

## DESLOCAMENTOS.

De acordo com as expressões (6), (7) e (11) do item anterior, tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{r} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} + \frac{M_y}{EI_y} z \quad (1)$$

de modo que:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{ES} \quad \frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (2)$$

As grandezas  $ES$  e  $EI_y$  denominam-se *rigidez longitudinal* e *rigidez à flexão*. Dados os esforços solicitantes  $N$  e  $M_y$ , quanto maiores as grandezas  $ES$  e  $EI_y$ , tanto menores as deformações  $\varepsilon_0$  e  $1/r$ , isto é, mais rígida a barra.

Para obter o *deslocamento longitudinal*  $u$ , considere-se, de acordo com a fig. do item anterior, que:

$$MN + (u + du) = u + M'N' \cos \varphi \Rightarrow MN + du = MN(1 + \varepsilon_0) \cos \varphi$$

Considerando a aproximação  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ , tem-se:

$$MN + du = MN(1 + \varepsilon_0)(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) = MN(1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\varepsilon_0)$$

Desprezando o termo de ordem superior  $\varepsilon_0\varphi^2$ , e lembrando que  $MN=dx$ , obtém-se:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varphi^2 \quad (3)$$

ou seja,

$$u = u_0 + \int \varepsilon_0 dx - \frac{1}{2} \int \varphi^2 dx \quad (4)$$

onde  $\varepsilon_0$  é dado pela expressão (2) e  $\varphi$  será determinado a seguir.

Na flexão normal simples,

$$u = u_0 - \frac{1}{2} \int \varphi^2 dx \quad (5)$$

Se se despreza o ângulo de rotação  $\varphi$  (o que corresponde a considerar  $\cos \varphi \approx 1$ ), resulta:

$$u = u_0 \quad (6)$$

de modo que, se a extremidade inicial for fixa, cada ponto  $M$  do eixo desloca-se exclusivamente segundo a direção normal ao eixo.

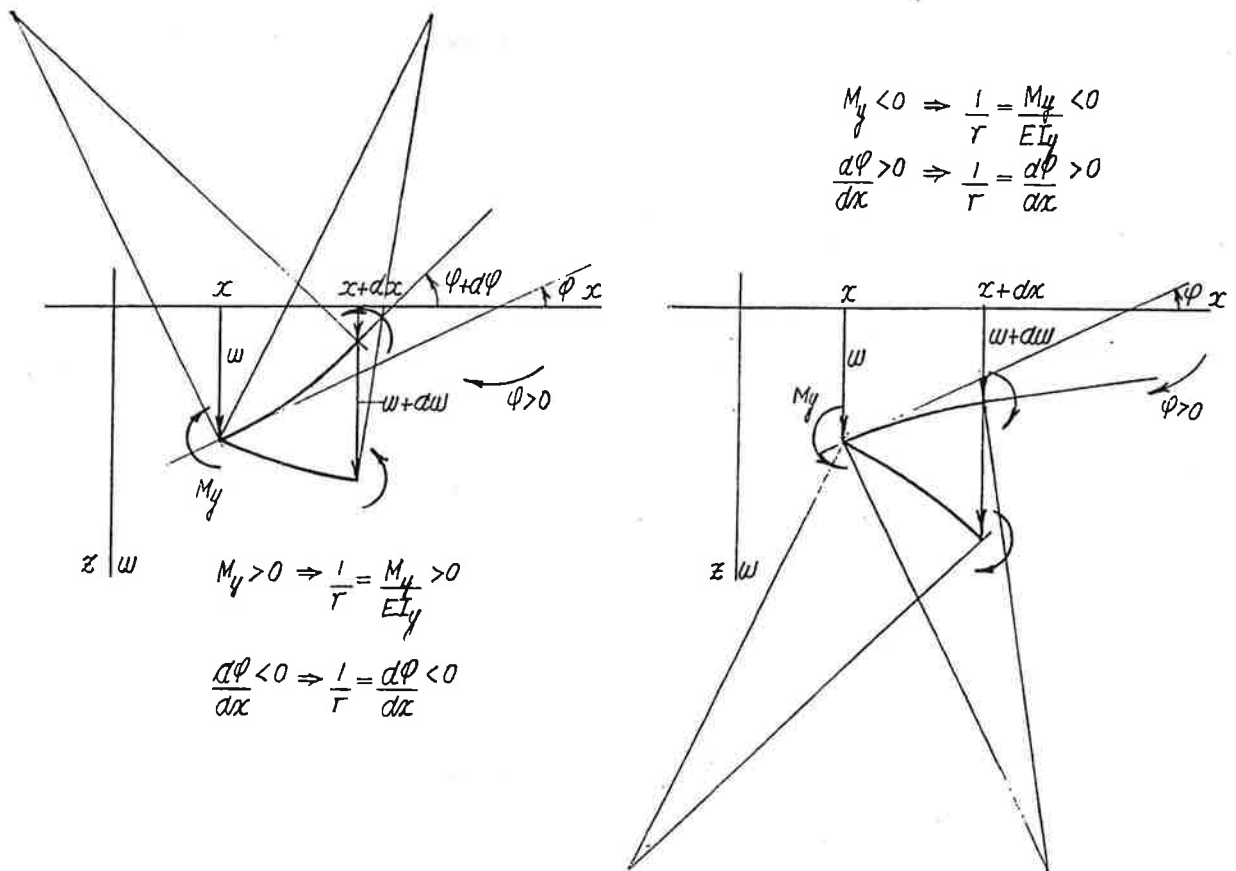
Para obter o *deslocamento transversal*  $w$ , deve-se lembrar que a curvatura  $1/r$  de uma função  $w(x)$  é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{w''}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Para  $\varphi$  muito pequeno, pode-se desprezar  $\operatorname{tg}^2\varphi$  em comparação com a unidade, de modo que:

$$\frac{1}{r} = w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \right) = \frac{dw'}{dx} = \frac{d}{dx} (\operatorname{tg}\varphi) \approx \frac{d\varphi}{dx} \quad (8)$$

Como se mostra na fig., a curvatura, segundo a expressão (2), tem o sinal de  $M_y$  ( $M_y > 0$ , quando há tração nas fibras caracterizadas por  $z > 0$ ), enquanto, segundo a expressão (8), tem o sinal de  $w''$  ( $w'' > 0$ , quando  $\varphi$ , considerado positivo no sentido horário, cresce com  $x$ ).



