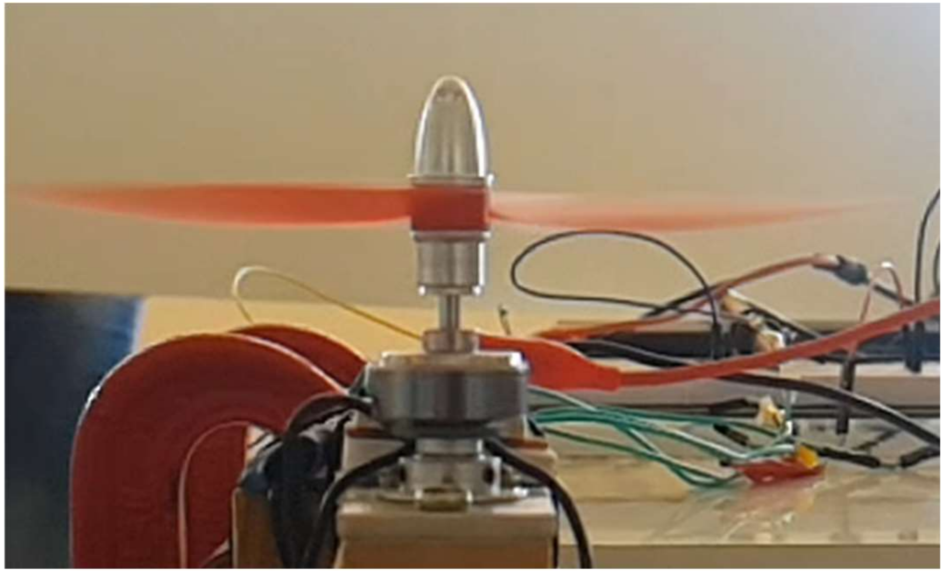
Conteúdo

Introdução

- ICA 100-40: ***Definição***: Uma aeronave é **QUALQUER** aparelho que possa se sustentar na atmosfera a partir de reações do ar que não sejam as reações do ar contra a superfície da Terra.

Introdução

- A hélice “empurra o ar para baixo, e como reação o ar empurra a hélice para cima”



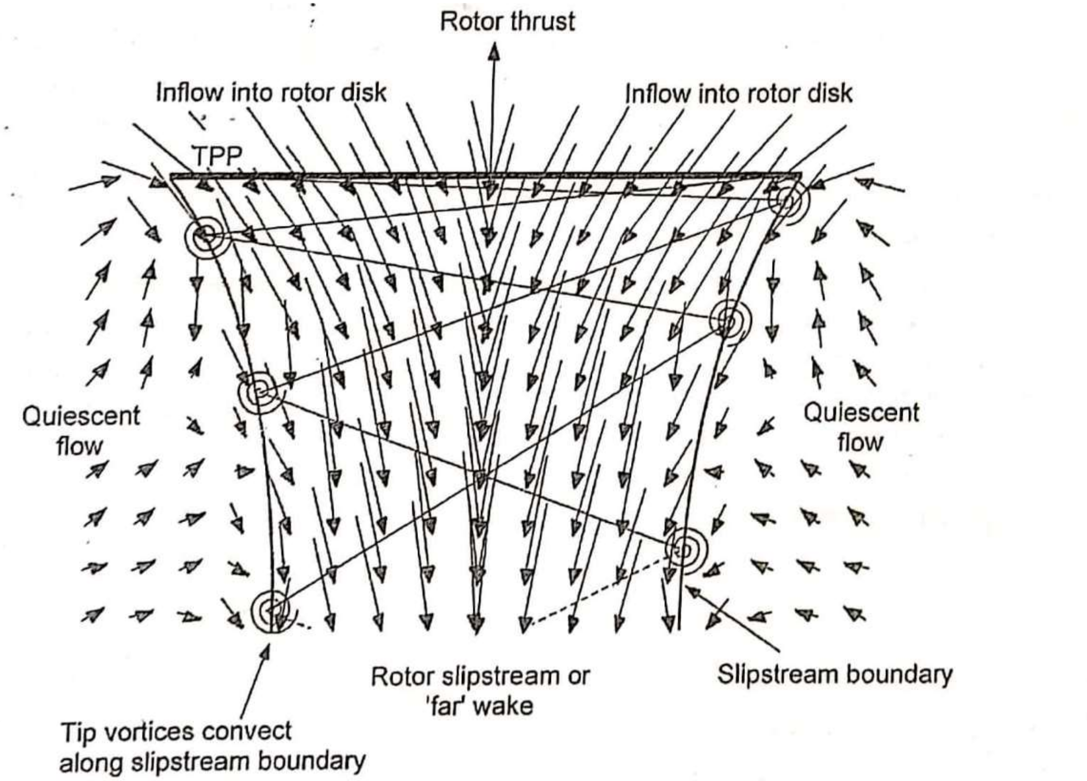


Figure 2.4 Measurements of the velocity field in a diametric plane near and below a two-bladed rotor operating in hover. Data source: Leishman et al. (1995)

Conteúdo

Introdução

Atuação

- **Hélices**

Conclusão

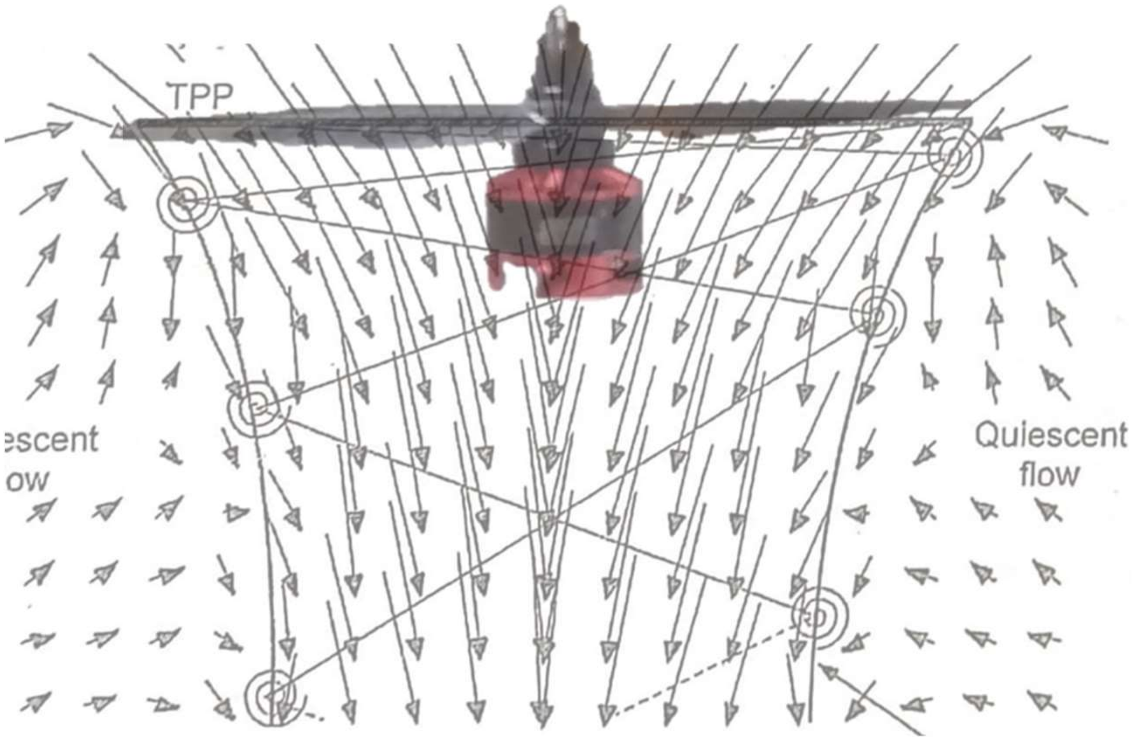
Hélices

Como analisar?

- Análise pela teoria do momento
  - Conhecida como Teoria do momento de Rankine-Froude.
  - Prediz o comportamento de primeira ordem do empuxo e da potência.
  - Base para estudos mais avançados.
- Análise pela teoria simples de elemento de pá
  - Drzewiecki ou Lanchester
- Elemento de pá com momento
  - Unido com Reissner, Bothezat e Glauert

Hélices

Teoria do momento de Rankine-Froude :

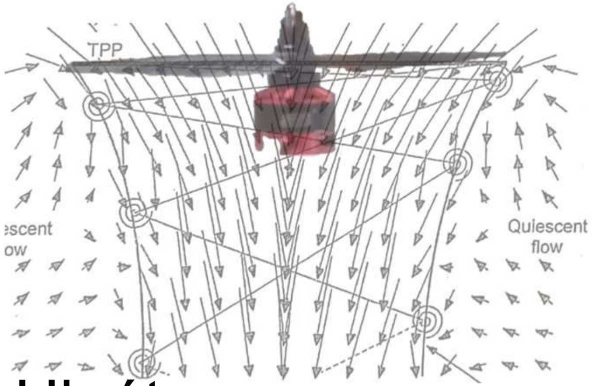


Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

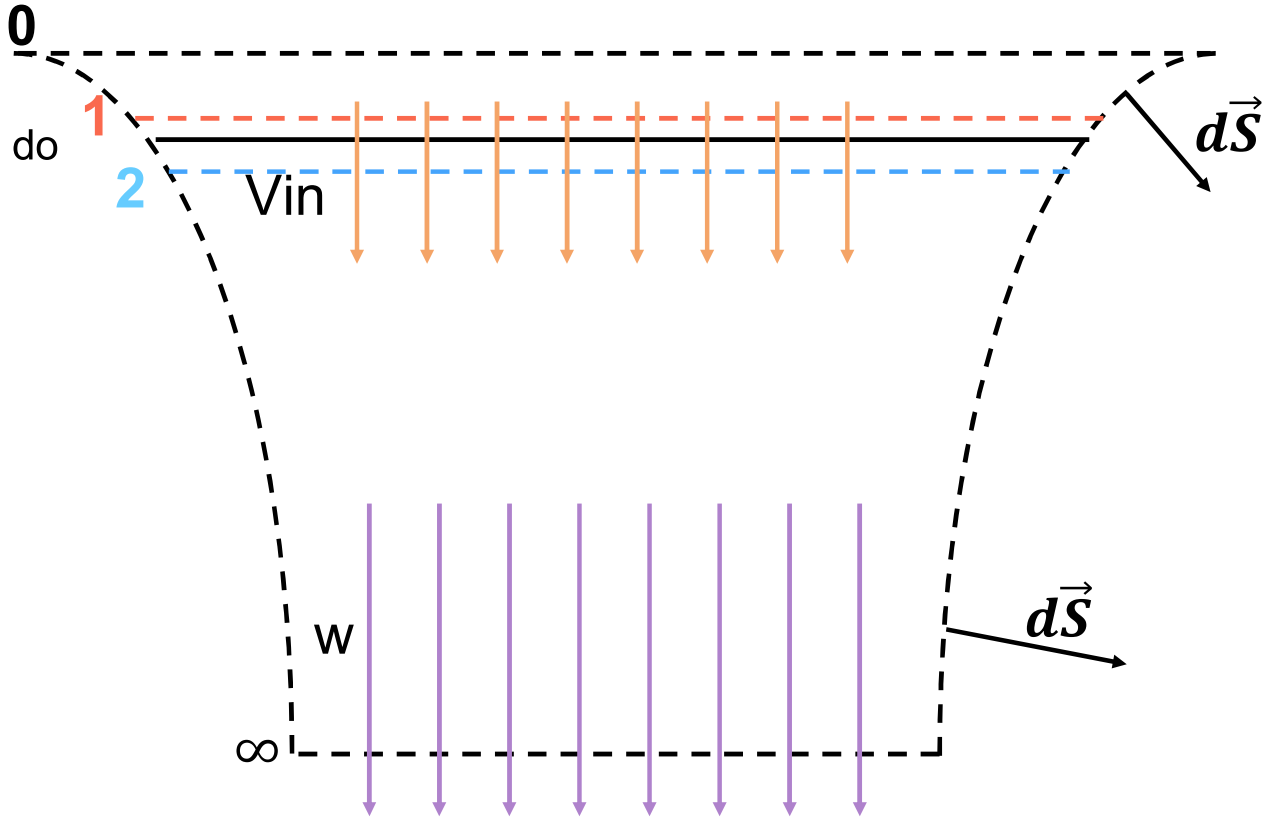
Introdução
Hélices
Conclusão

Teoria do momento de Rankine-Froude :



S = área da superfície de controle

A = área do disco



O ∞ , na prática, pode ser 2 diâmetros da hélice

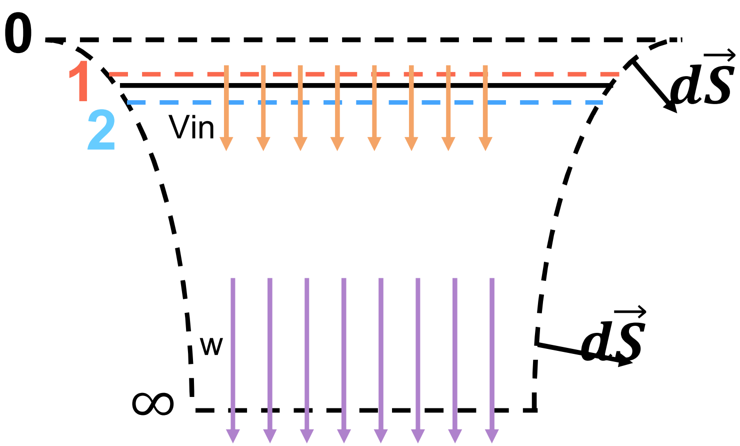
Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)



Conservação de massa

$$\underbrace{\cancel{\frac{dM}{dt}}}_{0} = \underbrace{\cancel{\frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho d\forall}}_{0,\text{ por (3)}} + \int_{S} \rho \vec{V} \cdot ds$$

$$0 = \int_{S} \rho \vec{V} \cdot ds$$

$$0 = \rho(V_{\infty} A_{\infty} - V_{disco} A_{disco})$$

$$\boxed{V_{in} A_{disco} = V_{\infty} A_{\infty}}$$

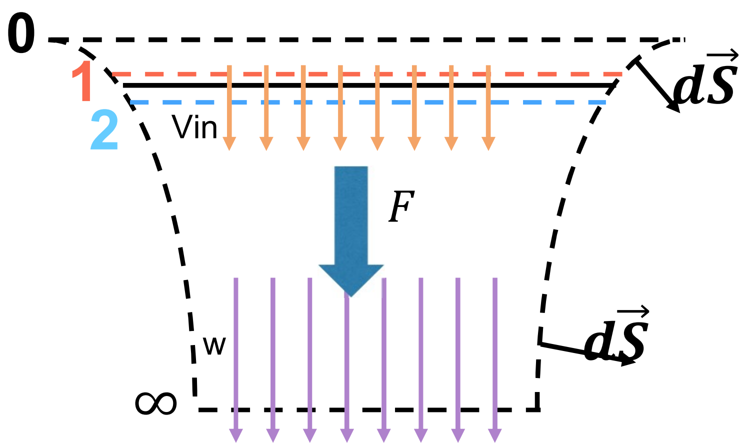
Introdução
Hélices
Conclusão

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$\boxed{V_{in} A_{disco} = V_\infty A_\infty}$$



Conservação de momento

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} + \vec{F_S} + \vec{F_B} = \overbrace{\cancel{\frac{d}{dt}\int_{\forall C} \vec{V}\cdot \rho d\forall}}^{0,\text{ por (3)}} + \int_S \vec{V}\,(\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{s})$$

Em que:

$\vec{F_S} = \int_S (-p d\vec{s})$, no contorno de S, p=0 (p=p_{atm}) (Glaubert, 1935)

$\vec{F_B} = \int_{\forall C} \rho \vec{g}\, d\forall$, a influência do peso do ar no aumento do momento, podemos desconsiderar neste momento. (lembrando que há mudança de potencial)

Considerando (2)

$$-F = \iint_\infty \vec{V}\,(\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{s}) - \overbrace{\cancel{\iint_0 \vec{V}\,(\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{s})}}^{0,\text{ pois } V_0 = 0}$$

$$\boxed{-F = \rho A_\infty w^2 = \dot{m}_\infty\, w}$$

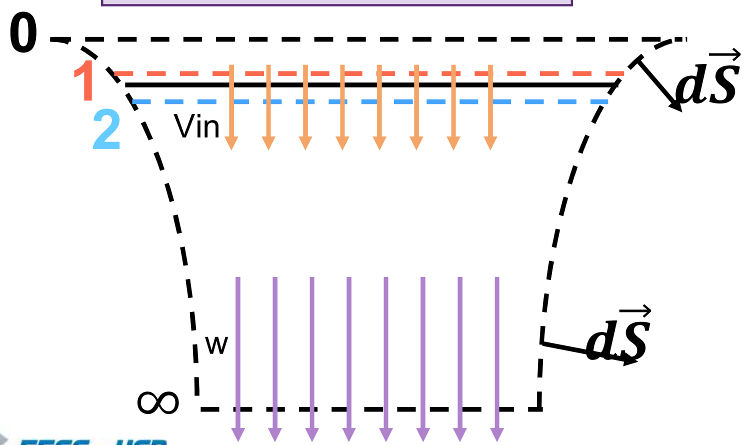
Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$\boxed{V_{in} A_{disco} = V_{\infty} A_{\infty}}$$

$$\boxed{-F = \rho A_{\infty} w^2 = \dot{m}_{\infty}\, w}$$



Conservação de energia

$$\dot{Q} - \dot{W} = \underbrace{\cancel{\frac{d}{dt}\int_{\forall C} e\rho d\forall}}_{0,\text{ por }(3)} + \int_{S} e\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Em que:

$e = u + \frac{V^2}{2} + gz + p\forall$, considerando que não há mudança de temperatura, que a mudança de potencial está relacionada a força de campo, e a pressão manométrica é 0.

