

Tensões Tangenciais na Flexão e Centro de Cisalhamento

Prof. Dr. Edgard S. de Almeida Neto
 Prof. Dr. Henrique de Britto Costa

Escola Politécnica da USP

31 de Outubro de 2014

Conteúdo

1	Tensões Tangenciais na Flexão	1
1.1	Tensão Tangencial e Fluxo de Cisalhamento	2
1.1.1	Equações Diferenciais de Equilíbrio	2
1.1.2	Tensão Tangencial numa Superfície Longitudinal	3
1.1.3	Tensão Tangencial na Seção Transversal	6
1.1.4	Fluxo de Cisalhamento em Seções Delgadas	8
1.2	Sentido das Tensões Tangenciais nas Seções Delgadas	9
1.3	Ligações Longitudinais na Flexão	13
1.4	Distribuição das Tensões Tangenciais em Seções Delgadas	18
2	Centro de Cisalhamento de Seções Delgadas Abertas	25

1 Tensões Tangenciais na Flexão

A distribuição das tensões tangenciais na flexão não é tão simples como a das tensões normais. Como mostra a Fig. 1-b, a igualdade das tensões tangenciais em planos perpendiculares exige que elas se anulem junto às superfícies livres superior e inferior da barra, o que só é possível se distribuição for não-linear.

Na flexão, as tensões tangenciais deformam um trecho de barra com seção retangular conforme mostrado na Fig. 2-a. As distorções $\gamma = G\tau$ são nulas junto às superfícies superior e inferior, e máximas no centro de gravidade. Em decorrência, a seção transversal sofre

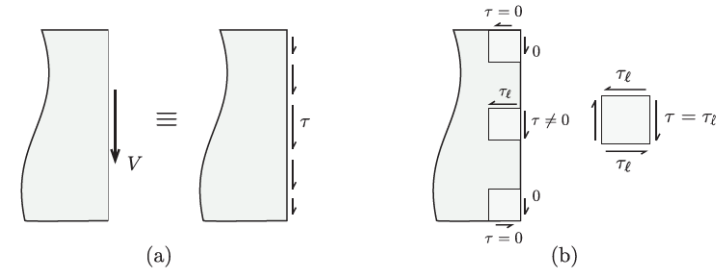


Fig. 1: Tensões tangenciais na seção transversal e em planos longitudinais.

empenamento, ou seja, ela deixa de ser plana na configuração deformada. Não havendo restrições ao empenamento, o comprimento das fibras longitudinais é pouco afetado e é possível desacoplar os efeitos das deformações provocadas pelas tensões normais e pelas tangenciais. Observamos também que a extremidade do trecho sofre um deslocamento transversal $\Delta v = \gamma\Delta x$ em relação à seção à esquerda provocado pela força cortante, Fig. 2-b.

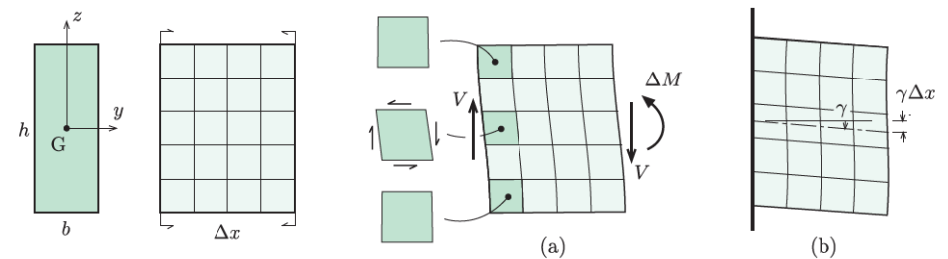


Fig. 2: Deformação por cisalhamento de uma viga de seção retangular: (a) distorções, (b) deslocamento transversal por V .

1.1 Tensão Tangencial e Fluxo de Cisalhamento

1.1.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Consideremos um trecho de comprimento infinitesimal dx extraído de uma barra prismática sujeita a uma força distribuída $p(x)$ perpendicular ao eixo, Fig. 3. Nas seções extremas do trecho, atuam forças normais N e $N + dN$ e momentos fletores M e $M + dM$ mecanicamente equivalentes às distribuições das tensões normais σ e $\sigma + d\sigma$. Atuam também forças cortantes V e $V + dV$ mecanicamente equivalentes às tensões tangenciais, Fig. 4.

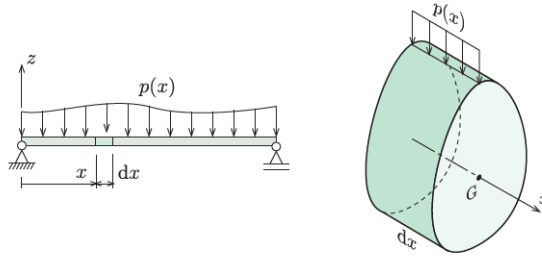


Fig. 3: Trecho de uma barra prismática.

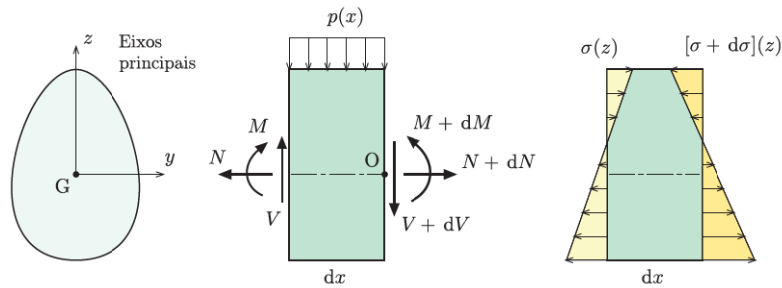


Fig. 4: Esforços solicitantes e tensões normais nas seções extremas.

O equilíbrio de forças nas direções longitudinal e transversal do trecho fornece

$$N - (dN + N) = 0 \quad \Rightarrow \quad dN = 0, \quad (1)$$

$$V - p dx - (V + dV) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -p \quad (2)$$

e o equilíbrio de momentos em relação ao ponto O fornece

$$M + V dx - p \frac{(dx)^2}{2} - (M + dM) = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dM}{dx} = V}, \quad (3)$$

pois o termo da carga distribuída é de ordem superior. As Eqs. (1) a (3) são as *equações diferenciais de equilíbrio* de uma barra prismática com força normal constante.

1.1.2 Tensão Tangencial numa Superfície Longitudinal

Seja \mathcal{S} uma superfície cilíndrica com geratriz paralela ao eixo x e que divide o trecho de comprimento dx em duas partes, Fig. 5. O equilíbrio da parte superior, identificada pela área \bar{A} , requer a existência de tensões τ_t tangenciais à superfície cilíndrica, Fig. 6.

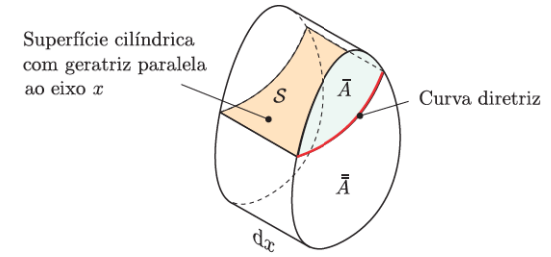


Fig. 5: Superfície cilíndrica interceptando o trecho elementar.

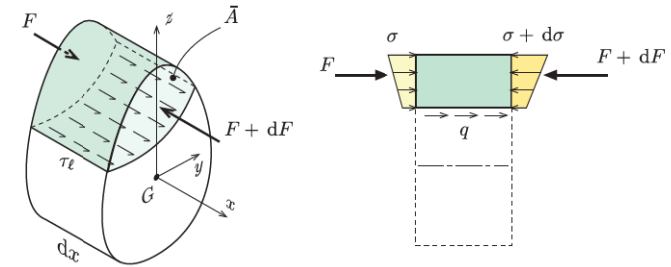


Fig. 6: Equilíbrio na direção longitudinal.

Sejam F e $F + dF$ as resultantes das tensões normais que atuam nas extremidades da parte superior e q a resultante das tensões tangenciais na superfície cilíndrica por unidade de comprimento. O equilíbrio na direção longitudinal fornece

$$F + q dx = F + dF \quad \Rightarrow \quad q = \frac{dF}{dx}. \quad (4)$$

Por outro lado, a resultante F das tensões normais é dada por

$$F = - \int_{\bar{A}} \sigma dA,$$

onde o sinal negativo leva em conta as convenções de sinais distintas de σ e F . Introduzindo a expressão de σ deduzida para a flexão composta,

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_y} z,$$

temos

$$F = - \frac{N}{A} \int_{\bar{A}} dA + \frac{M}{I_y} \int_{\bar{A}} z dA.$$

Consequentemente,

$$F(x) = -N \frac{\bar{A}}{A} + M(x) \frac{\bar{S}_y}{I_y}, \quad (5)$$

em que

- \bar{A} é a área da seção isolada pela curva diretriz;
- \bar{S}_y é o momento estático da área \bar{A} em relação ao eixo central-principal y , em torno do qual ocorre a flexão;
- A é a área total da seção transversal;
- I_y é o momento de inércia de toda a seção transversal em relação ao eixo y .

Substituindo a Eq. (5) em (4), temos para a barra prismática com $N = \text{const.}$

$$q = \frac{dM}{dx} \frac{\bar{S}_y}{I_y}.$$

Finalmente, introduzindo a Eq. (3), chegamos à

$$\boxed{q = \frac{V \bar{S}_y}{I_y}}. \quad (6)$$

Como esperado, q tem unidade de força por unidade de comprimento,

$$[q] = \left[\frac{FL^3}{L^4} \right] = \left[\frac{F}{L} \right].$$

A *tensão tangencial média* na superfície longitudinal é definida por

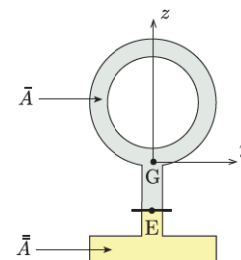
$$\tau_{\ell m} = \frac{q}{b} = \frac{V \bar{S}_y}{b I_y}, \quad (7)$$

em que b é o comprimento da curva diretriz. Evidentemente, quanto mais uniforme for a distribuição de τ_ℓ ao longo de b , mais representativa será a tensão $\tau_{\ell m}$.