A fim de eliminar essa discrepância de sinais, decorrente exclusivamente da convenção adotada para o momento fletor, deve-se escrever:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \right) = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (9)$$

ou seja,



$$w(x) = -\frac{1}{6} \frac{M^* x^3}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a x}{EI} \quad (G')$$

$$w'(x) = -\frac{1}{2} \frac{M^* x^2}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a}{EI} \quad (G'')$$

O deslocamento transversal máximo  $f$  - denominado *flecha* - é obtido a partir das expressões (G) da seguinte maneira:

$$w'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} a \Rightarrow w_{MAX} = f = w\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right) = \frac{\sqrt{3}}{27} \frac{M^* a^2}{EI} \quad (H)$$

As rotações  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  são dadas, de acordo com a expressão (G''), por:

$$\varphi_A \approx \text{tg}\varphi_A = w'_A = w'(0) = \frac{M^* a}{6EI} \quad (I)$$

$$\varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = -\text{tg}(\pi - \varphi_B) = -w'_B = -w'(a) = \frac{M^* a}{3EI} \quad (J)$$

O deslocamento longitudinal é dado, de acordo com a expressão (3), por:

$$u'(x) = \frac{1}{2} w'(x)^2 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{M^* x^2}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a}{EI} \right]^2 \quad (K)$$

de modo que:

$$u(x) = \frac{1}{40} \frac{M^{*2} x^5}{a^2 (EI)^2} - \frac{1}{36} \frac{M^{*2} x^3}{(EI)^2} + \frac{1}{72} \frac{M^{*2} a^2 x}{(EI)^2} + C' \quad (L)$$

onde  $C' = 0$ , visto que  $u_A = u(0) = 0$ .

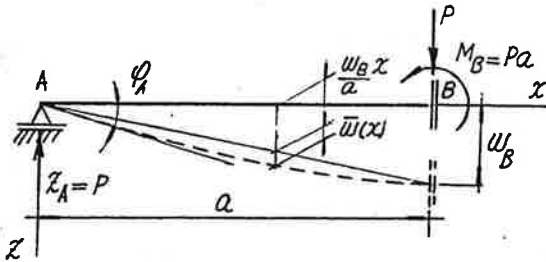
No ponto B, tem-se:

$$u_B = \frac{1}{90} \frac{M^{*2} a^3}{(EI)^2} = \frac{27}{10} \left(\frac{f}{a}\right)^2 a \quad (M)$$

Considerando que na prática  $\frac{f}{a}$  é da ordem de  $\frac{1}{500}$ , conclui-se que o deslocamento longitudinal pode ser desprezado.

## EXEMPLO 2.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante  $EI$  da fig. e comparar os resultados com os do exemplo anterior, quando  $M^* = Pa$



O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada  $x$ , é dado por:

$$M(x) = +Z_A x = Px \quad (A)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -Px \quad (B)$$

$$EIw'(x) = -\frac{1}{2}Px^2 + C \quad (C)$$

$$EIw(x) = -\frac{1}{6}Px^3 + Cx + D \quad (D)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad \varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = w'_B = w'(a) = 0 \quad (E)$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo no apoio A e de a rotação ser nula no apoio deslizante B, obtém-se:

$$C = \frac{1}{2}Pa \quad D = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{6} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G')$$

$$w'(x) = -\frac{1}{2} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G'')$$

No ponto B, tem-se:

$$w_B = w(a) = \frac{1}{3} \frac{Pa^3}{EI} \quad (H)$$

No ponto A, tem-se:

$$\varphi_A \approx \text{tg}\varphi_A = w'_A = w'(0) = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (\text{I})$$

De acordo com a fig., o deslocamento  $\bar{w}(x)$  e a rotação  $\bar{\varphi}(x) = \bar{w}'(x)$  são dados por:

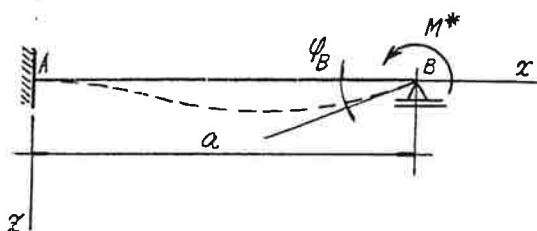
$$\bar{w}(x) = w(x) - \frac{w_B}{a} x = -\frac{1}{6} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2 x}{EI} \quad (\text{J}')$$

$$\bar{w}'(x) = w'(x) - \frac{w_B}{a} = -\frac{1}{2} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2}{EI} \quad (\text{J}'')$$

o que permite concluir, considerando no exemplo anterior  $M^* = Pa$ , que barras com mesma distribuição de momentos fletores apresentam a mesma configuração deformada. De fato, sendo idênticos os diagramas de momentos fletores, idênticas serão as curvaturas que determinam a deformação dos infinitos segmentos de dimensão  $dx$  de que são compostas as barras.

### EXEMPLO 3.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante  $EI$  da fig. e comparar os resultados com os do primeiro exemplo.