Portanto, $e = \frac{V^2}{2}$

$$-Fv_{in} = \iint_{\infty} \frac{\vec{V}^2}{2}(\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{s}) - \underbrace{\cancel{\iint_{0} \frac{\vec{V}^2}{2}(\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{s})}}_{0,\text{ pois } V_0 = 0}$$

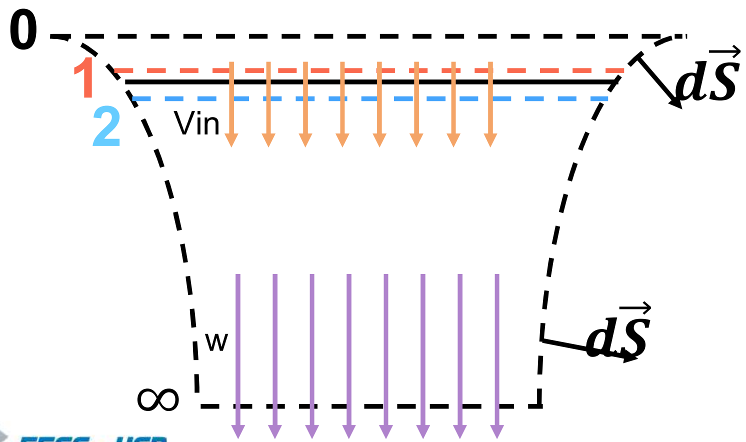
$$\boxed{-Fv_{in} = \frac{1}{2}\rho A_{\infty} w^3}$$

Hélices

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)



$$\mathrm{V}_{in}A_{disco} = V_\infty A_\infty$$

$$-F = \rho A_\infty w^2 = \dot{m}_\infty\, w$$

$$-F v_{in} = 0.5\rho A_\infty w^3$$

Substituindo:

$$\rho A_\infty w^2 v_{in} = 0.5\rho A_\infty w^3$$

$$\boxed{v_{in} = \frac{w}{2}}$$

Portanto:

$$\mathrm{V}_{in}A_{disco} = wA_\infty$$

$$\frac{w}{2}\pi r^2 = w\pi r_\infty^2$$

$$\boxed{\frac{r\sqrt{2}}{2} = r_\infty}$$

Na prática, a redução é de 0.78, não 0.707

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

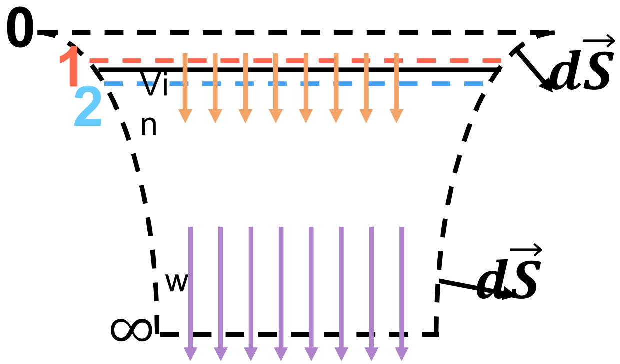
$$V_{in} A_{disco} = V_{\infty} A_{\infty}$$

$$v_{in} = 0.5w$$

$$-F = \rho A_{\infty} w^2 = \dot{m_{\infty}}\, w$$

$$-F v_{in} = 0.5 \rho A_{\infty} w^3$$

$$\frac{r\sqrt{2}}{2} = r_{\infty}$$



Por ação e reação, a força que acelera o fluido, tem uma reação no motor de mesma magnitude e sentido contrário. Portanto:

$$-F = T \ (empuxo)$$

Então:

$$T = \dot{m_{\infty}} w = \dot{m_{disco}} w$$
$$T = \rho A_{disco} v_{in} (2 v_{in})$$
$$T = 2 \rho A_{disco} v_{in}^2$$

Portanto

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2 \rho A_{disco}}}$$

Hélices

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

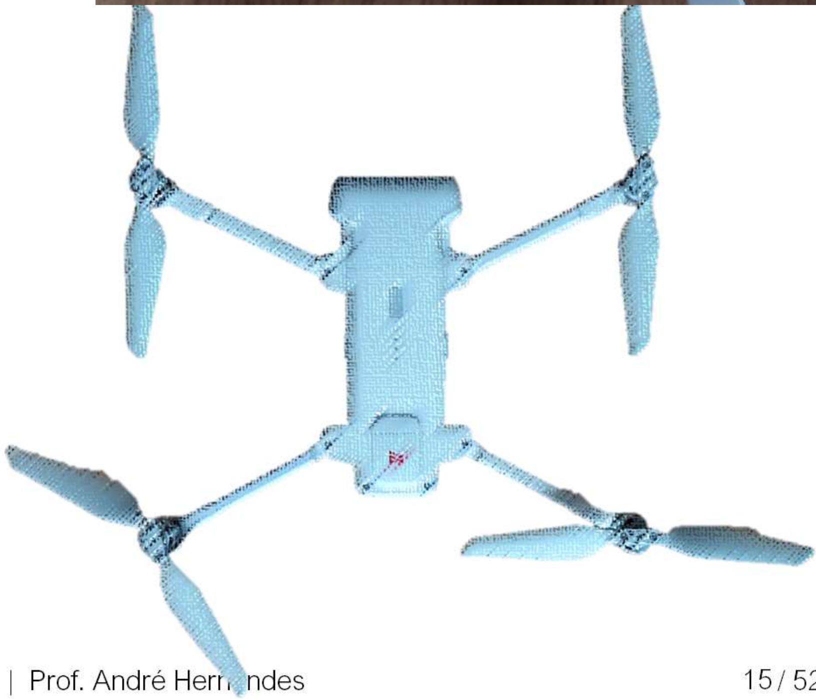
1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$\boxed{v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}}$$

Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice 11 cm

Mas qual a densidade do ar?



Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

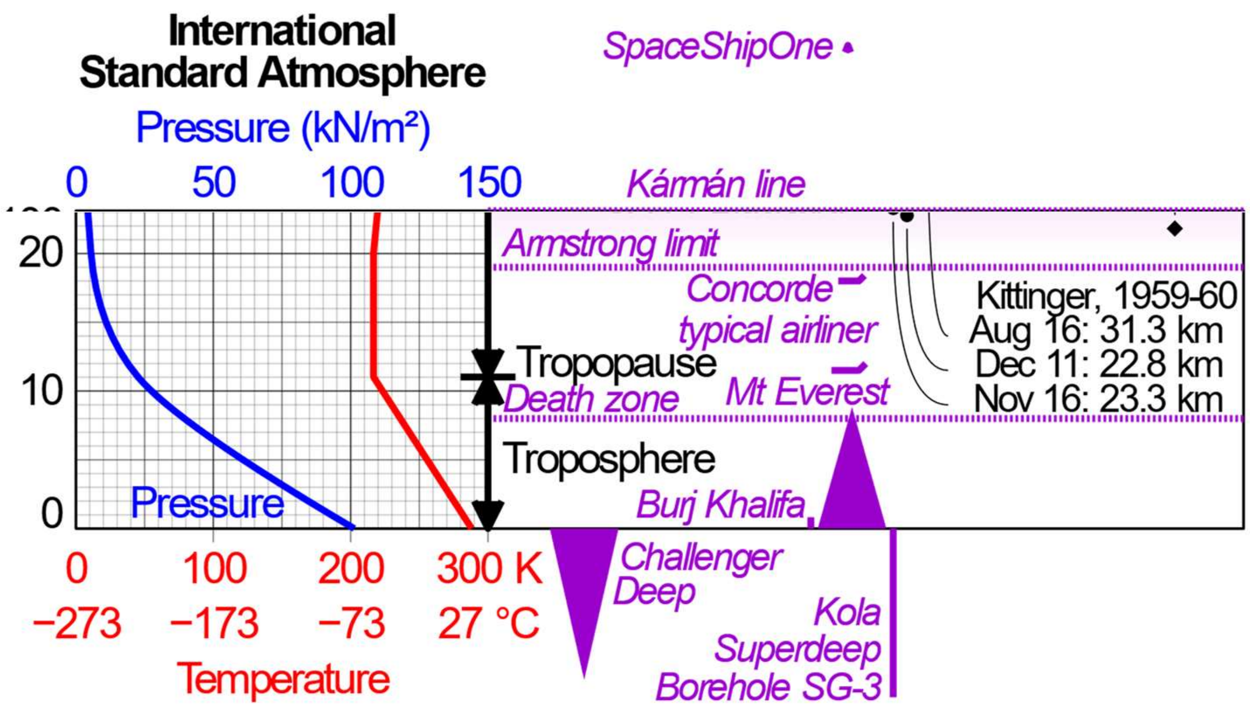
1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$\boxed{v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}}$$

Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice 11 cm

Mas qual a densidade do ar?



Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$\boxed{v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}}$$

Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice11 cm

Mas qual a densidade do ar?

Altitude de densidade:

$$\sigma' = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{288.16}{T + 273.16}\left(1 - \frac{0.0064993\, h_m}{288.16}\right)$$

h_m, onde é altura em metros de operação

T, onde é temperatura em ºC

ρ_0, a densidade padrão no nível do mar 1.225 kg/m^3

Lembrando que é para o ar seco!

Hélices

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

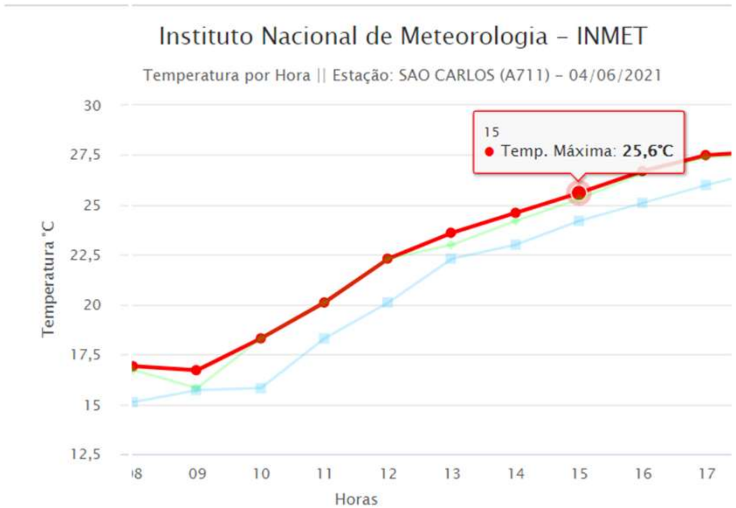
Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice 11 cm

$$\rho = 1.225 \frac{288.16}{T + 273.16}\left(1 - \frac{0.0064993\ h_m}{288.16}\right)$$

Para operar em São Carlos:

https://mapas.inmet.gov.br/



Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

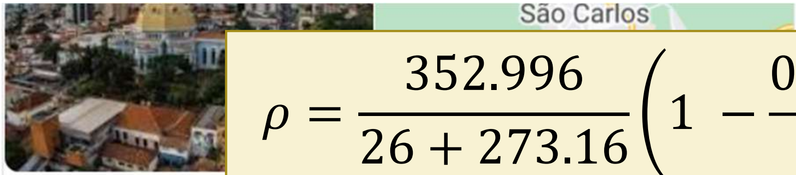
$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice11 cm
04/06/2021 – T = 25.6 ºC

$$\rho = 1.225 \frac{288.16}{T + 273.16}\left(1 - \frac{0.0064993\, h_m}{288.16}\right)$$

Para operar em São Carlos:



$$\rho = \frac{352.996}{26 + 273.16}\left(1 - \frac{0.0064993\,.\,(120 + 856)}{288.16}\right)$$

São Carlos

Município em São Paulo

São Carlos é um município brasileiro localizado no interior do estado de São Paulo, na região Centro-Leste, e a uma distância rodoviária de 231 quilômetros da capital paulista. Wikipédia

Elevação: 856 m

Área: 1.137 km²

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

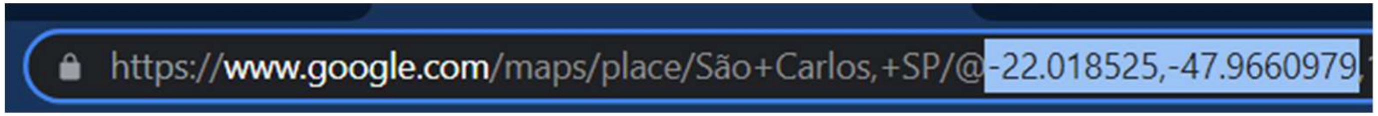
$$\boxed{v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}}$$

Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice11 cm

$$\boxed{\rho = 1.154\ kg/m^3}$$

Para operar em São Carlos, também temos um alívio na gravidade:



$$g = 9.780327(1 + A\sin^2 L - B\sin^2 2L) - 3{,}086x10^{-6} H$$

$$A = 0.0053024$$
$$B = 0.0000058$$
$$L = -22.018525 * \frac{\pi}{180}$$
$$H = 120 + 856$$

$$g = 9.780327(1 + A\sin^2 L - B\sin^2 2L) - 3{,}086x10^{-6} H$$

$$g = 9.758$$

https://www.isobudgets.com/how-to-calculate-local-gravity/

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

Exemplo: FIMI X8 SE

Massa 790 g
Raio da hélice 11 cm

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

Substituindo:

$$v_{in} = \sqrt{\frac{g * m/4}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = \sqrt{\frac{9.758 * 0.79/4}{2 * 1.154 * \pi(0.11)^2}}$$

$$v_{in} = 4.687 \text{ m/s}$$

$$P_{min} = T * v_{in} = 9.758 * 0.79/4 * 4.687$$

$$P_{min} = T * v_{in} \approx 9W/\text{motor}$$

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = 4.687\ \mathrm{m/s}$$

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

$$P_{min} \approx 9W/\mathrm{motor}$$

E se estivermos no nível do mar, a temperatura padrão

$$v_{in} = \sqrt{\frac{g * m/4}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = \sqrt{\frac{9.81 * 0.79/4}{2\ * 1.225 * \pi(0.11)^2}}$$

$$v_{in} = 4.561\ \mathrm{m/s}$$

$$P_{min} = T * v_{in} = 9.81 * 0.79/4 * 4.561$$

$$P_{min} = T * v_{in} \approx 8.84\ W/\mathrm{motor}$$

Hélices

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = 4.561 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

$$P_{min} \approx 8{,}84W/\text{motor}$$

Comparemos, agora, duas variáveis para comparações de aeronaves:

Carregamento de disco (*Disk Loading* - DL):

$$DL = \frac{T}{A}[N.m^{-2}]$$

$$DL = \frac{9.81 * 0.79/4}{\pi(0.11)^2/4}$$

$$DL = 203.87 \text{ N.m}^{-2}$$ $$DL = 4.258 \text{ lb.ft}^{-2}$$

Carregamento de potência (*Power Loading* - PL):

$$PL = \frac{T}{P}[N.kW^{-1}]$$

Como a potência ideal induzida é $P = T.v_i$, temos:

$$v_i = (PL)^{-1}$$

$$PL = 219.25 \text{ N.kW}^{-1}$$ $$PL = 36.755 \text{ lb.hp}^{-1}$$

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

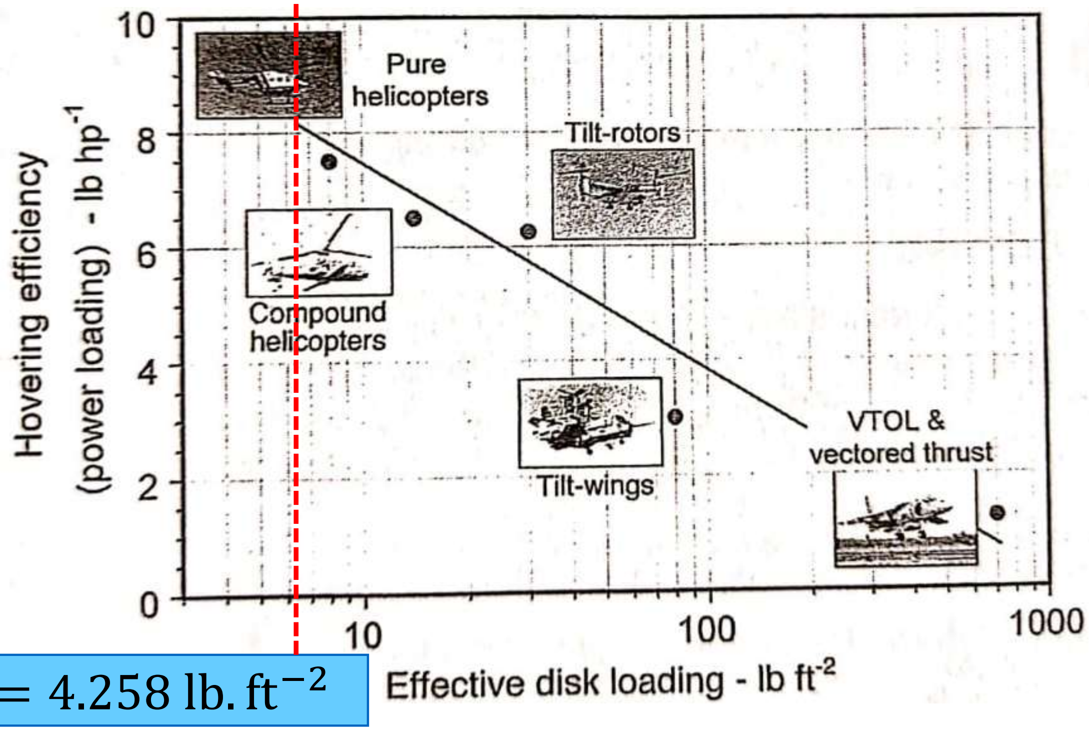
$$v_{in} = 4.561\ \mathrm{m/s}$$

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

$$P_{min} \approx 8{,}84W/\mathrm{motor}$$

Comparemos, agora, duas variáveis para comparações de aeronaves:

$$PL = 36.755\ \mathrm{lb.hp^{-1}}$$



$$DL = 4.258\ \mathrm{lb.ft^{-2}}$$

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

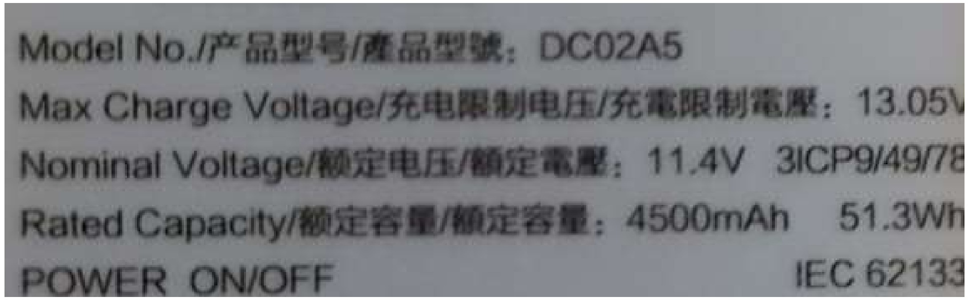
$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = 4.687 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

$$P_{min} \approx 9W/\text{motor}$$

Olhando a bateria:



Façamos algumas considerações:

Não podemos usar 100% da carga da bateria (Lipo), usaremos 70%.

