PME 5324 – Fundamentos do Desgaste

Fundamentos da Mecânica do Contato

Francisco J. Profito

fprofito@usp.br

Conteúdo

Conteúdo

Introdução e Objetivos

Aula MC 1

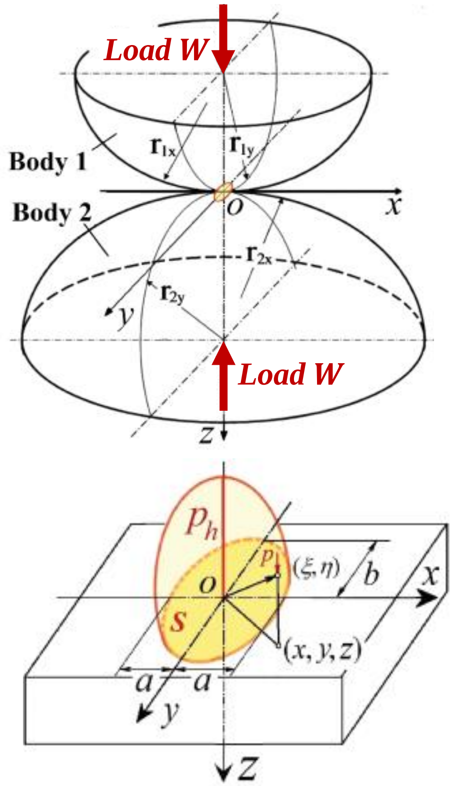
- Introduzir os conceitos fundamentais da Mecânica do Contato Macroscópico baseada na teoria do semi-espaço elástico;
- Definir contatos conforme e não-conforme e ilustrar algumas aplicações;
- Apresentar métodos para o cálculo de propriedades de contato associadas à teoria de Hertz (contatos linear e pontual):
  - Pressão interfacial, dimensões da área de contato e deslocamento global relativo entre os corpos em contato;

Aula MC 2

  - Tensões subsuperficiais (importantes para análises de alguns tipos de falhas).
- Exemplos típicos do uso da teoria de Hertz em aplicações de engenharia;
- Discutir as limitações da teoria de Hertz

❑ Introdução e Objetivos

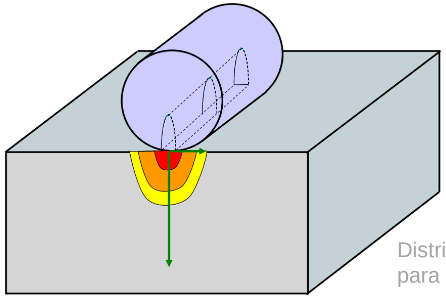
- **Contato entre Corpos Elásticos**
  - Análise do comportamento mecânico de dois **sólidos elásticos homogêneos não-conformes** em contato submetidos a carregamentos externos concentrados ou distribuídos nas direções normal e tangenciais da interface;
  - Determinação da **pressão interfacial**, **deslocamentos** e **tensões** atuantes nos sólidos na zona de contato devidos aos carregamentos externos aplicados.



Contato normal entre dois elipsoides elásticos [12]

- **Teorias Baseadas na Mecânica dos Meios Contínuos Elásticos**
  - Modelos matemáticos baseados na **teoria do semi-espaço elástico** (dimensões da zona de contato reduzidas em comparações com as dimensões dos corpos em contato);
  - Teoria de Hertz: análise do **contato normal** entre sólidos elásticos homogêneos **não rugosos**.

- **Aplicação no Projeto de Diversos Elementos Mecânicos**
  - Engrenagens, mancais de elementos rolantes, cames, roda-trilho, etc.;
  - Rolamento puro ou rolamento/deslizamento;
  - Contato seco ou lubrificado (EHL).



Distribuição de tensões subsuperficiais para um contato linear [9]

Conteúdo

❑ Tipos de Contato e Aplicações

- A geometria do contato na interface pode ser categorizada em dois tipos: conforme e não-conforme.

- <u>**Contato Conforme**</u>

  - Superfícies em contato com curvaturas muito próximas, "combinando" ou "encaixando" uma com a outra;
  - Área de interação entre as superfícies elevada, geralmente comparável às dimensões dos corpos em contato;
  - Distribuição dos carregamentos ocorre em um área relativamente elevada, resultando em pressões de contato mais reduzidas (~ MPa);
  - A geometria do contato, a área resultante da interação entre as superfícies, e as deformações e tensões associadas dependem fortemente da **rigidez estrutural de componentes específicos** do sistema e suas condições de operação.
    - Problemas resolvidos através da combinação de análises estrutural (*e.g.* MEF) e interfacial das partes envolvidas.

Piston skirt/ring cylinder system (slider bearings)

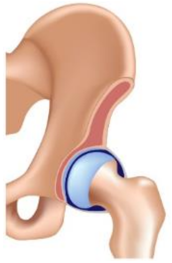
Thrust bearings

Crankshaft-connecting rods and bearings (journal bearings) [12]

Joints [12]

Brakes [12]

Clutches [12]

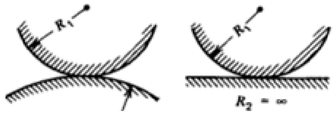


Artificial Biojoints (spherical bearings)

❑ Tipos de Contato e Aplicações

- A geometria do contato na interface pode ser categorizada em dois tipos: conforme e não-conforme.

- **Contato Não-Conforme**

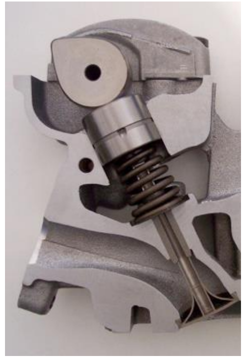


  - Superfícies em contato com curvaturas que **não** “combinam” ou “encaixam” uma com a outra;
  - Área de interação entre as superfícies bastante reduzida em comparação com as dimensões dos corpos em contato;
  - Distribuição dos carregamentos ocorre em uma área bastante reduzida, geralmente resultando em uma concentração localizada de alta pressão (~ GPa);
  - A pressão interfacial e as tensões concentradas no interior e na vizinhança da zona de contato são tipicamente muito maiores do que as tensões distribuídas na estrutura dos componentes;


Rolling element bearings

Gear tooth contact

Rail-wheel contact [13]



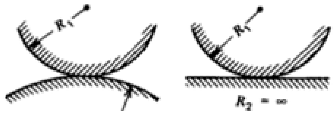
Cam/Followers

Artificial Biojoints [12]

Tipos de Contato e Aplicações

- A geometria do contato na interface pode ser categorizada em dois tipos: conforme e não-conforme.

- **<u>Contato Não-Conforme</u>**

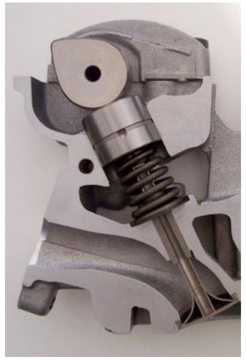


  - O problema interfacial localizado na vizinhança da zona de contato pode ser isolado, e a influência da deformação da estrutura dos componentes e condições de operação macroscópicas podem ser ignoradas da análise;
  - Portanto, problemas de contato não-conformes podem ser simplificados e resolvidos localmente considerando os corpos em contato como semi-espaços elásticos infinitos;
  - Deformações locais devidas predominantemente à compressão das superfícies em contato.

Rolling element bearings

Gear tooth contact

Rail-wheel contact [13]



Cam/Followers

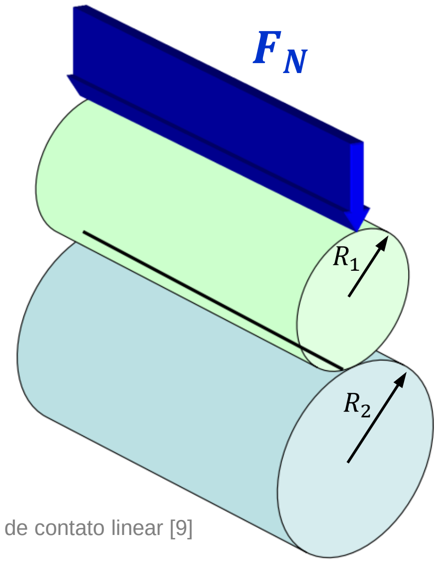
Artificial Biojoints [12]

Tipos de Contato e Aplicações

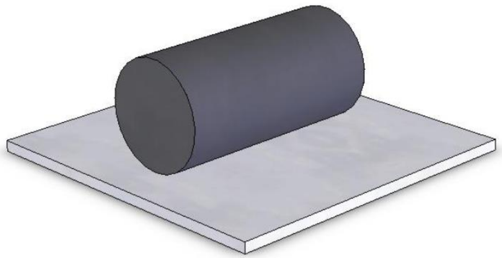
- Dependendo da disposição dos sólidos em contato **antes da aplicação dos carregamentos**, a **geometria local** da interface de **contatos não-conformes** pode ser simplificada para contatos do tipo linear ou pontual.

Contato Linear

- **Antes** do carregamento: linha de contato
- **Após** o carregamento: área de contato retangular



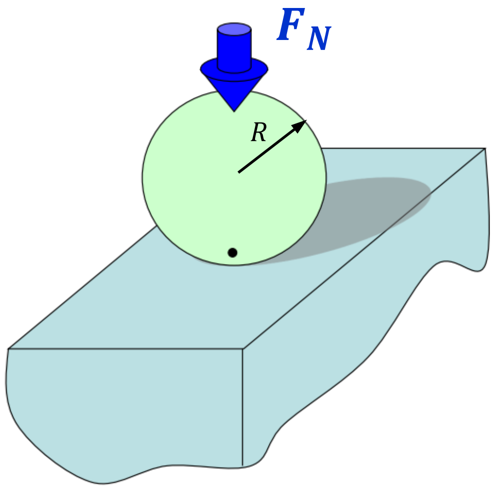
Exemplos de contato linear [9]



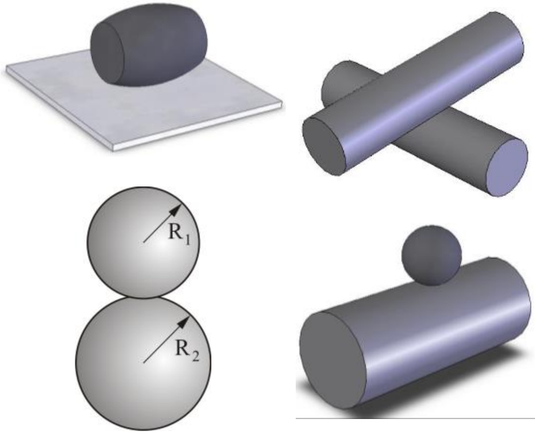
- Contato cilindro-plano
- Contato cilindro-cilindro paralelos

Contato Pontual

- **Antes** do carregamento: ponto de contato
- **Após** o carregamento: área de contato elíptica ou circular



Exemplos de contato pontual [9]