Considerando o equilíbrio da viga podem-se escrever as seguintes equações:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0 \quad (\text{A}')$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A - Z_B = 0 \quad (\text{A}'')$$

$$(\Sigma M)_A = 0 \Rightarrow Z_B a - M_A - M^* = 0 \quad (\text{A}''')$$

de modo que:

$$Z_A = \frac{M^* + M_A}{a} \quad Z_B = -\frac{M^* + M_A}{a} \quad (\text{B})$$

onde  $M_A$  é, por enquanto, desconhecido.

O momento fletor em uma seção genérica caracterizada pela coordenada  $x$  é dado por:

$$M(x) = Z_A x - M_A = -\frac{M^* + M_A}{a} x - M_A \quad (C)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -(Z_A x - M_A) = -\frac{M^* + M_A}{a} x + M_A \quad (D)$$

$$EIw'(x) = -\frac{M^* + M_A}{a} \frac{x^2}{2} + M_A x + C \quad (E)$$

$$EIw(x) = -\frac{M^* + M_A}{a} \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (F)$$

onde os valores  $M_A$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são obtidos com as seguintes condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad w'_A = w'(0) = 0 \quad w_B = w(a) = 0 \quad (G)$$

de modo que

$$M_A = \frac{1}{2} M^* \quad C = 0 \quad D = 0 \quad (H)$$

Retornando com esses valores às expressões (E) e (F), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{4} \frac{M^*}{EI} \frac{x^3}{a} + \frac{1}{4} \frac{M^* x^2}{EI} \quad (I')$$

$$w'(x) = -\frac{3}{4} \frac{M^*}{EI} \frac{x^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{M^* x}{EI} \quad (I'')$$

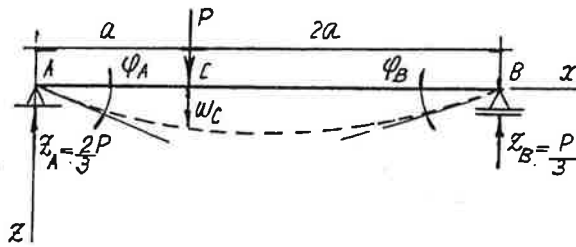
A rotação no apoio B é dada por:

$$\varphi_B \approx \text{tg} \varphi_B = -\text{tg}(\pi - \varphi_B) = -w'_B = -w'(a) = \frac{1}{4} \frac{M^* a}{EI} \quad (J)$$

Comparando a rotação no apoio B da estrutura isostática do primeiro exemplo com a rotação no mesmo apoio da estrutura hiperestática deste exemplo, constata-se um fato que tem validade geral: as estruturas hiperestáticas são mais rígidas do que as correspondentes estruturas isostáticas, isto é, para um mesmo carregamento, quanto maior o grau de hiperestaticidade da estrutura tanto menores os deslocamentos e rotações.

#### EXEMPLO 4.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante  $EI$  da fig.



No trecho 1, isto é, para  $0 \leq x \leq a$ , tem-se:

$$M_1(x) = +\frac{2}{3}Px \quad (A1)$$

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = -\frac{2}{3}Px \quad (B1)$$

$$EIw_1'(x) = -\frac{1}{3}Px^2 + C_1 \quad (C1)$$

$$EIw_1(x) = -\frac{1}{9}Px^3 + C_1x + D_1 \quad (D1)$$

No trecho 2, isto é, para  $a \leq x \leq 3a$ , tem-se:

$$M_2(x) = +\frac{2}{3}Px - P(x-a) \quad (A2)$$

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = -\frac{2}{3}Px + P(x-a) \quad (B2)$$

$$EIw_2'(x) = -\frac{1}{3}Px^2 + \frac{1}{2}P(x-a)^2 + C_2 \quad (C2)$$

$$EIw_2(x) = -\frac{1}{9}Px^3 + \frac{1}{6}P(x-a)^3 + C_2x + D_2 \quad (D2)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_1(0) = 0 \quad w_2(3a) = 0 \quad (E')$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_1'(a) = w_2'(a) \quad (E'')$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo nos apoios e de haver continuidade da linha elástica (em termos de deslocamentos e de rotações) na interface dos trechos 1 e 2, obtém-se:

$$C_1 = C_2 = \frac{5}{9}Pa^2 \quad D_1 = D_2 = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w_1(x) = -\frac{1}{9} \frac{Px^3}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G1')$$



$$w_1'(x) = -\frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G2'')$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{9} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{P(x-a)^3}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G2')$$

$$w_2'(x) = -\frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{P(x-a)^2}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G2'')$$

No ponto C, tem-se:

$$w_C = w_1(a) = w_2(a) = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EI} \quad (H)$$

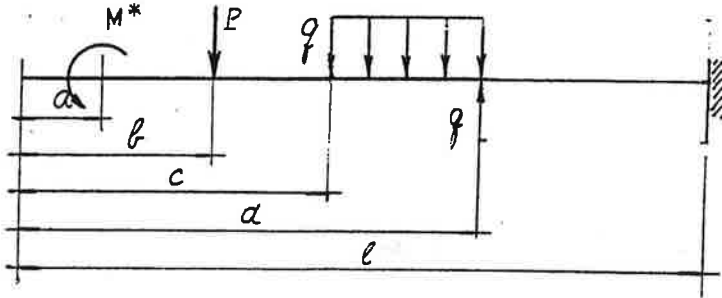
Nos pontos A e B, tem-se:

$$\varphi_A = w_A' = w_1'(0) = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I')$$

$$\varphi_B = -w_B' = -w_2'(3a) = \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I'')$$

## EQUAÇÃO GERAL DA LINHA ELÁSTICA.

Em uma viga de seção constante, como a que se mostra na fig., a integração da equação diferencial da linha elástica, nos trechos definidos pela correspondente função  $M(x)$ , é simplificada pela adoção de dois artifícios que reduzem o número total de constantes a determinar de  $2n$  para 2.