Além dos motores, colocaremos mais:

- 5 W para a eletrônica
- Eficiência de conversão em 90%.
- 9 W de consumo do servos do gimbal (3W por servo)

Hélices

Teoria do momento de Rankine-Froude :

Hipóteses:

1) Atuador do tipo disco infinitesimal
2) Unidirecional
3) Regime Permanente
4) Incompressível
5) Invíscido (Perdas por viscosidade desconsideradas)

$$v_{in} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = 4.687 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.154\ kg/m^3$$

$$P_{min} \approx 9W/\text{motor}$$

Olhando a bateria:

$$t = \frac{C * V_{nominal} * \eta}{P_{total}} * 60$$

$$t = \frac{4.5 * 11.4 * 0.7}{\left(4 * \frac{9}{0.9}\right) + 14} * 60$$

$$t \approx 40\ min$$

SEM NADA, APENAS EM HOVER! Considerando a hélice perfeita

Hélices

Adimensionais:

- Adimensionais nos ajudam a comparar performances e nos ajudam na análise e projeto

- Para hélices, no Brasil, temos:

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^2} \qquad C_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2}\rho AR(\Omega R)^2} \qquad C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^3} \qquad \lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R}$$

Onde:

ρ, densidade do ar
Ω, velocidade de rotação
R, raio da hélice
A, área do disco
T,Q, P, Empuxo, torque de carga, potência
v_i, Velocidade induzida
C_T, C_Q, C_P, coeficientes adimensionais de empuxo, torque e potência
λ_i, razão de influxo

Adimensionais:

Hipóteses para análise:

- Coeficiente de influxo uniforme
- Sem perdas por viscosidade
- Hélice em pairo (Hover)

Olhando a razão de influxo:

$$\lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R} = \frac{1}{\Omega R}\sqrt{\frac{T}{2\rho A}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\rho C_T A(\Omega R)^2}{2\rho A(\Omega R)^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{C_T}}{2}$$

Hélices

Adimensionais:

Hipóteses para análise:

- Coeficiente de influxo uniforme
- Sem perdas por viscosidade
- Hélice em pairo (Hover)

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{C_T}}{2}$$

Potência ideal:

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^3} \Rightarrow \frac{T\, v_i}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^3} \Rightarrow \left(\frac{T}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^2}\right)\left(\frac{v_i}{\Omega R}\right) = C_T\, \lambda_i \Rightarrow \frac{C_T^{3/2}}{2}$$

Hélices

Efeitos não-ideais

Corrigimos a teoria de momento para adicionar:

- Influxo não-uniforme
- Perdas de ponta
- Esteira rotativa
- Contração da esteira não-ideal
- Número Finito de hélices
- Arrasto no perfil
- Entre outros ..

Algumas hipóteses:

- Assumirmos o arrasto da sessão do perfil constante (C_{d0}) e independente de Reynolds e Mach
- Se a corda da hélice não muda
- ΩR é muito maior que a velocidade induzida

$$C_P = C_{Pi} + C_{P0} = \frac{kC_T^{3/2}}{2} + \frac{\sigma C_{d0}}{4}$$

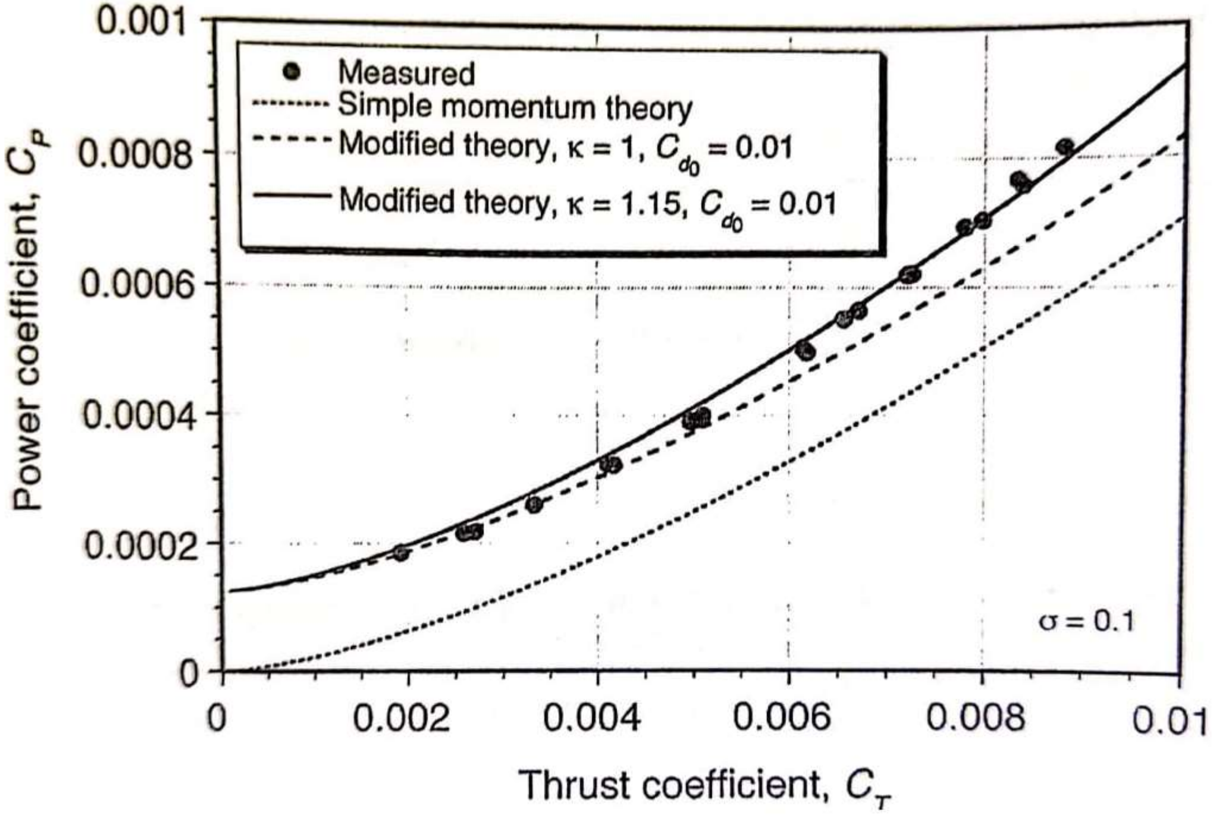
Onde:

$\sigma = \frac{N_b c}{\pi R}$, Solidez da hélice (área hélice/área disco)

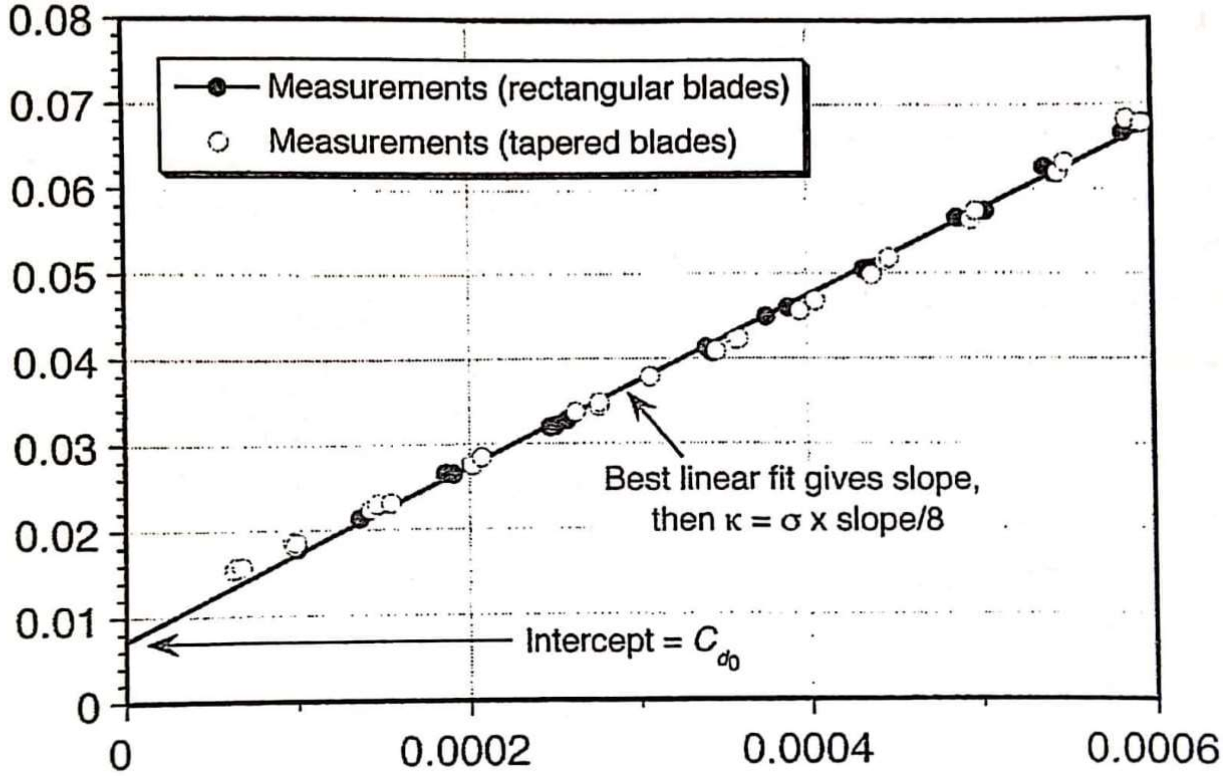
k, Fator de potência induzida

Efeitos não-ideais

$$C_P = C_{Pi} + C_{P0} = \frac{kC_T^{3/2}}{2} + \frac{\sigma C_{d0}}{4}$$



Efeitos não-ideais



$$C_P = C_{Pi} + C_{P0} = \frac{kC_T^{3/2}}{2} + \frac{\sigma C_{d0}}{4}$$

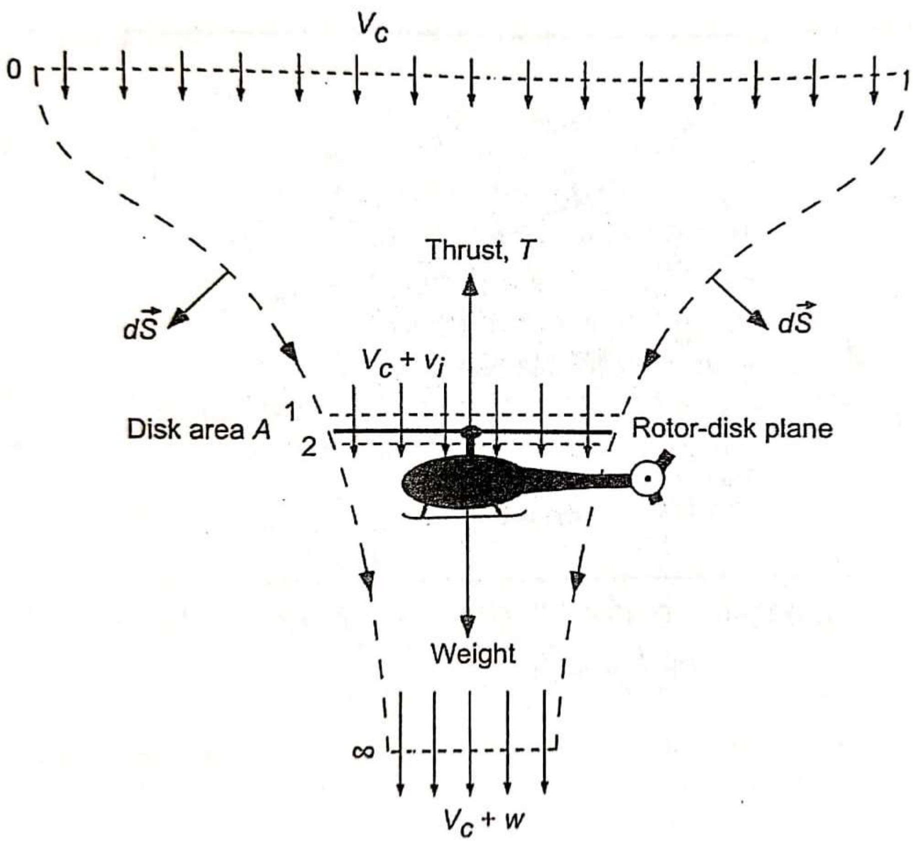
$$C_P = k\frac{C_T^{3/2}}{2} + \frac{\sigma}{4}C_{d0}$$

$$\frac{4C_P}{\sigma} = k\frac{2C_T^{3/2}}{\sigma} + C_{d0}$$

$$x = \frac{2C_T^{3/2}}{\sigma} \qquad y = \frac{4C_P}{\sigma}$$

Hélices

Teoria do momento para subida



$$\dot{m} = \rho(V_C + v_{in})A_{disco}$$

$$-F = T = \dot{m}(V_C + v_{in}) - \dot{m}V_C = \dot{m_\infty}\, w$$

$$T(V_C + v_{in}) = 0.5\dot{m}w(2V_c + w)$$

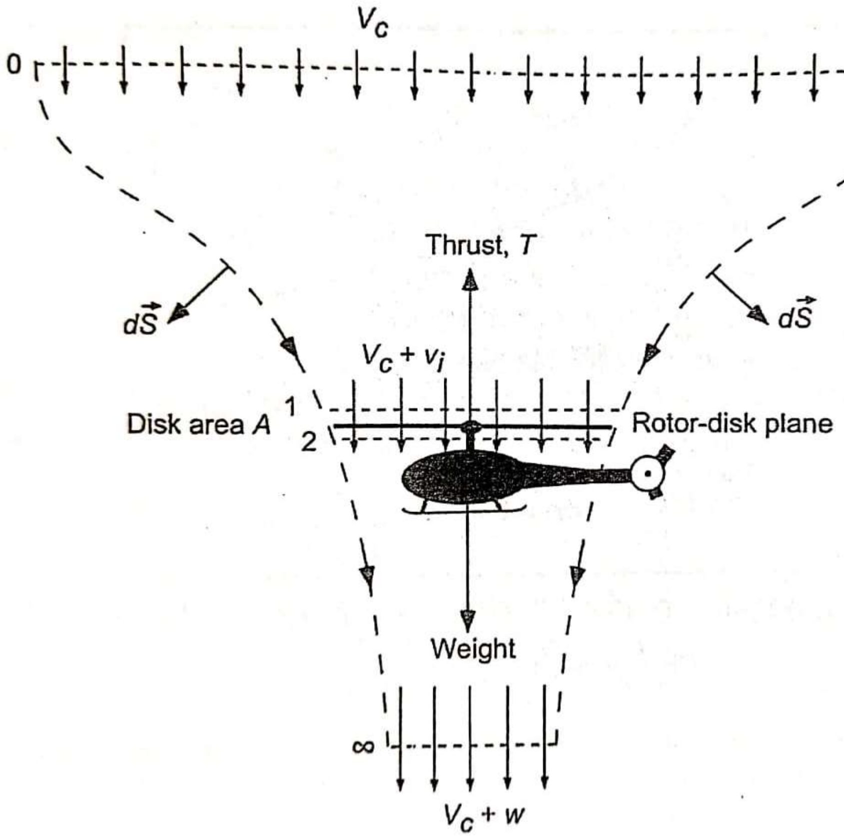
$$\dot{m_\infty}\, w(V_C + v_{in}) = 0.5\dot{m}w(2V_c + w)$$

$$v_{in} = \frac{w}{2}$$

$$v_{hover} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

Hélices

Teoria do momento para subida



$$v_{hover} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$v_{in} = \frac{w}{2}$$

$$\dot{m} = \rho(V_C + v_{in})A_{disco}$$

$$T = \dot{m}_\infty\, w$$

$$T = 2\rho(V_C + v_{in})A_{disco}\mathrm{v_{in}}$$

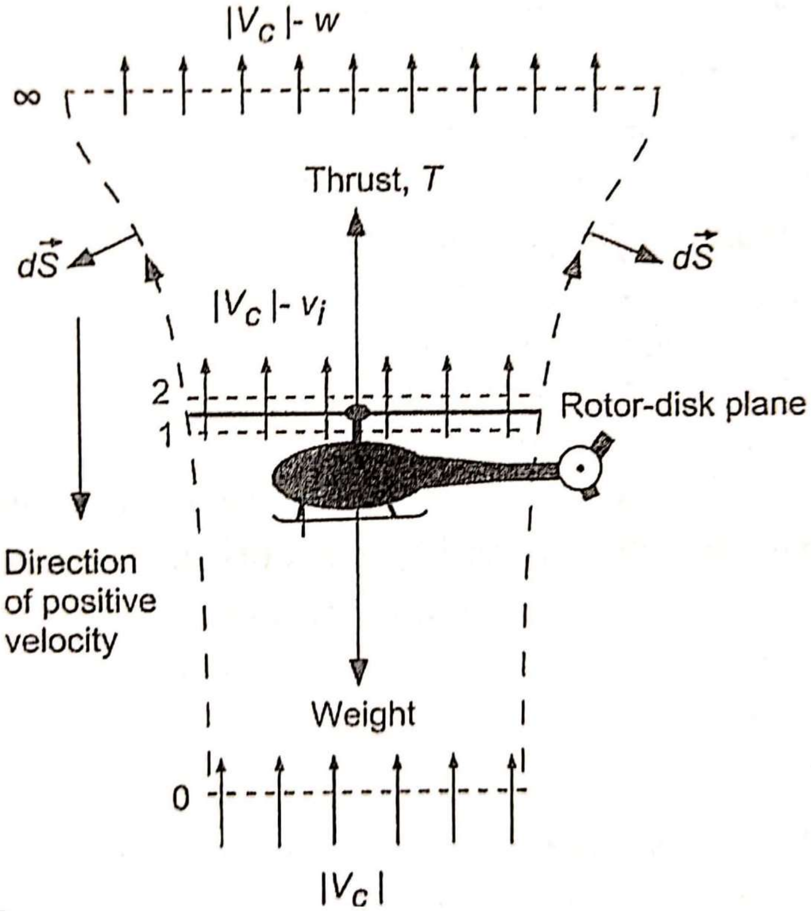
$$\frac{T}{2\rho A_{disco}} = (V_C + v_{in})\mathrm{v_{in}}$$

$$v_{hover}^2 = (V_C + v_{in})\mathrm{v_{in}}$$

$$\left(\frac{v_{in}}{v_{hover}}\right)^2 + \left(\frac{V_C}{v_{hover}}\right)\left(\frac{v_{in}}{v_{hover}}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{v_{in}}{v_{hover}} = -\frac{V_C}{2v_{hover}} + \sqrt{\left(\frac{V_C}{2v_{hover}}\right)^2 + 1}$$