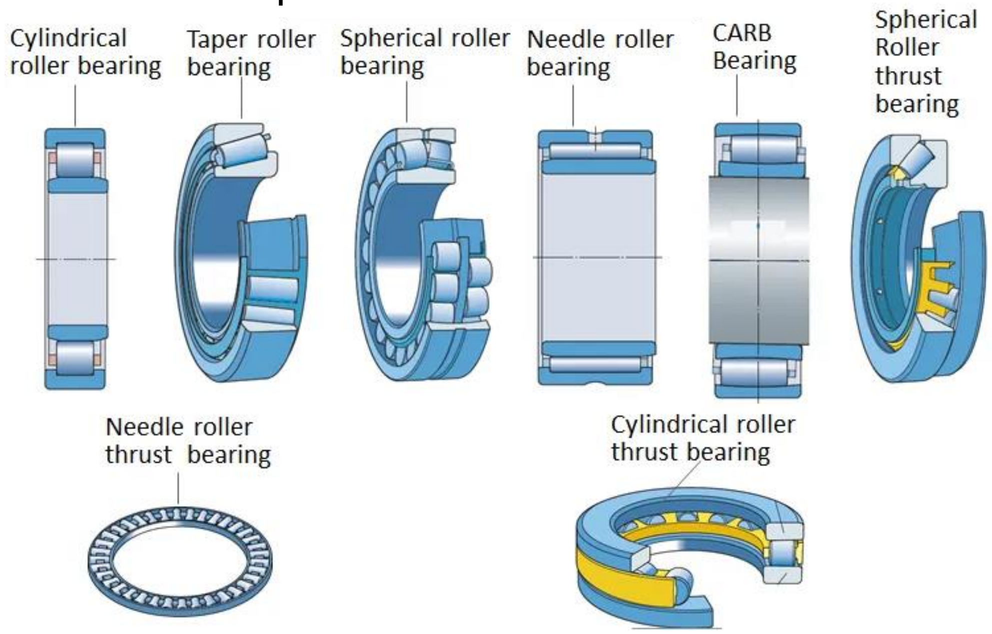


- Contato esfera-plano
- Contato esfera-esfera
- Contato esfera-cilindro
- Contato cilindro-cilindro cruzados

Tipos de Contato e Aplicações

- **Aplicação :: Mancais de Elementos Rolantes**
  - Contato linear e pontual lubrificado
  - Cinemática e dinâmica das partes móveis
  - Propriedades do lubrificante/graxas
  - Rugosidade das superfícies
  - Fadiga de contato

Tipos de Mancais de Rolos



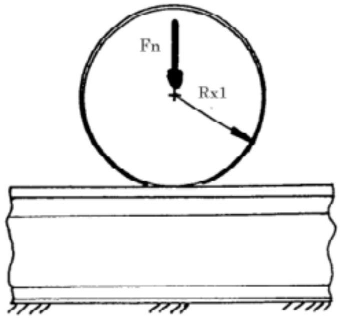
Mancais de elementos rolantes

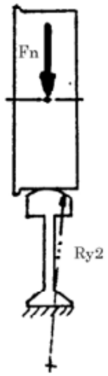
Franjas isocromáticas nos contatos rolos/pista de um rolamento

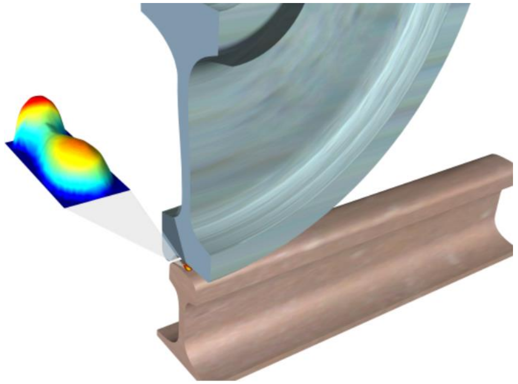
❑ Tipos de Contato e Aplicações

➢ Aplicação :: Sistema Roda-Trilho

- Contato pontual
- Cinemática e dinâmica
- Desgaste e controle do COF
- Fadiga de contato



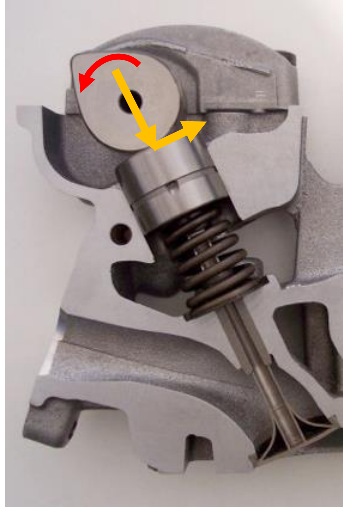


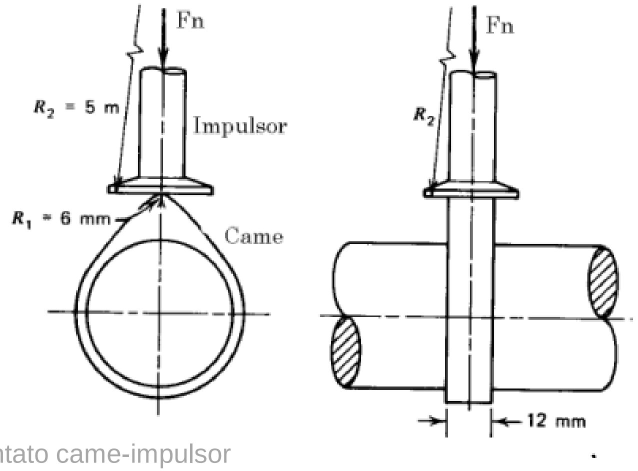


Contato roda-trilho [13-14]

➢ Aplicação :: Came-Impulsor

- Contato linear
- Cinemática e dinâmica das partes móveis
- Propriedades do lubrificante
- Rugosidade das superfícies
- Gripagem e controle do COF
- Ruído do motor

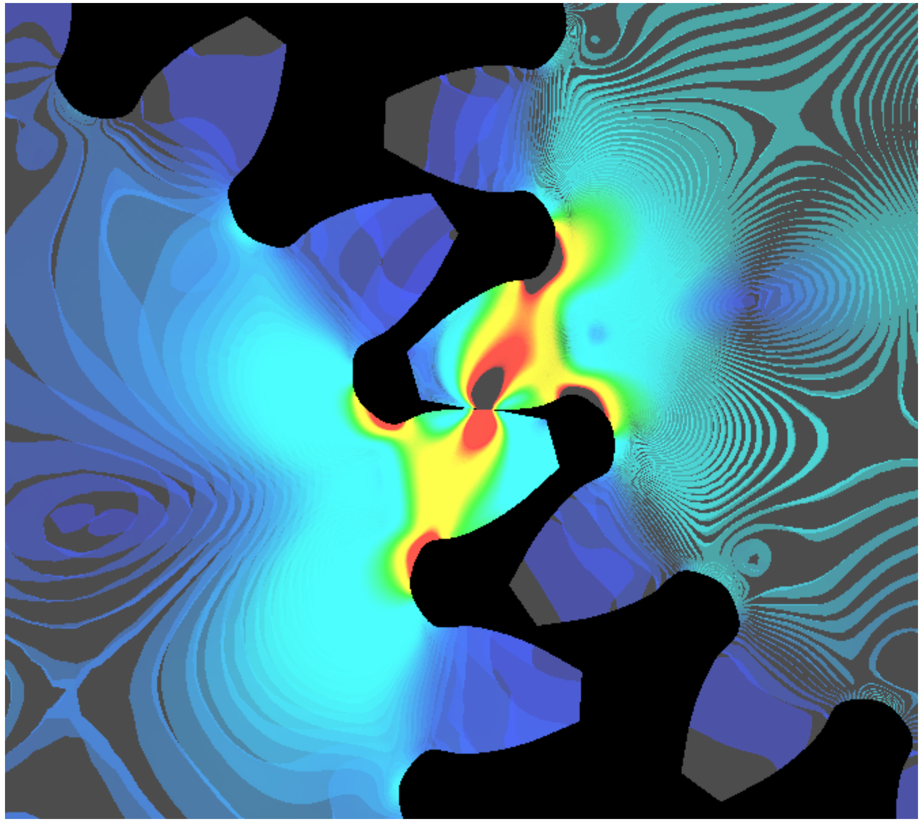




Contato came-impulsor

Tipos de Contato e Aplicações

- **Aplicação :: Engrenagens**
  - Contato linear
  - Geometria dos dentes
  - Cinemática e dinâmica
  - Distribuição de cargas
  - Propriedades do lubrificante
  - Rugosidade das superfícies
  - Fadiga de contato, micropitting, gripagem



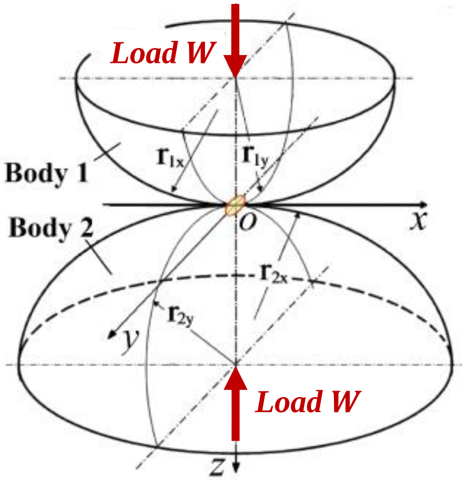
Conteúdo

Teoria do Contato de Hertz

- Heinrich Hertz desenvolveu, em 1880, um modelo para o **cálculo prático** da pressão interfacial, área de contato e deslocamento global relativo entre **sólidos de revolução** em contato.
  - Hertz estava estudando o fenômeno das franjas de interferência de Newton entre duas lentes de vidro (no Natal?!).

- Contato **normal** (ausência de carregamentos tangenciais – atrito) entre sólidos de revolução **elásticos**, **homogêneos** e **não rugosos**:
  - Inicialmente os sólidos estão em contato em um único ponto/linha (contato pontual/linear);
  - Quando solicitados por uma carga normal externa:
    - Deformam-se elasticamente na vizinhança do ponto/linha inicial de contato;
    - Originam uma área de contato de pequenas dimensões quanto comparadas com as dimensões dos corpos em contato.

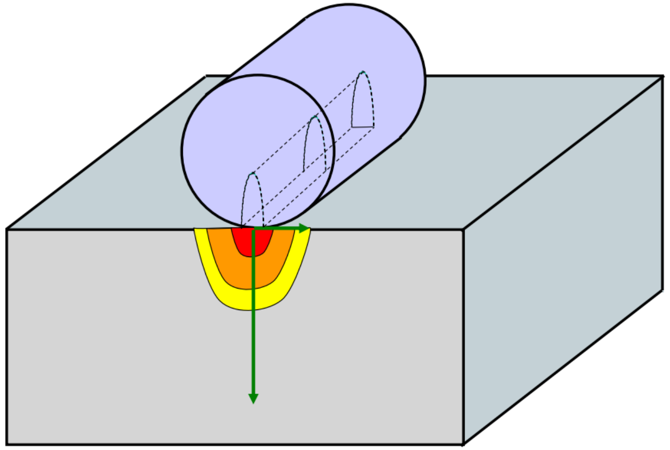
Heinrich Hertz (1857 – 1894)



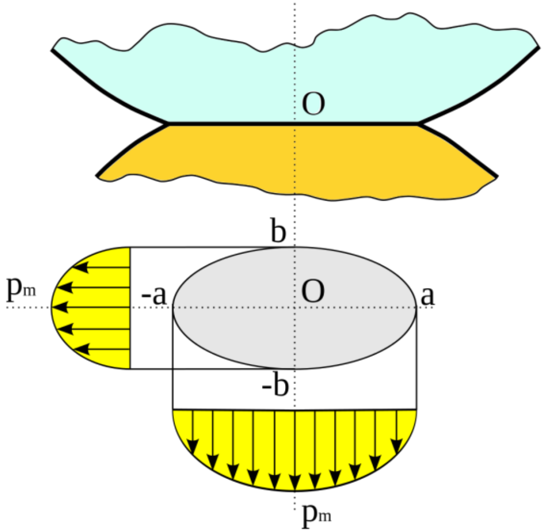
Contato normal entre dois elipsoides elásticos [12]

