



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 125 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES I.

**TENSÕES TANGENCIAIS NA
FLEXÃO NORMAL SIMPLES**

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

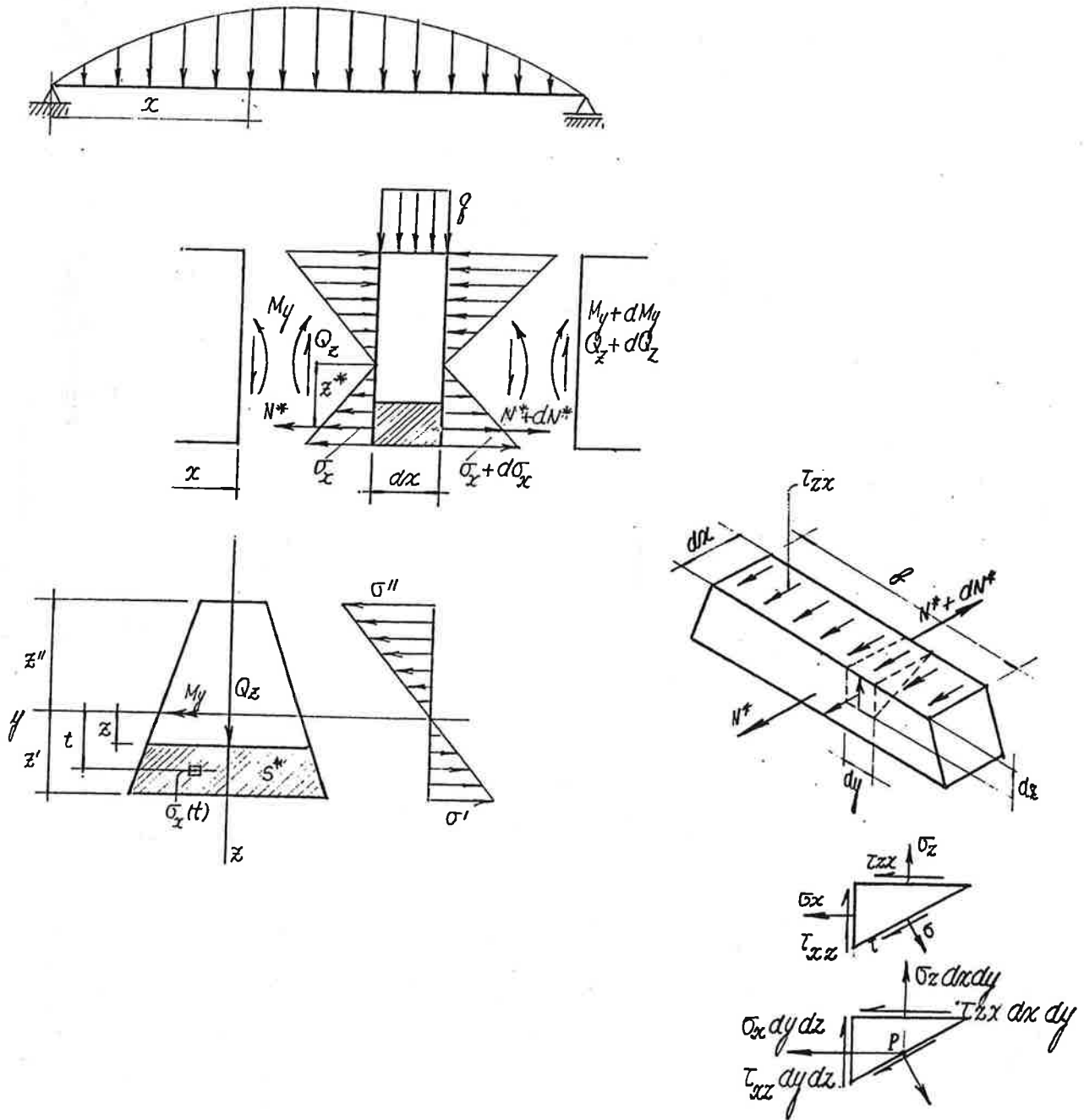
2000

TENSÕES TANGENCIAIS NA FLEXÃO NORMAL SIMPLES.

TENSÕES TANGENCIAIS EM SEÇÕES CHEIAS.

Considere-se em uma viga, como a que se mostra na fig., submetida a flexão normal simples, um segmento de dimensão dx .

Na face caracterizada pela coordenada x , ao momento fletor M_y corresponde a distribuição de tensões normais σ_x , enquanto, na face caracterizada pela coordenada $x+dx$, ao momento fletor M_y+dM_y corresponde a distribuição de tensões normais $\sigma_x+d\sigma_x$.



Considere-se, em seguida, nesse segmento o elemento indicado na fig., cuja face superior é caracterizada pela coordenada z .

Na face caracterizada pela coordenada x , à distribuição de tensões normais σ_x correspondem a força N^* e o momento M_y^* , dados por:

$$N^* = \int_{S^*} \sigma_x(t) dS = \int_{S^*} \frac{M_y}{I_y} t dS = \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} t dS = M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (1')$$

$$M_y^* = \int_{S^*} \sigma(t) t dS = \int_{S^*} \frac{M_y}{I_y} t^2 dS = \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} t^2 dS = M_y \frac{I_y^*}{I_y} \quad (1'')$$

onde M_{sy}^* é o momento estático e I_y^* é o momento de inércia da região hachurada relativamente ao eixo y .

O ponto C^* de aplicação da força N^* é caracterizado pela coordenada z^* , tal que:

$$N^* z^* = M_y^* \Rightarrow z^* = \frac{M_y^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma_x(t) t dS}{\int_{S^*} \sigma_x(t) dS} = \frac{I_y^*}{M_{sy}^*} \quad (2)$$

A expressão acima corresponde à projeção no plano da seção transversal do centro de gravidade do "sólido das tensões" relativo à região S^* , cujo volume, segundo a expressão (1'), é igual à força N^* .