Em cada um dos trechos, o momento fletor é dado por:

$$\text{trecho 1 : } 0 \leq x \leq a \quad M_1(x) = 0 \quad (1.1)$$

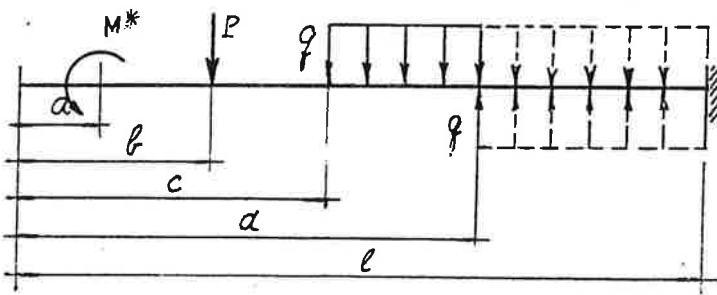
$$\text{trecho 2 : } a \leq x \leq b \quad M_2(x) = -M^* \quad (1.2)$$

$$\text{trecho 3 : } b \leq x \leq c \quad M_3(x) = -M^* - P(x - b) \quad (1.3)$$

$$\text{trecho 4 : } c \leq x \leq d \quad M_4(x) = -M^* - P(x - b) - \frac{1}{2}q(x - c)^2 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{trecho 5 : } d \leq x \leq l \quad M_5(x) &= -M^* - P(x - b) - q(d - c)\left[x - \frac{1}{2}(d + c)\right] \\ &= -M^* - P(x - b) - \frac{1}{2}q(x - c)^2 + \frac{1}{2}q(x - d)^2 \quad (1.5) \end{aligned}$$

A expressão (1.5) corresponde ao primeiro artifício, que consiste em considerar, como se mostra na fig., o prolongamento da carga  $q$ , o qual é anulado por uma carga de mesma intensidade e de sentido contrário.



Em cada um dos trechos, a equação diferencial da linha elástica é dada por:

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = 0 \quad (2.1)$$

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = M^* \quad (2.2)$$

$$EIw_3''(x) = -M_3(x) = M^* + P(x - b) \quad (2.3)$$

$$EIw_4''(x) = -M_4(x) = M^* + P(x - b) + \frac{1}{2}q(x - c)^2 \quad (2.4)$$

$$EIw_5''(x) = -M_5(x) = M^* + P(x - b) + \frac{1}{2}q(x - c)^2 - \frac{1}{2}q(x - d)^2 \quad (2.5)$$

Integrando as expressões anteriores, obtém-se:

$$EIw_1'(x) = C_1 \quad (3.1)$$

$$EIw_2'(x) = C_2^* + M^*x - M^*a + M^*a = C_2 + M^*(x - a) \quad (3.2)$$

$$EIw_3'(x) = C_3 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 \quad (3.3)$$

$$EIw_4'(x) = C_4 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 + \frac{1}{6}q(x - c)^3 \quad (3.4)$$

$$EIw_5'(x) = C_5 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 + \frac{1}{6}q(x - c)^3 - \frac{1}{6}q(x - d)^3 \quad (3.5)$$

A expressão (3.2) corresponde ao segundo artifício, que consiste em somar e subtrair o termo  $M^*a$ , de que resulta o termo  $M^*(x - a)$ , que passa a ser integrado, assim como os termos  $P(x - b)$ ,  $q(c - x)^2$ , ... sem abrir os parenteses. Tal procedimento é legítimo, visto que altera apenas a constante de integração.

Integrando as expressões anteriores, obtém-se:

$$EIw_1(x) = C_1x + D_1 \quad (4.1)$$

$$EIw_2(x) = C_2x + D_2 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 \quad (4.2)$$

$$EIw_3(x) = C_3x + D_3 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 \quad (4.3)$$

$$EIw_4(x) = C_4x + D_4 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 + \frac{1}{24}q(x - c)^4 \quad (4.4)$$

$$EIw_5(x) = C_5x + D_5 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 + \frac{1}{24}q(x - c)^4 - \frac{1}{24}q(x - d)^4 \quad (4.5)$$

Considerando a continuidade da linha elástica (em termos de deslocamentos transversais e de rotações) na interface dos trechos, obtém-se:

$$w_1'(a) = w_2'(a) \quad w_2'(b) = w_3'(b) \dots \Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_5 = C \quad (5')$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_2(b) = w_3(b) \dots \Rightarrow D_1 = D_2 = \dots = D_5 = D \quad (5'')$$

Os resultados anteriores podem ser resumidos da seguinte maneira:

$$M(x) = 0 \Big|_1 - M^* \Big|_2 + P(x - b) \Big|_3 - \frac{1}{2}q(x - c)^2 \Big|_4 + \frac{1}{2}q(x - d)^2 \Big|_5 \quad (6')$$

$$EIw(x) = Cx + D \Big]_1 + \frac{1}{2} M^* (x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{6} P(x-b)^3 \Big]_3 + \frac{1}{24} q(x-c)^4 \Big]_4 - \frac{1}{24} q(x-d)^4 \Big]_5$$

$$EIw'(x) = C \Big]_1 + M^* (x-a) \Big]_2 + \frac{1}{2} P(x-b)^2 \Big]_3 + \frac{1}{6} q(x-c)^3 \Big]_4 - \frac{1}{6} q(x-d)^3 \Big]_5 \quad (6''')$$

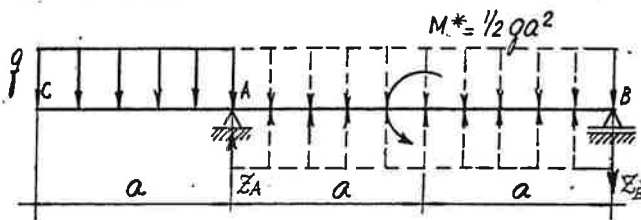
onde o *i*-ésimo colchete indica que devem ser omitidos os termos à direita, quando se considera um ponto do *i*-ésimo trecho.