❑ Teoria do Contato de Hertz

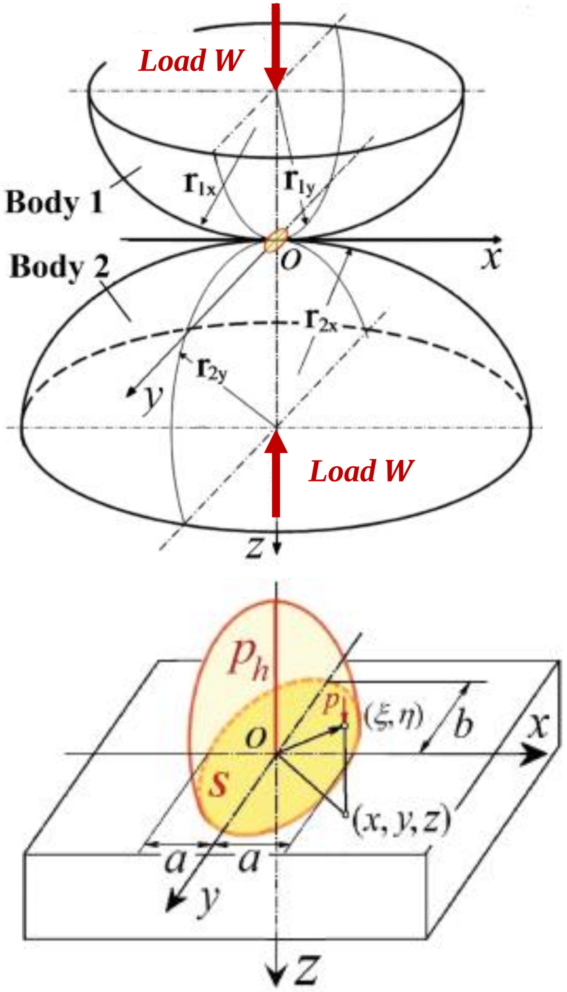
- O modelo de contato de Hertz permite o cálculo da:
  - A geometria da **área** de contato;
  - A distribuição da pressão na interface de contato (**pressão interfacial**);
  - Os campos de **deslocamentos**, **deformações** e **tensões** em ambos os sólidos na vizinhança da zona de contato.



Distribuição de tensões subsuperficiais para um contato linear [9]



Distribuição de pressões para um contato elíptico [8]

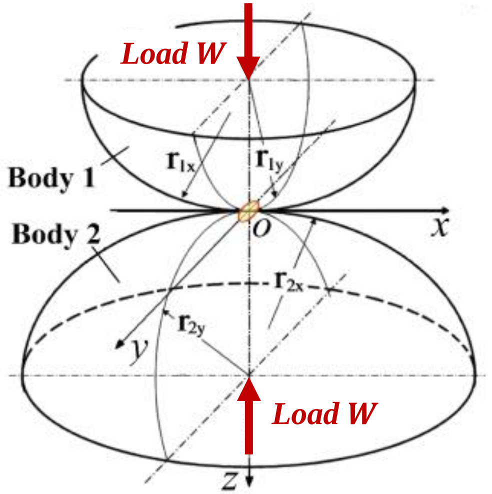


Contato normal entre dois elipsoides elásticos [12]

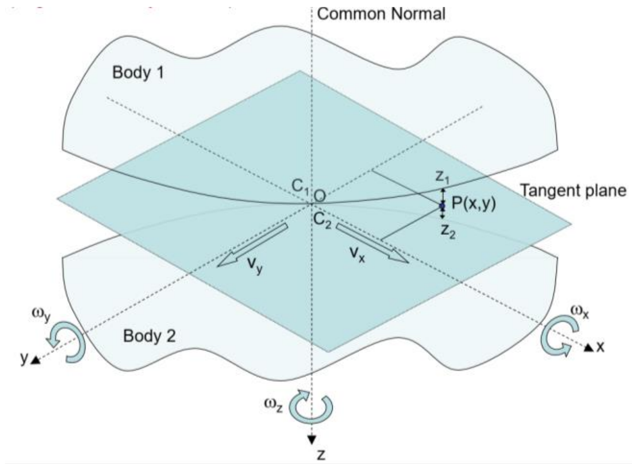
Teoria do Contato de Hertz

Hipóteses :: Geometria

- Os sólidos em contato são de **revolução** e **não-conformes** na interface de contato;
- As geometrias das superfícies na vizinhança da zona de contato podem ser descritas por funções matemáticas contínuas até a 2ª derivada (elipsóides);
- **Antes da aplicação do carregamento**, os sólidos se tocam num único ponto O (contato pontual) ou linha (contato linear);
    - O ponto inicial de contato O é a origem do sistema de coordenadas local $Oxyz$;
    - O **plano $\boldsymbol{Oxy}$ é tangente** a ambas as superfícies em contato em O;
    - O **eixo $\boldsymbol{Oz}$ é normal ao plano tangente**, com direção positiva para o interior do sólido inferior;
- Os eixos Ox e Oy podem ser ajustados adequadamente para serem paralelos as direções principais de curvatura, tal que $\boldsymbol{r_{1x}}$, $\boldsymbol{r_{1y}}$, $\boldsymbol{r_{2x}}$ e $\boldsymbol{r_{2y}}$ **são os raios de curvaturas principais dos sólidos** na vizinhança da zona de contato.



Contato normal entre dois elipsoides elásticos [12]

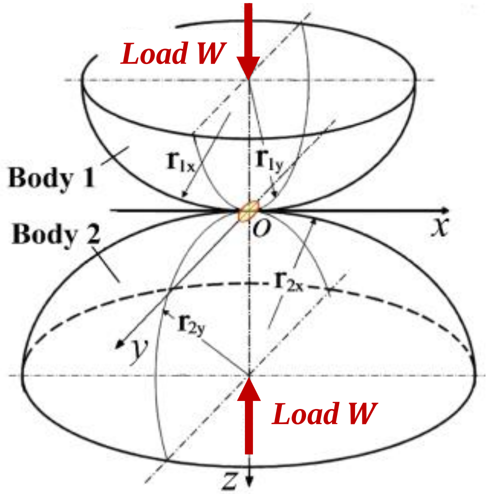


Sistema de coordenadas principal para a análise do contato [10]

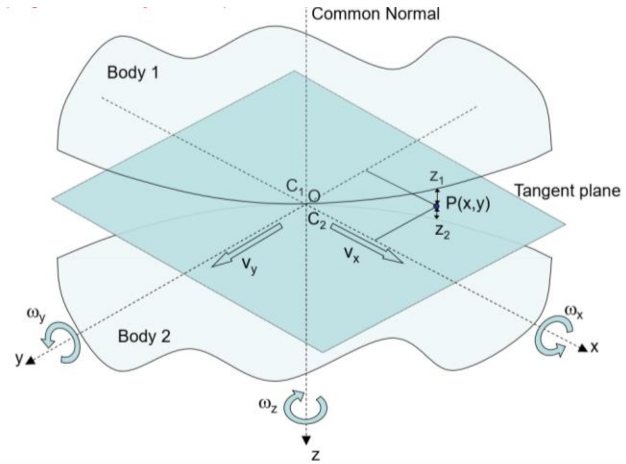
Teoria do Contato de Hertz

- **Hipóteses :: Material**
  - Os materiais dos sólidos são **homogêneos**, **isotrópicos** e **linear elásticos**, obedecendo a lei constitutiva de Hooke para pequenas deformações: $(\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{\upsilon_1})$ e $(\boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{\upsilon_2})$;
  - As superfícies dos sólidos na interface de contato são perfeitamente lisas (ausência rugosidade).

- **Hipóteses :: Carregamentos**
  - A linha de ação da força $\boldsymbol{W}$ **é normal ao plano tangente** e passa pelo ponto inicial de contato O;
  - Ausência de carregamentos tangenciais (atrito) e escorregamento relativo entre os sólidos (**somente rolamento puro é permitido**);
  - **Após a aplicação do carregamento normal,** os sólidos se deformam elasticamente, e a área de contato formada na interface é em geral **elíptica**, plana e paralela ao plano tangente;
  - As dimensões da área de contato são pequenas em comparação às dimensões dos raios de curvatura **dos sólidos** na vizinhança da zona de contato.



Contato normal entre dois elipsoides elásticos [12]

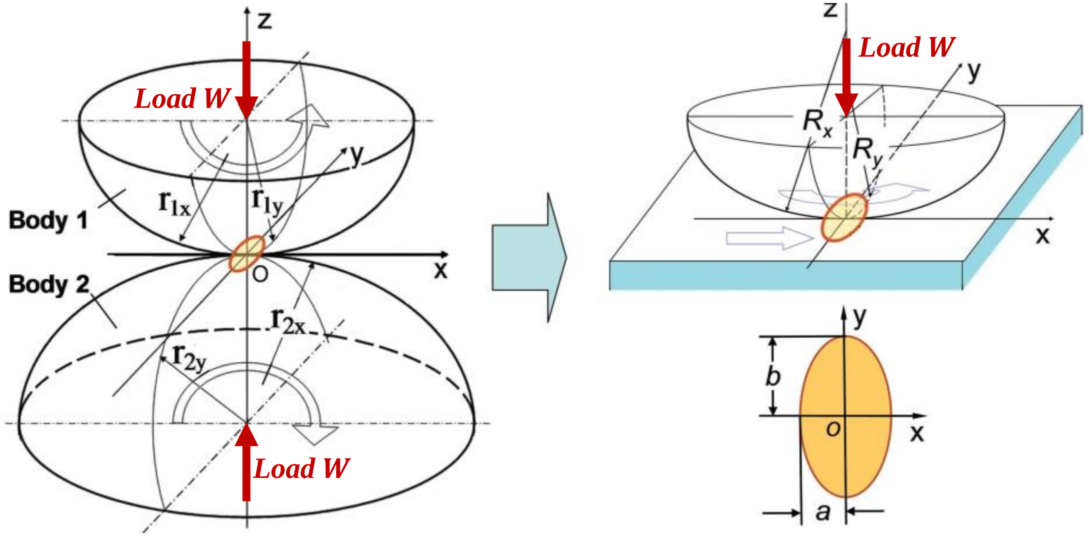


Sistema de coordenadas principal para a análise do contato [10]

Teoria do Contato de Hertz

Formulação Matemática do Problema

- O contato entre dois elipsóides elásticos pode ser simplificado para um contato entre uma superfície plana rígida e um **elipsóide elástico equivalente com raios de curvatura R_x e R_y e módulo de elasticidade efetivo E'**.