Na face caracterizada pela coordenada $x + dx$, à distribuição de tensões normais $\sigma_x + d\sigma_x$ correspondem a força $N^* + dN^*$ e o momento $M_y^* + dM_y^*$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{zx} = \tau_{zx}(z)$ na face superior do elemento é determinada a partir do equilíbrio de forças segundo a direção x , ou seja:

$$\tau_{zx} b dx = dN^* \Rightarrow \tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{dN^*}{dx} \quad (3)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de N^* dado pela expressão (1'), obtém-se:

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left[M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{dM_y}{dx} \frac{M_{sy}^*}{I_y} + M_y \frac{d}{dx} \left(\frac{M_{sy}^*}{I_y} \right) \right] \quad (4)$$

Em vigas de seção constante o termo $\frac{M_{sy}^*}{I_y}$ não varia com x , de modo que:

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{dM_y}{dx} \frac{M_{sy}^*}{I_y} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (5)$$

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{xz}(z)$ na seção transversal é determinada a partir do equilíbrio do elemento infinitesimal prismático que se mostra na fig., de dimensões dx, dy, dz , no qual as tensões σ_x e τ_{zx} já são conhecidas, a tensão σ_z será obtida adiante na expressão (14), as tensões σ_e e τ serão obtidas considerando o equilíbrio de forças segundo duas direções perpendiculares, e a tensão τ_{xz} é obtida considerando o equilíbrio de momentos em relação ao ponto P e segundo a direção y , ou seja:

$$\tau_{xz} dy dz \frac{1}{2} dx = \tau_{zx} dx dy \frac{1}{2} dz \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (6)$$

É importante notar que a resultante das tensões tangenciais τ_{xz} é numericamente igual à força cortante Q_z .

De fato:

$$\int_S \tau_{xz} dS = \int_{-z''}^{z'} \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} b dz = \frac{Q_z}{b} \int_{-z''}^{z'} M_{sy}^* dz \quad (7)$$

Lembrando que, sendo $u(z)$ e $v(z)$ duas funções contínuas de z com derivadas de primeira ordem contínuas,

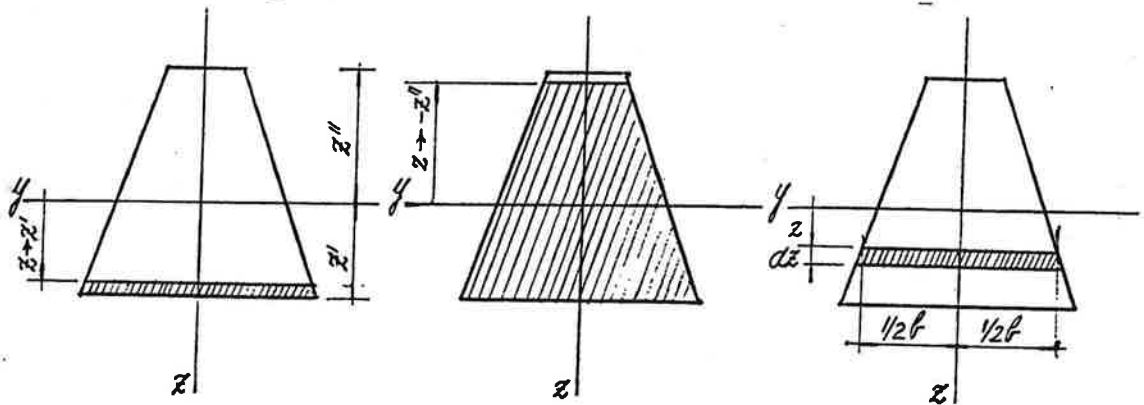
$$\int_{-z''}^{z'} u \frac{dv}{dz} dz = u v \Big|_{-z''}^{z'} - \int_{-z''}^{z'} \frac{du}{dz} v dz$$

tem-se:

$$\int_{-z''}^{z'} M_{sy}^* dz = M_{sy}^* z \Big|_{-z''}^{z'} - \int_{-z''}^{z'} \frac{dM_{sy}^*}{dz} z dz \quad (7')$$

Como se mostra na fig., $M_{sy}^* = 0$ quando $z = -z''$ (por ser $S^* = S$ e, portanto, $M_{sy}^* = M_{sy} = 0$), e quando $z = z'$ (por ser $S^* = 0$), de modo que:

$$M_{sy}^* z \Big|_{-z''}^{z'} = 0 \quad (7'')$$



Por outro lado, como se mostra na fig., quando se passa da coordenada z para a coordenada $z+dz$, o momento estático passa de M_{sy}^* para $M_{sy}^* + dM_{sy}^*$, onde:

$$dM_{sy}^* = -b dz z$$

de modo que:

$$- \int_{-z''}^{z'} \frac{dM_{sy}^*}{dz} z dz = \int_{-z''}^{z'} b z^2 dz = \int_S z^2 dS = I_y \quad (7''')$$

Substituindo na expressão (7) os resultados anteriores obtém-se:

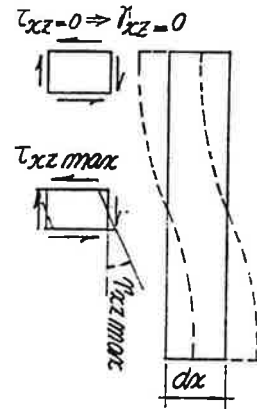
$$\int \tau_{xz} dS = Q_z \quad (8)$$

À tensão τ_{xz} correspondente à deformação $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$ que produz o efeito, indicado na fig., de distorcer as seções transversais, o que contraria a hipótese, adotada na obtenção da expressão $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$, de as seções planas se manterem planas.

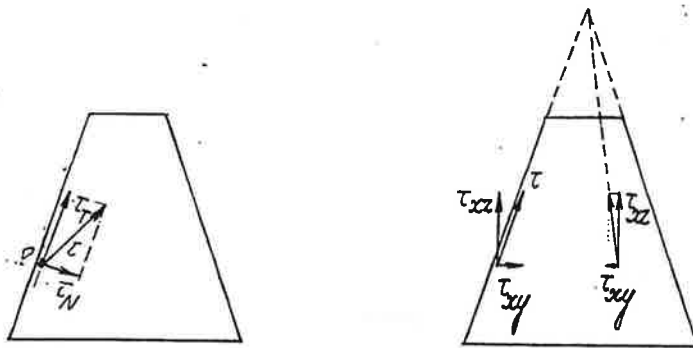
Todavia, o erro introduzido pode ser desprezado quando a altura h da viga é pequena relativamente ao vão l , o que acontece na maioria dos casos práticos. No caso de viga biapoiada submetida a carregamento uniforme q , a tensão σ^* nos pontos mais solicitados da seção mais solicitada, obtida a partir da teoria da elasticidade, é dada por:

$$\sigma^* = \sigma_0^* \left[1 + \frac{4}{15} \frac{h^2}{\ell^2} \right] = \sigma_0^* \lambda^* \quad (9)$$

onde σ_0^* é o valor obtido com a resistência dos materiais e λ^* , o respectivo fator de correção.



Considerando-se um ponto P no contorno da seção transversal, conclui-se que a componente τ_{xz} corresponde a componente τ_{xy} , de modo que a resultante τ seja, como se mostra na fig., tangente ao contorno.



