MAP5729 - Introdução à Análise Numérica

1º Semestre de 2013

2ª Lista de Exercícios

Exercício 1 Sob as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach, denote por $L < 1$ uma constante tal que

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq L||x - y||.$$

Se $\bar{x}$ é o ponto fixo de Φ, demonstre as seguintes estimativas de erro:

$$||x^{(k)} - \bar{x}|| \leq \frac{L^k}{1-L}||x^{(1)} - x^{(0)}||, \quad k \geq 1 \quad \text{estimativa } \textit{a priori};$$
$$||x^{(k)} - \bar{x}|| \leq \frac{L}{1-L}||x^{(k)} - x^{(k-1)}||, \quad k \geq 1 \quad \text{estimativa } \textit{a posteriori}.$$

Exercício 2 Considere o problema de contorno $u'' = f(x, u)$, $x \in (a, b)$, $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$, sob as condições de existência e unicidade $f \in C^1([a, b] \times R)$, $0 < q \leq f_u \leq Q$. Usando o espaçamento $h = (b - a)/(N + 1)$, denotando por $x_i = a + ih$ e por v_i uma aproximação para $u(x_i)$, $0 \leq i \leq N + 1$, obtemos, após discretizar a derivada segunda, o sistema não linear $Av + H(v) = 0$. Nesta equação, v é o vetor $[v_1, \ldots, v_N]^T$, A é a matriz tridiagonal com 2 na diagonal principal e -1 nas diagonais secundárias, e

$$H(v) = [h^2 f(x_1, v_1) - \alpha, h^2 f(x_2, v_2), \ldots, h^2 f(x_{N-1}, v_{N-1}), h^2 f(x_N, v_N) - \beta]^T.$$

(a) Usando a notação $A = 2[I - L - U]$, mostre que raizes do sistema não linear são soluções da equação de ponto fixo

$$v = \frac{1}{1+\omega}\left[(\omega I + L + U)v - 0.5H(v)\right] = \Phi(v)$$

para todo $\omega \neq -1$.

(b) Prove que se $\omega \geq 0.5h^2 Q$ então Φ satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo em R^N com a norma $|| \bullet ||_\infty$. Mostre que a constante L é no máximo $1 - 0.5h^2 q/(1 + \omega)$.

Exercício 3 Usando a discretizaçâo do exercício anterior com $N = 4$, apresente o sistema não linear para o problema de contorno

$$u'' = 0.5(u + 3x + 1)^3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 0, u(1) = -2.$$

Descreva as iterações do método de Newton para o sistema não linear. Não inverta nenhuma matriz. Apenas mostre quais equações devem ser resolvidas para se obter a nova aproximação a partir da anterior.

Exercício 4 Transforme o sistema não linear

$$\begin{aligned}
3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\
x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen}(x_3) + 1.06 &= 0 \\
e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0
\end{aligned}$$

em um problema de ponto fixo $x = \Phi(x)$ isolando-se x_i na equação i. Prove então que o sistema tem uma única solução em $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. Partindo-se de $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)$, estime quantas iterações do método de aproximações sucessivas são necessárias para se garantir um erro menor do que 10^{-5} com a norma do máximo.

Exercício 5 Sejam $L_i(x)$ os polinômios de Lagrange para pontos $x_0, \ldots, x_n$ dois a dois distintos, e seja $c_i = L_i(0)$. Mostre que

a)

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{para } j = 0, \\ 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n & \text{para } j = n+1; \end{cases}$$

b)

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1.$$

Exercício 6 Suponha que a função $f(x) = \sin(x)$ está tabelada de 10 em 10 graus, isto é, em pontos equidistantes com espaçamento $h = \pi/18$. Desejamos aproximar o valor do seno em outros pontos usando interpolação cúbica. Explique como fazer isso de forma a se obter a melhor estimativa de erro possível e apresente esta estimativa.

Exercício 7 Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

Para a tabela formada pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ onde $x_k = -5 + k\frac{10}{n}$, $0 \le k \le n$, calcule o polinômio interpolador da tabela e os splines cúbicos interpoladores natural, completo e *not a knot*. Use vários valores para n e apresente gráficos das funções interpoladoras junto com o gráfico de f. Observe o comportamento do erro em função de $h = \frac{10}{n}$.

Exercício 8

a) Dados os pares de números complexos (z_k, f_k), $k = 0, \ldots, N$, onde $z_k \neq z_l$ se $k \neq l$, mostre que existe um único polinômio complexo $p(z)$ de grau menor ou igual a N tal que $p(z_k) = f_k$, $k = 0, \ldots, n$.

b) Dados os pares (θ_k, f_k), $k = 0, \ldots, N$, onde $\theta_k = 2k\pi/(N+1)$ e os f_k são números complexos, mostre que existe um único polinômio trigonométrico

$$p(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{i\theta} + \cdots \alpha_N e^{iN\theta}$$

tal que $p(\theta_k) = f_k$, $k = 0, \ldots, N$.

Exercício 9 Dada uma tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

com $n+1$ pontos onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, denote por $p_{i,i+1,\ldots,i+k-1,i+k}$ o polinômio interpolador da subtabela (x_j, y_j), $i \leq j \leq i+k$. Prove que

$$p_{i,i+1,\ldots,i+k-1,i+k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,\ldots,i+k}(x) - (x - x_{i+k})p_{i,\ldots,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}$$

Exercício 10 Considere a tabela

x	8.1	8.3	8.6	8.7
$x \ln x$	16.94410	17.56492	18.50515	18.82091

Usando polinômios interpoladores apropriados de graus 1, 2 e 3, aproxime $0.84 \ln 0.84$. Estime os erros usando a fórmula do erro e compare com os erros exatos.