Modelo de equivalência para um contato pontual arbitrário [12]

$r_{1x}, r_{1y}, r_{2x}, r_{2y}$

$(E_1, \upsilon_1, E_2, \upsilon_2)$

$$R_x = \left(\frac{r_{1x} r_{2x}}{r_{1x} + r_{2x}}\right) \quad R_y = \left(\frac{r_{1y} r_{2y}}{r_{1y} + r_{2y}}\right)$$

Raios de curvatura equivalentes

$$E' = 2\left(\frac{1-\upsilon_1{}^2}{E_1} + \frac{1-\upsilon_2{}^2}{E_2}\right)^{-1} = 2E^*$$

Módulo de elasticidade efetivo (E')
Módulo de elasticidade equivalente (E^*)

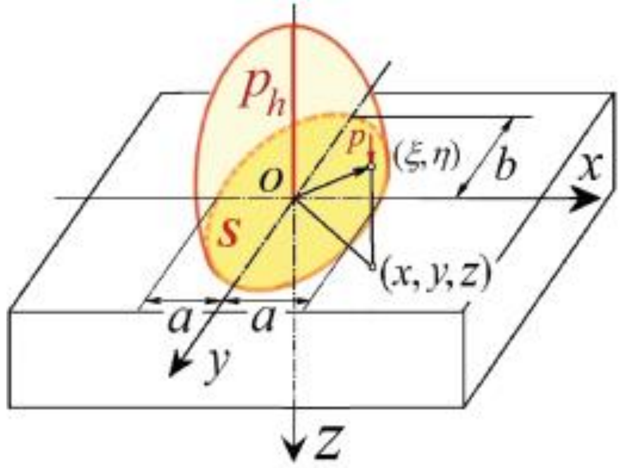
Teoria do Contato de Hertz

Formulação Matemática do Problema

Distribuição da pressão interfacial

- À medida que o carregamento é aplicado, os pontos que entram em contato de ambas as superfícies são pontos situados à mesma distância entre si.
- **Admite-se** que a área de contato (S) é em geral elíptica e a distribuição da pressão interfacial $p(x, y)$ nessa área tem a forma semi-elipsoidal

$$p(x,y) = p_h\sqrt{1-\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}}, \qquad (x,y) \in S \mid \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} < 1 \tag{1}$$



Distribuição da pressão interfacial em uma área de contato elíptica [12]

Equilíbrio de forças:

$$W = \iint_S p(x,y)dxdy = \iint_S p_h\sqrt{1-\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}}dxdy \rightarrow \quad p_h = \frac{3W}{2\pi ab} \tag{2}$$

a, b raios da elipse de contato
p_h pressão máxima de Hertz

Teoria do Contato de Hertz

Formulação Matemática do Problema

- **Geometria da interface de contato no <u>estado deformado</u>:**

$$\underbrace{z(x,y)}_{\text{Distância entre dois pontos de cada superfície no estado deformado}} = \underbrace{Ax^2 + By^2}_{\text{Geometria no estado não deformado}} - \overbrace{\delta}^{\text{Deslocamento global relativo dos centros dos sólidos}} + \underbrace{\left[u_{z1}^{p}(x,y) + u_{z2}^{p}(x,y)\right]}_{\text{Deslocamentos elásticos normais}} \geq 0 \qquad (3)$$

$$A = \frac{1}{2R_x} = \left(\frac{1}{r_{1x}} + \frac{1}{r_{2x}}\right)$$

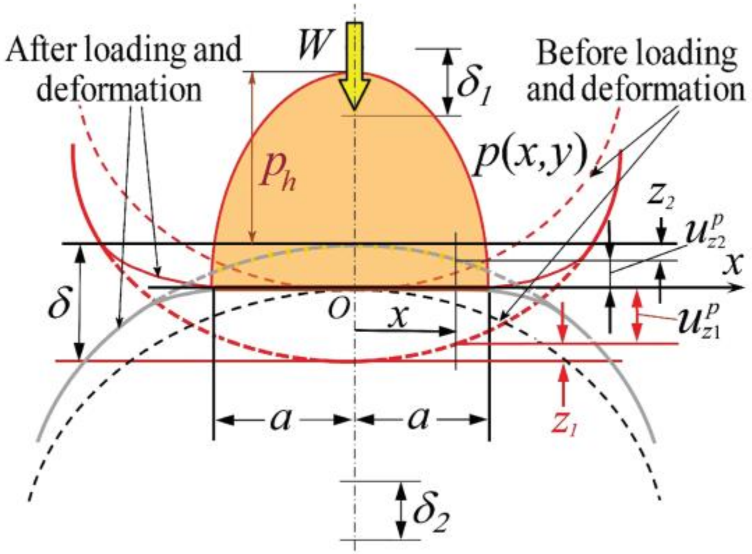
$$B = \frac{1}{2R_y} = \left(\frac{1}{r_{1y}} + \frac{1}{r_{2y}}\right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{R_y}{R_x} \geq 1$$

Raios de curvatura equivalentes

Inequação Fundamental do Contato

$$\begin{cases} z(x,y) = 0, & \textbf{dentro} \text{ da área de contato} \\ z(x,y) > 0, & \textbf{fora} \text{ da área de contato} \end{cases} \qquad (4)$$



Contato entre dois elipsoides elásticos antes e depois de deformados [12]

❑ Teoria do Contato de Hertz

➢ Solução de Hertz

- Hertz verificou que o problema de elasticidade representado pela inequação fundamental de contato (Eq. 3) é **análogo ao problema do potencial eletrostático**.

- O campo dos deslocamentos totais normais na interface de contato é dado pela **solução de Boussinesq** baseada na teoria do semi-espaço elástico:

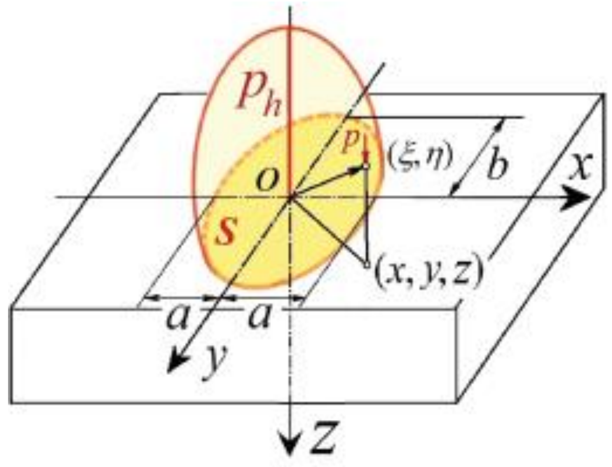
$$\boxed{u_z^p(x,y) = u_{z1}^p(x,y) + u_{z2}^p(x,y) = \frac{1}{\pi E^*}(L - Mx^2 - Ny^2)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\upsilon_1{}^2}{E_1} + \frac{1-\upsilon_2{}^2}{E_2}$$

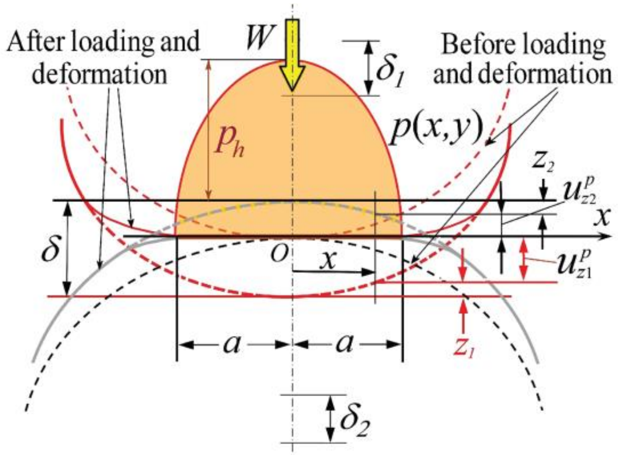
módulo de Young equivalente

Parâmetros *L*, *M* e *N*:	***Integrais Elípticos***
$L = \pi\ a\ p_0\ K\ (e)$	$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \qquad a < b$
$M = \frac{\pi\ a\ p_0}{e^2\ b^2}\left[K\ (e) - E\ (e)\right]$	$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}\ d\theta$
$N = \frac{\pi\ a\ p_0}{e^2\ b^2}\left[\frac{b^2}{a^2} E\ (e) - K\ (e)\right]$	$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}}$

$\boldsymbol{E(e)}, \boldsymbol{K(e)}$: Integrais elípticas, sem solução analítica, solução numérica no Matlab



Distribuição da pressão interfacial em uma área de contato elíptica [12]



Contato entre dois elipsoides elásticos antes e depois de deformados [12]

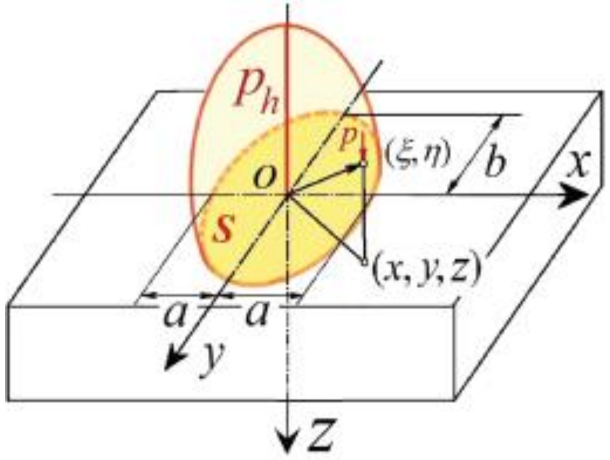
Teoria do Contato de Hertz

Solução de Hertz

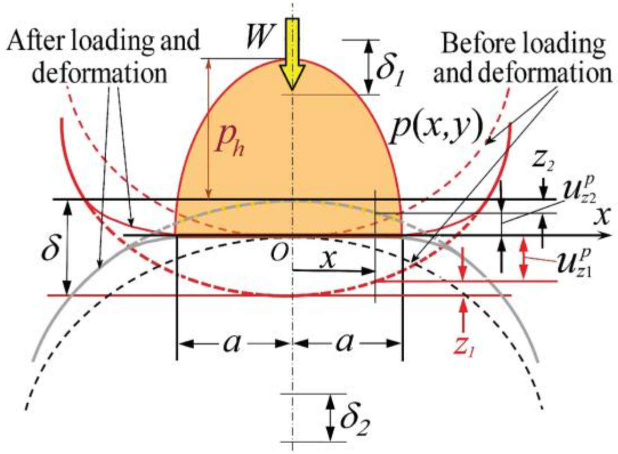
- O deslocamento relativo dos centros dos sólidos ($\boldsymbol{\delta}$) e os raios da elipse de contato ($\boldsymbol{a, b}$) são obtidos substituindo a solução de Boussinesq (Eq. 5) na equação fundamental do contato (Eq. 3) para os **pontos situados no interior da elipse de contato.**

$$\begin{cases} \delta - Ax^2 - By^2 = u_z^p(x,y) \\ \delta - Ax^2 - By^2 = \dfrac{1}{\pi E^*}\left(L - Mx^2 - Ny^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta = \dfrac{L}{\pi E^*} = \dfrac{p_h}{E^*} a K(e)} \\ \boldsymbol{A = \dfrac{M}{\pi E^*} = \dfrac{p_h}{E^*}\dfrac{a}{e^2 b^2}\left[K(e) - E(e)\right]} \\ \boldsymbol{B = \dfrac{N}{\pi E^*} = \dfrac{p_h}{E^*}\dfrac{a}{e^2 b^2}\left[\dfrac{b^2}{a^2}E(e) - K(e)\right]} \end{cases} \quad (6)$$



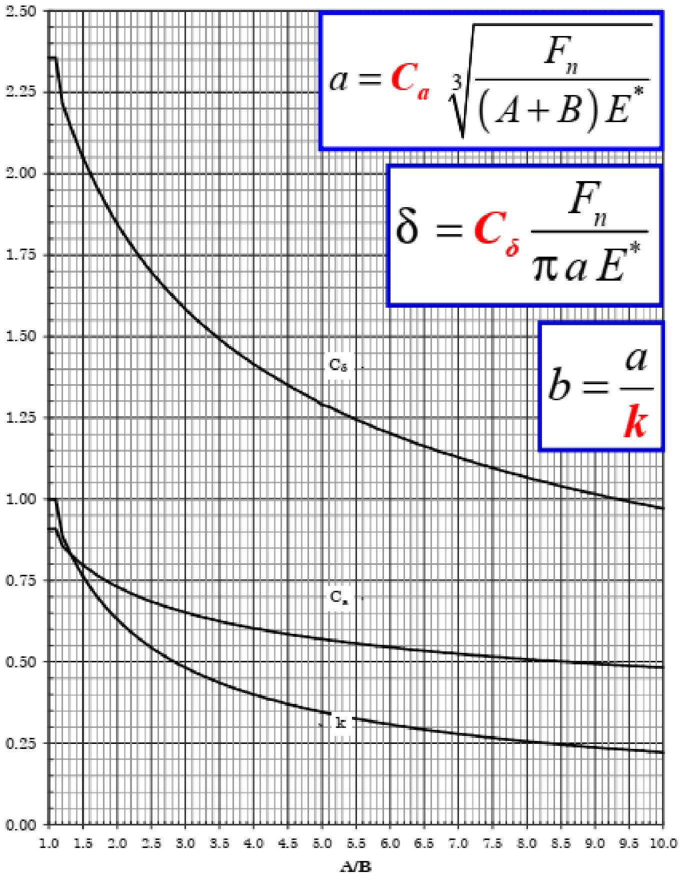
Distribuição da pressão interfacial em uma área de contato elíptica [12]