De fato, se a tensão τ não fosse tangente ao contorno, a componente τ_N corresponderia a componente τ'_N na superfície lateral da viga, uma vez que, como se viu na dedução da expressão (6), as tensões tangenciais em planos perpendiculares têm o mesmo valor absoluto, direção perpendicular à interseção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à interseção dos planos. Ora, como não há carregamento na superfície lateral, resulta $\tau'_N = 0$ e, portanto, $\tau_N = 0$, de modo que $\tau = \tau_T$.

Em um ponto da seção transversal a componente τ_{xy} é obtida mediante a construção geométrica indicada na fig.

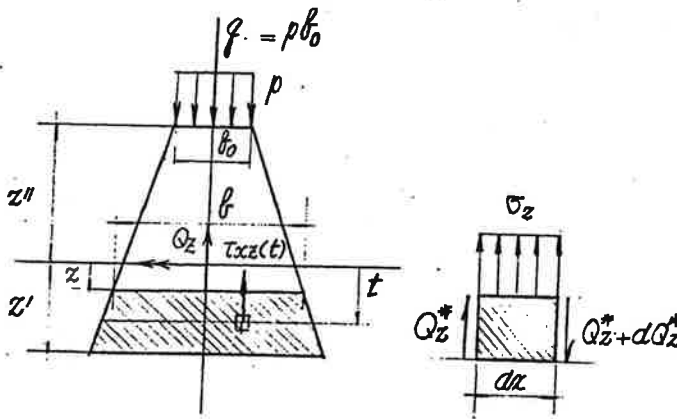
Voltando ao elemento cuja face superior é caracterizada pela coordenada z , verifica-se, como se mostra na fig., que, na face caracterizada pela coordenada x , a resultante Q_z^* das tensões τ_{xz} é dada por:

$$Q_z^* = \int_S \tau_{xz}(t) dS = \int_z^{z'} \frac{Q_z}{b(t)} \frac{M_{sy}^*(t)}{I_y} b(t) dt = \frac{Q_z}{I_y} \int_z^{z'} M_{sy}^*(t) dt = Q_z \frac{J_y^*}{I_y} \quad (10)$$

onde:

$$J_y^* = \int_z^{z'} M_{sy}^*(t) dt \quad (11)$$

enquanto na face caracterizada pela coordenada $x + dx$, a resultante das tensões $\tau_{xz} + d\tau_{xz}$ é dada por $Q_z^* + dQ_z^*$.



A distribuição das tensões normais $\sigma_z = \sigma_z(z)$ na face superior do elemento é determinada a partir do equilíbrio de forças segundo a direção z , ou seja:

$$\sigma_z b dx = dQ_z^* \Rightarrow \sigma_z = \frac{1}{b} \frac{dQ_z^*}{dx} \quad (12)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de Q_z^* dado pela expressão (10), obtém-se:

$$\sigma_z = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left[Q_z \frac{J_y^*}{I_y} \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{dQ_z}{dx} \frac{J_y^*}{I_y} + Q_z \frac{d}{dx} \left(\frac{J_y^*}{I_y} \right) \right] \quad (13)$$

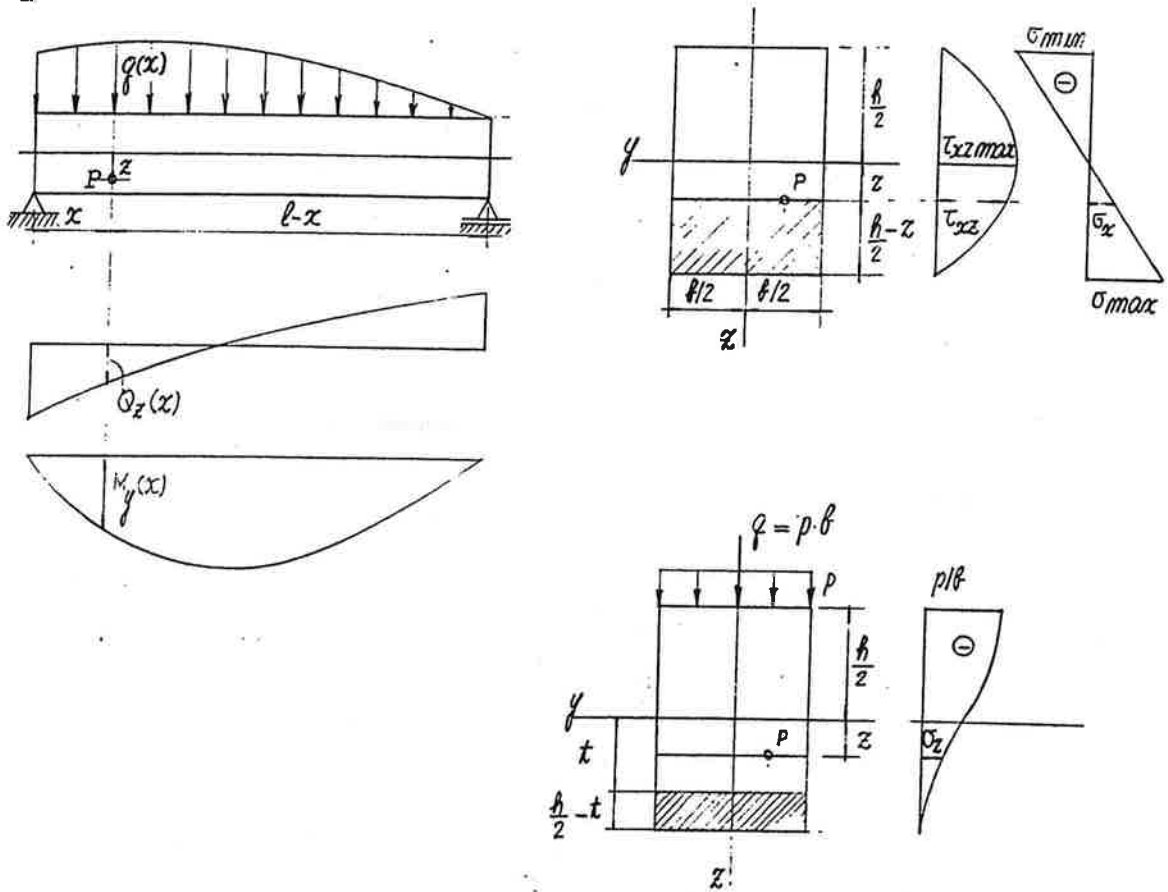
Em vigas de seção constante o termo $\frac{J_y^*}{I_y}$ não varia com x , de modo que:

$$\sigma_z = \frac{1}{b} \frac{dQ_z}{dx} \frac{J_y^*}{I_y} = -\frac{q}{b} \frac{J_y^*}{I_y} \quad (14)$$

O sinal negativo justifica-se pelo fato de o carregamento q provocar tensões normais σ_z de compressão.