Nota 1 (Escolha de \bar{A}) Como o momento estático da seção é zero para um eixo passando pelo centro de gravidade, a soma dos momentos estáticos da área \bar{A} e da área complementar $\bar{\bar{A}}$ se anula. Logo,

$$\bar{S}_y = -\bar{\bar{S}}_y.$$

Em suma, podemos escolher o momento estático de cálculo mais simples, por exemplo $\bar{\bar{S}}$ para obter a tensão no ponto E da seção ao lado.



Nota 2 (Superfície de deslizamento) A imagem de duas partes deslizando longitudinalmente uma em relação a outra é útil no cálculo de $\tau_{\ell m}$ pois são as tensões tangenciais que impedem o deslizamento. Definida a superfície de deslizamento, sua intersecção com a seção determina a área \bar{A} e a dimensão b , Fig. 7. Para que a tensão seja representativa, os planos longitudinais de corte devem apresentar uma distribuição de τ_ℓ praticamente uniforme na largura b .

A fórmula (7) também é válida para seções unicelulares *simétricas* quando a força cortante está sobre o eixo de simetria. Nesse caso, cortes simétricos têm as mesmas tensões tangenciais e delimitam a área \bar{A} que deve ser considerada.

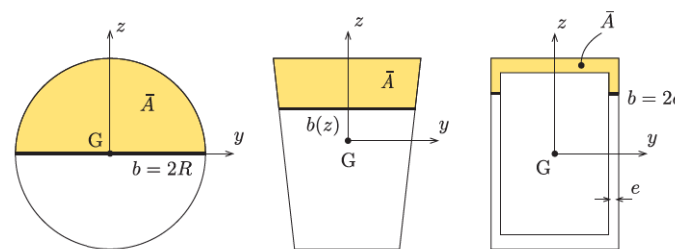


Fig. 7: Determinação de \bar{A} e b .

1.1.3 Tensão Tangencial na Seção Transversal

A tensão tangencial na ST é determinada pelo teorema da reciprocidade: as tensões tangenciais em dois planos perpendiculares têm a mesma intensidade e sentidos que ou convergem para a aresta comum ou dela divergem¹, Fig. 8. Logo, se a tensão $\tau_{\ell m}$ for uniforme na largura b , a

¹No estado triplo de tensão, a igualdade refere-se às componentes de τ perpendiculares à aresta comum dos planos.

tensão tangencial no plano da ST será

$$\tau = \frac{V\bar{S}_y}{bI_y}. \quad (8)$$

Esta expressão é conhecida por *fórmula de Zhuravski*² ou do *cisalhamento na flexão*.

Em alguns casos são necessárias correções para que a tensão permaneça tangente ao contorno da seção. Para a seção da Fig. 8-a, a Eq. (8) fornece apenas a componente perpendicular à aresta. Além disso, resultados da Teoria da Elasticidade mostram que quanto maior for a altura em relação a largura, maior será a uniformidade das tensões ao longo de b , Fig. 8-b.

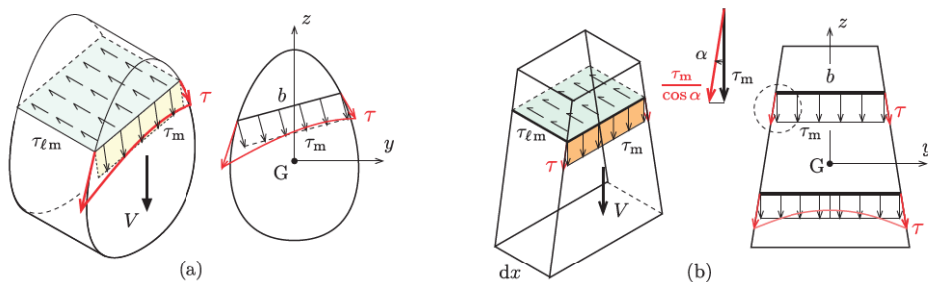


Fig. 8: Tensões nas seções maciças.

No caso de seções delgadas, os planos longitudinais devem apresentar τ constante e, ao mesmo tempo, maximizar seu valor. Isso ocorre em planos perpendiculares ao eixo médio das paredes com a largura b igual à espessura, Fig. 9. Em decorrência, a tensão tangencial dada pela Eq. (8) é tangente ao eixo médio.

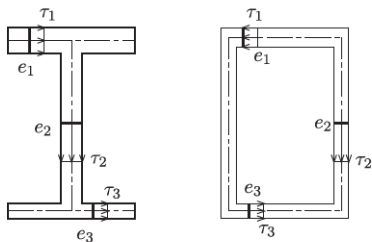


Fig. 9: Tensões nas seções delgadas.

²Fórmula deduzida em 1844 pelo engenheiro russo Dmitri Ivánovich Zhuravski (1821-1891), antigamente transcrito como Jourawski.

Quando generalizadas para a flexão oblíqua de seções delgadas, as Eqs. (6) e (8) adquirem as seguintes formas:

$$q = \pm \frac{V_y \bar{S}_z}{I_z} \pm \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y}, \quad \tau = \frac{1}{b} \left(\pm \frac{V_y \bar{S}_z}{I_z} \pm \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y} \right), \quad (9)$$

em que os sinais dependem dos sentidos das componentes³ de V .

Nota 3 (Hipóteses) Na dedução da Eq. (8) foram feitas as seguintes hipóteses: (a) barra prismática, (b) força $p(x)$ perpendicular ao eixo e (c) flexão normal composta com $N = \text{const.}$ Entretanto, as hipóteses mais importantes estão implícitas na expressão da tensão normal $\sigma(z)$, ou seja

- material elástico linear (linearidade física);
- equações de equilíbrio escritas na configuração indeformada (linearidade geométrica);
- seções que permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado da barra quando solicitadas por momento fletor e força normal.

Nota 4 (Seção Delgada) *Seção delgada* é aquela formada de elementos de pequena espessura em relação às dimensões do conjunto da seção. Ela é dita *fechada* se os elementos isolarem pelo menos uma região de seu plano; caso contrário ela é dita *aberta*. As seções fechadas, por sua vez, são subdivididas em seções com ou sem ramificações, Fig. 10 [van Langendonck (1967)].

1.1.4 Fluxo de Cisalhamento em Seções Delgadas

A reciprocidade das tensões tangenciais também é válida para a resultante q na espessura conforme mostra a Fig. 11. Basta lembrar que a aresta é comum ao plano longitudinal e ao plano da ST. A força q atuante nas paredes de uma seção delgada recebe o nome de *fluxo de cisalhamento* e é calculada pela Eq. (6),

$$q = \frac{V\bar{S}_y}{I_y}.$$

No decorrer do texto, veremos que é vantajoso trabalhar com o fluxo de cisalhamento ao invés da tensão tangencial quando:

³Ver Exemplo E-1 na página 11.

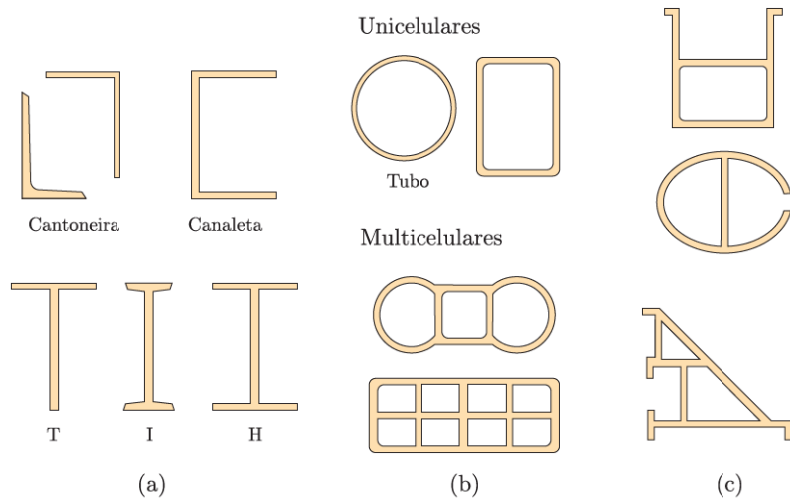


Fig. 10: Tipos de seções delgadas: (a) abertas; (b) fechadas sem ramificação; (c) fechadas com ramificação.

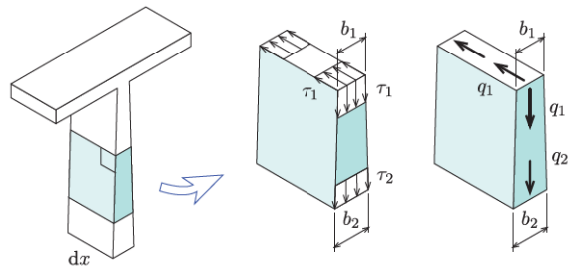


Fig. 11: Reciprocidade do fluxo q na ST e no plano longitudinal.

- as paredes da seção apresentam espessuras diferentes;
- as seções são fechadas e estão submetidas a flexo-torção.

1.2 Sentido das Tensões Tangenciais nas Seções Delgadas

Nas seções delgadas, os sentidos das tensões tangenciais raramente é obtido a partir da Eq. (8) por causa das diferentes convenções de sinais das variáveis. Para seções mais simples, sabemos que o sentido concorda com o da força cortante. Para seções mais complexas, utilizamos a interdependência entre V , dM , dF e τ num trecho de barra, ou seja:

(a) o binário formado por V determina o sentido do acréscimo de momento dM na seção,

Fig. 12;

(b) dM está associado ao acréscimo das tensões $d\sigma$ e define o sentido da resultante dF ;

(c) dF fornece o sentido de τ_ℓ , que estabelece o sentido de τ na seção.

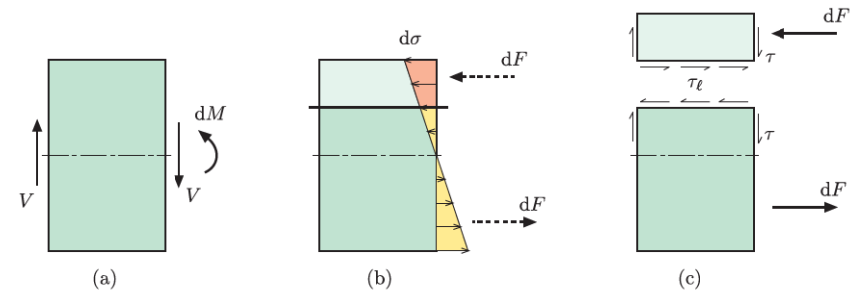


Fig. 12: Sentido das tensões na seção retangular.