Contato entre dois elipsoides elásticos antes e depois de deformados [12]

❑ Teoria do Contato de Hertz

➢ **Solução de Hertz por Tabelas e Ábaco**



$$a = C_a \sqrt[3]{\frac{F_n}{(A+B)E^*}}$$

$$\delta = C_\delta \frac{F_n}{\pi a E^*}$$

$$b = \frac{a}{k}$$

A/B	k	1/k	e	C_a	C_δ
1,0	1,000	1,000	0,000	0,909	2,356
1,1	1,000	1,000	0,000	0,909	2,356
1,2	0,886	1,129	0,464	0,856	2,215
1,3	0,840	1,190	0,543	0,834	2,155
1,4	0,799	1,252	0,601	0,815	2,100
1,5	0,763	1,311	0,646	0,797	2,049
1,6	0,731	1,368	0,682	0,782	2,003
1,7	0,702	1,425	0,712	0,767	1,959
1,8	0,676	1,479	0,737	0,754	1,919
1,9	0,652	1,534	0,758	0,742	1,882
2,0	0,631	1,585	0,776	0,731	1,846
2,1	0,611	1,637	0,792	0,721	1,813
2,2	0,592	1,689	0,806	0,711	1,782
2,3	0,575	1,739	0,818	0,702	1,753
2,4	0,559	1,789	0,829	0,693	1,725
2,5	0,544	1,838	0,839	0,685	1,699
2,6	0,530	1,887	0,848	0,678	1,674
2,7	0,517	1,934	0,856	0,671	1,650
2,8	0,505	1,980	0,863	0,664	1,627
2,9	0,493	2,028	0,870	0,658	1,605
3,0	0,483	2,070	0,876	0,652	1,584
3,1	0,472	2,119	0,882	0,646	1,564
3,2	0,463	2,160	0,886	0,640	1,545
3,3	0,453	2,208	0,892	0,635	1,527
3,4	0,445	2,247	0,896	0,630	1,509
3,5	0,436	2,294	0,900	0,625	1,492
3,6	0,428	2,336	0,904	0,620	1,475
3,7	0,421	2,375	0,907	0,616	1,460
3,8	0,413	2,421	0,911	0,612	1,444
3,9	0,407	2,457	0,913	0,607	1,430
4,0	0,400	2,500	0,917	0,603	1,415
4,1	0,394	2,538	0,919	0,600	1,401
4,2	0,387	2,584	0,922	0,596	1,388
4,3	0,382	2,618	0,924	0,592	1,375
4,4	0,376	2,660	0,927	0,589	1,363
4,5	0,370	2,703	0,929	0,585	1,350
4,6	0,365	2,740	0,931	0,582	1,338
4,7	0,360	2,778	0,933	0,579	1,327
4,8	0,355	2,817	0,935	0,576	1,316
4,9	0,351	2,849	0,936	0,573	1,305
5,0	0,346	2,890	0,938	0,570	1,290

A/B	k	1/k	e	C_a	C_δ
5,1	0,342	2,924	0,940	0,567	1,284
5,2	0,337	2,967	0,942	0,564	1,274
5,3	0,333	3,003	0,943	0,562	1,264
5,4	0,329	3,040	0,944	0,559	1,254
5,5	0,325	3,077	0,946	0,557	1,245
5,6	0,322	3,106	0,947	0,554	1,236
5,7	0,318	3,145	0,948	0,552	1,227
5,8	0,314	3,185	0,949	0,549	1,218
5,9	0,311	3,215	0,950	0,547	1,210
6,0	0,308	3,247	0,951	0,545	1,202
6,1	0,304	3,289	0,953	0,543	1,194
6,2	0,301	3,322	0,954	0,540	1,186
6,3	0,298	3,356	0,955	0,538	1,178
6,4	0,295	3,390	0,955	0,536	1,170
6,5	0,292	3,425	0,956	0,534	1,163
6,6	0,289	3,460	0,957	0,532	1,156
6,7	0,287	3,484	0,958	0,530	1,148
6,8	0,284	3,521	0,959	0,528	1,141
6,9	0,281	3,559	0,960	0,527	1,135
7,0	0,279	3,584	0,960	0,525	1,128
7,1	0,276	3,623	0,961	0,523	1,121
7,2	0,274	3,650	0,962	0,521	1,115
7,3	0,271	3,690	0,963	0,520	1,108
7,4	0,269	3,717	0,963	0,518	1,102
7,5	0,267	3,745	0,964	0,516	1,096
7,6	0,264	3,788	0,965	0,515	1,090
7,7	0,262	3,817	0,965	0,513	1,084
7,8	0,260	3,846	0,966	0,511	1,078
7,9	0,258	3,876	0,966	0,510	1,073
8,0	0,256	3,906	0,967	0,508	1,067
8,1	0,254	3,937	0,967	0,507	1,061
8,2	0,252	3,968	0,968	0,505	1,056
8,3	0,250	4,000	0,968	0,504	1,051
8,4	0,248	4,032	0,969	0,503	1,045
8,5	0,246	4,065	0,969	0,501	1,040
8,6	0,244	4,098	0,970	0,500	1,035
8,7	0,243	4,115	0,970	0,498	1,030
8,8	0,241	4,149	0,971	0,497	1,025
8,9	0,239	4,184	0,971	0,496	1,020
9,0	0,238	4,202	0,971	0,495	1,016
9,1	0,236	4,237	0,972	0,493	1,011
9,2	0,234	4,274	0,972	0,492	1,006
9,3	0,233	4,292	0,972	0,491	1,002
9,4	0,231	4,329	0,973	0,490	0,997
9,5	0,230	4,348	0,973	0,488	0,993
9,6	0,228	4,386	0,974	0,487	0,988
9,7	0,227	4,405	0,974	0,486	0,984
9,8	0,225	4,444	0,974	0,485	0,980
9,9	0,224	4,464	0,975	0,484	0,976
10,0	0,222	4,505	0,975	0,483	0,972

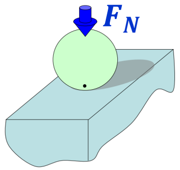
➢ **Soluções Particulares**

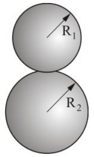
- Contato Circular

$$r_{1x} = r_{1y}$$

$$r_{2x} = r_{2y}$$

$$\frac{A}{B} = 1$$

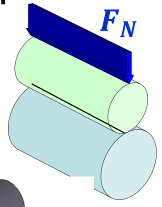


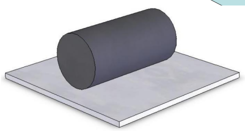


- Contato Linear

$$r_{1y}, r_{2y} \to \infty$$

$$\frac{A}{B} \to \infty$$





Teoria do Contato de Hertz

Roteiro de Solução

1) Dados

- Geometria: $r_{1x}, r_{1y}, r_{2x}, r_{2y}$
- Materiais: E_1, υ_1, E_2, υ_2
- Força Normal: W

2) Cálculo do módulo de Young equivalente

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-{\upsilon_1}^2}{E_1} + \frac{1-{\upsilon_2}^2}{E_2}$$

3) Calcular curvaturas

$$A = \frac{1}{R_X} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{X1}} + \frac{1}{R_{X2}}\right)$$

$$B = \frac{1}{R_Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{Y1}} + \frac{1}{R_{Y2}}\right)$$

Perfil **convexo**: curvatura **positiva**
Perfil **côncavo**: curvatura **negativa**

4) Tabelas e Ábacos: C_a, C_δ, k (em função de A/B)

5) Determinar a:

$$a = C_a \sqrt[3]{\frac{F_n}{(A+B)E^*}}$$

6) Determinar b:

$$b = \frac{a}{k}$$

7) Determinar δ:

$$\delta = C_\delta \frac{F_n}{\pi a E^*}$$

8) Determinar p_0 **e** p_m:

$$p_m = \frac{F_n}{\pi a b} \qquad p_0 = \frac{3}{2}\frac{F_n}{\pi a b}$$

Software HertzWin (free):
https://www.vinksda.com/toolkit-mechanical-calculations/hertz-contact-stress-calculations/

Tribology ABC:
https://www.tribology-abc.com/sub10.htm

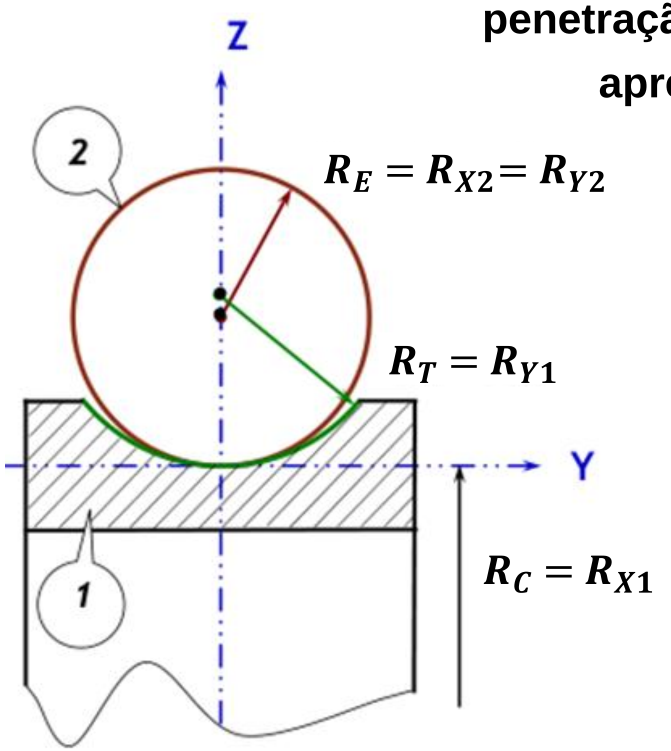
❑ Teoria do Contato de Hertz

- **Exemplo de Aplicação**

Parâmetro	Unidade	Corpo 2	Corpo 1
F_N	[N]	1000	
E_i	[Pa]	$200\ 10^{9}$	$200\ 10^{9}$
ν_i	[/]	0.29	0.29
R_{Xi}	[m]	$12\ 10^{-3}$	$60\ 10^{-3}$
R_{Yi}	[m]	$12\ 10^{-3}$	$12.5\ 10^{-3}$

Contacto seco	
Po	1,1809E+09
Pm	7,8725E+08
a	2,1343E-04
b	1,8944E-03
Ac	1,2702E-06
δ	8,2591E-06

Calcule a pressão máxima de Hertz p_0 e a penetração δ para o rolamento apresentado abaixo



Tabelas e Ábacos

30,000	0,11266	0,99363	3,57788	1,01956	0,37993	0,60463	0,98082
A/B	k	e	K(e)	E(e)	C_a	C_δ	C_σ

Conteúdo

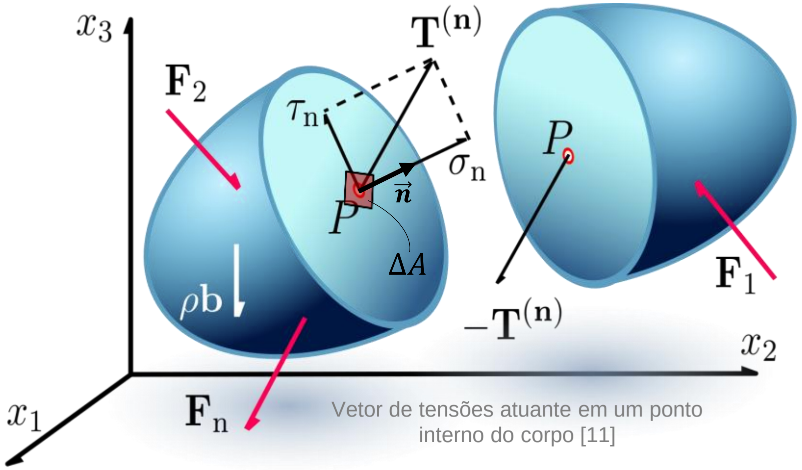
Tensões no Interior dos Sólidos

Estado de Tensão

- Os carregamentos externos atuantes em um corpo são transmitidos para todos os pontos no interior do mesmo na forma **esforços internos** (forças e momentos).