EXEMPLO 1.

Determinar as tensões $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ em um ponto P de coordenadas (x,z) da viga da fig., submetida à carga transversal $q(x)$.



A tensão normal σ_x , no plano da seção transversal, é dada por:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = 12 \frac{M_y}{b h^3} z \quad (A)$$

de modo que:

$$\sigma_{x \text{ máx}} = -\sigma_{x \text{ mín}} = \sigma(\frac{1}{2}h) = 6 \frac{M_y}{b h^2} \quad (B)$$

A tensão tangencial $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ é dada por:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{b I_y} \quad (C)$$

onde:

$$M_{sy}^* = b \left(\frac{h}{2} - z\right) \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right)\right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right) b \left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \quad (D)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{b} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{12}{b h^3} = \frac{Q_z}{b h} \left(\frac{3}{2} - 6 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (E)$$

Para $z = \pm \frac{1}{2}h$, $\tau_{xz} = 0$, para $x = 0$,

$$\tau_{xz} = \tau_{zx \text{ máx}} = \frac{3 Q_z}{2 b h} \quad (F)$$

A tensão normal σ_z no plano horizontal é dada por:

$$\sigma_z = -\frac{q}{b} \frac{J_y^*}{I_y} \quad (G)$$

onde:

$$J_y^* = \int_z^{\frac{h}{2}} M_{sy}^*(t) dt = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - t^2 \right) dt = \frac{b z^3}{6} - \frac{b h^2 z}{8} + \frac{b h^3}{24} \quad (H)$$

de modo que:

$$\sigma_z = -\frac{q}{b} \lambda(z) \quad (I)$$

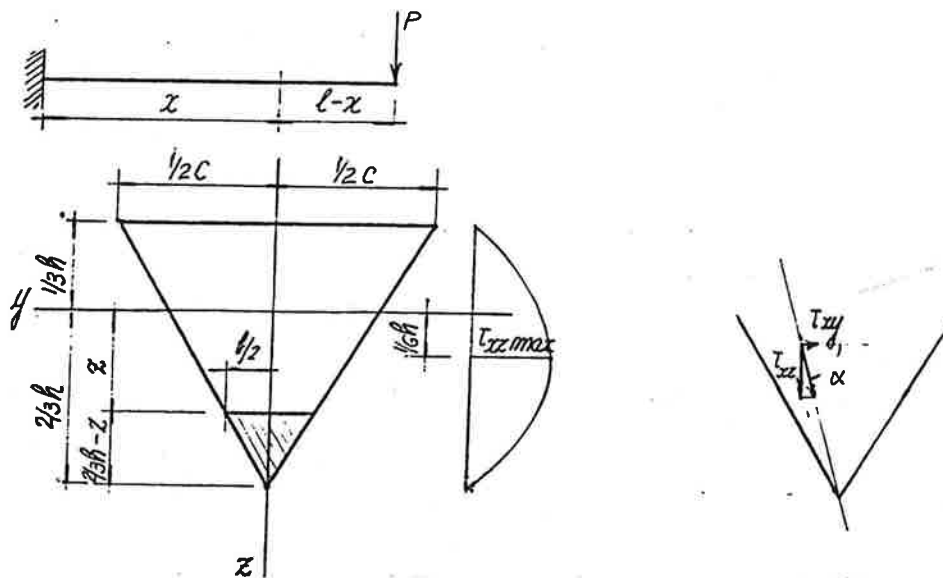
onde:

$$\lambda(z) = 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2} \quad (J)$$

Para $z = \frac{1}{2}h$, $\lambda_z = 0$; para $z = 0$, $\lambda_z = \frac{1}{2}$; para $z = -\frac{1}{2}h$, $\lambda_z = 1$.

EXEMPLO 2.

Determinar as tensões τ_{xy} e τ_{xz} em um ponto P da seção transversal da viga da fig.



Nos pontos caracterizados pela coordenada z , a tensão tangencial τ_{xz} é dada por:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (A)$$

onde:

$$Q_z = P \quad (B')$$

$$b = b(z) = \frac{c}{h} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \quad (B'')$$

$$I_y = \frac{c h^3}{36} \quad (B''')$$

$$M_{sy}^* = \frac{1}{2} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left[\frac{2}{3} h - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \right] = \frac{1}{3} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \quad (B''')$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{b} \frac{1}{3} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \frac{36}{c h^3} = \frac{12 Q_z}{c h^3} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \quad (C)$$

A tensão tangencial τ_{xz} é máxima quando $\frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0$, ou seja, quando $z = \frac{1}{6} h$, de modo que:

$$\tau_{xz \text{ máx}} = \tau_{xz} \left(\frac{1}{6} h \right) = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{\frac{1}{2} c h} \quad (D)$$

No ponto P de coordenadas (y,z) a tensão tangencial τ_{xy} é dada por:

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_{xz}}{\tan \alpha} \quad (E)$$

onde, como se mostra na fig., $\alpha = \alpha(y, z)$.

É importante notar que a resultante das tensões tangenciais τ_{xz} é igual à força cortante Q_z .

De fato, em um elemento de área $dS = b dz$, a resultante das tensões tangenciais τ_{xz} é dada por:

$$dF_z = \tau_{xz} dS = \tau_{xz} b dz \quad (F)$$

de modo que:

$$F_z = \int_{\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3} h} \tau_{xz} b dz \quad (G)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de τ_{xz} dado pela expressão (C), obtém-se:

$$F_z = Q_z \quad (H)$$

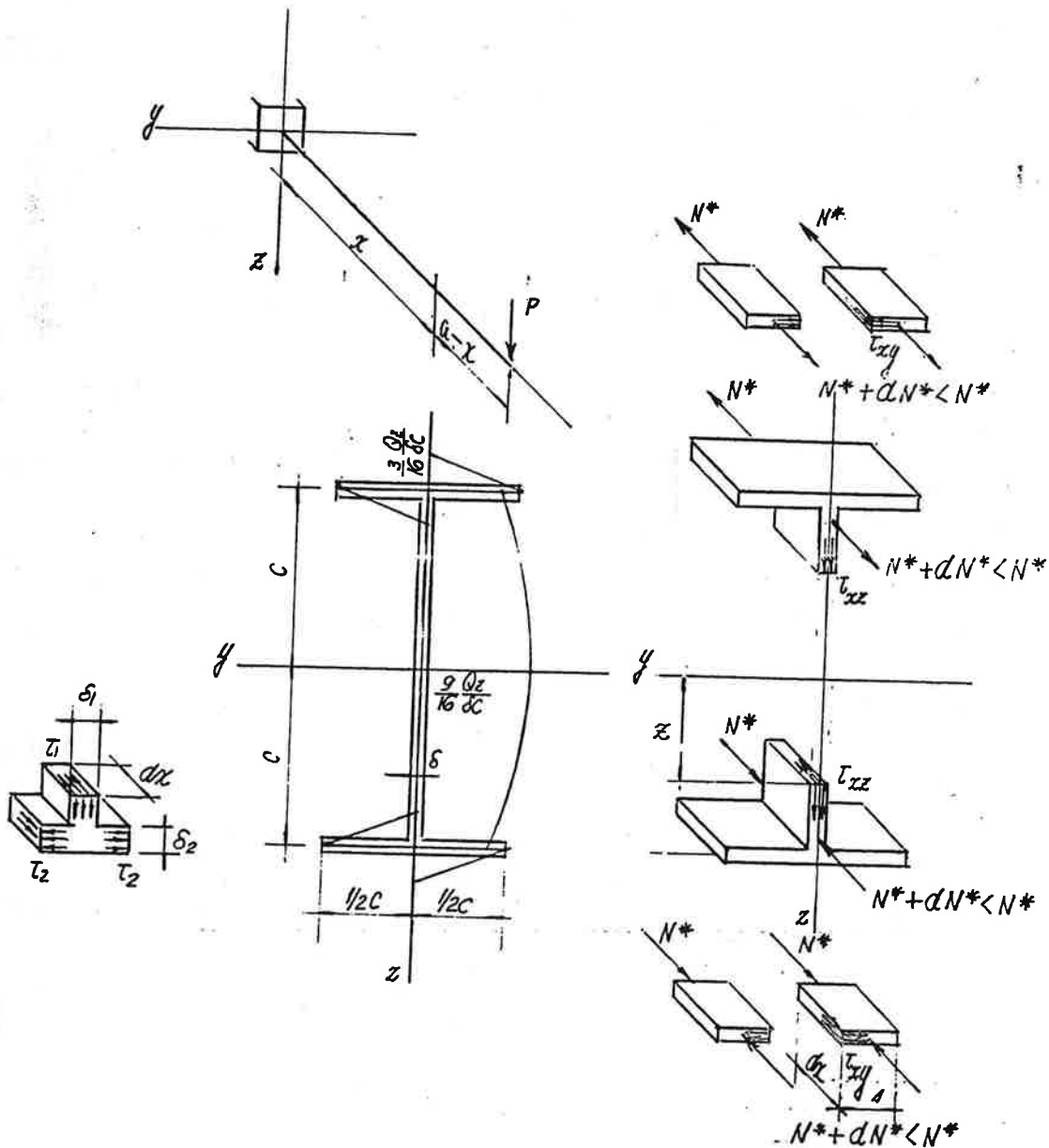
TENSÕES TANGENCIAIS EM SEÇÕES DELGADAS.

A distribuição de tensões tangenciais em seções delgadas é obtida com a formulação apresentada anteriormente, isto é, determina-se o equilíbrio segundo a direção longitudinal de elementos de dimensão dx , considerando que as tensões tangenciais (supostas constantes ao longo da espessura) devem ser tangentes ao contorno da seção e que, em planos perpendiculares, as tensões tangenciais tem mesmo valor absoluto, direção perpendicular à intersecção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à intersecção dos planos.

SEÇÕES ABERTAS SIMÉTRICAS.

Na viga que se mostra na fig, os esforços solicitantes em uma seção caracterizada pela coordenada x são dados por:

$$Q_z = P \quad M_y = -P(a - x) \quad (1)$$



Como o momento fletor é, em valor absoluto, decrescente com x , a resultante N^* das tensões normais σ_x , dada por:

$$N^* = \int_s \sigma_x dS = \int \frac{M_y}{I_y} z dS = M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (2)$$

é decrescente com x , ou seja, $dN^* < 0$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nas "mesas", obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada s , é dada por:

$$\tau_{yx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z}{\delta} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (4)$$

O momento de inércia é dado por:

$$I_y = I_y^{(1)} + 2I_y^{(2)} = \frac{\delta(2c)^3}{12} + 2\left[\frac{c\delta^3}{12} + c\delta c^2\right] = \frac{8}{3}\delta c^3 + 2\delta c^2 \quad (5)$$

onde $I_y^{(1)}$ é o momento de inércia do retângulo de dimensões $\delta \times 2c$ e $I_y^{(2)}$, o momento de inércia do retângulo de dimensões $c \times \delta$ relativamente ao eixo de y .

Como $\delta \ll c$, resulta:

$$I_y \approx \frac{8}{3}\delta c^2 \quad (5')$$

O momento estático é dado por:

$$M_{sy}^* = \delta s c \quad (6)$$

Substituindo na expressão (4) os valores de I_y e de M_{sy}^* dados pelas expressões (5') e (6), obtém-se:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z}{\delta} \delta c s \frac{3}{8\delta c^3} = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{\delta c^2} s \quad (7)$$

Quando $s = 0$, $\tau_{xy} = 0$; quando $s = \frac{1}{2}(c - \delta) \approx \frac{1}{2}c$, $\tau_{xy} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ na "alma", obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada z , é dada por:

$$\tau_{zx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z}{\delta} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (8)$$

onde:

$$M_{sy}^* = M_{sy}^{*(1)} + M_{sy}^{*(2)} = \delta(c - z)\left[c - \frac{1}{2}(c - z)\right] + \delta c c = \frac{1}{2}\delta(3c^2 - z^2) \quad (9)$$

sendo $M_{sy}^{*(1)}$ o momento estático do retângulo de dimensões $\delta \times (c - z)$ e $M_{sy}^{*(2)}$, o momento estático do retângulo de dimensões $\delta \times c$ relativamente ao eixo y .