Na viga que se está considerando, as constantes *C* e *D* são determinadas com as condições de contorno:

$$w(3a) = 0 \quad w'(3a) = 0 \quad (7)$$

### EXEMPLO.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação no ponto *C* da viga de rigidez constante *EI* da fig.



Somando e subtraindo a carga uniforme *q* no trecho *AB*, tem-se:

$$M(x) = -\frac{1}{2} qx^2 \Big]_1 + \frac{1}{2} q(x-a)^2 + Z_A(x-a) \Big]_2 - M^* \Big]_3 \quad (A)$$

$$EIw''(x) = \frac{1}{2} qx^2 \Big]_1 - \frac{1}{2} q(x-a)^2 - Z_A(x-a) \Big]_2 + M^* \Big]_3 \quad (B)$$

$$EIw'(x) = C + \frac{1}{6} qx^3 \Big]_1 - \frac{1}{6} q(x-a)^3 - \frac{1}{2} Z_A(x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{2} M^*(x-2a) \Big]_3 \quad (C)$$

$$EIw(x) = Cx + D + \frac{1}{24} qx^4 \Big]_1 - \frac{1}{24} q(x-a)^4 - \frac{1}{6} Z_A(x-a)^3 \Big]_2 + \frac{1}{2} M^*(x-2a)^2 \Big]_3 \quad (D)$$

onde:

$$Z_A = \frac{3}{2} qa \quad (E)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w(a) = C(3a) + D + \frac{1}{24} q(a)^2 = 0 \quad (F)$$

$$w(3a) = C(3a) + D + \frac{1}{24} q(3a)^2 - \frac{1}{24} q(2a)^2 - \frac{1}{6} (\frac{3}{2} qa)(2a)^3 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} qa)a^2 = 0 \quad (G)$$

obtêm-se as constantes:

$$C = -\frac{11}{24} qa^3 \quad D = \frac{5}{12} qa^4 \quad (H)$$

de modo que:

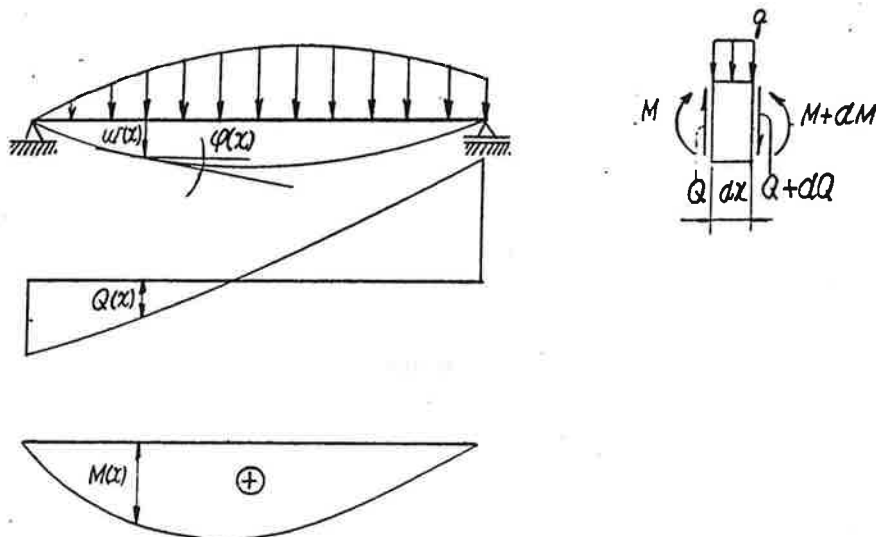
$$EIw(x) = -\frac{11}{24}qa^3x + \frac{5}{12}qa^4 + \frac{1}{24}qx^4 \Big]_1 - \frac{1}{24}q(x-a)^4 - \frac{1}{6}Z_A(x-a)^3 \Big]_2 + \frac{1}{2}M^*(x-2a)^2 \Big]_3$$
$$EIw'(x) = -\frac{11}{24}qa^3 + \frac{1}{6}qx^3 \Big]_1 - \frac{1}{6}q(x-a)^3 - \frac{1}{2}Z_A(x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{2}M^*(x-2a) \Big]_3$$

No ponto C, tem-se:

$$w_c = w(0) = \frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad \varphi_c = w'_c = w'(0) = -\frac{11}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (J)$$

## ANALOGIA DE MOHR.

Considere-se uma viga, como a que se mostra na fig., submetida ao carregamento  $q(x)$  que provoca flexão normal simples.