Teoria do momento para descida



$$v_{hover} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$\dot{m} = \rho(V_C + v_{in})A_{disco}$$

$$T = -\dot{m}_\infty w$$

$$T(V_C + v_{in}) = -0.5\dot{m}w(2V_c + w)$$

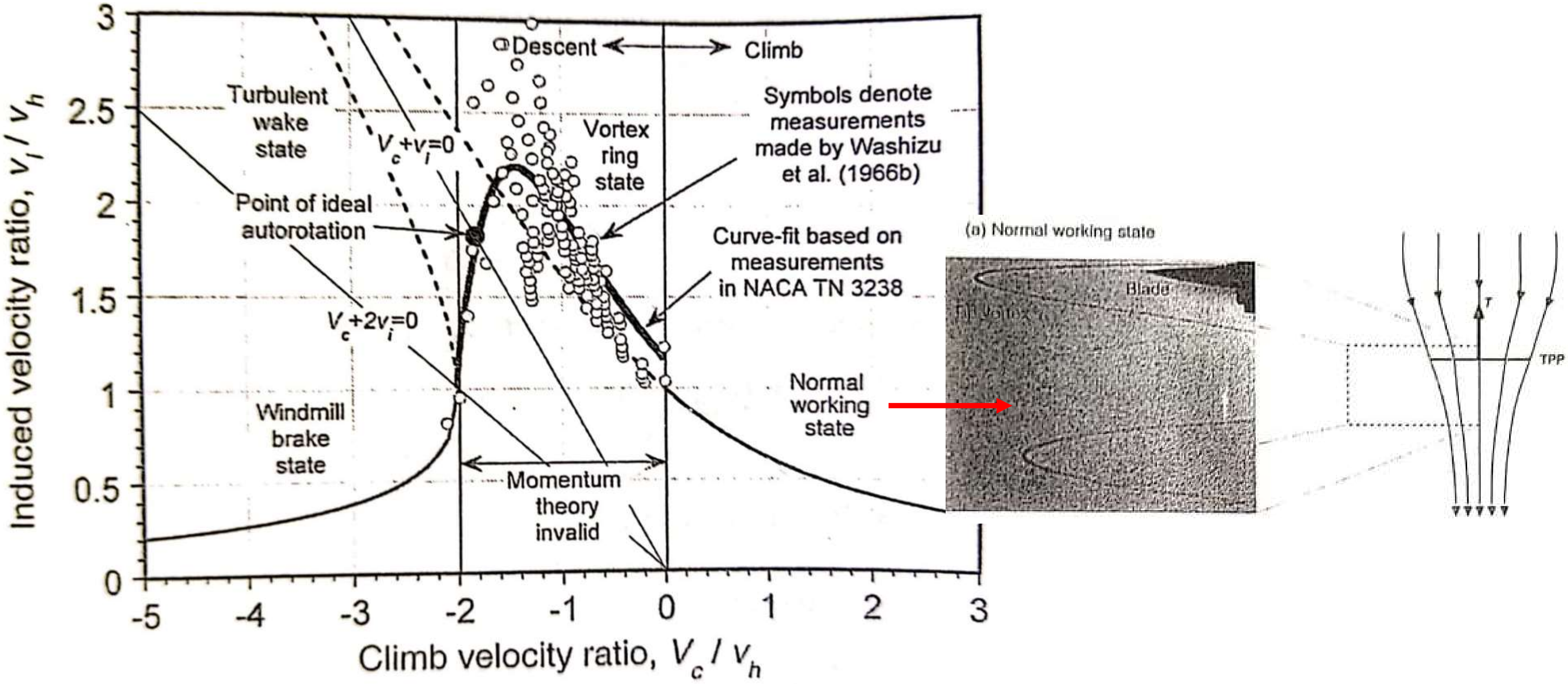
$$2v_{in} = w$$

$$\left(\frac{v_{in}}{v_{hover}}\right)^2 + \left(\frac{V_C}{v_{hover}}\right)\left(\frac{v_{in}}{v_{hover}}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{v_{in}}{v_{hover}} = -\frac{V_C}{2v_{hover}} - \sqrt{\left(\frac{V_C}{2v_{hover}}\right)^2 - 1}$$

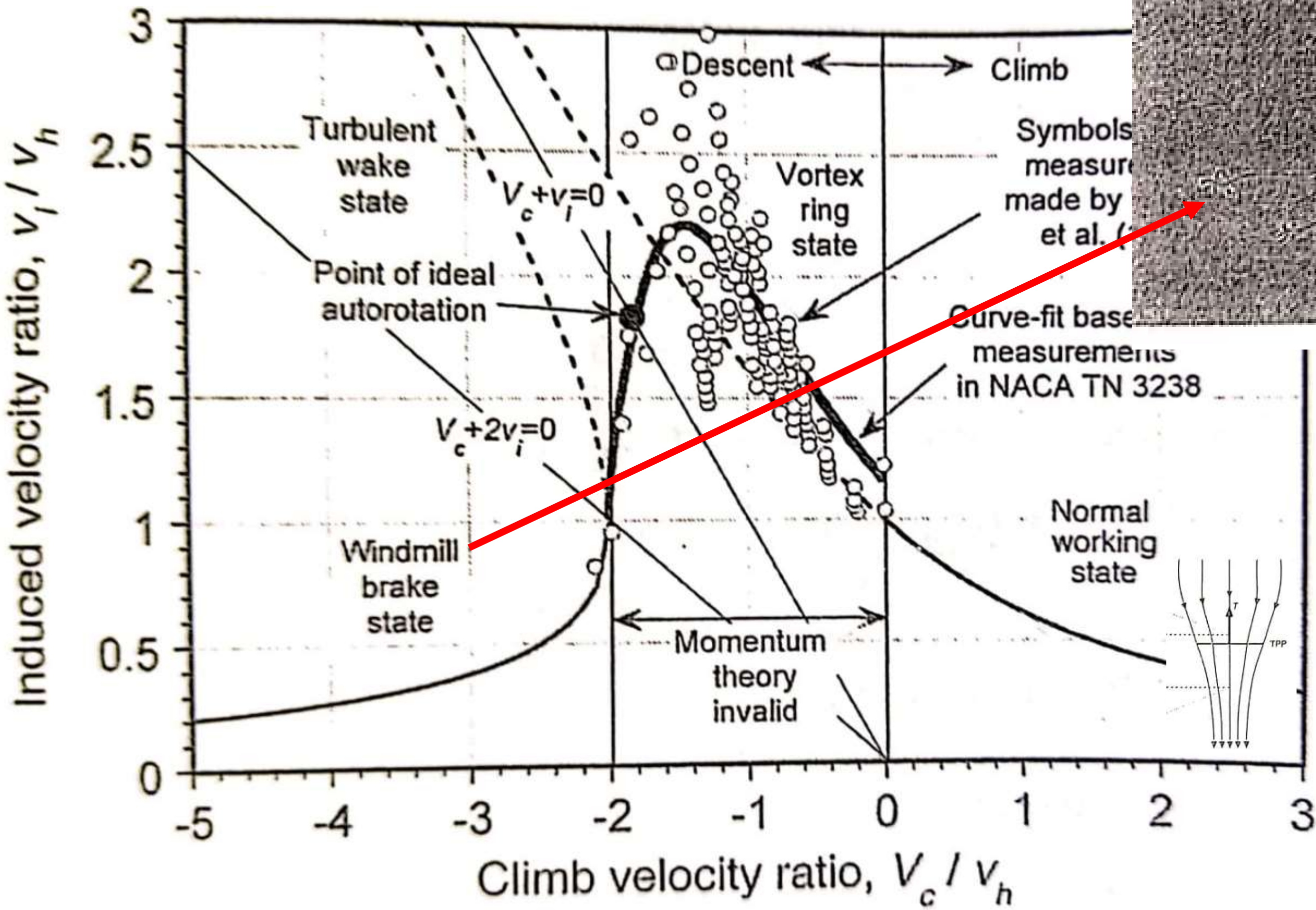
Válido apenas para $\dfrac{V_C}{v_{hover}} \leq -2$

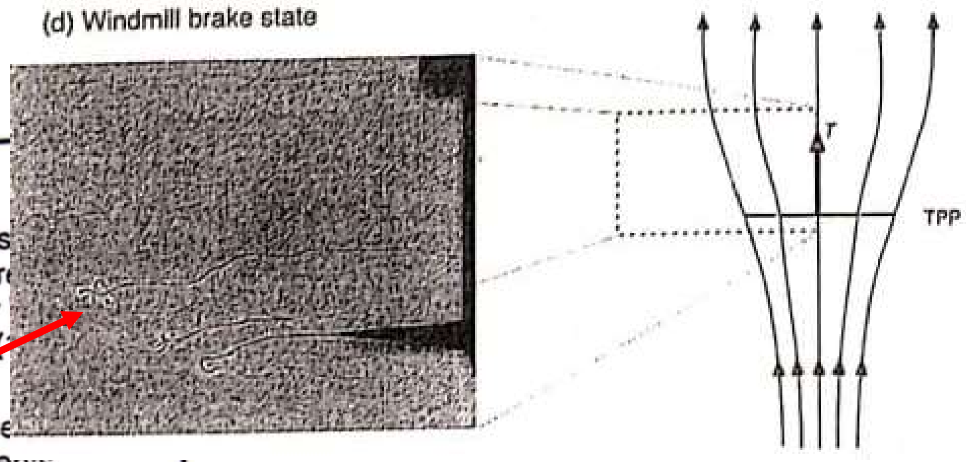
Teoria do momento para descida



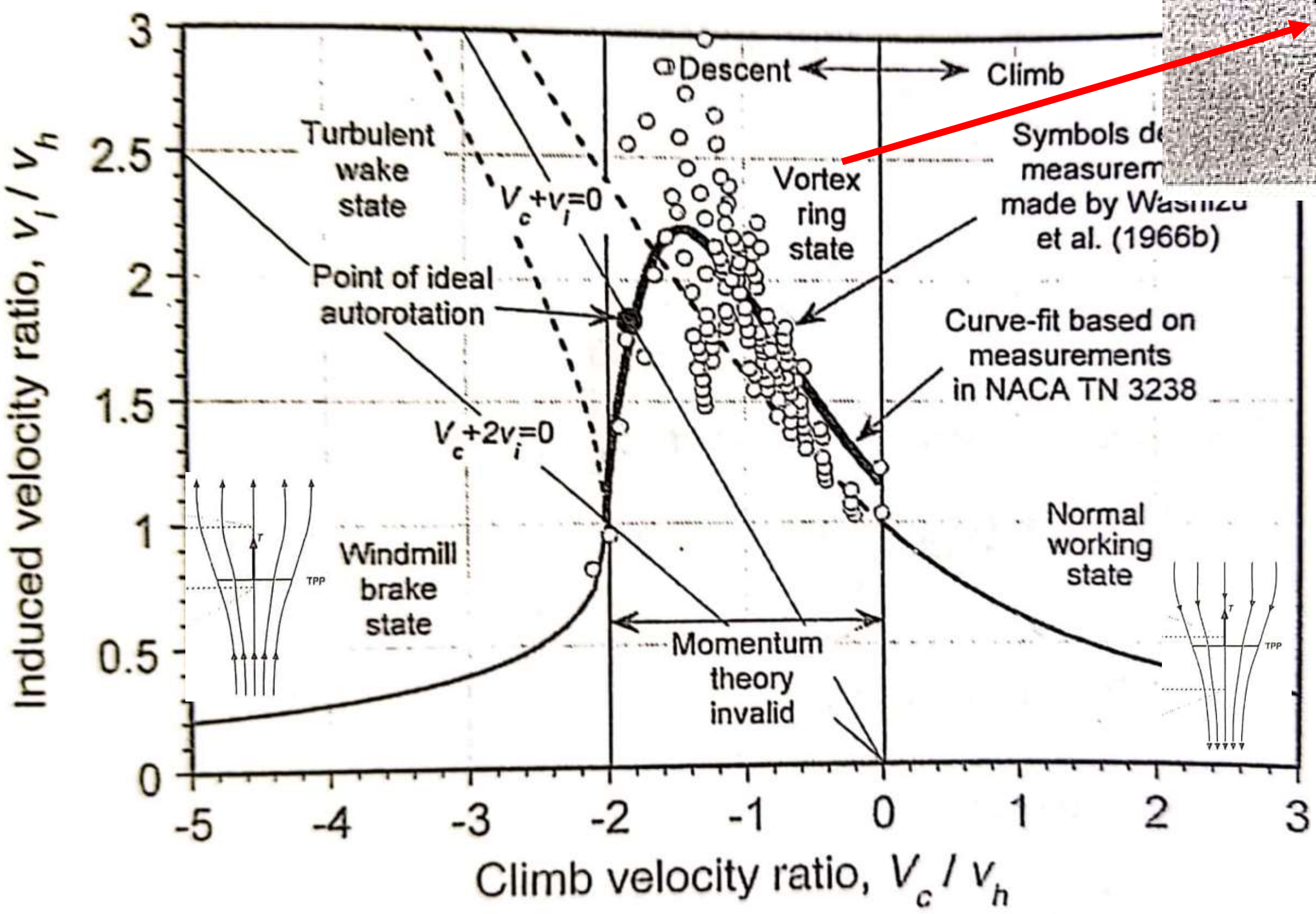
Hélices

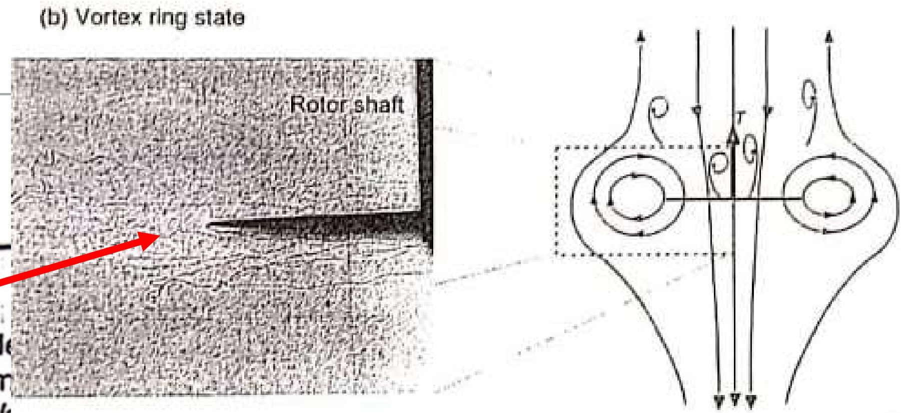
Teoria do momento para descida





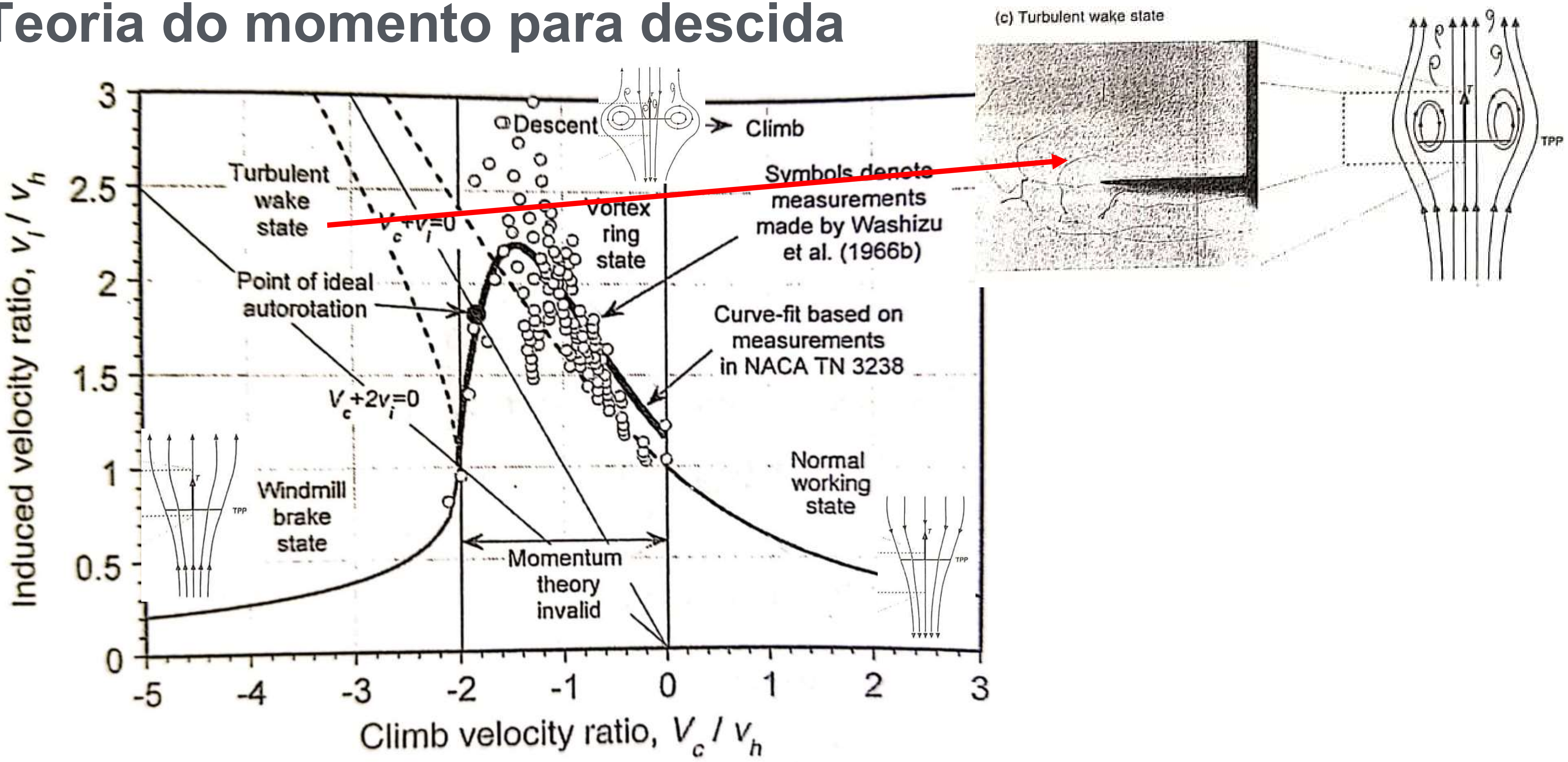
Teoria do momento para descida





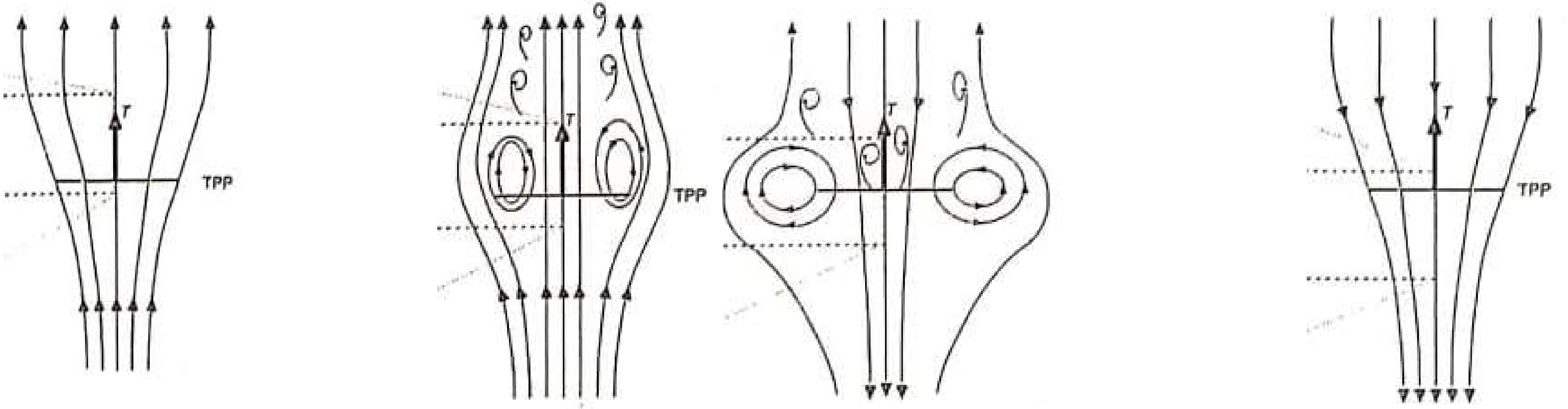
Hélices

Teoria do momento para descida



Hélices

Teoria do momento para descida



$$\frac{v_{in}}{v_h} = -\frac{V_C}{2v_h} - \sqrt{\left(\frac{V_C}{2v_h}\right)^2 - 1}$$