Substituindo na expressão (8) os valores de I_y e M_{sy}^* dados pelas expressões (5') e (9), obtém-se:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c} \left(3 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (10)$$

Quando $z = 0$, $\tau_{xz} = \frac{9}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$; quando $z = \pm(c - \frac{1}{2}\delta) \approx \pm c$, $\tau_{xz} = \frac{6}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

Considerando o equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx indicado na fig., correspondente à união da alma e da mesa (no caso geral, com espessuras δ_1 e δ_2), tem-se:

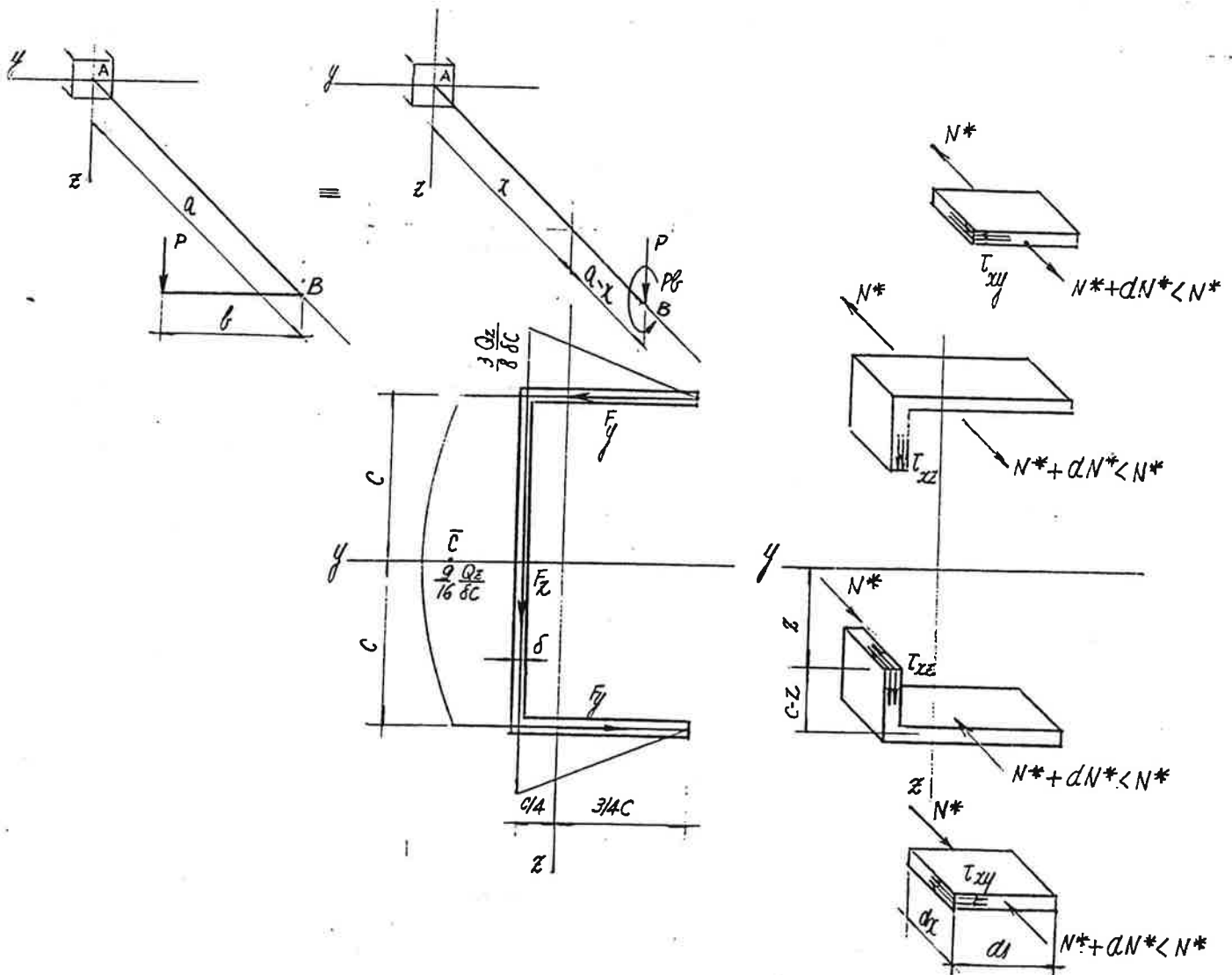
$$\tau_1 \delta_1 dx = 2\tau_2 \delta_2 dx \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{\delta_2} \tau_1 \quad (11)$$

No caso presente, $\tau_1 = \tau_{xz}$, $\tau_2 = \tau_{xy}$ e $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, de modo que $\tau_{xy} = \frac{1}{2}\tau_{xz}$.

SEÇÕES ABERTAS NÃO-SIMÉTRICAS.

Considere-se a estrutura que se mostra na fig. A análise da barra AB, que se supõe um perfil C, pode ser feita considerando os esforços externos estaticamente equivalentes aplicados no ponto B, aos quais correspondem os seguintes esforços solicitantes na seção transversal caracterizada pela coordenada x:

$$Q_z = P \quad M_y = -P(a-x) \quad M_x = Pb \quad (1)$$



A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nos segmentos horizontais, obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada s, é dada por:

$$\tau_{yx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{\delta I_y} \quad (2)$$

onde:

$$I_y = I_y^{(1)} + 2I_y^{(2)} = \frac{\delta (2c)^3}{12} + 2\left[\frac{c \delta^3}{12} + c \delta c^2\right] \approx \frac{8}{3} \delta c^3 \quad (3')$$

$$M_{sy}^* = \delta s c \quad (3'')$$

de modo que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z}{\delta} \delta c s \frac{3}{8 \delta c^3} = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{\delta c^2} s \quad (4)$$

Quando $s = 0$, $\tau_{xy} = 0$; quando $s = c$, $\tau_{xy} = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{\delta c}$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ no segmento vertical, obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada z , é dada por:

$$\tau_{xz} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{\delta I_y} \quad (5)$$

onde:

$$M_{sy}^* = M_{sy1}^* + M_{sy2}^* = \delta (c-z) \left[c - \frac{1}{2}(c-z) \right] + \delta c c = \frac{1}{2} \delta (3c^2 - z^2) \quad (6)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{\delta} \frac{1}{2} \delta (3c^2 - z^2) \frac{3}{8 \delta c^3} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c} \left(3 - \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (7)$$

Quando $z = 0$, $\tau_{xz} = \frac{9}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$; quando $z = \pm c$, $\tau_{xz} = \frac{6}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

A resultante F_y das tensões τ_{xy} em um dos segmentos horizontais é dada por:

$$dF_y = \tau_{xy} \delta ds \Rightarrow F_y = \int_{s=0}^{s=c} \tau_{xy} \delta ds = \frac{3}{16} Q_z \quad (8)$$

e a resultante F_z das tensões τ_{xz} no segmento vertical é dada por:

$$dF_z = \tau_{xz} \delta dz \Rightarrow F_z = \int_{z=-c}^{z=c} \tau_{xz} \delta dz = Q_z \quad (9)$$

A distribuição de tensões tangenciais obtida corresponde, portanto, aos seguintes esforços solicitantes:

1) força cortante nula segundo a direção y , visto que:

$$Q_y = F_y - F_y = 0 \quad (10)$$

uma vez que o sentido das tensões τ_{xy} nos segmentos horizontais são opostos.