O procedimento é válido para qualquer seção delgada aberta. Entretanto, perspectivas detalhadas como as da Fig. 13 são dispensáveis pois os sentidos podem ser determinados em esboços como os da Fig. 14. Como a força cortante sempre aponta para o lado que dM traciona⁴, é relativamente simples obter os sentidos das resultantes dF_i e, por equilíbrio longitudinal, os correspondentes sentidos de τ_i . Nas paredes horizontais da Fig. 14, as tensões se anulam no eixo de simetria quando a força cortante está sobre esse eixo. Repare que a área em que atua dF_2 , delimitada por dois cortes longitudinais simétricos, tende a zero junto ao eixo de simetria.

Nota 5 (Regra do fluxo) Nas seções delgadas, a tensão τ e o fluxo q começam nas extremidades livres e mudam de sentido nos pontos em que o momento estático \bar{S} se anula. Assim, a representação na ST é semelhante a um fluxo hidráulico, que também começa ou termina nas extremidades de um encanamento. Esta semelhança justifica a *regra do fluxo* que pode ser usada, juntamente com o equilíbrio longitudinal, para determinar os sentidos nos diagramas. Entretanto, a regra deve ser usada com cuidado pois é fácil ignorar pontos onde \bar{S} se anula.

⁴O acréscimo dM , mas não o momento M , pode ser representado tanto à direita quanto à esquerda do trecho. Se numa seção dM traciona o lado inferior, na seção oposta ele comprimiria esse lado.

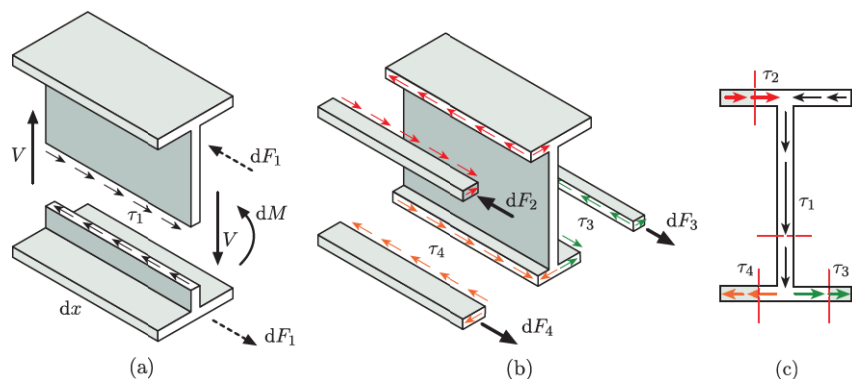


Fig. 13: Cortes longitudinais na (a) alma e nas (b) abas; e (c) sentidos na seção.

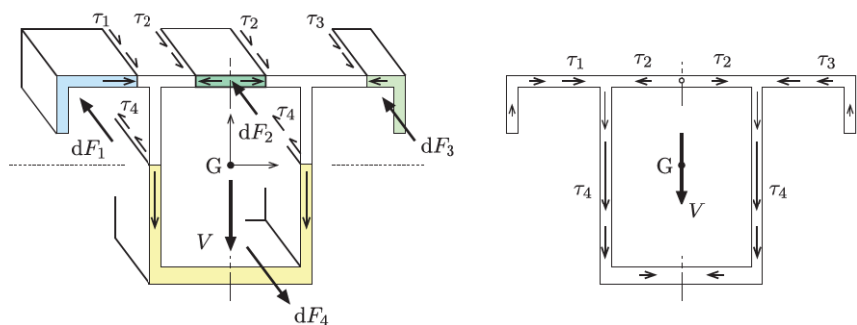


Fig. 14: Representação esquemática dos cortes longitudinais numa seção delgada.

Exemplo 1 (Força cortante oblíqua)

Determine as tensões tangenciais nos pontos A, B e C da seção caixão da figura sabendo-se que $V = 5 \text{ kN}$.

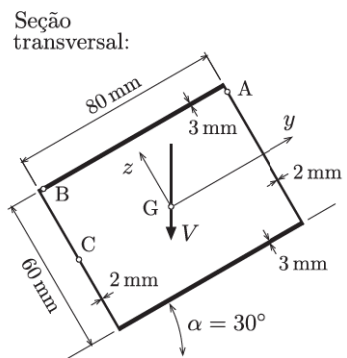


Fig. E 1: Flexão oblíqua.

SOLUÇÃO

$$I_y = 2 \left[\frac{80 \times 3^3}{12} + (80 \times 3) \times 30^2 + \frac{2 \times 60^3}{12} \right] \approx 504000 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 2 \left[\frac{60 \times 2^3}{12} + (60 \times 2) \times 40^2 + \frac{3 \times 80^3}{12} \right] \approx 640000 \text{ mm}^4$$

- Decomposição da força cortante: (a) $|V_y| = \frac{V}{2}$; (b) $|V_z| = \frac{\sqrt{3}}{2}V$

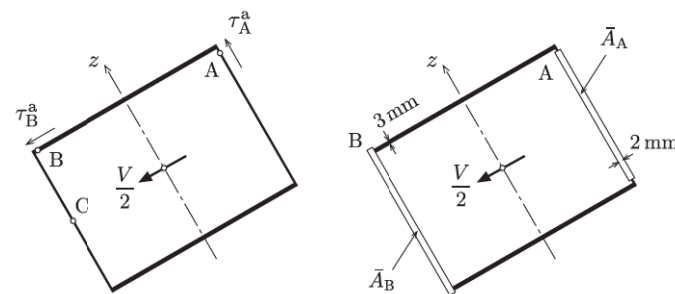


Fig. E 1-1: Força cortante $V_y = 2500 \text{ kN}$.

$$\bar{S}_A^a = (60 \times 2) \times 40 = 4800 \text{ mm}^3 \Rightarrow \tau_A^a = \frac{V_y \bar{S}_z}{b I_z} = \frac{2500 \times 4800}{(2 \times 2) 640000} = 4,69 \text{ MPa};$$

$$|\bar{S}_B^a| \approx \bar{S}_A^a \Rightarrow \tau_B^a = \frac{2500 \times 4800}{(2 \times 3) 640000} = 3,13 \text{ MPa};$$

$$\bar{S}_C^a = 0 \Rightarrow \tau_C^a = 0.$$

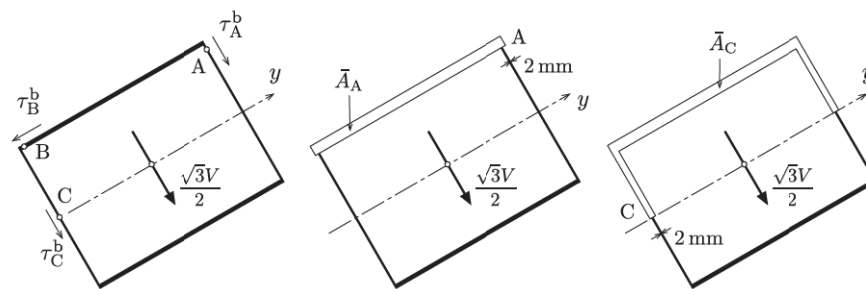


Fig. E 1-2: Força cortante $V_z = 4330 \text{ kN}$.

$$\begin{aligned}\bar{S}_A^b &= (80 \times 3) \times 30 = 7200 \text{ mm}^3 & \Rightarrow \tau_A^b &= \frac{V_z \bar{S}_y}{b I_y} = \frac{4330 \times 7200}{(2 \times 2) 504000} = 15,46 \text{ MPa}; \\ \bar{S}_B^b &\approx \bar{S}_A^b & \Rightarrow \tau_B^b &= \frac{4330 \times 7200}{(2 \times 3) 504000} = 10,31 \text{ MPa}; \\ \bar{S}_C^b &= \bar{S}_A^b + 2(30 \times 2 \times 15) = 9000 \text{ mm}^3 & \Rightarrow \tau_C^b &= \frac{4330 \times 9000}{(2 \times 2) 504000} = 19,33 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

- Tensões nos pontos A, B e C

$$\begin{aligned}\tau_A &= -\tau_A^a + \tau_A^b = 10,77 \text{ MPa} \quad (\searrow); \\ \tau_B &= \tau_B^a + \tau_B^b = 13,44 \text{ MPa} \quad (\swarrow); \\ \tau_C &= 0 + \tau_C^b = 19,33 \text{ MPa} \quad (\searrow).\end{aligned}$$

1.3 Ligações Longitudinais na Flexão

Ao estudarmos o comportamento à flexão de uma viga formada por pranchas de madeira sobrepostas, constatamos que ela é menos resistente e bem menos rígida que uma viga com seção retangular inteira, Fig. 15. A falta de alinhamento das extremidades da viga composta após a deformação mostra que a seção não permanece plana e evidencia a ocorrência de deslizamentos entre as pranchas. Os deslizamentos decorrem da impossibilidade de se mobilizar tensões tangenciais nos planos entre as pranchas e evidenciam que estas trabalham separadamente. Portanto, se quisermos melhorar o desempenho da viga, temos que impedir o deslizamento entre as pranchas.

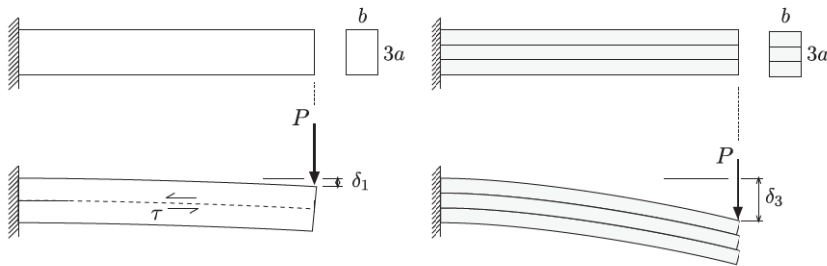


Fig. 15: Exemplo das pranchas de madeira.