- A força interna $\Delta\vec{\boldsymbol{F}}$ atuante em um pequeno elemento de área ΔA, definido pelo versor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$, em torno de um dado ponto P do corpo, é representada pelo **vetor de tensões**:

$$\vec{\boldsymbol{T}} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{F}}}{\Delta A} = \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}}{dA}$$



Vetor de tensões atuante em um ponto interno do corpo [11]

- O vetor de tensões pode ser decomposto em duas componentes, uma na direção normal e outra na direção tangente ao plano definido por $\vec{\boldsymbol{n}}$ em P:

$$\vec{\boldsymbol{T}} = (\sigma_n)\vec{\boldsymbol{n}} + (\tau_n)\vec{\boldsymbol{\tau}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_n = \dfrac{dF_n}{dA} & \text{Tensão normal} \\ \tau_n = \dfrac{dF_t}{dA} & \text{Tensão tangencial (cisalhamento)} \end{cases}$$

Tensões no Interior dos Sólidos

Estado de Tensão

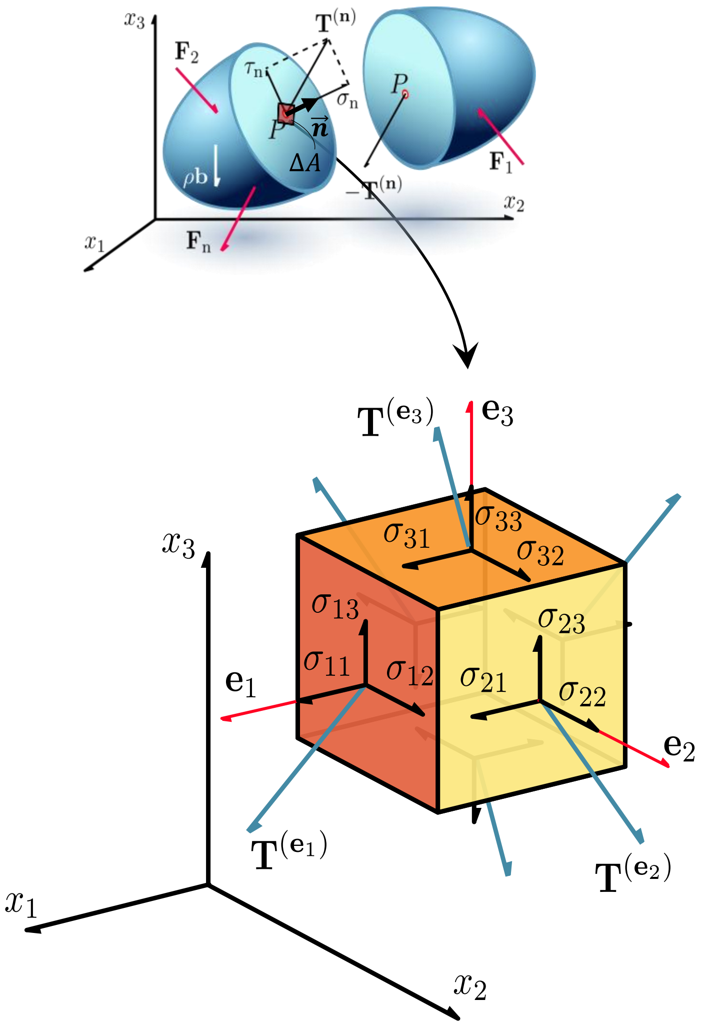
- O vetor de tensões pode ser expresso em termos do **tensor das tensões** $\vec{\vec{\sigma}}$:

$$\vec{\boldsymbol{T}} = [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \quad , \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- O tensor das tensões define completamente o estado de tensão em um dado ponto do corpo. Esse tensor é, em geral, simétrico ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$).

- O tensor das tensões é uma **grandeza física**, e como tal, não **depende do sistema de coordenadas** escolhido para a sua representação.

- Somente as **componentes** do tensor das tensões dependem da orientação do sistema de coordenadas adotado.



Componentes do tensor das tensões de um ponto interno do corpo [11]

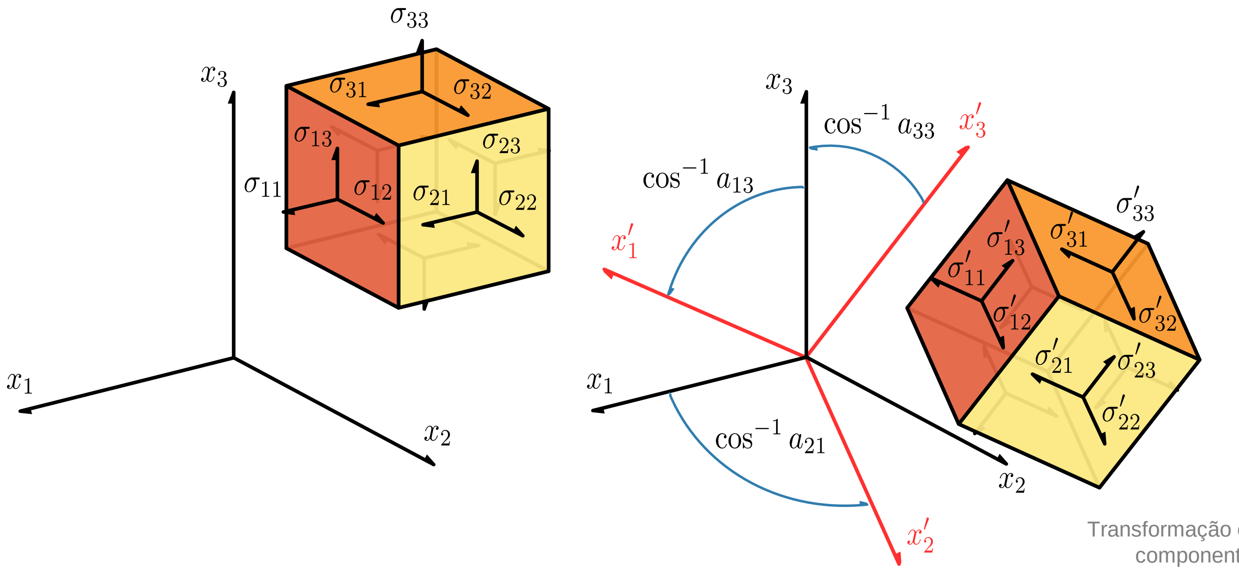
❑ Tensões no Interior dos Sólidos

➢ Estado de Tensão

- Conhecendo o tensor das tensões expresso em um sistema de coordenadas $Oxyz$, é possível representá-lo em relação a qualquer outro sistema de coordenadas $Ox'y'z'$ através da transformação:

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}][\boldsymbol{\sigma}][\boldsymbol{A}]$$, onde $[\boldsymbol{A}]$ é matriz de transformação entre $Oxyz$ e $Ox'y'z'$

- O círculo de Mohr é uma representação gráfica dessa transformação

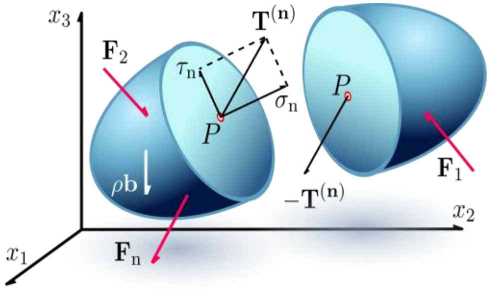


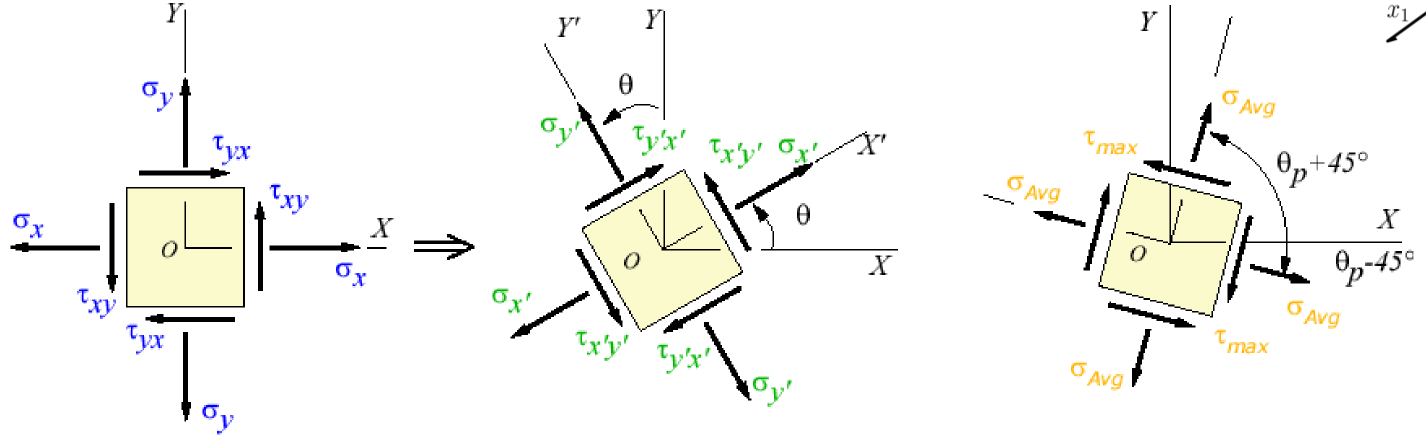
Transformação entre sistemas de coordenadas das componentes do tensor das tensões [11]

Tensões no Interior dos Sólidos

Estado de Tensão

- É possível demonstrar que **cada ponto** de um corpo solicitado possui ao menos três planos cujas **tensões de cisalhamento são nulas** (apenas tensões normais atuam nos respectivos planos).
- Essas tensões normais recebem o nome de **tensões principais**, e as respectivas direções são denominadas **direções principais**.
  - Autovalores de $[\boldsymbol{\sigma}]$: tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ $\rightarrow$ $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
  - Autovetores de $[\boldsymbol{\sigma}]$: direções principais $(\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \vec{\boldsymbol{n}}_3)$





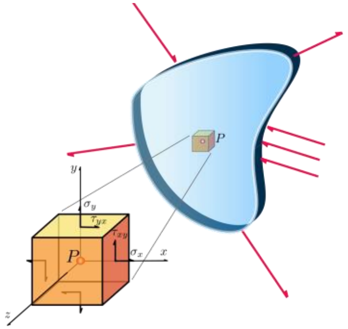
Stresses at given coordinate system Stresses transformed to another coordinate Maximum shear stress

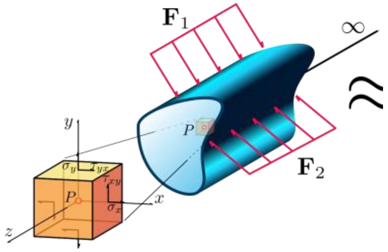
❑ Tensões no Interior dos Sólidos

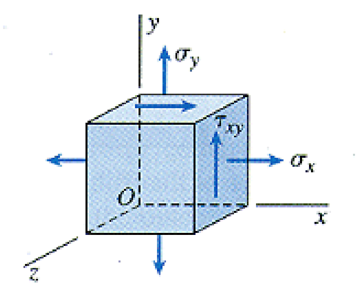
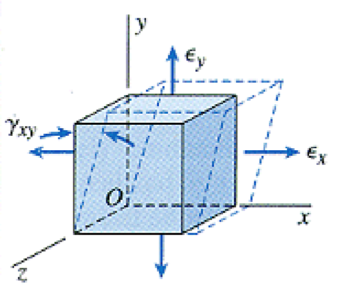
➢ Estado de Tensão

- Estado plano de tensões:
    - Vetores de tensões atuantes em apenas um plano particular da estrutura;
    - Tensor das tensões bidimensional;
    - Ex. placas planas finas.