O equilíbrio de um segmento de dimensão  $dx$ , limitado à esquerda pela seção transversal caracterizada pela coordenada  $x$ , a qual é solicitada pelos esforços solicitantes  $Q$  e  $M$ , e à direita pela seção transversal caracterizada pela coordenada  $x+dx$ , a qual é solicitada pelos esforços solicitantes  $Q+dQ$  e  $M+dM$ , é expresso pelas seguintes equações:

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow (Q + dQ) - Q + q dx = 0 \quad (1')$$

$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow (M + dM) - M - Q dx + q dx \frac{1}{2} dx = 0 \quad (1'')$$

Desprezando o termo de segunda ordem  $\frac{1}{2} q dx^2$ , obtêm-se as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (2')$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (2'')$$

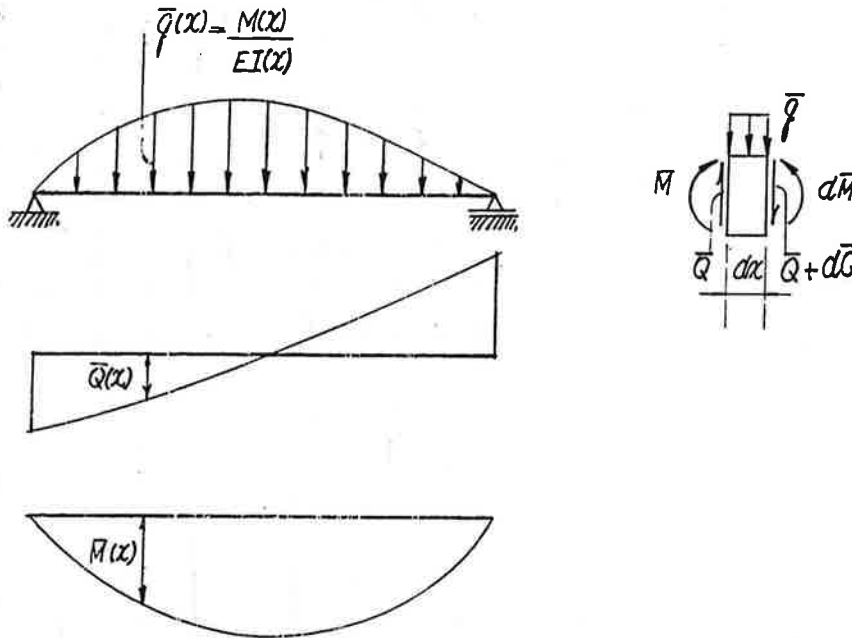
Em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada  $x$ , o deslocamento transversal  $w$  e a rotação  $\varphi$  podem ser determinados mediante a integração da equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

Considere-se, em seguida, na mesma viga, o carregamento transversal  $\bar{q}(x)$  - denominado *carregamento fictício* - dado em cada ponto, como se mostra na fig., por:

$$\bar{q}(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (4)$$

onde  $M(x)$  é o momento fletor correspondente ao carregamento real  $q(x)$ .



As equações diferenciais de equilíbrio para este carregamento são dadas por:

$$\frac{d\bar{Q}}{dx} = -\bar{q} \quad (5')$$

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{Q} \Rightarrow \frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\bar{q} \quad (5'')$$

Substituindo na segunda das expressões (5'') o valor de  $\bar{q}$  dado pela expressão (4), obtém-se:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (6)$$

Considerando, em seguida, a expressão (3), pode-se escrever:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (7)$$

isto é, a função  $\bar{M}(x)$ , que corresponde ao momento fletor na viga submetida ao carregamento fictício  $\bar{q}(x)$ , e a função  $w(x)$ , que corresponde ao deslocamento transversal nos

pontos do eixo da viga submetida ao carregamento real  $q(x)$ , diferem entre si por uma função linear, ou seja:

$$\bar{M} = w + Cx + D \quad (8)$$

Substituindo o valor de  $\bar{M}$  na primeira das expressões (5''), obtém-se:

$$\bar{Q} = \frac{dw}{dx} + C = \text{tg}\varphi + C \approx \varphi + C \quad (9)$$

isto é, a função  $\bar{Q}(x)$ , que corresponde a força cortante na viga submetida ao carregamento fictício  $\bar{q}(x)$ , e a função  $\varphi(x)$ , que corresponde à rotação nos pontos do eixo da viga submetida ao carregamento real  $q(x)$ , diferem entre si por uma constante.

Se na viga submetida ao carregamento real o deslocamento  $w$  é nulo nos pontos A e B de coordenadas  $x_A$  e  $x_B$ , e se as condições de contorno da viga submetida ao carregamento fictício são tais que  $\bar{M}_A = 0$  e  $\bar{M}_B = 0$  nesses pontos, resulta, segundo a expressão (8):

$$0 = 0 + Cx_A + D \quad (10')$$

$$0 = 0 + Cx_B + D \quad (10'')$$

ou seja,

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (11)$$

Nessas condições, o deslocamento transversal  $w$  e a rotação  $\varphi$  nos pontos da viga submetida ao carregamento real são iguais, respectivamente, ao momento fletor  $\bar{M}$  e à força cortante  $\bar{Q}$  nas seções da viga submetida ao carregamento fictício.

Se na viga submetida ao carregamento real o deslocamento  $w$  é nulo no ponto A de coordenada  $x_A$  e a rotação é nula no ponto B de coordenada  $x_B$ , e se as condições de apoio da viga submetida ao carregamento fictício são tais que se tem  $\bar{M}_A = 0$  e  $\bar{Q}_B = 0$  nesses pontos, resulta, segundo as expressões (8) e (9),