Podemos estimar as diferenças de comportamento usando as fórmulas da flexão. Se a ruptura ocorrer em regime elástico linear, o momento resistente será proporcional ao módulo

de resistência à flexão, W , e à tensão admissível do material, $\bar{\sigma}$,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W} \leq \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{res}} = W \bar{\sigma}.$$

Os módulos de resistência à flexão das seções da Fig. 15 dependem do quadrado da altura,

$$W_1 = \frac{b(3a)^2}{6} = \frac{3}{2}ba^2, \quad W_3 = 3 \left(\frac{ba^2}{6} \right) = \frac{1}{2}ba^2.$$

Por outro lado, o deslocamento máximo, $\delta = \frac{P\ell^3}{3EI}$, é inversamente proporcional aos momentos de inércia,

$$I_1 = \frac{b(3a)^3}{12} = \frac{9}{4}ba^3, \quad I_3 = 3 \frac{ba^3}{12} = \frac{1}{4}ba^3.$$

Das expressões acima, podemos concluir que a viga inteira é três vezes mais resistente e apresenta um deslocamento nove vezes menor que a composta.

Freqüentemente, uma seção inteira é inviável por causa de restrições de tamanho impostas pela fabricação, transporte ou montagem da estrutura. Quando isso ocorre, temos que adotar uma seção composta e solidarizar longitudinalmente seus elementos. Isto significa que cada elemento deve estar adequadamente ligado ao restante da seção para que ela funcione como um todo. As ligações resultantes são chamadas de *ligações longitudinais* e elas podem ser tanto contínuas, com emprego de cola ou filetes de solda, quanto discretas, com emprego de pinos, cavilhas, pregos, parafusos, pontos de solda etc.

Na dedução da fórmula de Jourawski, determinamos a força longitudinal q de interação entre duas partes de um trecho de viga, Eq. (6). Na ligação discreta da Fig. 16-b, o produto da área de corte A_{res} pela tensão admissível τ_{adm} deve ser maior ou igual à força longitudinal qs que atuaria no trecho de comprimento s sob influência do elemento de ligação,

$$\boxed{qs \leq \tau_{\text{adm}} A_{\text{res}}}, \quad \text{com } q = \frac{V \bar{S}}{I}. \quad (10)$$

Para simplificar a notação nos exemplos a seguir, usaremos um traço sobreposto ao símbolo da tensão para denotar tensão admissível.

Exemplo 2 Determine o número de parafusos e os espaçamentos entre eles para as seções compostas indicadas na figura.

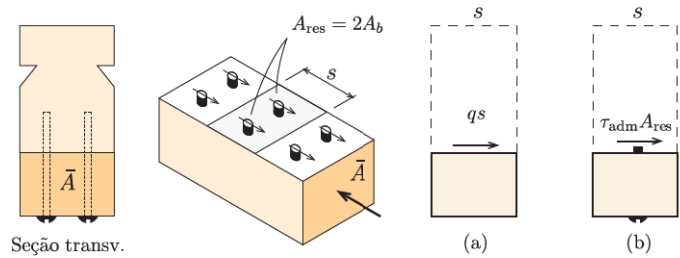


Fig. 16: Força longitudinal: (a) ligação contínua; (b) ligação discreta.

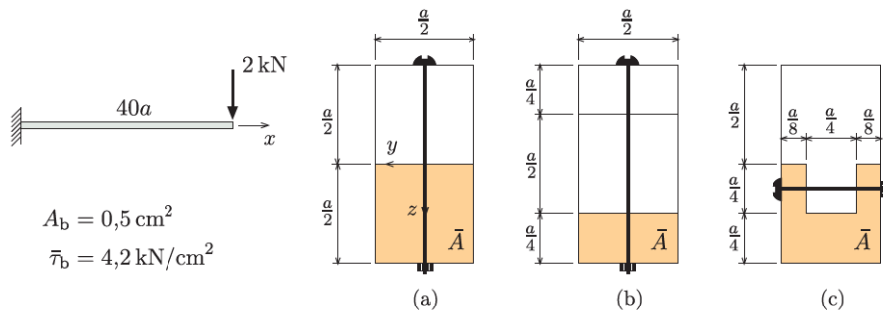


Fig. E2: Ligações longitudinais: seções transversais a, b e c.

SOLUÇÃO

As seções dos parafusos devem resistir por cisalhamento à força distribuída q . Como o comprimento de influência da ligação é igual ao espaçamento longitudinal s entre parafusos, temos

$$qs = \bar{\tau}_b A_{res} \tag{E2-1}$$

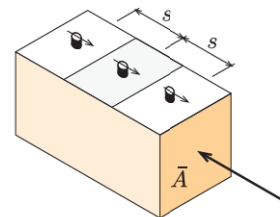


Fig. E2-1: Espaçamento s .

(a) Substituindo $A_{res} = A_b = 0,5 \text{ cm}^2$ e

$$q = \frac{V \bar{S}_y}{I_y} = 2 \left(\frac{a^2}{4} \times \frac{a}{4} \right) = \frac{3}{a},$$

chegamos a

$$\frac{3}{a} s = 4,2 \times 0,5 = 2,1 \Rightarrow s = 0,7a.$$

Apenas um parafuso é seccionado no comprimento s , logo

$$n = 1 \times \frac{40a}{0,7a} = 57,14 \Rightarrow \boxed{n = 58; \quad s = 0,69a.}$$

(b) Para a nova área \bar{A}

$$\bar{S}_y = \left(\frac{a}{4} \times \frac{a}{2} \right) \frac{3a}{8} = \frac{3}{64} a^3; \quad q = \frac{9}{4a}.$$

Substituindo na Eq. (E2-1), obtemos

$$\frac{9}{4a} s = 2,1 \Rightarrow s = 0,933a.$$

Assim,

$$n = \frac{40a}{0,933a} = 42,9 \Rightarrow \boxed{n = 43; \quad s = 0,93a.}$$

(c) A ligação apresenta duas seções de corte, logo $A_{res} = 2A_b$,

$$\bar{S}_y = \left(\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \right) \frac{a}{4} - \left(\frac{a}{4} \times \frac{a}{4} \right) \frac{a}{8} = \frac{7}{128} a^3; \quad q = \frac{2,625}{a}.$$

Substituindo na Eq. (E2-1), temos

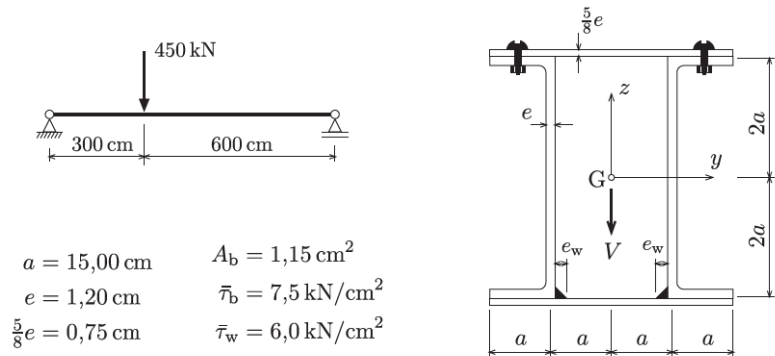
$$\frac{2,625}{a} s = 4,2(2 \times 0,5) = 4,2 \Rightarrow s = 1,6a.$$

Assim,

$$n = \frac{40a}{1,6a} = 25 \Rightarrow \boxed{n = 25; \quad s = 1,6a.}$$

Exemplo 3 Para a viga da figura, determine:

- a) o espaçamento longitudinal s entre os parafusos;
- b) o número total de parafusos adotando um espaçamento único;
- c) a dimensão e_w dos filetes de solda no trecho mais solicitado [Diogo].



$$\begin{aligned} a &= 15,00 \text{ cm} & A_b &= 1,15 \text{ cm}^2 \\ e &= 1,20 \text{ cm} & \bar{\tau}_b &= 7,5 \text{ kN/cm}^2 \\ \frac{5}{8}e &= 0,75 \text{ cm} & \bar{\tau}_w &= 6,0 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Fig. E3: Ligações longitudinais.

SOLUÇÃO

Momento de inércia considerando $e \ll a$:

$$I_y = 2 \left[\overbrace{\frac{4a(\frac{5}{8}e)^3}{12}}^{\approx 0} + 4a \times \frac{5}{8}e(2a)^2 \right] + 4 \left[\overbrace{\frac{ae^3}{12}}^{\approx 0} + ae(2a)^2 \right] + 2 \left[\frac{e(4a)^3}{12} \right]$$

$$\approx 20ea^3 + 16ea^3 + \frac{32}{3}ea^3 = \frac{140}{3}ea^3 = 189\,000 \text{ cm}^4$$

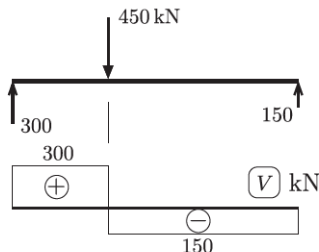


Fig. E3-1: Diagrama de força cortante.

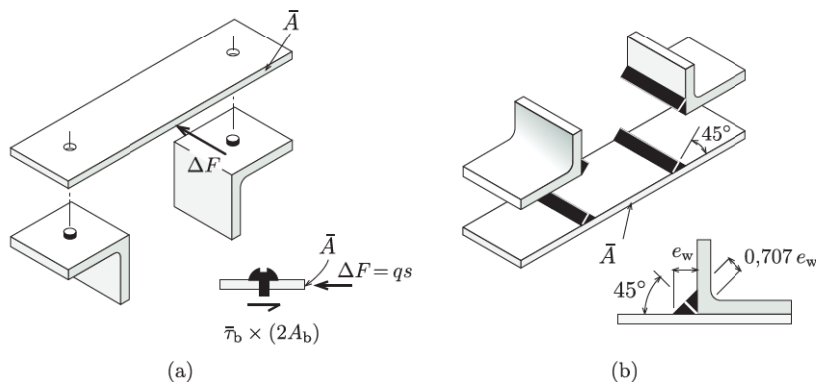


Fig. E3-2: Ligações: (a) parafusada; (b) soldada.