- Estado plano de deformações:
    - Utilizado geralmente quando uma dimensão do corpo é muito maior do que as outras dimensões;
    - Deformações na direção da maior dimensão são desprezíveis.
    - Tensão normal na direção de maior dimensão não é, necessariamente, nula.



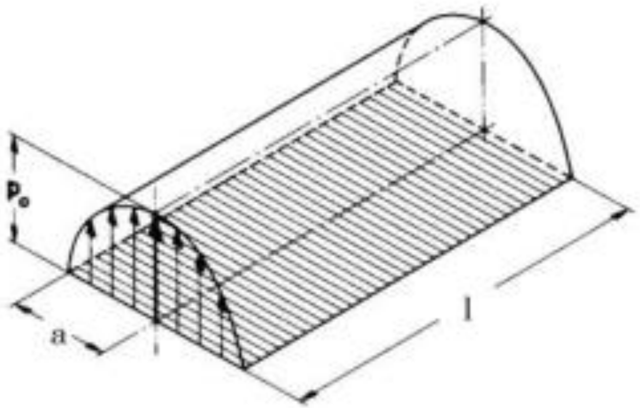


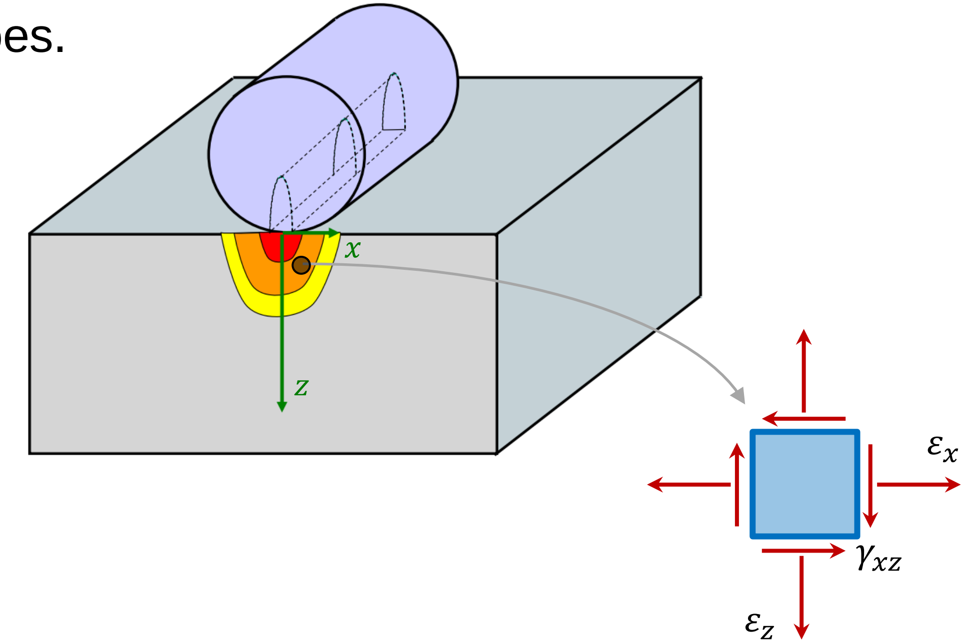
	Plane stress	Plane strain
		
Stresses	$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y, and τ_{xy} may have nonzero values	$\tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y, σ_z, and τ_{xy} may have nonzero values
Strains	$\gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, and γ_{xy} may have nonzero values	$\epsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y, and γ_{xy} may have nonzero values

Estado de tensões e deformações característicos do estado plano de tensões e deformações [11-12]

❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Linear

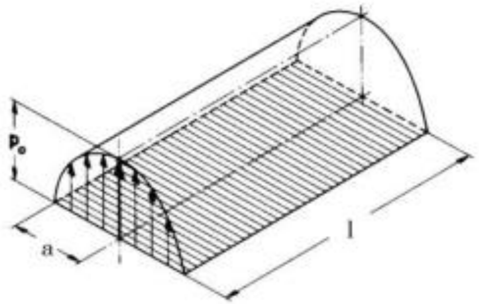
- A partir da teoria de Boussinesq, é possível definir o estado de tensão em qualquer ponto no interior dos sólidos em contato.
- No caso de contato linear, admite-se que cada sólido está submetido a um **estado plano de deformações**.
- Existência de solução analítica para as tensões.

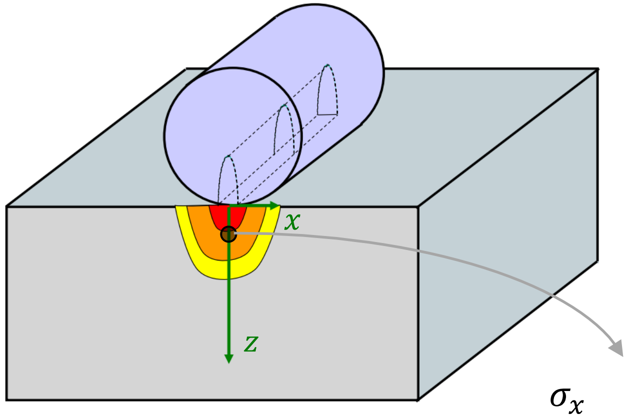


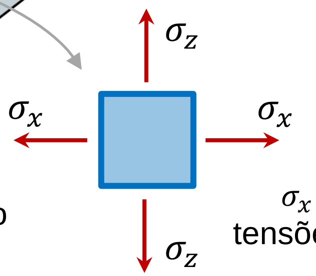


Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Linear

- **Tensões Principais** ao longo de Oz no centro do contato ($x = 0$)

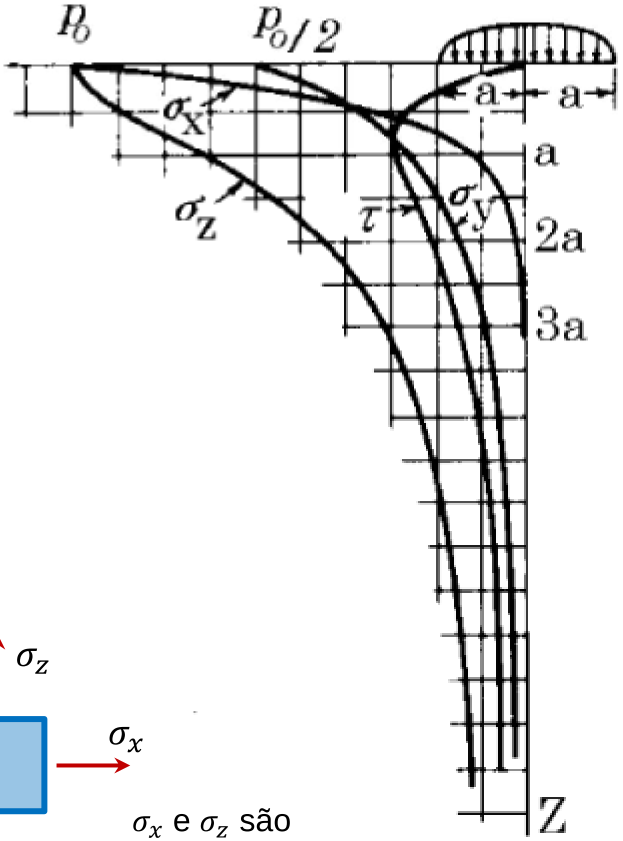






Estado de tensão ao longo de Oz no centro do contato

σ_x e σ_z são tensões principais



$$\sigma_{xx} = -a\ A\ E^* \left[\frac{\left(\sqrt{1+(Z)^2} - Z\right)^2}{\sqrt{1+(Z)^2}} \right]$$

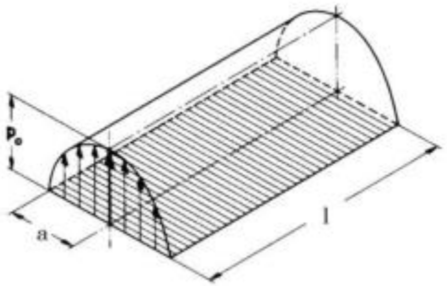
$$\sigma_{yy} = -a\ A\ E^*\ 2\nu \left(\sqrt{1+(Z)^2} - Z\right)$$

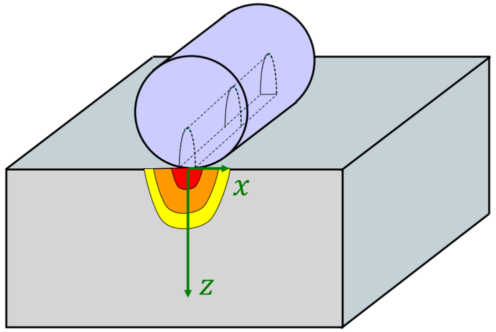
$$\sigma_{zz} = -a\ A\ E^* \frac{1}{\sqrt{1+(Z)^2}}$$