Experimental, apenas!

$$\frac{v_{in}}{v_h} = -\frac{V_C}{2v_h} + \sqrt{\left(\frac{V_C}{2v_h}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{v_{in}}{v_h} = k + k_1\left(\frac{V_C}{v_h}\right) + k_2\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^2 + k_3\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^3 + k_4\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^4$$

k: Fator de Potência Induzida =, $k_1 = -1.125$, $k_2 = -1.372$, $k_3 = -1.718$, $k_4 = -0.655$

Introdução Hélices Conclusão

Exemplo

$$v_h = 4.687 \text{ m/s}$$

$$V_c = 2 \text{ m/s}$$

$$v_{in} = -0.5V_C + \sqrt{(0.5V_C)^2 + v_h^2} \Rightarrow v_{in} = -1 + \sqrt{1 + 21.97} = 3.79\, m/s$$

$$V_c = -2 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_{in}}{v_h} = 1.15 - 1.125\left(\frac{V_C}{v_h}\right) - 1.372\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^2 - 1.718\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^3 - 0.655\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^4$$

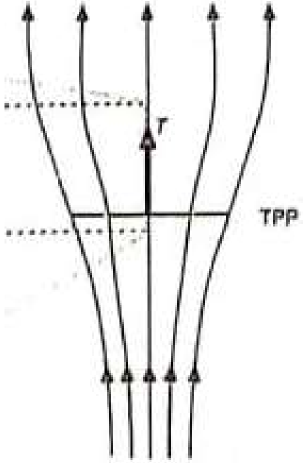
$$V_c = -10 \text{ m/s}$$

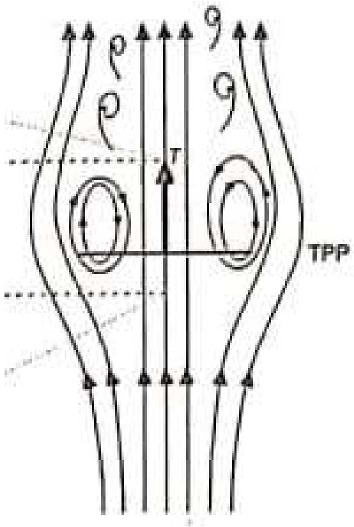
$$v_{in} = -0.5V_C - \sqrt{(0.5V_C)^2 - v_h^2} \Rightarrow v_{in} = -5 + \sqrt{25 - 21.97} = -3.26\, m/s$$

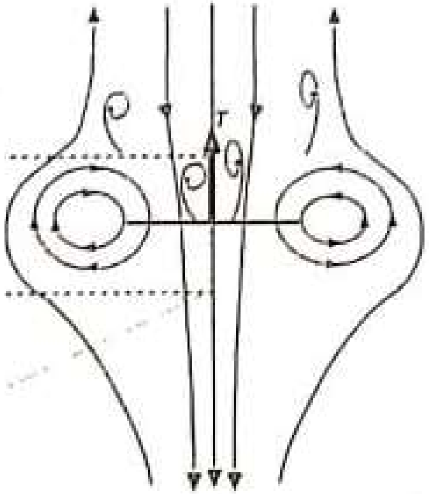
$$\frac{v_{in}}{v_h} = 1.492 \Rightarrow v_{in} \approx 7\, m/s$$

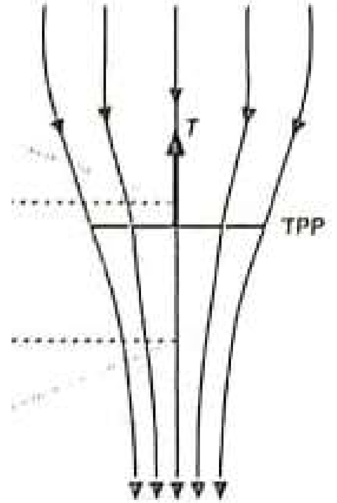
Hélices

Potência









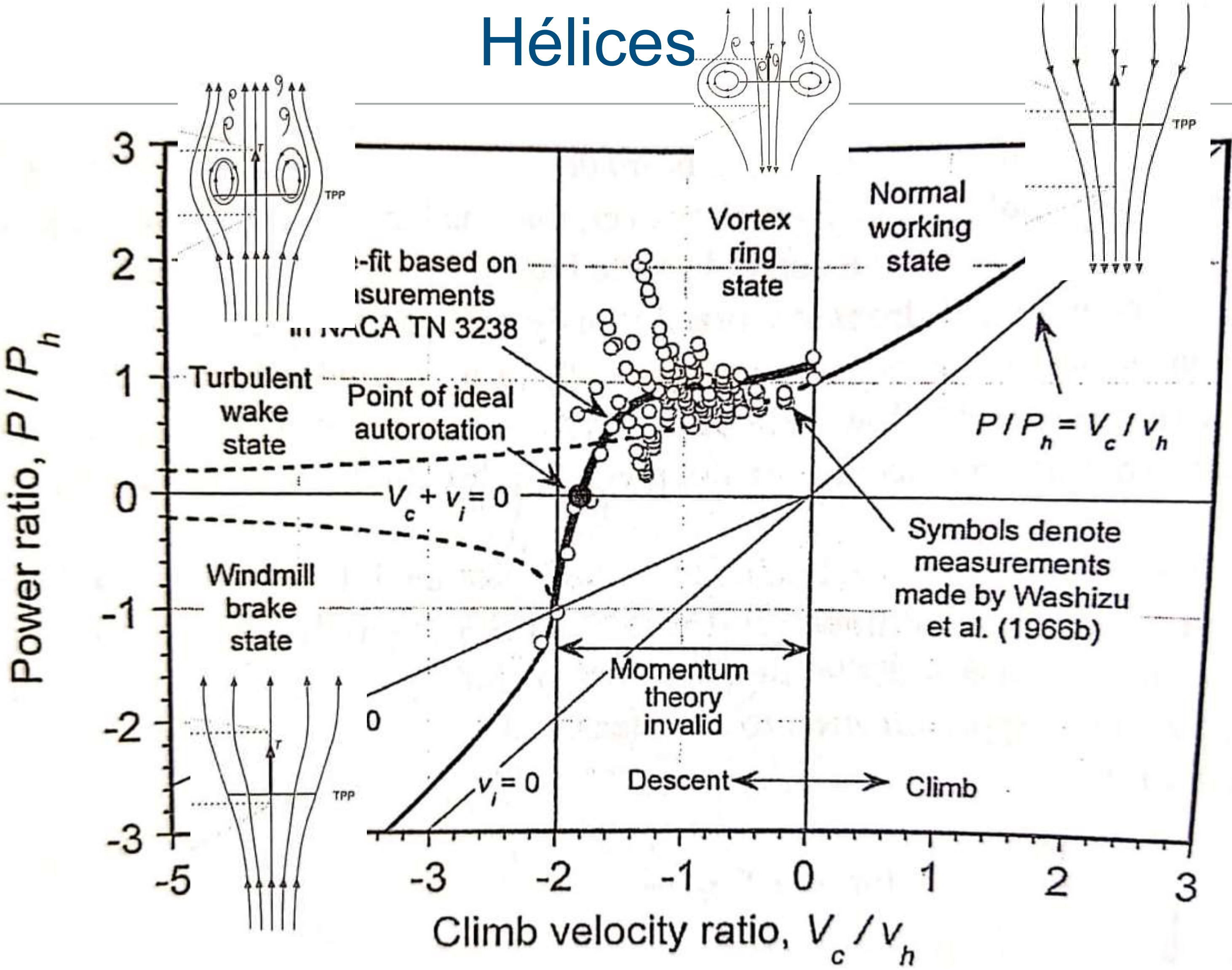
$$\frac{P}{P_h} = \frac{V_C}{2v_h} - \sqrt{\left(\frac{V_C}{2v_h}\right)^2 - 1}$$

$$P_{medido} = T(V_C + \bar{v}_i) + P_0$$

$$\frac{P}{P_h} = \frac{V_C}{2v_h} + \sqrt{\left(\frac{V_C}{2v_h}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{P_{medido} - P_0}{P_h} = k + (k_1 + 1)\left(\frac{V_C}{v_h}\right) + k_2\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^2 + k_3\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^3 + k_4\left(\frac{V_C}{v_h}\right)^4$$

Potência


Power ratio, P / P_h
Climb velocity ratio, V_c / v_h
Turbulent wake state
Windmill brake state
Vortex ring state
Normal working state
Point of ideal autorotation
$V_c + v_i = 0$
$P / P_h = V_c / v_h$
Symbols denote measurements made by Washizu et al. (1966b)
Momentum theory invalid
$v_i = 0$
Descent
Climb
TPP

Hélices

Exemplo

$v_h = 4.687$ m/s

$P_h \approx 9W/\text{motor}$

$V_c = 2$ m/s

$$\frac{P}{P_h} = \frac{2}{9.374} + \sqrt{\left(\frac{2}{9.374}\right)^2 + 1} \Rightarrow P = P_h * 1.236 \Rightarrow P \approx 11.1\ W$$

$V_c = -10$ m/s

$$\frac{P}{P_h} = \frac{-10}{9.374} - \sqrt{\left(\frac{-10}{9.374}\right)^2 - 1} \Rightarrow P = P_h * (-1.438) \Rightarrow P \approx -12.9\ W$$

$V_c = -2$ m/s

$$\frac{P_{medido} - P_0}{P_h} = 1.15 - 0.125\left(\frac{-2}{4.687}\right) - 1.372\left(\frac{-2}{4.687}\right)^2 - 1.718\left(\frac{-2}{4.687}\right)^3 - 0.655\left(\frac{-2}{4.687}\right)^4$$

$$\frac{P_{medido} - P_0}{P_h} = 1.065 \Rightarrow P_{medido} = P_0 + 9.59\ W$$

Hélices

Teoria do momento para movimento frontal

$$\dot{m} = \rho U A_{disco}$$

$$U = \sqrt{(V_\infty \cos(\alpha))^2 + (V_\infty \sin(\alpha) + v_i)^2}$$

$$-F = T = \dot{m}(V_\infty \sin(\alpha) + w) - \dot{m} V_\infty \sin(\alpha) = \dot{m}_\infty\, w$$

$$T(V_\infty \sin(\alpha) + v_i) = 0.5\dot{m}(2V_\infty w \sin(\alpha) + w^2)$$

$$\dot{m}_\infty\, w(V_\infty \sin(\alpha) + v_i) = 0.5\dot{m}(2V_\infty w \sin(\alpha) + w^2)$$

$$2v_{in} = w$$

$$T = 2\dot{m}_\infty\, v_i \Rightarrow T = 2\rho A v_i \sqrt{V_\infty^2 + 2V_\infty \sin(\alpha)\, v_i + v_i^2}$$

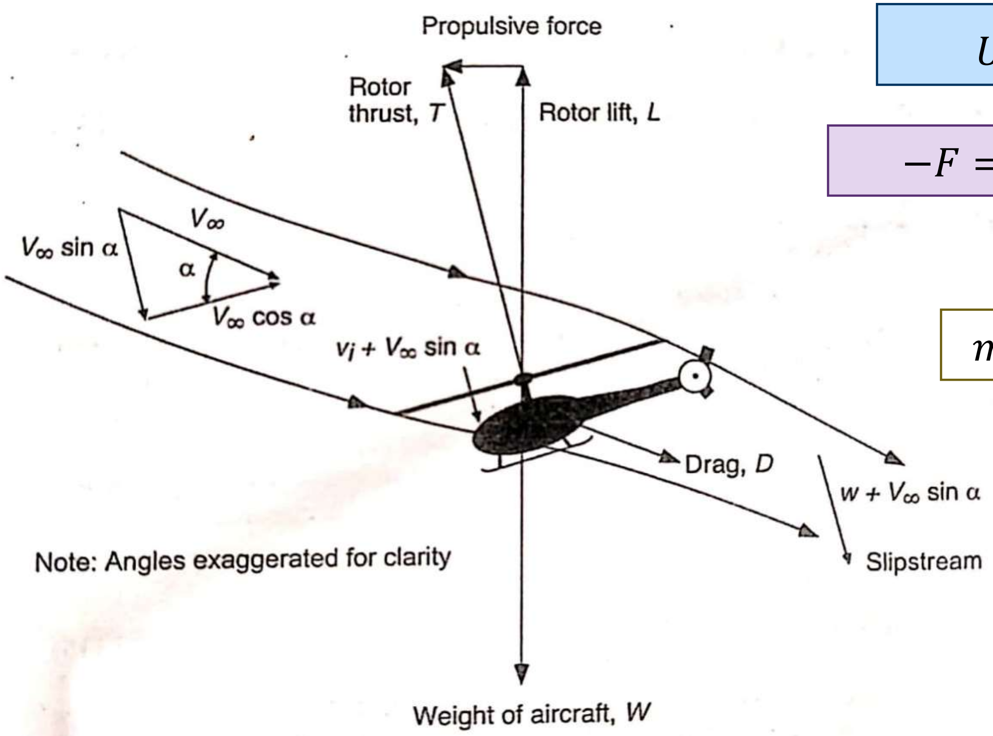


Figure 2.23 Glauert's flow model for the momentum analysis of a rotor in forward flight.

Hélices

Teoria do momento para movimento frontal

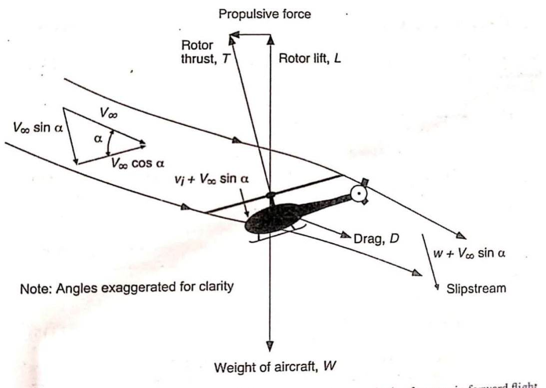


Figure 2.23 Glauert's flow model for the momentum analysis of a rotor in forward flight.

$$\frac{T}{2\rho A} = v_i\sqrt{(V_\infty \cos(\alpha))^2 + (V_\infty \sin(\alpha) + v_i)^2}$$

$$v_i = \frac{v_h^2}{\sqrt{(V_\infty \cos(\alpha))^2 + (V_\infty \sin(\alpha) + v_i)^2}}$$

$$\frac{v_i}{\Omega R} = \frac{\frac{v_h^2}{(\Omega R)^2}}{\frac{\Omega R}{(\Omega R)^2}\sqrt{(V_\infty \cos(\alpha))^2 + (V_\infty \sin(\alpha) + v_i)^2}}$$

$$T = 2\rho A v_i\sqrt{V_\infty^2 + 2V_\infty \sin(\alpha)\, v_i + v_i^2}$$

$$U = \sqrt{(V_\infty \cos(\alpha))^2 + (V_\infty \sin(\alpha) + v_i)^2}$$

$\mu = \frac{V_\infty \cos(\alpha)}{\Omega R}$, taxa de avanço

$\lambda = \frac{V_\infty \sin(\alpha) + v_i}{\Omega R}$, taxa de influxo

$$v_{hover} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$\lambda_i = \frac{\lambda_h^2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Teoria do momento para movimento frontal

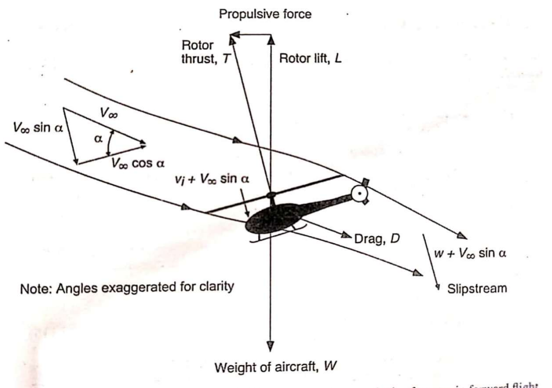


Figure 2.23 Glauert's flow model for the momentum analysis of a rotor in forward flight.

$$\frac{T}{2\rho A} = v_i\sqrt{(V_\infty\cos(\alpha))^2 + (V_\infty\sin(\alpha) + v_i)^2}$$

$$v_i = \frac{v_h^2}{\sqrt{(V_\infty\cos(\alpha))^2 + (V_\infty\sin(\alpha) + v_i)^2}}$$

$$\frac{v_i}{\Omega R} = \frac{\frac{v_h^2}{(\Omega R)^2}}{\frac{\Omega R}{(\Omega R)^2}\sqrt{(V_\infty\cos(\alpha))^2 + (V_\infty\sin(\alpha) + v_i)^2}}$$

$$T = 2\rho A v_i\sqrt{V_\infty^2 + 2V_\infty\sin(\alpha)\, v_i + v_i^2}$$

$$U = \sqrt{(V_\infty\cos(\alpha))^2 + (V_\infty\sin(\alpha) + v_i)^2}$$

$\mu = \frac{V_\infty\cos(\alpha)}{\Omega R}$, taxa de avanço

$\lambda = \frac{V_\infty\sin(\alpha)+v_i}{\Omega R}$, taxa de influxo

$$v_{hover} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_{disco}}}$$

$$\lambda_i = \frac{\lambda_h^2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Teoria do momento para movimento frontal

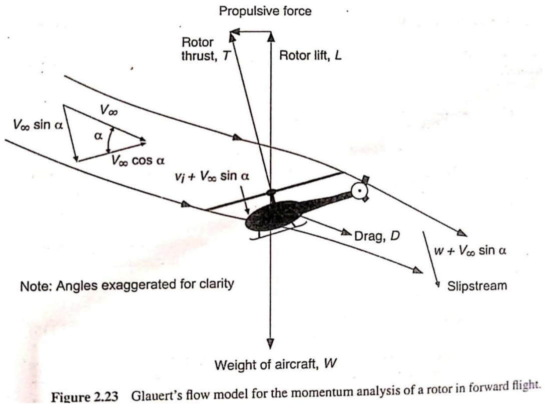


Figure 2.23 Glauert's flow model for the momentum analysis of a rotor in forward flight.