(a) Examinando a Fig. E3-2-a, temos

$$qs = \bar{\tau}_b(2A_b).$$

em que s é o espaçamento procurado.

$$\bar{S}_y = (4a \times \frac{5}{8}e)2a = 5ea^2 = 1350 \text{ cm}^3; \quad q = \frac{V\bar{S}_y}{I_y} = \frac{300 \times 1350}{189\,000} = 2,143 \text{ kN/cm},$$

Logo,

$$2,143s = 7,5(2 \times 1,15) \Rightarrow s = 8,05 \text{ cm}.$$

Como existem dois parafusos a cada comprimento s , o número de parafusos será

$$n = 2 \times \frac{\ell}{s} = 223,6 \Rightarrow n = 224; \quad s \approx 8,05 \text{ cm}.$$

Ou escolhendo um espaçamento mais aceitável, $n = 226; \quad s \approx 8,0 \text{ cm}.$

(b) A ruptura na solda ocorre segundo a superfície de menor área, isto é, inclinada a 45° nos filetes conforme mostrado na Fig. E3-2-b,

$$qs = \bar{\tau}_w A_w \Rightarrow 2,143s = 6 \times (2 \times 0,707e_w s) \Rightarrow e_w = 0,253 \text{ cm}.$$

Arredondando em mm, obtemos $e_w = 3 \text{ mm}.$

1.4 Distribuição das Tensões Tangenciais em Seções Delgadas

No próximo exemplo, estabelecemos algumas regras que facilitam o traçado dos diagramas das tensões tangenciais a partir de valores calculados nos extremos dos trechos da seção. Logo após, exercitamos essas regras examinando a forma dos diagramas para várias seções.

Exemplo 4 Determine a distribuição das tensões tangenciais para a seção transversal ao lado solicitada por uma força cortante vertical para baixo.

SOLUÇÃO

Propriedades da seção ($e \ll a$):

$$A = (6a + 1,6a)e + 4ea = 11,6ea$$

$$S_s = 2(1,8ea \times 1,6a + ea \times 1,1a + ea \times 0,3a)$$

$$= 8,56ea^2 \Rightarrow t_G = \frac{8,56ea^2}{11,6ea} = 0,73793a$$

$$I_y = 2 \left[\frac{e(1,8a)^3}{12} + 1,8ea(1,9a)^2 + ea(1,8a)^2 \right]$$

$$+ \frac{e}{0,8} \frac{(0,8a)^3}{12} + ea(1,4a)^2 + \frac{2ea^3}{3} = 25,808ea^3$$

$$I_s = 2 \left[1,8ea(1,6a)^2 + \frac{ea^3}{12} + ea(1,1a)^2 \right]$$

$$+ \frac{e}{0,6} \frac{(0,6a)^3}{12} + ea(0,3a)^2 = 12,043ea^3$$

$$I_z = I_s - 11,6ea(0,73793a)^2 = 5,726ea^3.$$

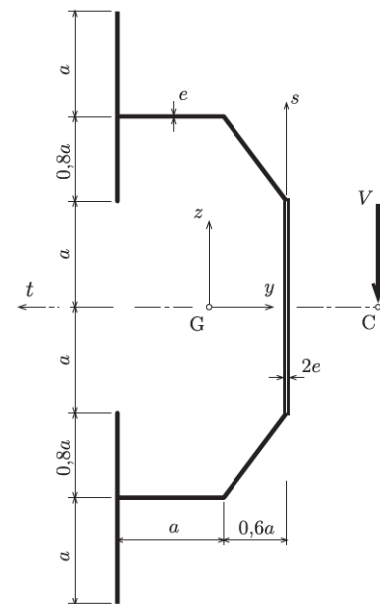


Fig. E4: Seção delgada.

O diagrama do fluxo q_i ao longo das paredes da ST é proporcional ao do momento estático \bar{S} pois as demais variáveis na expressão $\frac{V\bar{S}}{I}$ são constantes. Identificando os

trechos da Fig. E4-1 pelas coordenadas s, t, u, v e w , temos

$$\bar{S}(s) = es \left(2,8a - \frac{s}{2} \right) = e \left(2,8as - \frac{s^2}{2} \right) \begin{cases} 0 & (s = 0) & \text{parábola convexa quando } s \text{ se aproxima de G} \\ 2,30ea^2 & (s = a) \end{cases}$$

$$\bar{S}(t) = et \left(a + \frac{t}{2} \right) = e \left(at + \frac{t^2}{2} \right) \begin{cases} 0 & (t = 0) & \text{parábola côncava quando } t \text{ se afasta de G} \\ 1,12ea^2 & (t = 0,8a) \end{cases}$$

$$\bar{S}(u) = 3,42ea^2 + eu \times 1,8a \begin{cases} 3,42ea^2 & (u = 0) & \text{linear em trechos perpendiculares à } V \\ 5,22ea^2 & (u = a) \end{cases}$$

$$\bar{S}(v) = 5,22ea^2 + ev(1,8a - 0,4v) \begin{cases} 5,22ea^2 & (v = 0) & \text{parábola convexa quando } v \text{ se aproxima de G} \\ 6,62ea^2 & (v = a) \end{cases}$$

$$\bar{S}(w) = 6,62ea^2 + 2ew \left(a - \frac{w}{2} \right) \begin{cases} 6,62ea^2 & (w = 0) & \text{parábola convexa quando } w \text{ se aproxima de G} \\ 7,62ea^2 & (w = a) \end{cases}$$

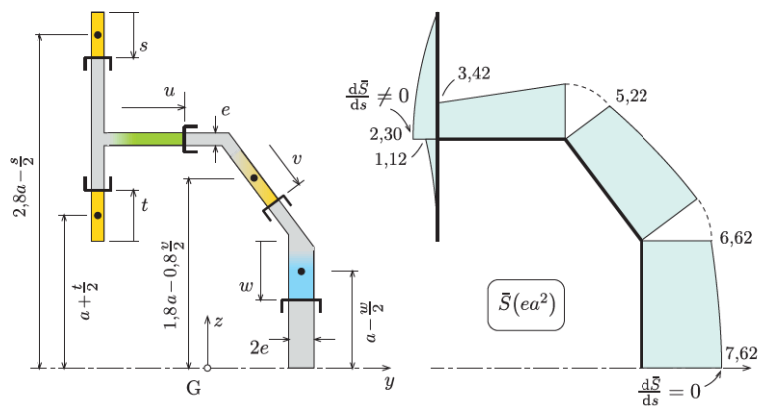


Fig. E4-1: Variação de \bar{S} .

É fácil delinear o diagrama de \bar{S} para seções abertas. Basta começar por uma extremidade livre e percorrer cada trecho no sentido de \bar{S} crescente em valor absoluto. Para seções formadas por paredes retas com espessura constante, o diagrama é linear nos trechos perpendiculares à força cortante e parabólico nos demais trechos. O diagrama parabólico é convexo quando nos aproximamos do eixo y de flexão passando por G e côncavo quando nos afastamos dele. Uma vez conhecida a forma do diagrama, seu

traçado fica perfeitamente determinado pelos valores nas extremidades de cada trecho.

(a) Diagrama de τ na ST, $\tau_i = \frac{V\bar{S}_i}{b_i I} = \frac{0,3875V}{bea^3} \bar{S}_i$

Considerando os cortes indicados na Fig. E4-2, temos

$$\bar{S}_1 = ea \times 2,3a = 2,30ea^2 \Rightarrow \tau_1 = 0,0891 \frac{V}{ea}$$

$$\bar{S}_2 = 0,8ea \times 1,4a = 1,12ea^2 \Rightarrow \tau_2 = 0,0434 \frac{V}{ea}$$

$$\bar{S}_3 = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 3,42ea^2 \Rightarrow \tau_3 = 0,1325 \frac{V}{ea}$$

$$\bar{S}_4 = \bar{S}_3 + ea \times 1,8a = 5,22ea^2 \Rightarrow \tau_4 = 0,2023 \frac{V}{ea}$$

$$\bar{S}_5 = \bar{S}_4 + ea \times 1,4a = 6,62ea^2 \Rightarrow \tau_5 = 0,2565 \frac{V}{ea}$$

$$\bar{S}_6 = \bar{S}_5 \text{ (com } b = 2e) \Rightarrow \tau_6 = 0,1283 \frac{V}{ea}$$

$$\bar{S}_7 = \bar{S}_5 + 2ea \times 0,5a = 7,62ea^2 \Rightarrow \tau_7 = 0,1476 \frac{V}{ea}$$

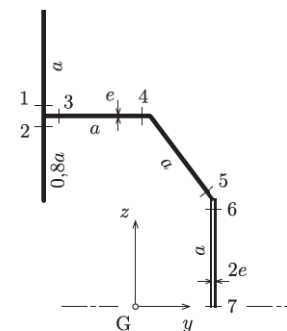


Fig. E4-2: Cortes longitudinais.

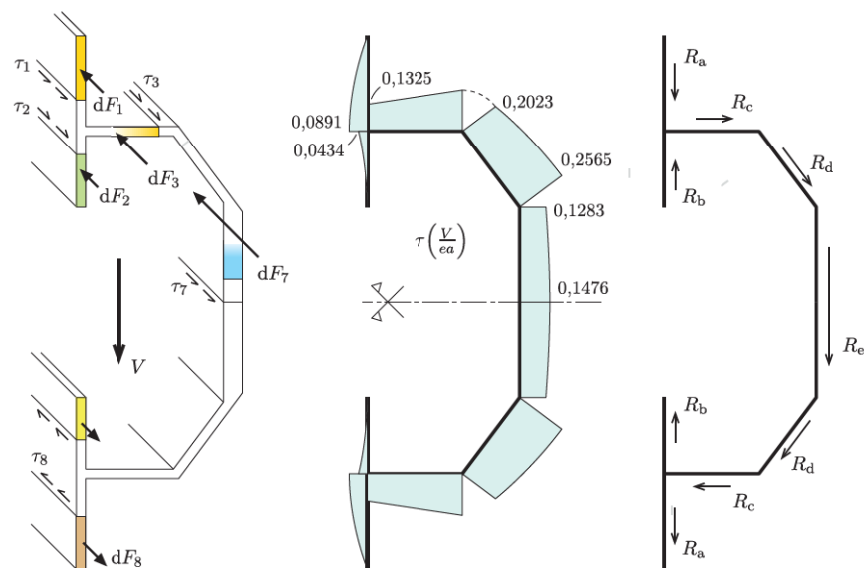


Fig. E4-3: Determinação dos sentidos; diagrama de τ e resultantes R_i .