2) força cortante Q_z .

3) momento segundo a direção x , dada por:

$$M_x = F_z \frac{c}{4} + 2F_y c = Q_z \frac{c}{4} + 2 \frac{3}{16} Q_z c = Q_z \left(\frac{c}{4} + \frac{3}{8} c \right) \quad (11)$$

Os esforços solicitantes Q_z e M_x são estaticamente equivalentes à força Q_z aplicada em um ponto \bar{C} - denominado *centro de cisalhamento* - caracterizado pela coordenada \bar{y} , tal que:

$$Q_z \bar{y} = M_x \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{Q_z} = \frac{c}{4} + \frac{3}{8}c \quad (12)$$

Conclui-se, pois, que a distribuição de tensões obtidas só é válida quando na seção transversal os esforços solicitantes forem os seguintes:

$$Q_y = 0 \quad Q_z \quad M_x = Q_z \bar{y} = Q_z \left(\frac{c}{4} + \frac{3}{8}c \right) \quad (13)$$

ou, em vista das expressões (1), quando:

$$b = \bar{y} = \frac{c}{4} + \frac{3}{8}c \quad (14)$$

Quando $b \neq \bar{y}$ procede-se à seguinte decomposição:

$$M_x = M'_x + M''_x \quad (15)$$

onde:

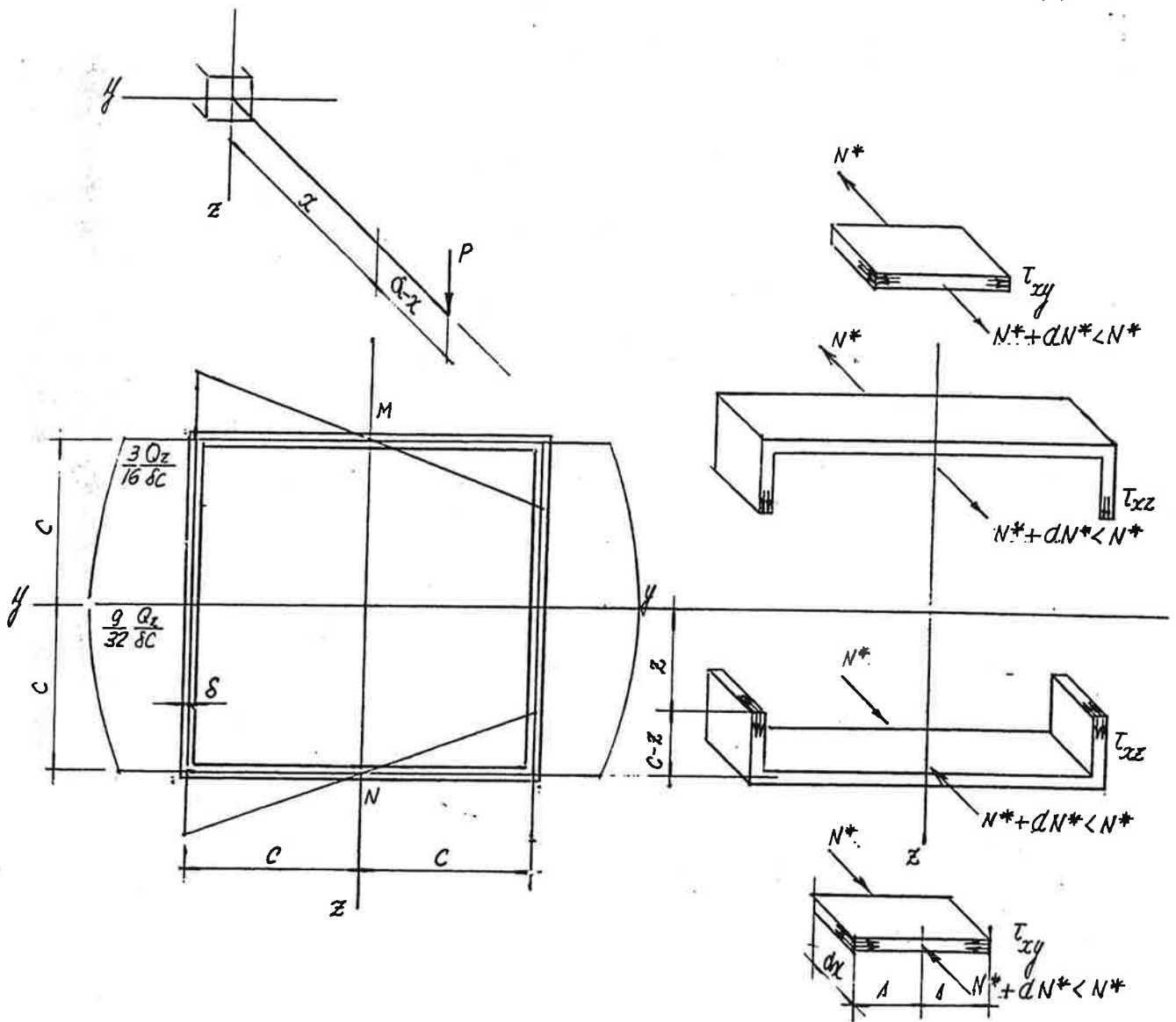
$$M'_x = P \bar{y} \quad M''_x = P (b - \bar{y}) \quad (16)$$

O carregamento externo composto de P e M'_x provoca flexão desacompanhada de torção (à qual corresponde a distribuição de tensões tangenciais determinada acima), ao passo que o carregamento M''_x provoca, satisfeitas certas condições, torção desacompanhada de flexão (à qual corresponde a distribuição de tensões a ser determinada em capítulo subsequente).

SEÇÕES FECHADAS SIMÉTRICAS.