$$0 = 0 + Cx_A + D \quad (12')$$

$$0 = 0 + D \quad (12'')$$

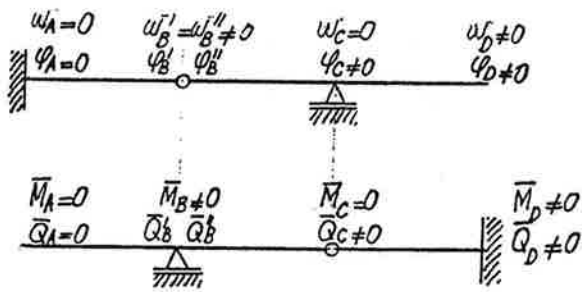
ou seja,

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (13)$$

Na viga que se mostra na fig., é necessário analisar os pontos A, B, C e D. No ponto A, para que se tenha  $w_A = 0$  e  $\varphi_A = 0$ , ou seja,  $\bar{M}_A = 0$  e  $\bar{Q}_A = 0$ , não se deve introduzir apoio; no ponto B, para que se tenha  $w_B^- = w_B^+ \neq 0$  e  $\varphi_B^- \neq \varphi_B^+$  (o sinal negativo significa imediatamente à esquerda; o sinal positivo significa imediatamente à direita), ou seja,  $\bar{M}_A^- = M_B^+ \neq 0$  e  $\bar{Q}_B^- \neq Q_B^+$ , deve-se introduzir um apoio simples; no ponto C, para que se tenha  $w_C = 0$  e  $\varphi_C^- = \varphi_C^+ \neq 0$ , ou seja,  $\bar{M}_C = 0$  e  $\bar{Q}_C^- = \bar{Q}_C^+ \neq 0$ , deve-se introduzir uma



articulação; no ponto D, para que se tenha  $w_D \neq 0$  e  $\varphi_D \neq 0$ , ou seja,  $\bar{M}_D \neq 0$  e  $\bar{Q}_D \neq 0$ , deve-se introduzir um engastamento.



Convém notar que:

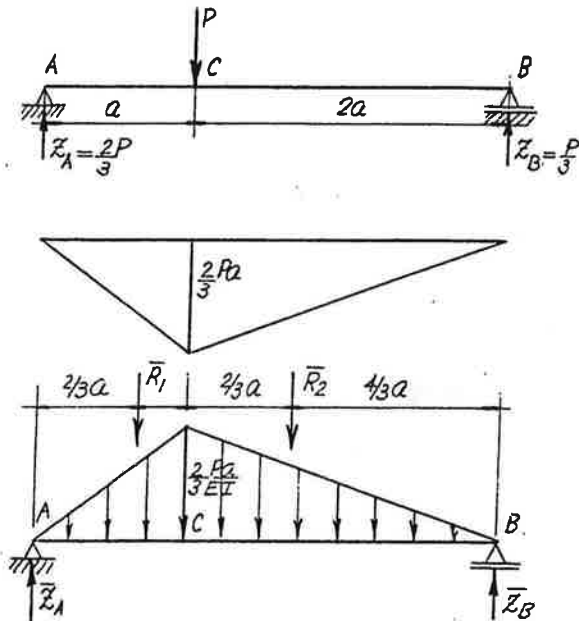
$M > 0 \Rightarrow \bar{q} > 0$ , isto é, no sentido de z positivo.

$\bar{M} > 0 \Rightarrow w > 0$ , isto é, no sentido de z positivo.

$\bar{Q} > 0 \Rightarrow \varphi > 0$ , isto é, no sentido horário de x para z.

### EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento vertical no ponto C bem como a rotação nos apoios A e B da viga de rigidez EI da fig.



De acordo com a fig., tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} a = \frac{1}{3} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} 2a = \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} = 2\bar{R}_1 \quad (A'')$$

Considerando o equilíbrio da estrutura submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$(\Sigma M)_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A 3a = \bar{R}_1 \frac{7}{3} a + \bar{R}_2 \frac{4}{3} a = 5\bar{R}_1 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B')$$

$$(\Sigma M)_a = 0 \Rightarrow \bar{R}_B 3a = \bar{R}_1 \frac{2}{3} a + \bar{R}_2 \frac{5}{3} a = 4\bar{R}_1 \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B'')$$

de modo que:

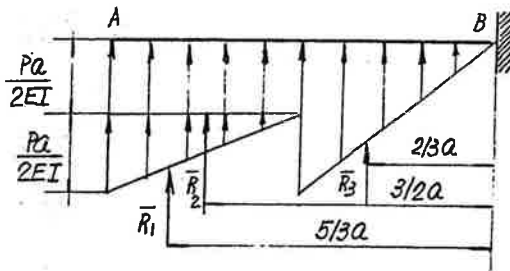
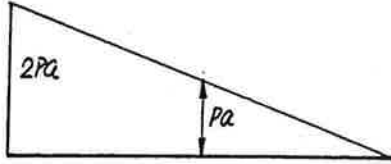
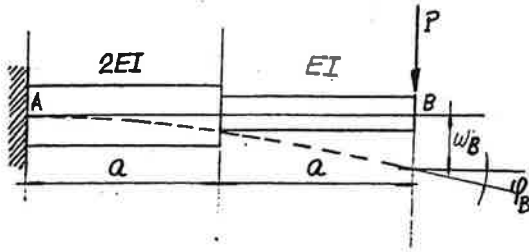
$$\varphi_A = \bar{Q}_A = \bar{R}_A = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (C')$$

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = -\bar{R}_B = -\frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (C'')$$

$$w_C = \bar{M}_C = \bar{R}_A a - \bar{R}_1 \frac{1}{3} a = \frac{4}{3} \bar{R}_1 a = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EI} \quad (C''')$$

**EXEMPLO 2.**

Determinar o deslocamento vertical e a rotação no ponto B da viga da fig.