(b) Verificação da resultante vertical (Figs. E4-1 e E4-2) A notação simplifica-se quando

introduzimos a constante $\beta := \frac{V}{I_y}$ tal que $q = \beta \bar{S}$,

$$R_a = \int_0^a q(s) ds = \int_0^a \beta e \left(2,8as - \frac{s^2}{2} \right) ds = \beta e \left[1,4as^2 - \frac{s^3}{6} \right]_0^a = 1,2333\beta ea^3$$

$$R_b = \int_0^{0,8a} q(t) dt = \int_0^{0,8a} \beta e \left(at + \frac{t^2}{2} \right) dt = \beta e \left[\frac{at^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right]_0^{0,8a} = 0,4053\beta ea^3$$

$$R_c = \int_0^{0,8a} q(u) du = \left(\frac{3,42 + 5,22}{2} \right) \beta ea^2 \times a = 4,32\beta ea^3$$

$$R_d = \int_0^a q(v) dv = \int_0^a \beta e (5,22a^2 + 1,8av - 0,4v^2) dv = \beta e \left[5,22a^2v + 1,8\frac{av^2}{2} - 0,4\frac{v^3}{3} \right]_0^a = 5,9867\beta ea^3$$

$$R_e = \left[6,62 + \frac{2}{3}(7,62 - 6,62) \right] \beta ea^2 \times 2a = 14,5733\beta ea^3,$$

em que as fórmulas da Fig. 17 foram usadas no cálculo de R_e . Finalmente

$$R_{vert.} = 2(R_a - R_b + 0,8R_d) + R_e = 25,808\beta ea^3 = V.$$

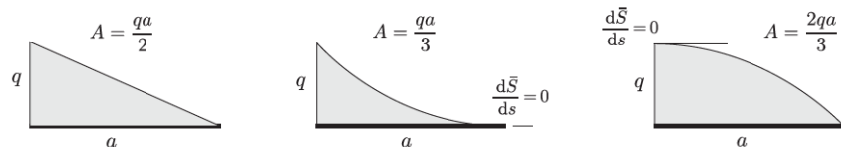


Fig. 17: Cálculo de áreas.

As regras de variação de \bar{S} estabelecidas no exemplo acima são válidas para qualquer seção aberta formada por trechos de espessura constante. Assim podemos obter a forma do diagrama e o sentido das tensões para as seções usuais mostradas nas Figs. 18 e 19, ou mesmo para as seções mostradas nas Figs. 20 e 21. As seções na Fig. 21 apresentam $\bar{S} = 0$ em pontos intermediários e são problemáticas para a regra de fluxo.

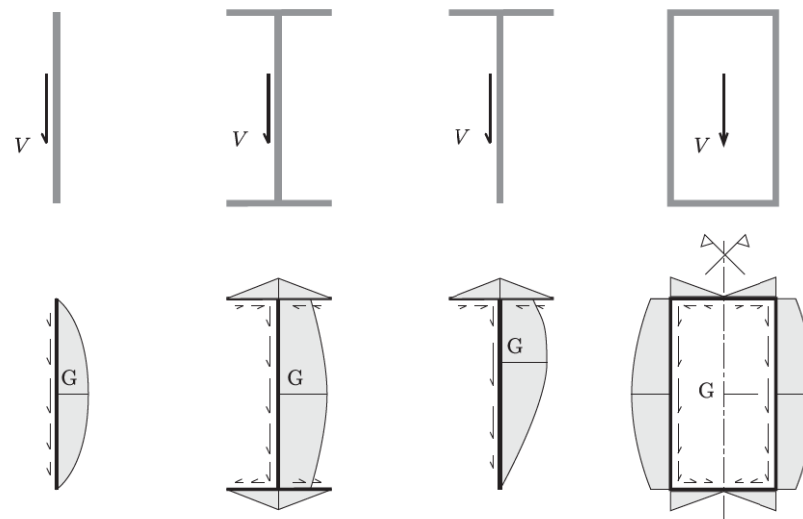


Fig. 18: Seções delgadas usuais.

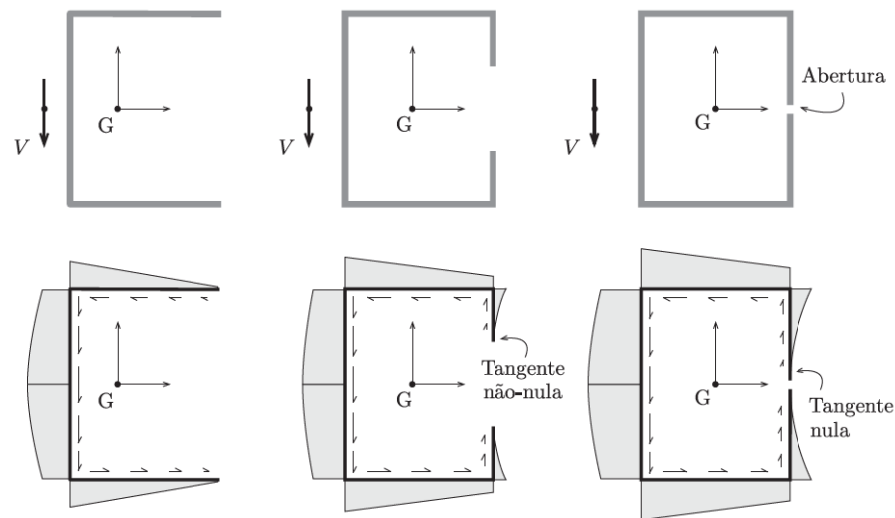


Fig. 19: Seções em “C.”

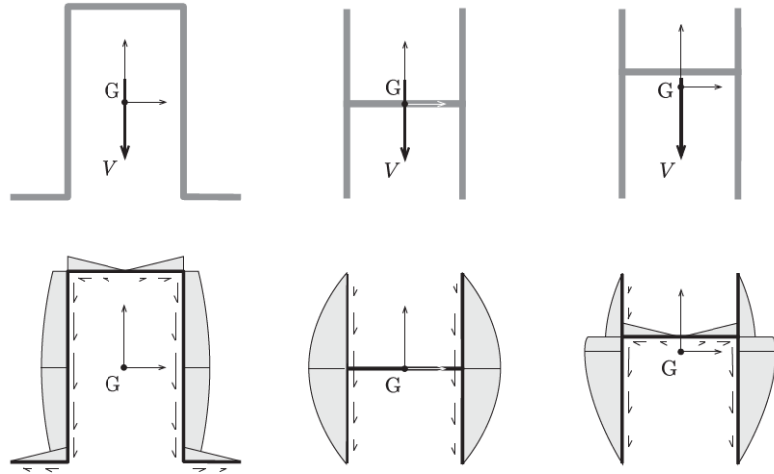


Fig. 20: Outras seções.

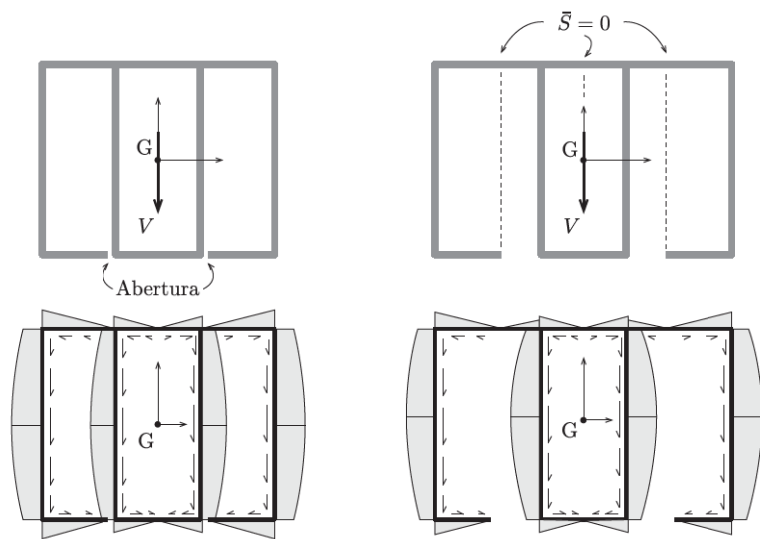


Fig. 21: Seções em que \bar{S} se anula.

Exemplo 5 Determine a distribuição das tensões tangenciais para a seção transversal ao lado. É dado o momento de inércia $I_y = \frac{116}{3}ea^3$ [Diogo].

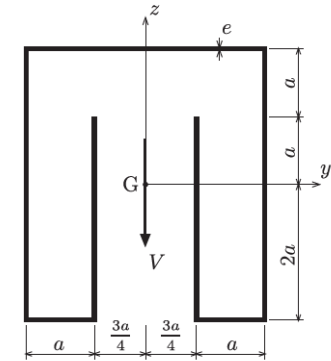


Fig. E5: Seção delgada.

- Cálculo do fluxo ($q = \beta \bar{S}_y$, $\beta = V/I_y$).

Uma vez determinada a forma do diagrama em cada trecho (linear ou parabólica), obtemos os valores absolutos de q nos cortes da figura ao lado.

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= 0 & \Rightarrow q_1 &= 0 \\ \bar{S}_2 &= ea \times \frac{a}{2} = \frac{1}{2}ea^2 & \Rightarrow q_2 &= \frac{1}{2}\beta ea^2 \\ \bar{S}_3 &= -3ea \times \frac{a}{2} = -\frac{3}{2}ea^2 & \Rightarrow q_3 &= \frac{3}{2}\beta ea^2 \\ \bar{S}_4 &= \bar{S}_3 - ea \times 2a = -\frac{7}{2}ea^2 & \Rightarrow q_4 &= \frac{7}{2}\beta ea^2 \\ \bar{S}_5 &= \bar{S}_4 - 2ea \times a = -\frac{11}{2}ea^2 & \Rightarrow q_5 &= \frac{11}{2}\beta ea^2 \\ \bar{S}_6 &= \bar{S}_5 + 2ea \times a = -\frac{7}{2}ea^2 & \Rightarrow q_6 &= \frac{7}{2}\beta ea^2 \\ \bar{S}_7 &= \bar{S}_6 + \frac{7}{4}ea \times 2a = 0 & \Rightarrow q_7 &= 0 \text{ (simetria)} \end{aligned}$$

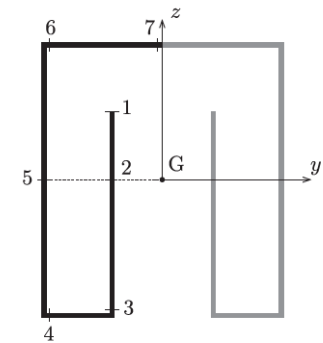


Fig. E5-1: Cortes longitudinais.