Hipóteses para análise:

- Coeficiente de influxo uniforme
- Sem perdas por viscosidade
- Hélice em pairo (Hover)

$$\lambda_h = \frac{\sqrt{C_T}}{2}$$

$$T = 2\rho A v_i \sqrt{V_\infty^2 + 2V_\infty \sin(\alpha)\, v_i + v_i^2}$$

$$\lambda_i = \frac{\lambda_h^2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

$$\lambda_i = \frac{C_T}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

$\mu = \dfrac{V_\infty \cos(\alpha)}{\Omega R}$, taxa de avanço

$$\lambda = \mu \tan(\alpha) + \lambda_i$$

$\lambda = \dfrac{V_\infty \sin(\alpha) + v_i}{\Omega R}$, taxa de influxo

$$\lambda = \mu \tan(\alpha) + \frac{C_T}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Introdução
Hélices
Conclusão

Teoria do momento para movimento frontal

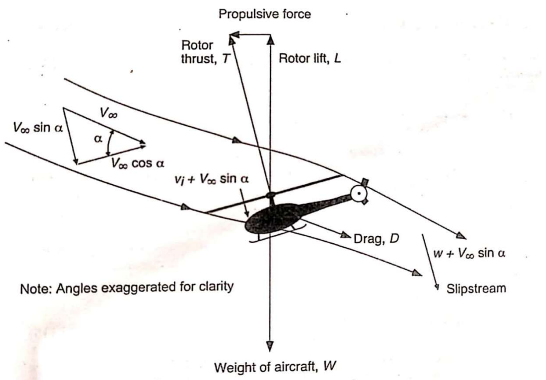


Figure 2.23 Glauert's flow model for the momentum analysis of a rotor in forward flight.

$$\lambda = \mu \tan(\alpha) + \frac{C_T}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

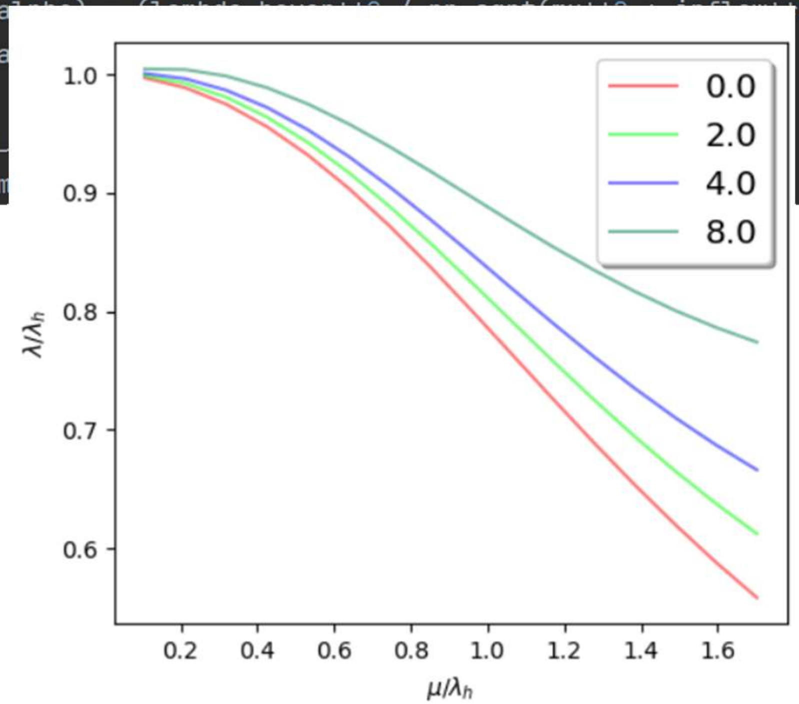
$$\lambda_h = \frac{\sqrt{C_T}}{2}$$

$$T = 2\rho A v_i \sqrt{V_\infty^2 + 2V_\infty \sin(\alpha)\, v_i + v_i^2}$$

$\mu = \dfrac{V_\infty \cos(\alpha)}{\Omega R}$, taxa de avanço

$\lambda = \dfrac{V_\infty \sin(\alpha) + v_i}{\Omega R}$, taxa de influxo

```
while error > 0.001:
    f_n = inflow - mu*np.tan(a ... 2))
    df_n = 1 + inflow * lambda
    old_lambda = inflow
    inflow = inflow - (f_n/df_
    error = np.abs(1 - old_lam
```



Hélices

Teoria do momento para movimento frontal

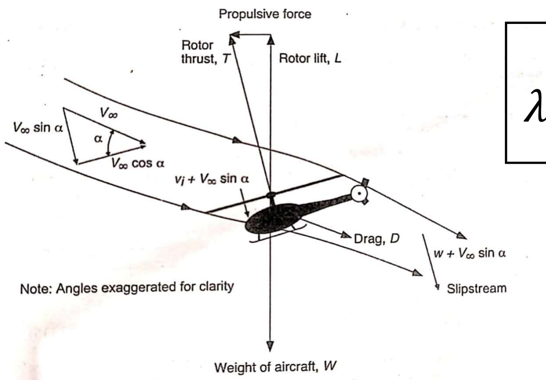
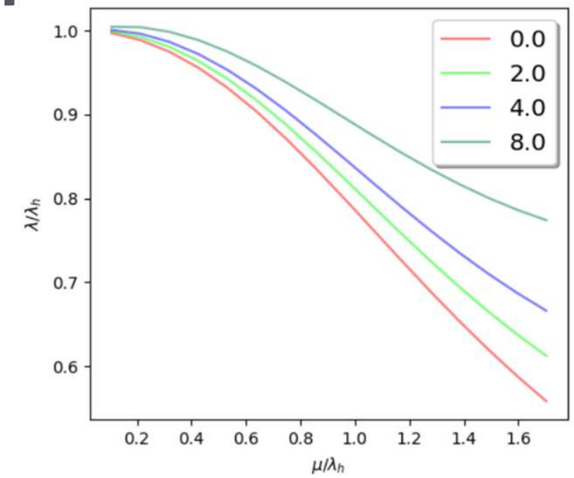


Figure 2.23 Glauert's flow model for the momentum analysis of a rotor in forward flight.

$$\lambda_h = \frac{\sqrt{C_T}}{2}$$

$$P = T(V_\infty \sin(\alpha) + v_i)$$

$$\frac{P}{P_h} = \frac{T(V_\infty \sin(\alpha) + v_i)}{T v_h} = \frac{\lambda}{\lambda_h}$$



$$T = 2\rho A v_i \sqrt{V_\infty^2 + 2V_\infty \sin(\alpha)\, v_i + v_i^2}$$

$\mu = \dfrac{V_\infty \cos(\alpha)}{\Omega R}$, taxa de avanço

$\lambda = \dfrac{V_\infty \sin(\alpha) + v_i}{\Omega R}$, taxa de influxo

$$\lambda = \mu \tan(\alpha) + \frac{C_T}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Caso geral:

$$\tan\alpha \approx \frac{D}{T}$$

$$\frac{P}{P_h} = \lambda_c \cos(\alpha) + \frac{\mu}{\lambda_h} \tan(\alpha) + \frac{\lambda_h}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Exemplo

$P_h \approx 9W/\text{motor}$

$V_c = 0.5$ m/s

$V_x = 5$ m/s

$\alpha = 6°$

$\Omega R \approx 34.56$

$$\lambda = \mu \tan(\alpha) + \frac{C_T}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Caso geral:

$$\frac{P}{P_h} = \lambda_c \cos(\alpha) + \frac{\mu}{\lambda_h} \tan(\alpha) + \frac{\lambda_h}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

$$\frac{P}{P_h} = \frac{0.5}{34.56} 0.9945 + \frac{5}{4.67} 0.1051 + \frac{v_h}{\sqrt{V_x^2 + (\Omega R \lambda)^2}}$$

$$\frac{P}{P_h} = 0.014388 + 0.112527 + \frac{4.67}{\sqrt{25 + (34.56 \ * 0.1174)^2}}$$

$$P = 0.852172 P_h \Rightarrow P = 7.67W$$

Teoria do elemento de pá:

Hipóteses:

1) Cada seção é um aerofólio 2D
2) A velocidade $U_P \ll U_T$, ou seja a velocidade induzida é muito menor que Ωr, válido exceto perto da raiz, mas as forças aerodinâmicas são pequenas.
3) O ângulo induzido ϕ é pequeno
4) O arrasto é, pelo menos, uma ordem de magnitude menor que o empuxo.

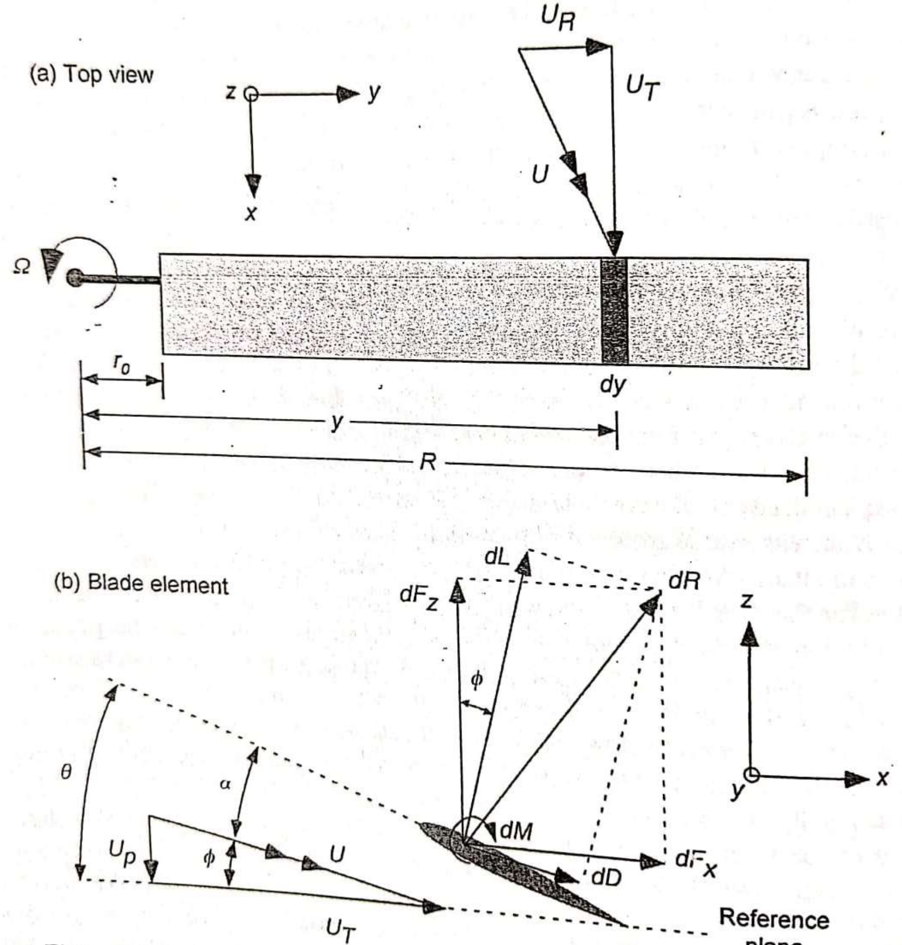


Figure 3.1 Incident velociti...

Hélices

Teoria do elemento de pá:

Hipóteses:

1) Cada seção é um aerofólio 2D
2) A velocidade $U_P \ll U_T$, ou seja a velocidade induzida é muito menor que Ωr, válido exceto perto da raiz, mas as forças aerodinâmicas são pequenas.
3) O ângulo induzido ϕ é pequeno
4) O arrasto é, pelo menos, uma ordem de magnitude menor que o empuxo.

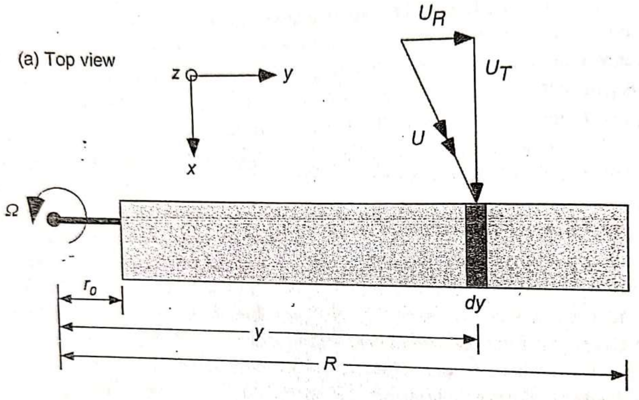
$$\cancel{U_R \approx 0} \text{ Por (1)} \qquad U_p = V_c + v_i \qquad U_T = \Omega y$$

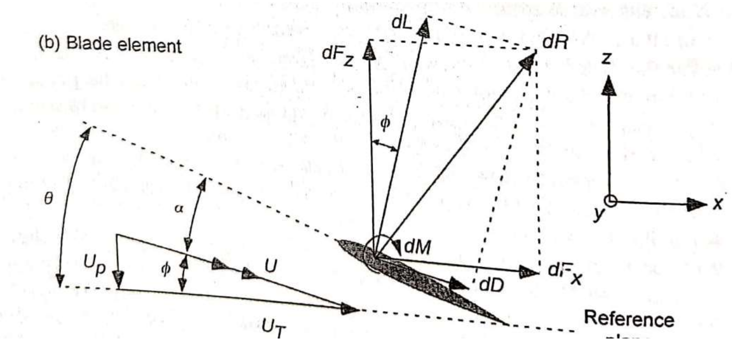
$$\boxed{U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{U_P}{U_T}\right) \xrightarrow{\text{Por (3)}} \phi \approx \frac{U_P}{U_T}$$

Se o ângulo de inclinação for θ, o ângulo de ataque α será:

$$\boxed{\alpha = \theta - \phi \approx \theta - \frac{U_P}{U_T}}$$





Hélices

Teoria do elemento de pá:

Hipóteses:

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2}$$

1) Cada seção é um aerofólio 2D
2) A velocidade $U_P \ll U_T$, ou seja a velocidade induzida é muito menor que Ωr, válido exceto perto da raiz, mas as forças aerodinâmicas são pequenas.
3) O ângulo induzido ϕ é pequeno
4) O arrasto é, pelo menos, uma ordem de magnitude menor que o empuxo.

$$\alpha = \theta - \phi$$

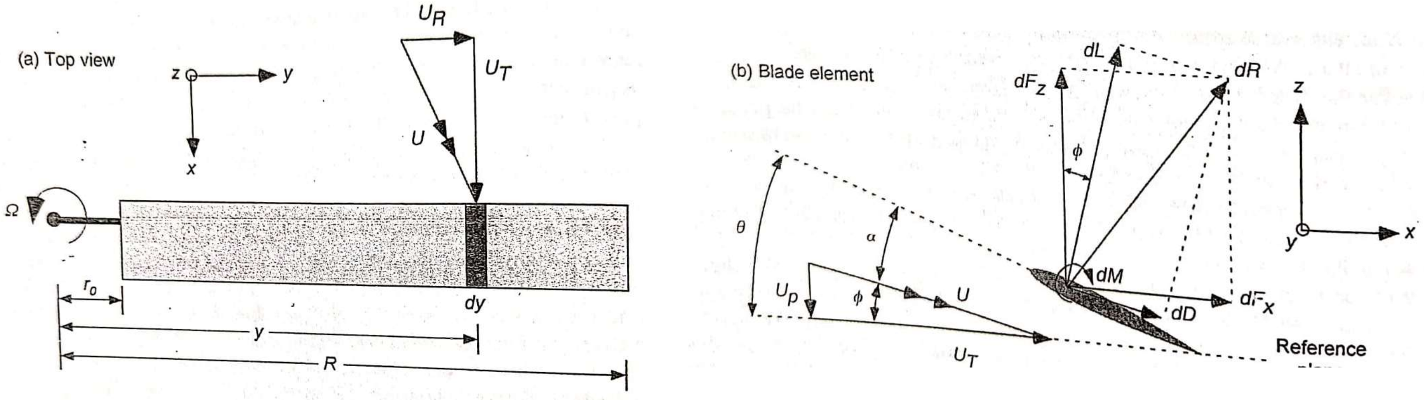
$$dL = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_l dy \qquad dD = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_d dy$$