Na viga que se mostra na fig, os esforços solicitantes em uma seção caracterizada pela coordenada x são dados por:

$$Q_z = P \quad M_y = -P(a-x) \quad (1)$$



A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ pode ser obtida considerando-se, como se mostra na fig, o equilíbrio na direção longitudinal de elementos de dimensão dx , simétricos relativamente ao eixo y e caracterizados pelas coordenadas s e z . Assim, para as tensões $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, tem-se:

$$2 \tau_{yx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{2\delta I_y} \quad (2)$$

onde:

$$I_y = 2I_y^{(1)} + 2I_y^{(2)} = 2 \frac{\delta (2c)^3}{12} + 2 \left[\frac{2c\delta^3}{12} + 2c\delta c^2 \right] \approx \frac{16}{3} \delta c^3 \quad (3')$$

$$M_{sy}^* = 2s\delta c = 2\delta cs \quad (3'')$$

de modo que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z}{2\delta} 2\delta cs \frac{3}{16\delta c^3} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c^2} s \quad (4)$$

Quando $s = 0$, $\tau_{xy} = 0$; quando $s = c$, $\tau_{xy} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

Para as tensões $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, tem-se:

$$2\tau_{zx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{2\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z}{2\delta} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (5)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_{sy}^* &= 2M_{sy}^{*(1)} + 2M_{sy}^{*(2)} \\ &= 2\delta(c-z) \left[c - \frac{1}{2}(c-z) \right] + 2c\delta c = \delta(3c^2 - z^2) \end{aligned} \quad (6)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{2\delta} \delta(3c^2 - z^2) \frac{3}{16\delta c^3} = \frac{3}{32} \frac{Q_z}{\delta c} \left(3 - \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (7)$$

Quando $z = 0$, $\tau_{xz} = \frac{9}{32} \frac{Q_z}{\delta c}$; quando $z = \pm c$, $\tau_{xz} = \frac{6}{32} \frac{Q_z}{\delta c}$.

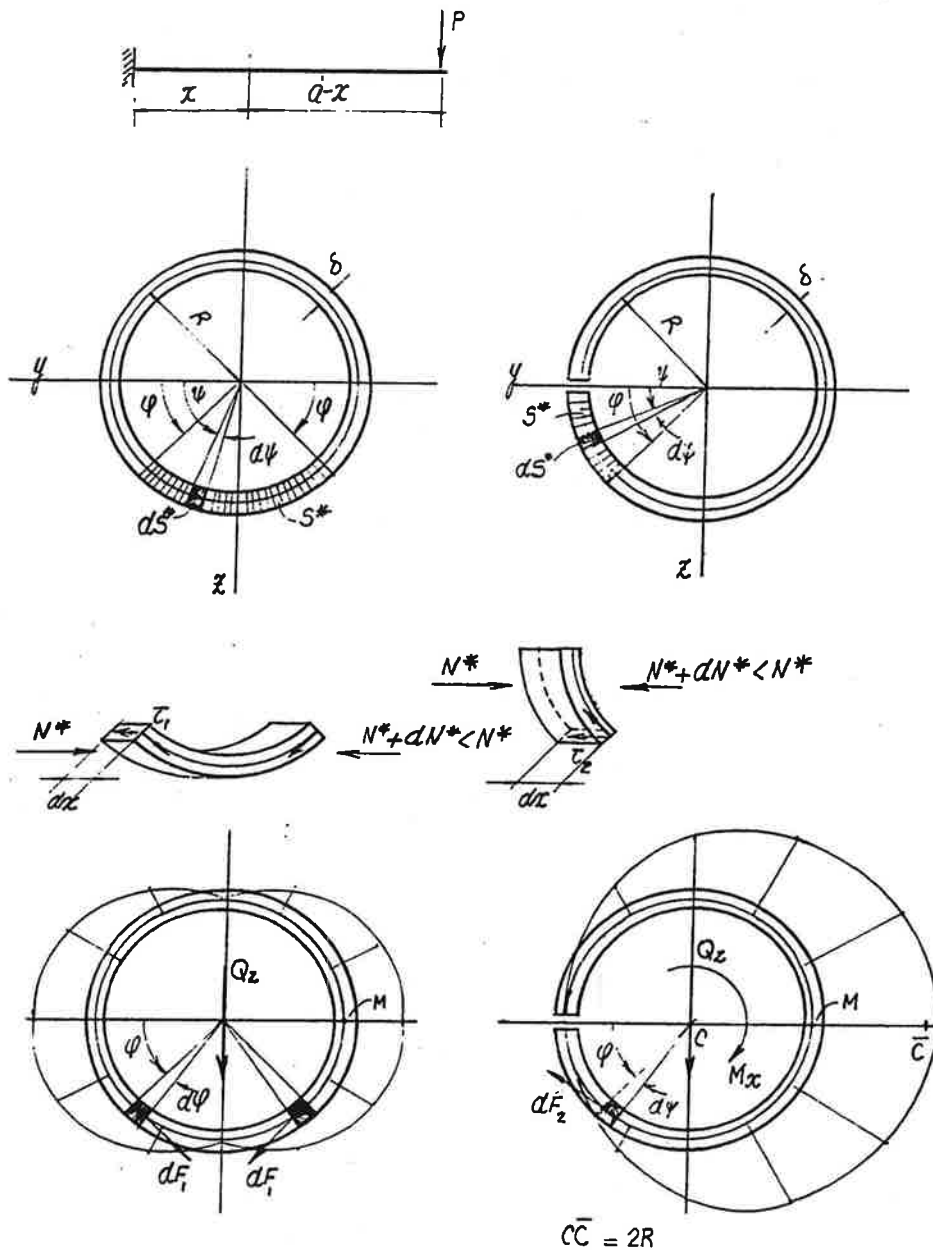
O fato de a tensão tangencial ser nula nos pontos M e N sugere que se pode obter a distribuição de tensões tangenciais em uma seção fechada simétrica, solicitada por força cortante Q_z , considerando a seção aberta correspondente ao corte da barra segundo o plano xz, solicitada pela força cortante $\frac{1}{2}Q_z$.

É, de resto, a conclusão a que se chega, escrevendo a expressão (5) da seguinte maneira:

$$\tau_{xz} = \frac{(\frac{1}{2}Q_z)}{\delta} \frac{(\frac{1}{2}M_{sy}^*)}{(\frac{1}{2}I_y)} = \frac{(\frac{1}{2}Q_z)M_{sy}^{*(C)}}{\delta I_y^{(C)}} \quad (8)$$

EXEMPLO.

Comparar a distribuição de tensões tangenciais nas seções transversais da fig.



Considerando o equilíbrio segundo a direção longitudinal dos elementos indicados na fig., obtém-se, na seção delgada fechada,

$$\tau_1 = \frac{Q_z M_{sy1}^*}{2 \delta I_y} \quad (A)$$

onde:

$$I_{y1} = \int_S z^2 ds = \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} (R \sin \psi)^2 \delta R d\psi = \pi \delta R^3 \quad (B')$$