- Diagrama das tensões tangenciais (sentidos indicados no diagrama), $\tau = \frac{q}{e}$, $\beta = \frac{3}{116} \frac{V}{ea^3}$.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0, & \tau_3 &= 38,8 \times 10^{-3} \frac{V}{ea}, & \tau_5 &= 142,2 \times 10^{-3} \frac{V}{ea}, \\ \tau_2 &= 12,9 \times 10^{-3} \frac{V}{ea}, & \tau_4 &= 90,5 \times 10^{-3} \frac{V}{ea}, & \tau_6 &= 90,5 \times 10^{-3} \frac{V}{ea}. \end{aligned}$$

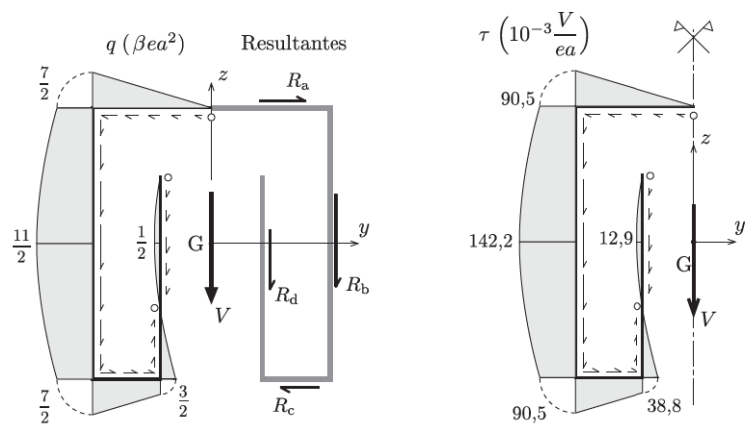


Fig. E 5-2: Diagramas de fluxo e de tensão tangencial.

- Cálculo das resultantes nas paredes (Fig. E 5-2)

Trabalhando com o fluxo q nas paredes e empregando as fórmulas da Fig. 17, temos

$$R_a = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} \times \frac{7}{4} a \right) \beta e a^2 = \frac{49}{16} \beta e a^3$$

$$R_b = \left[\frac{7}{2} \times 4a + \frac{2}{3} \left(\frac{11}{2} - \frac{7}{2} \right) 4a \right] \beta e a^2 = \frac{58}{3} \beta e a^3 = \frac{1}{2} V$$

$$R_c = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \right) a \times \beta e a^2 = \frac{5}{2} \beta e a^3$$

$$R_d = \int_0^{3a} \beta e s \left(a - \frac{s}{2} \right) ds = \beta e \left[\frac{as^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right]_0^{3a} = 0$$

2 Centro de Cisalhamento de Seções Delgadas Abertas

O estudo das deformações de uma barra em balanço com seção em ‘T’ sujeita a seu peso próprio traz algumas surpresas. Com a seção em pé, a extremidade da barra apenas translada, mas com a seção deitada, a extremidade também gira como mostrado na Fig. 22-b. O que provoca o giro da seção? E por que ele ocorre no sentido horário na figura? Essas são perguntas importantes no caso de seções delgadas abertas, para as quais a rigidez à torção é muito pequena.

Para entender os comportamento da barra, precisamos examinar as resultantes de força e momento das tensões tangenciais. A distribuição uniforme da massa da barra faz com que a força peso passe pelo centro de gravidade da seção. Por outro lado, o ponto de aplicação da resultante V das tensões tangenciais depende da distribuição das tensões. Da Fig. 23,

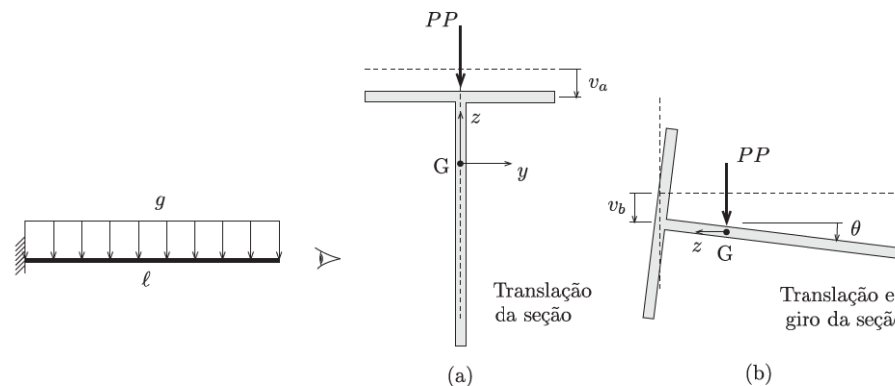


Fig. 22: Barra com seção em ‘T’ submetida ao peso-próprio.

concluimos que os sistemas só serão mecanicamente equivalentes se a força peso tiver a mesma linha de ação da força cortante. Isto não ocorre para a seção deitada e, conseqüentemente, aparece um momento de torção que tende a girar a seção no sentido horário como mostrado na Fig. 24.

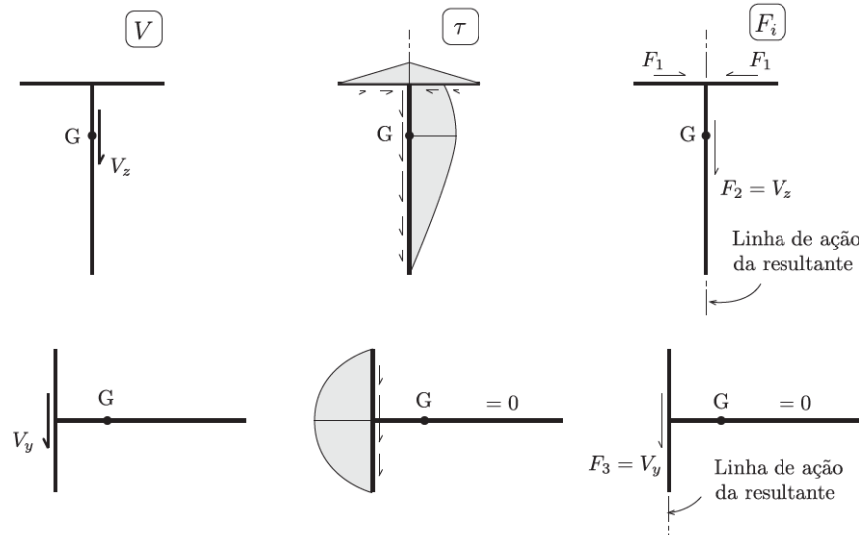


Fig. 23: Sistemas Mecanicamente Equivalentes.

O efeito descrito é importante nas seções delgadas abertas pois elas possuem baixa rigidez à torção quando comparadas com as seções delgadas fechadas ou as seções maciças. Desse

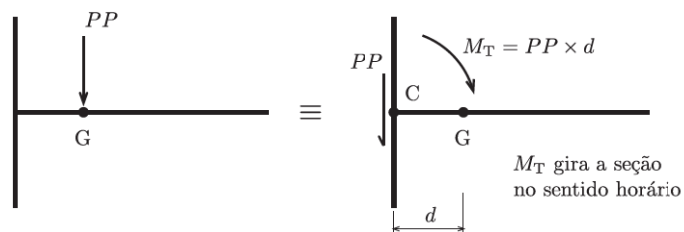


Fig. 24: Esforços solicitantes na seção deitada.

modo, as rotações podem facilmente ultrapassar os valores limites estabelecidos em normas.

Definição 1 (Centro de Cisalhamento C)

“O *centro de cisalhamento C* é ponto da seção transversal que goza da seguinte propriedade: quando a resultante das tensões tangenciais que agem na seção por ele passa, em qualquer direção, não se verifica rotação da seção em relação às seções vizinhas” [van Langendonck (1967)].

Assim, o centro de cisalhamento corresponde ao ponto de intersecção das linhas de ação da força cortante V para as quais não ocorre a tendência de giro da seção e, portanto, o momento de torção é nulo.

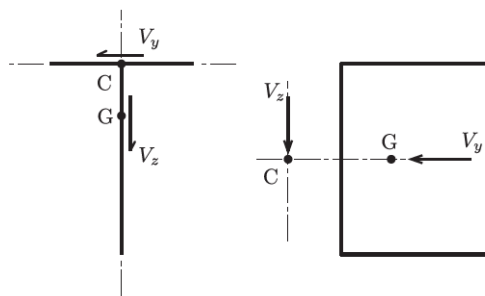


Fig. 25: Centro de cisalhamento.

Nota 6 Demonstra-se que o *centro de torção*, centro de rotação no plano da seção quando a barra é submetida apenas à torção uniforme, coincide com o centro de cisalhamento.

No caso de seções duplamente simétricas, a determinação de C é trivial pois ele coincide com o centro de gravidade G , Fig. 26-a,b. Nas seções formadas por paredes retas em que as linhas médias concorrem num único ponto, C coincide com esse ponto, Fig. 26-c,d. Outro caso particular é o das seções formadas por paredes retas com um eixo de simetria e será examinado a seguir, Fig. 26-e.

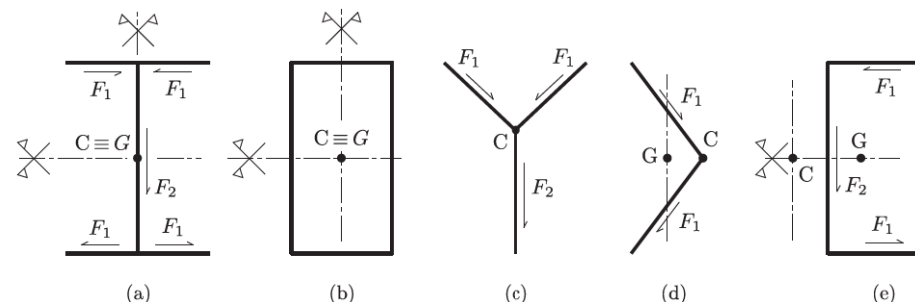


Fig. 26: Casos particulares: dupla simetria (a, b), chapas concorrentes (c, d), simetria única

Exemplo 6 Determine a distribuição das tensões tangenciais para seção transversal ao lado considerando uma força cortante V para baixo. Determine também a posição do centro de cisalhamento em relação à alma da seção.