De acordo com a fig., tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{2EI} a = \frac{1}{4} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{Pa}{2EI} a = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A'')$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A''')$$

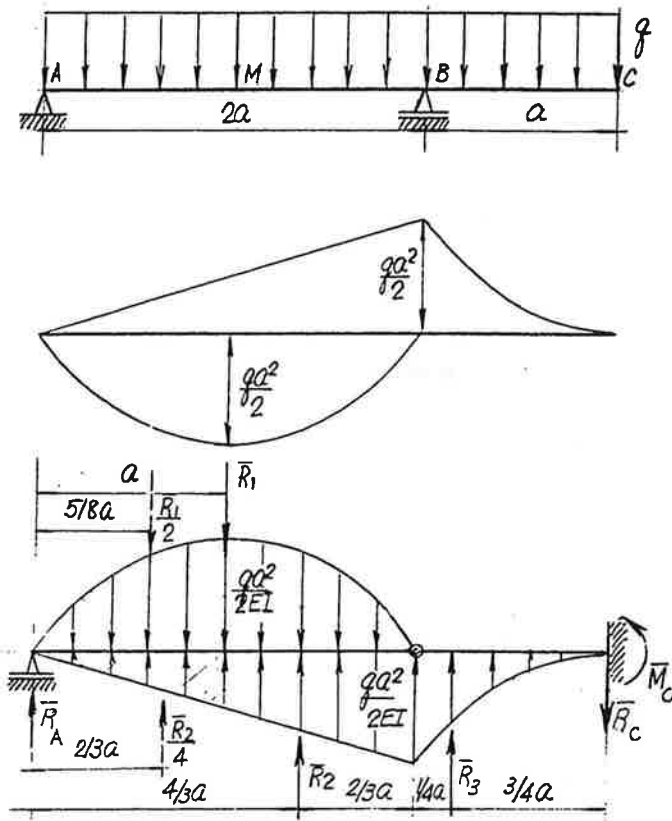
de modo que:

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B')$$

$$w_B = \bar{M}_B = \bar{R}_1 \frac{5}{3} a + \bar{R}_2 \frac{3}{2} a + \bar{R}_3 \frac{2}{3} a = \frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI} \quad (B''')$$

### EXEMPLO 3.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação nos pontos C e M da viga de rigidez constante EI da fig.



Considerando a viga submetida ao carregamento fictício e vinculada de acordo com as observações feitas anteriormente, a saber, manutenção do apoio externo A, transformação do apoio interno B em articulação e engastamento da extremidade livre C, tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2EI} 2a = \frac{2}{3} \frac{qa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2EI} 2a = \frac{1}{2} \frac{qa^3}{EI} \quad (A'')$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (A''')$$

Considerando a articulação no ponto B da viga submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$\bar{M}_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A 2a + \bar{R}_2 \frac{2}{3} a - \bar{R}_1 a = 0 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (B)$$

de modo que:

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = \bar{R}_A - \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (C')$$

$$w_C = \bar{M}_C + \bar{R}_A 3a - \bar{R}_1 2a + \bar{R}_2 \frac{5}{3}a + \bar{R}_3 \frac{3}{4}a = \frac{1}{8} \frac{qa^4}{EI} \quad (C'')$$

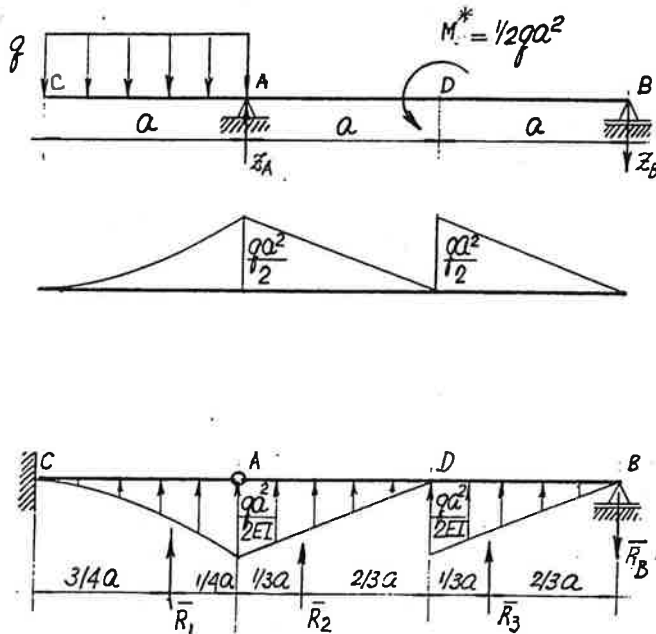
$$\varphi_M = \bar{Q}_M = \bar{R}_A - \frac{1}{2}\bar{R}_1 + \frac{1}{4}\bar{R}_2 = -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (C''')$$

$$w_M = \bar{M}_M = \bar{R}_A a - \frac{1}{2}\bar{R}_1 \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}\bar{R}_2 \frac{1}{3}a = \frac{1}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad (C''''')$$

O exemplo mostra a conveniência de considerar separadamente o carregamento no vão e no balanço, de maneira que a distribuição de momentos fletores e o carregamento fictício correspondente sejam representados por figuras geométricas simples (no caso triângulos e parábolas), com área e posição do centro de gravidade sejam conhecidos.

#### EXEMPLO 4.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação nos pontos C e M da viga de rigidez constante EI da fig.



Considerando a viga submetida ao carregamento fictício e vinculada de acordo com as observações feitas anteriormente, a saber, engastamento da extremidade livre C, transformação do apoio interno A em articulação e manutenção do apoio externo B, tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \bar{R}_3 = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{4} \frac{qa^3}{EI} \quad (A'')$$

Considerando a articulação no ponto A da viga submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$\bar{M}_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B 2a - \bar{R}_2 \frac{1}{3} a - \bar{R}_3 \frac{5}{3} a = 0 \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{5}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (B)$$

de modo que:

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = \bar{R}_B - \bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = -\frac{11}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (C')$$

$$w_C = \bar{M}_C = -\bar{R}_B 3a + \bar{R}_1 \frac{3}{4} a + \bar{R}_2 \frac{4}{3} a + \bar{R}_3 \frac{7}{3} a = \frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad (C'')$$