Onde:
c, corda da hélice
C_l, Coeficiente de empuxo
C_d, Coeficiente de arrasto

Fazendo as projeções:

$$dF_z = dL\cos(\phi) - dD\sin(\phi)$$

$$dF_x = dL\sin(\phi) + dD\cos(\phi)$$



Hélices

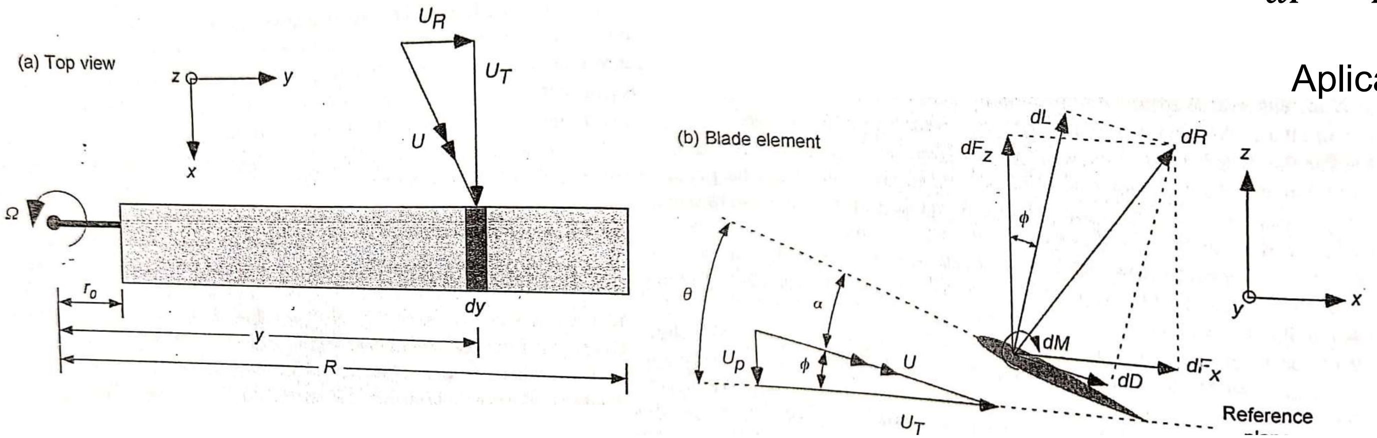
Teoria do elemento de pá:

Hipóteses:

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2}$$

1) Cada seção é um aerofólio 2D
2) A velocidade $U_P \ll U_T$, ou seja a velocidade induzida é muito menor que Ωr, válido exceto perto da raiz, mas as forças aerodinâmicas são pequenas.
3) O ângulo induzido ϕ é pequeno
4) O arrasto é, pelo menos, uma ordem de magnitude menor que o empuxo.

$$\alpha = \theta - \phi$$



$$dL = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_l dy \qquad dD = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_d dy$$

$$dF_z = dL\cos(\phi) - dD\sin(\phi)$$

$$dF_x = dL\sin(\phi) + dD\cos(\phi)$$

Como há N_b, número de pás e como em hover e em movimento axial a carga é simétrica, o empuxo independe da posição da hélice, portanto:

$$dT = N_b(dL\cos(\phi) - dD\sin(\phi))$$

$$dQ = N_b(dL\sin(\phi) + dD\cos(\phi))y$$

$$dP = N_b(dL\sin(\phi) + dD\cos(\phi))\Omega y$$

Aplicando (3) e (4):

$$dT = N_b dL$$

$$dQ = N_b(\phi dL + dD)y$$

$$dP = N_b\Omega(\phi dL + dD)y$$

Hélices

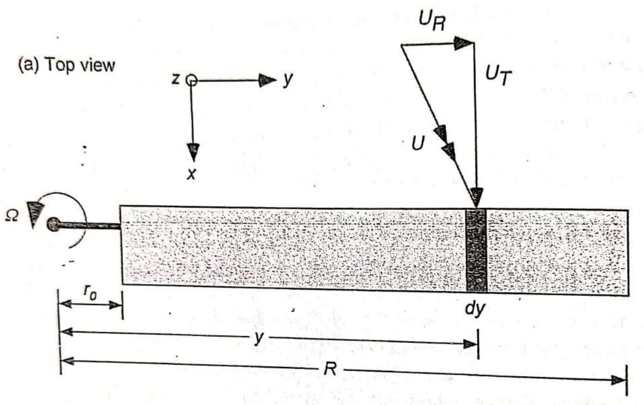
Teoria do elemento de pá:

Hipóteses:

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2}$$

1) Cada seção é um aerofólio 2D
2) A velocidade $U_P \ll U_T$, ou seja a velocidade induzida é muito menor que Ωr, válido exceto perto da raiz, mas as forças aerodinâmicas são pequenas.
3) O ângulo induzido ϕ é pequeno
4) O arrasto é, pelo menos, uma ordem de magnitude menor que o empuxo.

$$\alpha = \theta - \phi$$



$$dL = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_l dy$$

$$dD = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_d dy$$

$$dT = N_b dL$$

$$dQ = N_b(\phi dL + dD)y$$

$$dP = N_b \Omega(\phi dL + dD)y$$

Considere os adimensionais:

$$r = y/R \qquad \frac{U}{\Omega R} = \frac{\Omega y}{\Omega R} = r$$

$$\lambda = \frac{V_c + v_i}{\Omega R} = \frac{V_c + v_i}{\Omega y}\left(\frac{\Omega y}{\Omega R}\right)$$

$$\lambda = \frac{V_c + v_i}{\Omega y}\left(\frac{\Omega y}{\Omega R}\right) = \frac{U_P}{U_T}\left(\frac{\Omega y}{\Omega R}\right) = \phi r$$

$$dC_T = \frac{dT}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^2}$$

$$dC_Q = \frac{dQ}{\frac{1}{2}\rho A R(\Omega R)^2}$$

$$dC_P = \frac{dP}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^3}$$

Assim:

$$dC_T = \frac{N_b dL}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^2} = \frac{N_b \frac{1}{2}\rho U^2 c C_l dy}{\frac{1}{2}\rho(\pi R^2)(\Omega R)^2} \Rightarrow \left(\frac{N_b c}{\pi R}\right) C_l r^2 dr$$

Hélices

Teoria do elemento de pá:

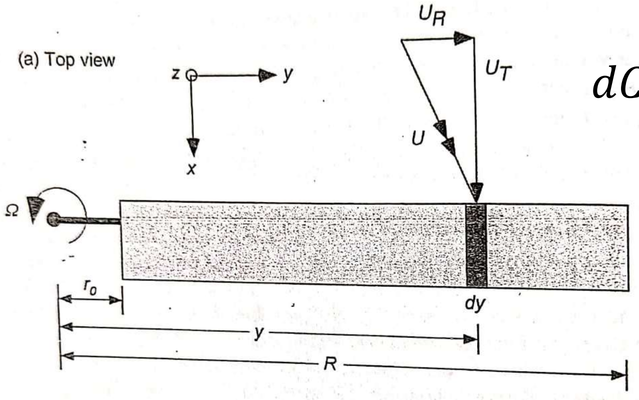
Hipóteses:

$$\boxed{U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2}}$$

1) Cada seção é um aerofólio 2D
2) A velocidade $U_P \ll U_T$, ou seja a velocidade induzida é muito menor que Ωr, válido exceto perto da raiz, mas as forças aerodinâmicas são pequenas.
3) O ângulo induzido ϕ é pequeno
4) O arrasto é, pelo menos, uma ordem de magnitude menor que o empuxo.

$$\boxed{\alpha = \theta - \phi}$$

$$\boxed{\lambda = \phi r}$$



$$dC_Q = \frac{dQ}{\frac{1}{2}\rho A R(\Omega R)^2}$$

$$dC_P = \frac{dP}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^3}$$

$$r = y/R$$

$$dL = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_l dy$$

$$dD = \frac{1}{2}\rho U^2 c C_d dy$$

$$dQ = N_b(\phi dL + dD)y$$

$$dP = N_b\Omega(\phi dL + dD)y$$

$$dC_T = \left(\frac{N_b c}{\pi R}\right) C_l r^2 dr$$

Lembrando que:

$\sigma = \frac{N_b c}{\pi R}$, Solidez da hélice

$$\boxed{dC_T = \sigma C_l r^2 dr}$$

Analogamente:

$$\boxed{dC_p \equiv dC_Q = \sigma(\phi C_l + C_d) r^3 dr}$$

Hélices

Teoria do elemento de pá:

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2} \approx \Omega y$$

$$\alpha = \theta - \phi$$

$$\lambda = \phi r \qquad r = y/R$$

$$dC_T = \sigma C_l r^2 dr$$

$$dC_p \equiv dC_Q = \sigma(\phi C_l + C_d) r^3 dr$$

Integrando:

$$C_T = \int_0^1 \sigma C_l r^2 dr$$

$$dC_p \equiv dC_Q = \int_0^1 \sigma(\phi C_l + C_d) r^3 dr$$

$$C_p \equiv C_Q = \int_0^1 \sigma \lambda C_l r^2 dr + \int_0^1 \sigma C_d r^3 dr$$

Avaliar C_p, $\mathrm{C_Q}$ precisa do influxo, além dos coeficientes aerodinâmicos C_l, C_d. Como dependem de Reynolds, Mach e do ângulo de ataque, normalmente se resolve via integração numérica. Mas há alguns resultados que são analíticos e servem para testar a implementação numérica

Hélices

Teoria do elemento de pá:

$$U \approx \Omega y$$

$$\alpha = \theta - \phi$$

$$C_T = \int_0^1 \sigma C_l r^2 dr$$

$$\lambda = \phi r$$

$$r = y/R$$

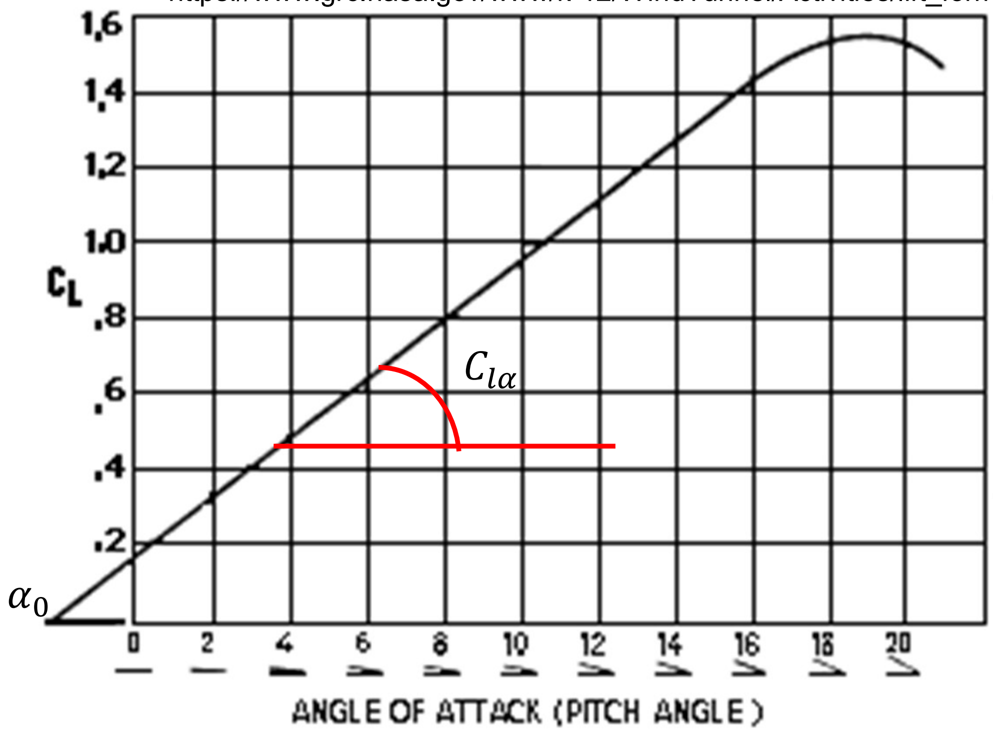
$$C_p \equiv C_Q = \int_0^1 \sigma \lambda C_l r^2 dr + \int_0^1 \sigma C_d r^3 dr$$

Façamos a análise para uma hélice retangular e linearizando a aerodinâmica no regime permanente, tal que:

$$C_l = C_{l\alpha}(\alpha - \alpha_0) = C_{l\alpha}(\theta - \phi - \alpha_0)$$

Onde $C_{l\alpha}$é assumido constante por toda a hélice, e assumindo que $\theta' = \theta - \alpha_0$

https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/WindTunnel/Activities/lift_formula.html



$$C_T = \sigma \int_0^1 C_{l\alpha}(\theta' - \phi) r^2 dr \Rightarrow \sigma C_{l\alpha} \int_0^1 \left(\theta' - \frac{\lambda}{r}\right) r^2 dr$$

$$C_T = \sigma C_{l\alpha} \int_0^1 (\theta' r^2 - \lambda r) dr$$

Hélices

Teoria do elemento de pá:

$$U \approx \Omega y$$

$$\alpha = \theta - \phi$$

$$C_T = \int_0^1 \sigma C_l r^2 dr$$

$$\lambda = \phi r$$

$$r = y/R$$

$$C_p \equiv C_Q = \int_0^1 \sigma \lambda C_l r^2 dr + \int_0^1 \sigma C_d r^3 dr$$

$$C_l = C_{l\alpha}(\alpha - \alpha_0) = C_{l\alpha}(\theta - \phi - \alpha_0)$$

Onde $C_{l\alpha}$é assumido constante por toda a hélice, e assumindo que $\theta' = \theta - \alpha_0$

$$C_T = \sigma \int_0^1 C_{l\alpha}(\theta' - \phi) r^2 dr \Rightarrow \sigma C_{l\alpha} \int_0^1 \left(\theta' - \frac{\lambda}{r}\right) r^2 dr$$

$$C_T = \sigma C_{l\alpha} \int_0^1 (\theta' r^2 - \lambda r) dr$$

Considere, como feito na teoria de momento, que o influxo é constante. Além disso, que a hélice não é torcida $\theta' = \theta_0$, temos:

$$C_T = \sigma C_{l\alpha} \left(\int_0^1 (\theta' r^2) dr - \int_0^1 (\lambda r) dr \right)$$

$$C_T = \sigma C_{l\alpha} \left[\frac{\theta_0}{3} - \frac{\lambda}{2} \right]$$

Pelo momento em hover, temos: $\lambda = \sqrt{C_T}/2$

$$C_T = \sigma C_{l\alpha} \left[\frac{\theta_0}{3} - \frac{\sqrt{C_T}}{4} \right]$$

$$\theta_0 = \frac{3 C_T}{\sigma C_{l\alpha}} + \frac{3\sqrt{C_T}}{4}$$

Exercicio:

Se a hélice do FIMI x8 SE fosse retangular, qual deveria ser o ângulo de inclinação?

Corda média = 2.5 cm

$\Omega = 3000\, rpm$

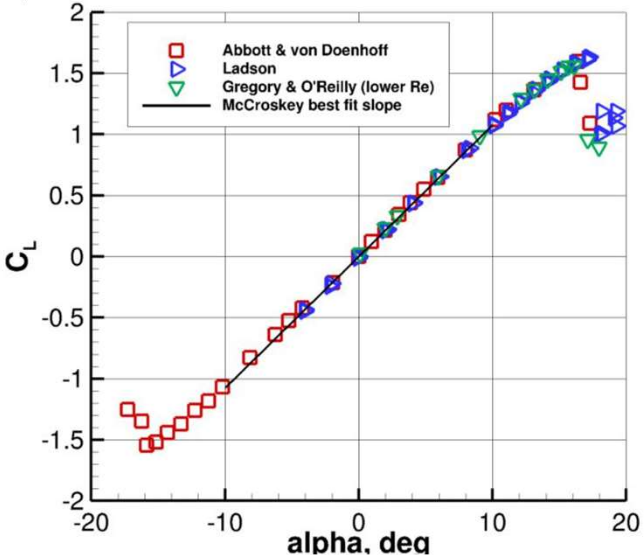
$\mathrm{R} = 11\ cm$

$$\theta_0 = \frac{3C_T}{\sigma C_{l\alpha}} + \frac{3\sqrt{C_T}}{4}$$

$$v_h = 4.687 \text{ m/s}$$

https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html

Supondo perfil NACA 0012



$$C_T = \frac{4v_h^2}{(\Omega R)^2} = \frac{4(4.687)^2}{(34.5575)^2} = 0.07358$$

$$\theta_0 = \frac{3 * 0.07358}{\left(2 * \frac{0.025}{\pi * 0.11}\right) C_{l\alpha}} + \frac{3\sqrt{0.07358}}{4}$$

$$\theta_0 = \frac{1.5256}{C_{l\alpha}} + 0.20344$$

$$\theta_0 = \frac{1.5256}{5.7296} + 0.20344 \Rightarrow \theta_0 = 0.4697 \approx 27°$$

Hélices

Teoria do elemento de pá:

$U \approx \Omega y$

$\alpha = \theta - \phi$

$$C_T = \int_0^1 \sigma C_l r^2 dr$$

$\lambda = \phi r$

$r = y/R$

$$C_p \equiv C_Q = \int_0^1 \sigma \lambda C_l r^2 dr + \int_0^1 \sigma C_d r^3 dr$$

Façamos a análise, agora para o momento-potência

$$C_p \equiv C_Q = \int_0^1 \sigma \lambda C_l r^2 dr + \int_0^1 \sigma C_d r^3 dr$$

Observando que: $dC_T = \sigma C_l r^2 dr$

$$C_p \equiv C_Q = \int_0^1 \lambda dC_T + \int_0^1 \sigma C_d r^3 dr$$

$$C_p \equiv C_Q = \lambda C_T + \frac{\sigma C_{d0}}{4}$$

Pelo momento em hover, temos: $\lambda = \sqrt{C_T/2}$

$$C_p \equiv C_Q = \frac{C_T^{3/2}}{2} + \frac{\sigma C_{d0}}{4}$$

Teoria do elemento de pá com momento:

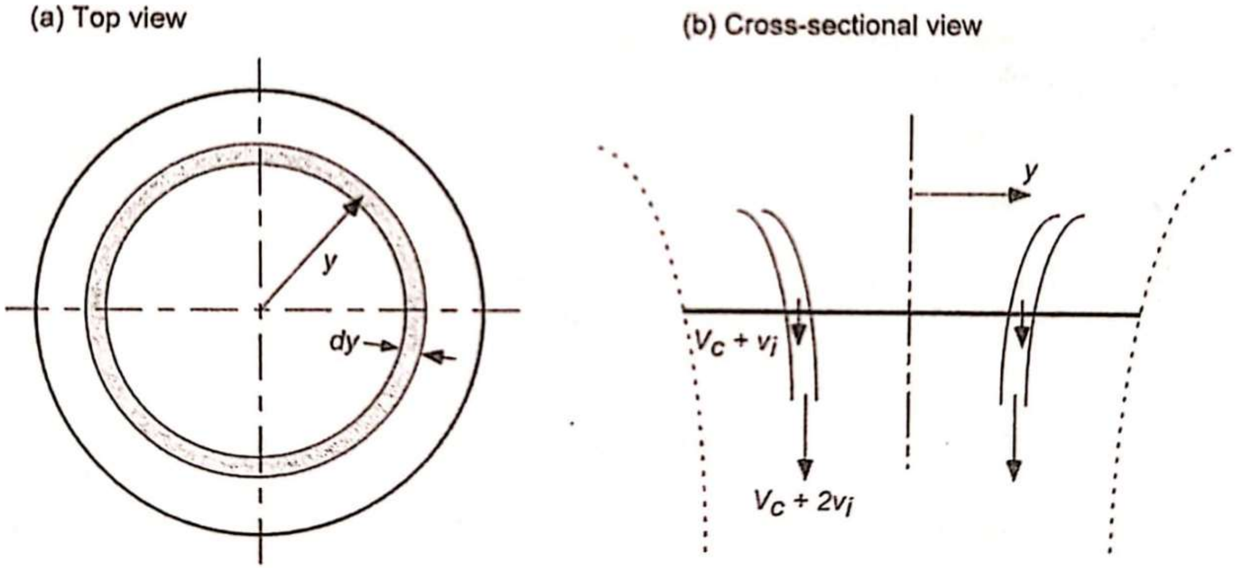


Figure 3.4 Annulus of rotor disk as used for a local momentum analysis of the hovering rotor. (a) Top view. (b) Cross-sectional view.

$$d\dot{m} = \rho dA(V_c + v_i) = 2\pi\rho(V_c + v_i)ydy$$

$$dT = 2\rho dA v_i(V_c + v_i) = 4\pi\rho(V_c + v_i)v_i ydy$$

Ou, de forma adimensional:

$$dC_T = \frac{dT}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^2}$$

$$dC_T = \frac{4\pi\rho(V_c + v_i)v_i ydy}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^2} \Rightarrow dC_T = \frac{8(V_c + v_i)v_i ydy}{\Omega^2 R^4} = 8\frac{V_c + v_i}{\Omega R}\frac{v_i}{\Omega R}\left(\frac{y}{R}\right)d\left(\frac{y}{R}\right) = 8\lambda\lambda_i rdr$$

Hélices

Teoria do elemento de pá com momento:

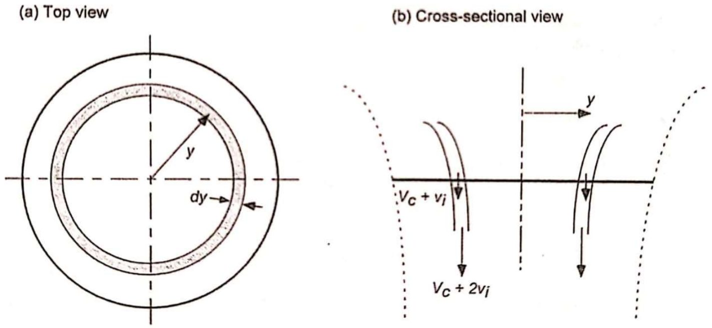


Figure 3.4 Annulus of rotor disk as used for a local momentum analysis of the hovering rotor. (a) Top view. (b) Cross-sectional view.

$$dC_T = 8\lambda\lambda_i r dr$$

$$\boxed{dC_T = 8\lambda(\lambda - \lambda_c) r dr}$$

Fazendo para a potência induzida:

$$dC_P = \frac{dP}{\frac{1}{2}\rho A(\Omega R)^3} \Rightarrow dC_P = \lambda dC_T = 8\lambda^2(\lambda - \lambda_c) r dr$$

Integrando, para o hover:

$$\boxed{C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr} \qquad \boxed{C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr}$$

Teoria do elemento de pá com momento:

$$\boxed{C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr} \qquad \boxed{C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr}$$

Assumindo Distribuição radial do influxo:

$\lambda(r) = \lambda_{TIP} r^n$, para $n \geq 0$

Substituindo:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_T = 8\int_0^1 (\lambda_{TIP} r^n)^2 r dr$$

$$C_T = 8\lambda_{TIP}^2 \int_0^1 r^{2n+1} dr$$

$$\boxed{C_T = \frac{4\lambda_{TIP}^2}{n+1}}$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 (\lambda_{TIP} r^n)^3 r dr$$

$$C_P = 8\lambda_{TIP}^3 \int_0^1 r^{3n+1} dr$$

$$\boxed{C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2}}$$

Introdução

Hélices

Conclusão

Teoria do elemento de pá com momento:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$C_T = \frac{4\lambda_{TIP}^2}{n+1}$$

$$C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2}$$

Rearranjando C_T para substituir em C_P

$$\frac{(n+1)C_T}{4} = \lambda_{TIP}^2 \Rightarrow \lambda_{TIP} = \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{C_T}}{2}$$

Substituindo:

$$C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2} = \frac{8\left(\sqrt{n+1}\sqrt{C_T}\right)^3}{(3n+2)8} = \frac{kC_T^{3/2}}{2}$$

Onde:

$$k = \frac{2\left(\sqrt{n+1}\right)^3}{(3n+2)}$$

n	k
0	1
1	1.13
2	1.3

Quando:
N = 0, k=1, ou seja, o influxo constante gera a potencia ideal. Quanto mais o influxo está na ponta (n alto), maior o fator de potência induzida

Teoria do elemento de pá com momento:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$C_T = \frac{4\lambda_{TIP}^2}{n+1}$$

$$C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2}$$

Rearranjando C_T para substituir em C_P

$$\frac{(n+1)C_T}{4} = \lambda_{TIP}^2 \Rightarrow \lambda_{TIP} = \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{C_T}}{2}$$

Substituindo:

$$C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2} = \frac{8\left(\sqrt{n+1}\sqrt{C_T}\right)^3}{(3n+2)8} = \frac{kC_T^{3/2}}{2}$$

Onde:

$$k = \frac{2\left(\sqrt{n+1}\right)^3}{(3n+2)}$$

n	k
0	1
1	1.13
2	1.3

Quando:
N = 0, k=1, ou seja, o influxo constante gera a potencia ideal. Quanto mais o influxo está na ponta (n alto), maior o fator de potência induzida

Hélices

Teoria do elemento de pá com momento:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$C_T = \frac{4\lambda_{TIP}^2}{n+1}$$

$$C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2}$$

$$k = \frac{2\left(\sqrt{n+1}\right)^3}{(3n+2)}$$

$$C_P = \frac{kC_T^{3/2}}{2}$$

Lembrando que C_T pela teoria de pá:

$$dC_T = \sigma C_{l\alpha}(\theta' r^2 - \lambda r)dr$$

Igualando:

$$dC_T = 8\lambda(\lambda - \lambda_c)rdr = \sigma C_{l\alpha}(\theta' r^2 - \lambda r)dr$$

$$8\lambda(\lambda - \lambda_c)r = \sigma C_{l\alpha}(\theta' r^2 - \lambda r)$$

$$8\lambda^2 r - 8\lambda\lambda_c r = \sigma C_{l\alpha}\theta' r^2 - \sigma C_{l\alpha}\lambda r$$

$$\lambda^2 - \lambda\lambda_c = \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8} - \frac{\sigma C_{l\alpha}\lambda}{8}$$

$$\lambda^2 + \left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{8} - \lambda_c\right)\lambda - \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8} = 0$$

Hélices

Teoria do elemento de pá com momento:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$C_T = \frac{4\lambda_{TIP}^2}{n+1}$$

$$C_P = \frac{8\lambda_{TIP}^3}{3n+2}$$

$$k = \frac{2\left(\sqrt{n+1}\right)^3}{(3n+2)}$$

$$C_P = \frac{kC_T^{3/2}}{2}$$

$$\lambda^2 + \left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{8} - \lambda_c\right)\lambda - \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8} = 0$$

Resolvendo:

$$\lambda(r, \lambda_C) = \sqrt{\left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8}} - \left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)$$

Em HOVER:

$$\lambda(r) \equiv \lambda_h(r) = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta' r}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right)$$

Genérica. Para cada seção da hélice (com corda, Ângulo, aerofólio), calcula-se o influxo, com isso integra-se para achar Ct e Cp

Hélices

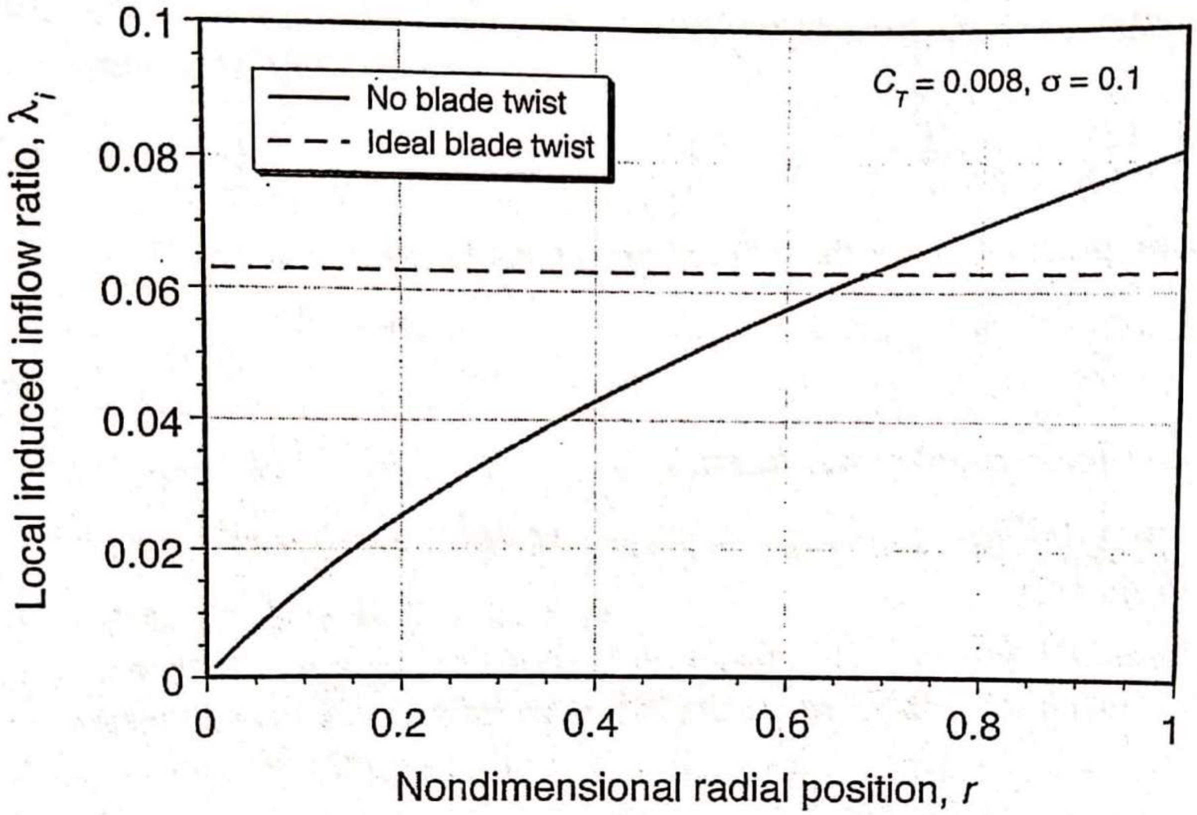
Teoria do elemento de pá com momento:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$\lambda(r,\lambda_C) = \sqrt{\left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8}} - \left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)$$

$$\lambda(r) \equiv \lambda_h(r) = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta' r}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right)$$



Hélices

Teoria do elemento de pá com momento:

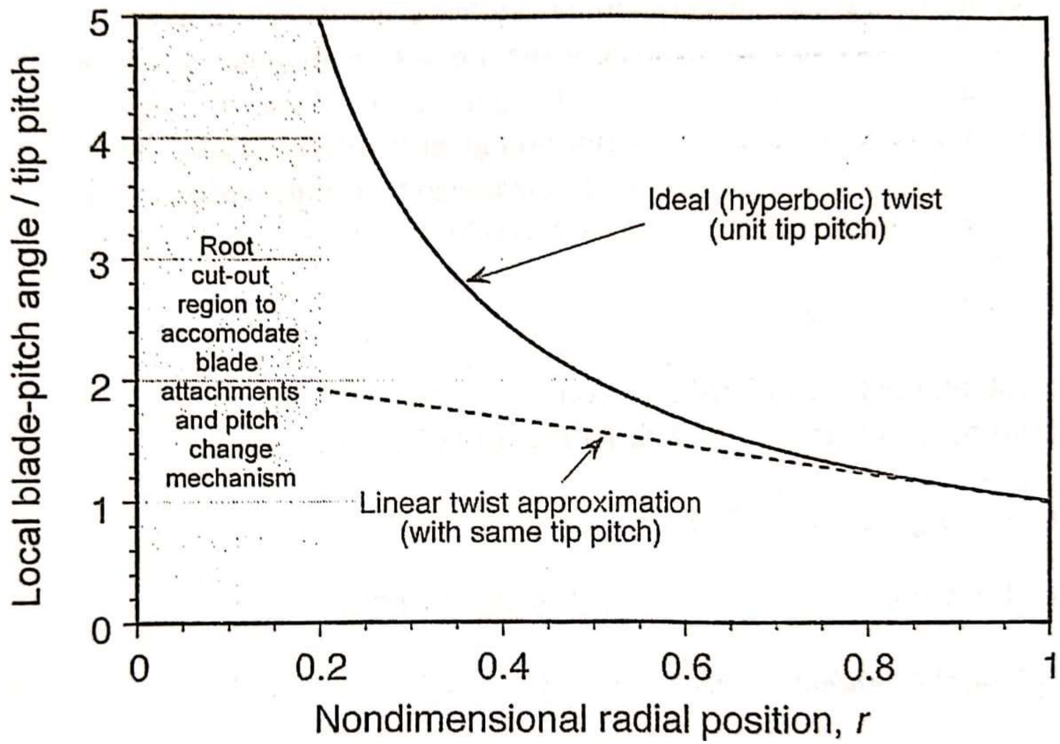
$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$\lambda(r,\lambda_C) = \sqrt{\left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8}} - \left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)$$

$$\lambda(r) \equiv \lambda_h(r) = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta' r}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right)$$

Considere a torção ideal, tal que $\theta r = \theta_{tip}$



Introdução
Hélices
Conclusão

Teoria do elemento de pá com momento:

$$C_T = 8\int_0^1 \lambda^2 r dr$$

$$C_P = 8\int_0^1 \lambda^3 r dr$$

$$\lambda(r,\lambda_C) = \sqrt{\left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma C_{l\alpha}\theta' r}{8}} - \left(\frac{\sigma C_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)$$

$$\lambda(r) \equiv \lambda_h(r) = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta' r}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right)$$

Substituindo:

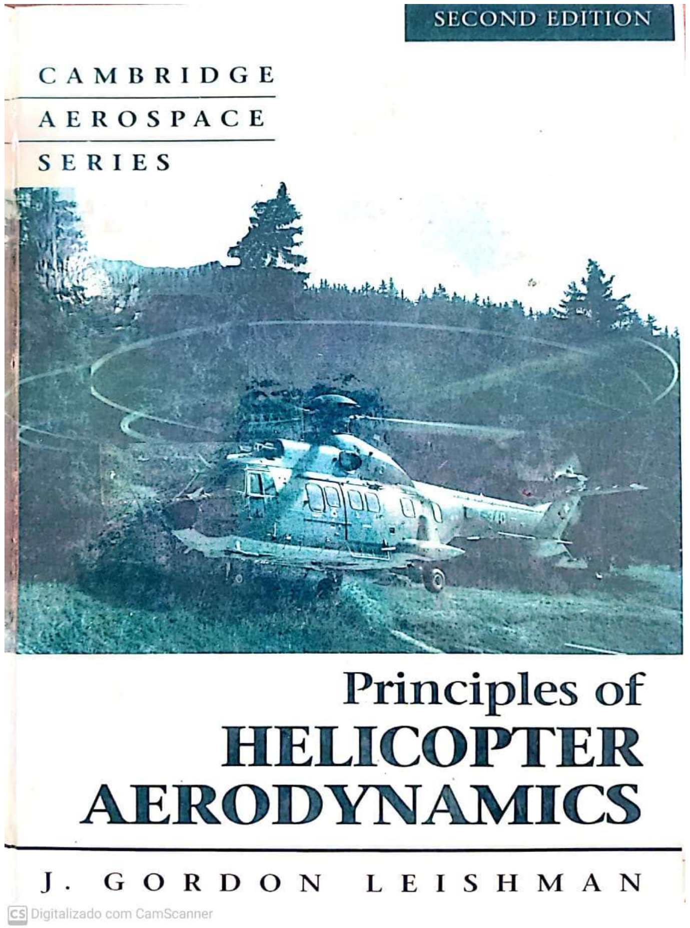
$$\lambda(r) \equiv \lambda_h(r) = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta_{tip}}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right)$$

$$\lambda_h(r) = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta_{tip}}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right) \Rightarrow constante$$

$$\lambda_h(r) = \frac{\sqrt{C_T}}{2} = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16}\left(\sqrt{1 + \frac{32\theta_{tip}}{\sigma C_{l\alpha}}} - 1\right)$$

Leitura futura

Para aprofundamento, mudança de movimento e considerações extras de perdas e eficiência



Conteúdo

Introdução

Hélices

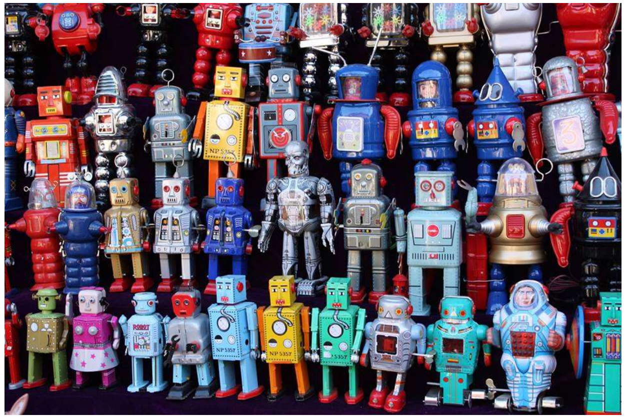
- “Take-home messages”
- Próxima aula…

Conclusão

Onde saber o que está acontecendo em Robótica?

Facebook!!! https://www.facebook.com/ieee.ras/

IEEE Robotics & Automation Society



IEEE SPECTRUM

https://spectrum.ieee.org/