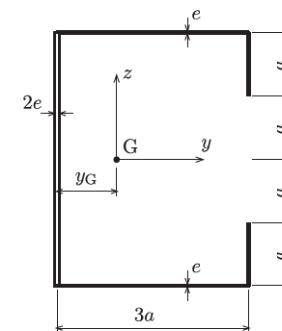


Fig. E6: Seção delgada.

SOLUÇÃO

(a) Propriedades geométricas da ST ($e \ll a$)

$$A = 8ea + 8ea = 16ea,$$

$$t_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{6ea \times 1,5a + 2ea \times 3a}{16ea} = 0,9375a,$$

$$I_y = \frac{2e(4a)^3}{12} + 2 \left[\frac{3}{12}ae^3 + 3ae(2a)^2 \right] + 2 \left[\frac{ea^3}{12} + ea \left(\frac{3a}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{32 + 72 + 14}{3} ea^3 = \frac{118}{3} ea^3.$$

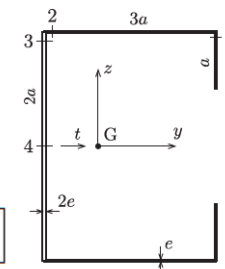


Fig. E6-1: Cortes longitudinais.

(b) Diagrama das tensões tangenciais

Esboçada a forma do diagrama, podemos calcular os valores de \bar{S}_i , q_i e τ_i nas extremidades dos trechos, Fig. E6-1. A determinação de τ_i é imediata a partir de q_i ,

$$q_i = \frac{V}{I_y} \bar{S}_i = \beta \bar{S}_i \quad \tau_i = \frac{q_i}{b_i} = \frac{V}{b_i \times \frac{118}{3} ea^3} \bar{S}_i.$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= ea \times \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}ea^2 & \Rightarrow \tau_1 &= \frac{3V}{e \times 118ea^3} \frac{3}{2}ea^2 = 0,0381 \frac{V}{ea}, \\ \bar{S}_2 &= \bar{S}_1 + 3ea \times 2a = \frac{15}{2}ea^2 & \Rightarrow \tau_2 &= \frac{3V}{e \times 118ea^3} \frac{15}{2}ea^2 = 0,1907 \frac{V}{ea}, \\ \bar{S}_3 &= \bar{S}_2 = \frac{15}{2}ea^2 & \Rightarrow \tau_3 &= \frac{3V}{2e \times 118ea^3} \frac{15}{2}ea^2 = 0,0953 \frac{V}{ea}, \\ \bar{S}_4 &= \bar{S}_3 + 4ea \times a = \frac{23}{2}ea^2 & \Rightarrow \tau_4 &= \frac{3V}{2e \times 118ea^3} \frac{23}{2}ea^2 = 0,1462 \frac{V}{ea}. \end{aligned}$$

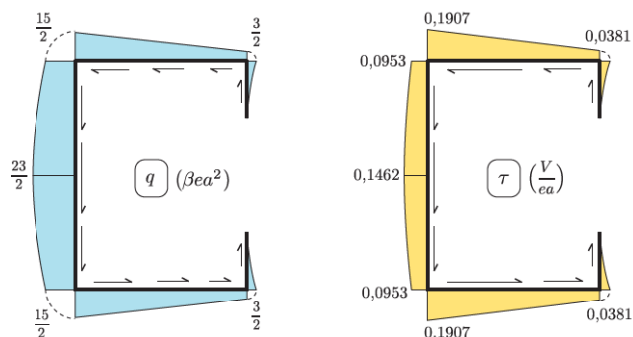


Fig. E6-2: Diagramas de fluxo e tensão tangencial.

(c) Cálculo das resultantes nas paredes

Trabalhando com o fluxo q representado na Fig. E6-2, obtemos as resultantes indicadas na Fig. E6-3,

$$\begin{aligned} R_a &= \int_0^a q(s) ds = \int_0^a \beta e \left(as + \frac{s^2}{2} \right) ds = \beta e \left[\frac{as^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right]_0^a = \frac{2}{3} \beta ea^3 = 0,0170V, \\ R_b &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \right) \beta ea^2 \times 3a = \frac{27}{2} \beta ea^3 = 0,3432V, \\ R_c &= 2 \left[\left(\frac{2}{3} \left(\frac{23}{2} - \frac{15}{2} \right) + \frac{15}{2} \right) \beta ea^2 \times 2a \right] = \frac{122}{3} \beta ea^3 = 1,0340V. \end{aligned}$$

E podemos verificar a resultante na direção vertical,

$$R_{\text{vert.}} = R_c - 2R_a = 1,0340V - 2 \times 0,0170V = V.$$

(d) Cálculo do centro de cisalhamento

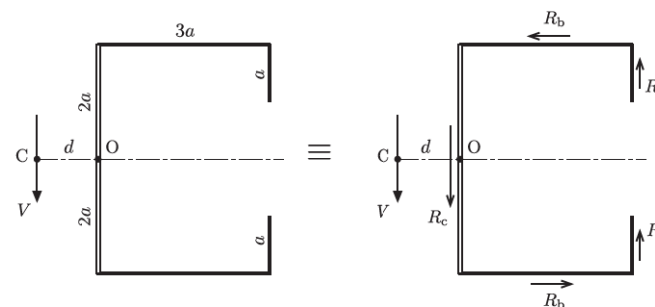


Fig. E6-3: Resultantes e centro de cisalhamento.

O conhecimento do momento de inércia I_y facilita a determinação de C e permite a verificação da resultante, mas não é imprescindível como mostrado abaixo.

- I_y conhecido — As forças R_i nas paredes devem constituir um sistema mecanicamente equivalente ao da força cortante V . Para tal, os correspondentes momentos em relação ao ponto O devem ser iguais,

$$Vd = 2R_a \times 3a + 2R_b \times 2a = 6a \times 0,0170V + 4a \times 0,343V \Rightarrow d = 1,475a.$$

- I_y desconhecido — O somatório de momentos do sistema das forças R_i deve ser nulo em relação a C

$$3R_a \times (3a + d) + 2R_b \times 2a - R_c \times d = 0,$$

$$2 \times \frac{2}{3} \beta ea^3 \times (3a + d) + \frac{27}{2} \beta ea^3 \times 4a - \frac{122}{3} \beta ea^3 \times d = 0 \Rightarrow d = \frac{87}{59} a = 1,475a.$$

Exemplo 7 Determine a posição do centro de cisalhamento para a ST do Exemplo 4 na página 18.

SOLUÇÃO

As seguintes forças nas paredes foram calculadas anteriormente,

$$R_a = 1,2333\beta ea^3$$

$$R_b = 0,4053\beta ea^3$$

$$R_c = 4,3200\beta ea^3$$

$$R_d = 5,9867\beta ea^3$$

$$R_e = 14,5733\beta ea^3.$$

O ponto O, distante $0,75a$ da alma, é um polo conveniente pois evita o cálculo dos momentos das forças inclinadas.

Como visto no exemplo anterior, a posição de C pode ser calculada com ou sem o conhecimento de I_y .

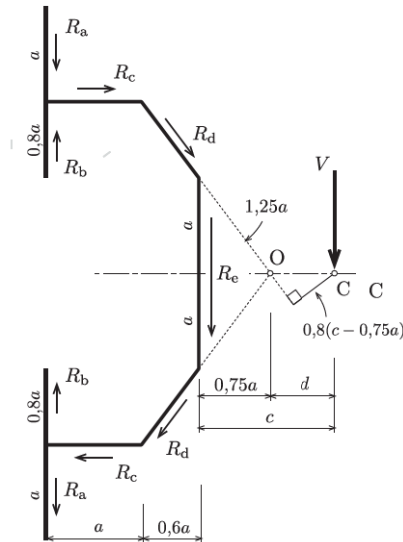


Fig. E7-1: Equilíbrio de momentos.

- I_y conhecido — Os somatórios de momentos em relação ao ponto O devem ser iguais para que os dois sistemas sejam mecanicamente equivalentes,

$$Vd = -2(R_a - R_b)(1,6a + 0,75a) + R_c \times 3,6a + 2R_d \times 0 - R_e \times 0,75a,$$

$$d = 0,0283a \Rightarrow c = 0,75a + 0,0283a = 0,7783a.$$

- I_y desconhecido — O somatório de momentos em relação ao centro de cisalhamento C deve ser nulo,

$$-2(R_a - R_b)(1,6a + c) + R_c \times 3,6a - 2R_d(c - 0,75a) \times 0,8 - R_e \times c = 0,$$

$$c = \frac{-20,0864a}{25,808} = 0,7783a.$$

Referências

[Boresi (1993)] Boresi, A. P., Schmidt, R. J., Sidebottom O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.

[Feodosiev (1980)] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. 2nd. ed. (espanhol), MIR, Moscow, 1980.

[Popov (1978)] Popov, E. P. *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. Edgard Blücher, São Paulo, 1978.

[Souza Lima (1955)] Souza Lima, V. M. *Estudo das Tensões*. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, São Paulo, 1955.

[van Langendonck (1967)] van Langendonck, T. *Vocabulário de Teoria das Estruturas*. Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1967.

[van Langendonck (1971)] van Langendonck, T. *Resistência dos Materiais: Deformações II*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

[van Langendonck (1971)] van Langendonck, T. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

Index

centro de cisalhamento, 27

centro de torção, 27

empenamento, 2

equações diferenciais de equilíbrio, 3

fluxo de cisalhamento, 8

fórmula

do cisalhamento na flexão, 7

fórmula de Zhuravski, 7

hipóteses, 8

ligação longitudinal, 14

regra do fluxo, 10

seção delgada, 8

aberta, 8

fechada, 8

tensão tangencial

média, 5

sentido, 9