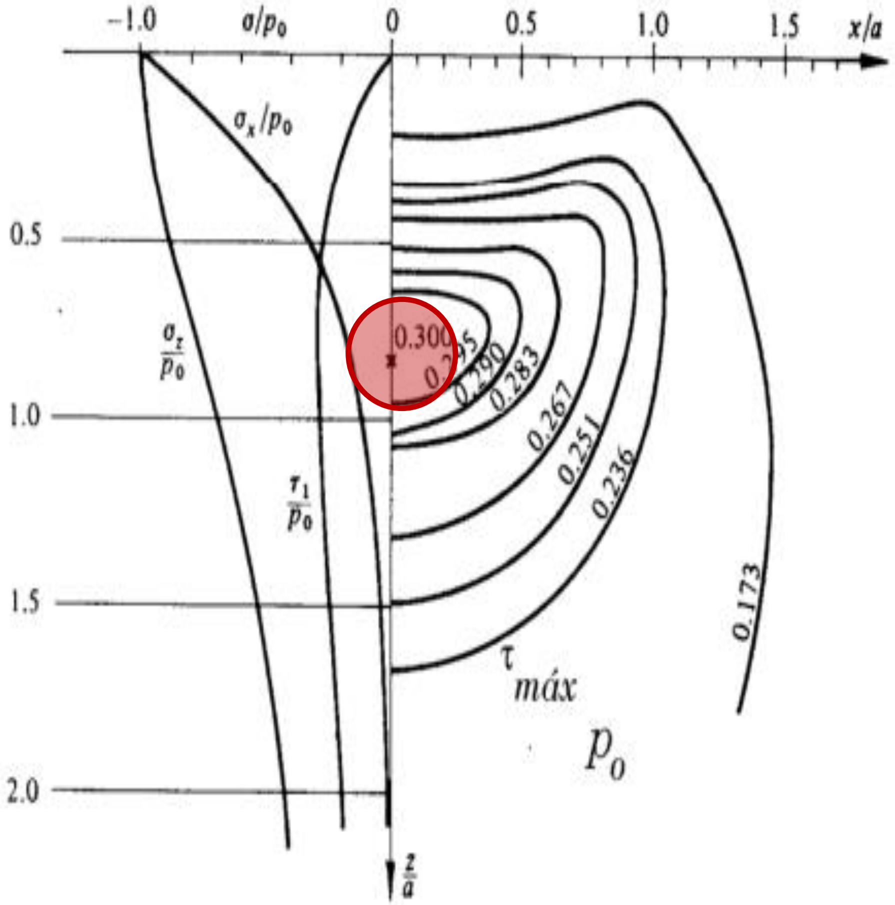
$$\tau_{xz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

❑ Tensões no Interior dos Sólidos – <u>Contato Linear</u>

➢ **<u>Tensões Principais</u> ao longo de Oz no centro do contato ($x = 0$)**







- A **tensão de cisalhamento máxima** atinge valor máximo na profundidade: $Z_s = 0.7861a$

- Nesta profundidade, tem-se:

$$\tau_{max} = 0.30\, aAE^* = 0.30\, p_0$$
$$\sigma_{VM}^{max} = 0.27\, aAE^* = 0.27\, p_0$$

❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Linear

- **Tensões de Cisalhamento Ortogonais**
  - Tensões de cisalhamento τ_{xz} (e τ_{zx}) que atuam em planos perpendiculares ao eixo Oz.
  - Tensões de cisalhamento ortogonais são **nulas ao longo do eixo Oz no centro do contato**.
  - Tensões de cisalhamento ortogonais são **máximas, em módulo, nas extremidades** da área de contato.

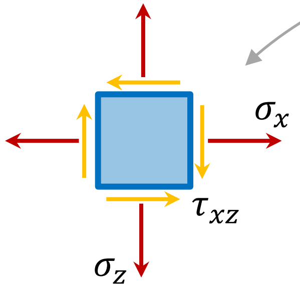
$$\tau_{xz} = -a\ A\ E^{*}\ \frac{z^2\ (M-N)}{M\ N\sqrt{(M+N)^2-4a^2}}$$

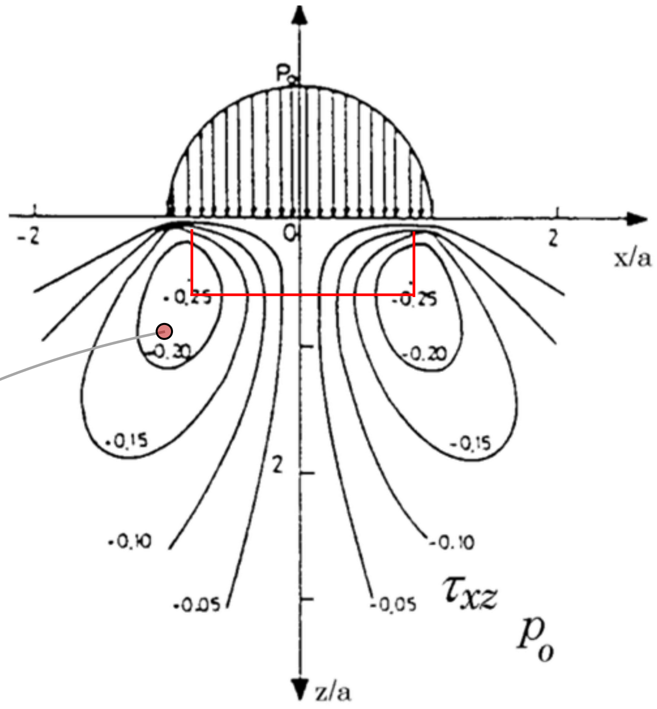
$$M = \sqrt{(a+x)^2+z^2}$$

$$N = \sqrt{(a-x)^2+z^2}$$

$$\tau_{xz}^{máx} = \tau_0 = 0.25\ p_0 \quad \begin{cases} x_0/a = 0.85 \\ z_0/a = 0.42 \end{cases}$$

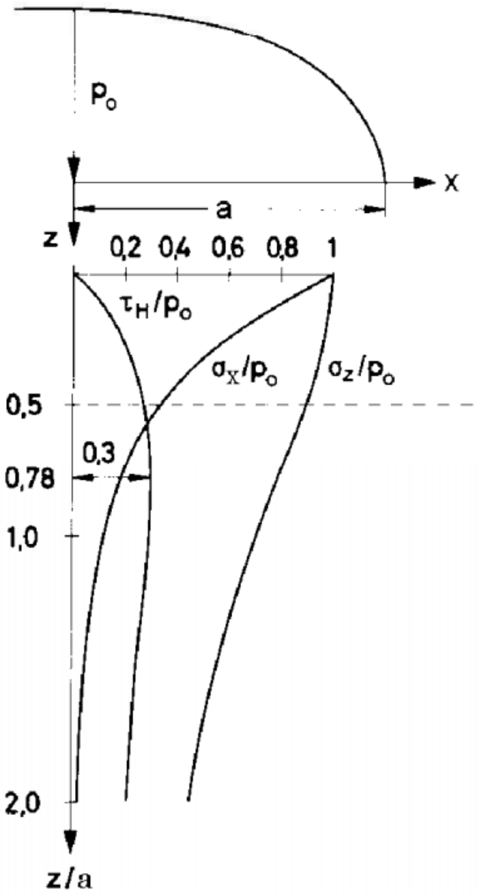
$$\tau_{xz}^{\min} = -\tau_0 = -0.25\ p_0 \quad \begin{cases} x_0/a = -0.85 \\ z_0/a = 0.42 \end{cases}$$

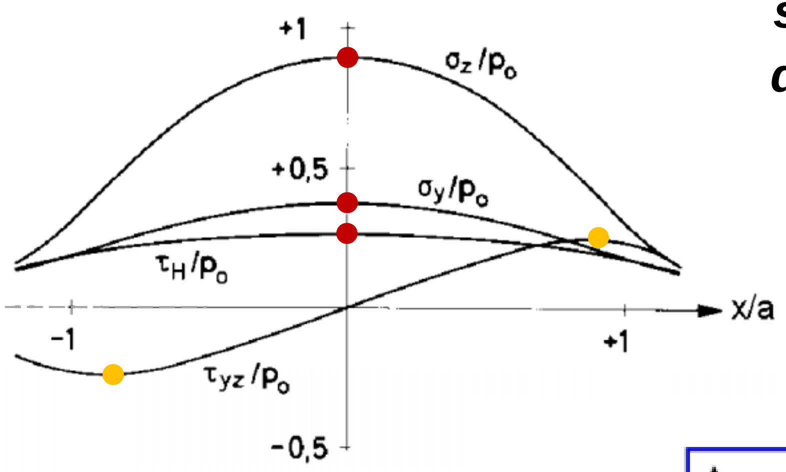




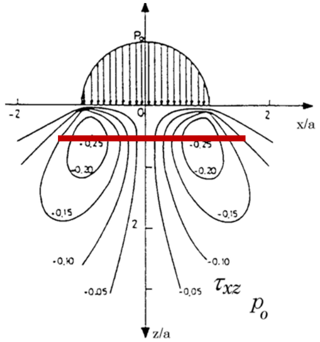
❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Linear

➢ **Tensões de Cisalhamento Ortogonais**





Profundidade
$z/a = 0.5$

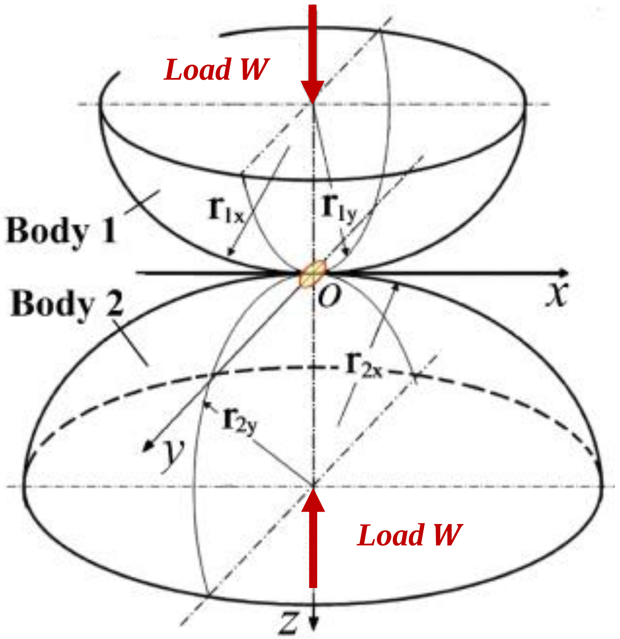


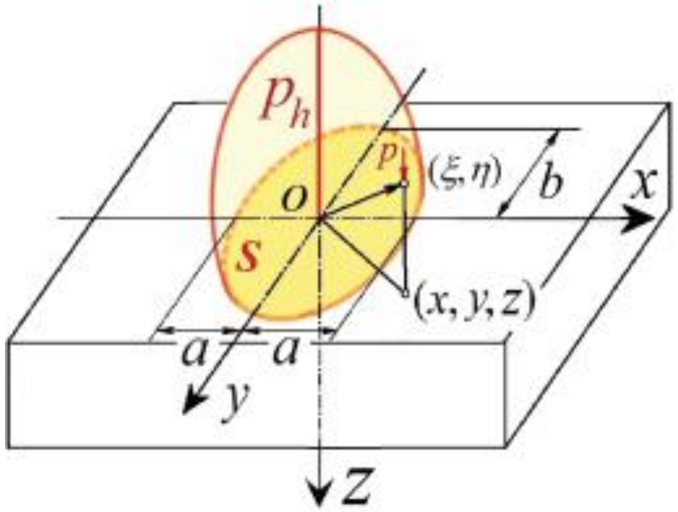
Qual a tensão mais significativa para fadiga de contato: τ_{xz} ou τ_{max}?

$$\Delta\sigma_{XX} = 0.35\ p_0 \quad (compressão)$$
$$\Delta\sigma_{ZZ} = 0.90\ p_0 \quad (compressão)$$
$$\Delta\tau_{máx} = 0.30\ p_0$$
$$\Delta\tau_{XZ}^{máx} = 0.45\ p_0$$

❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

- Distribuição da pressão interfacial sobre uma área de contato elíptica.
- Estado de tensões complexo no interior dos sólidos.
- Solução analítica existente apenas para determinadas direções preferenciais. Métodos numéricos são utilizados para a solução geral.





Contato normal entre dois elipsoides elásticos [12]

Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

- **Tensões Principais ao longo de Oz no centro do contato ($x = y = 0$)**

  - Contato Hertziano, com

$$\upsilon = 0.3, \qquad \frac{A}{B} = 1.24, \qquad k = \frac{a}{b} = 0.866$$

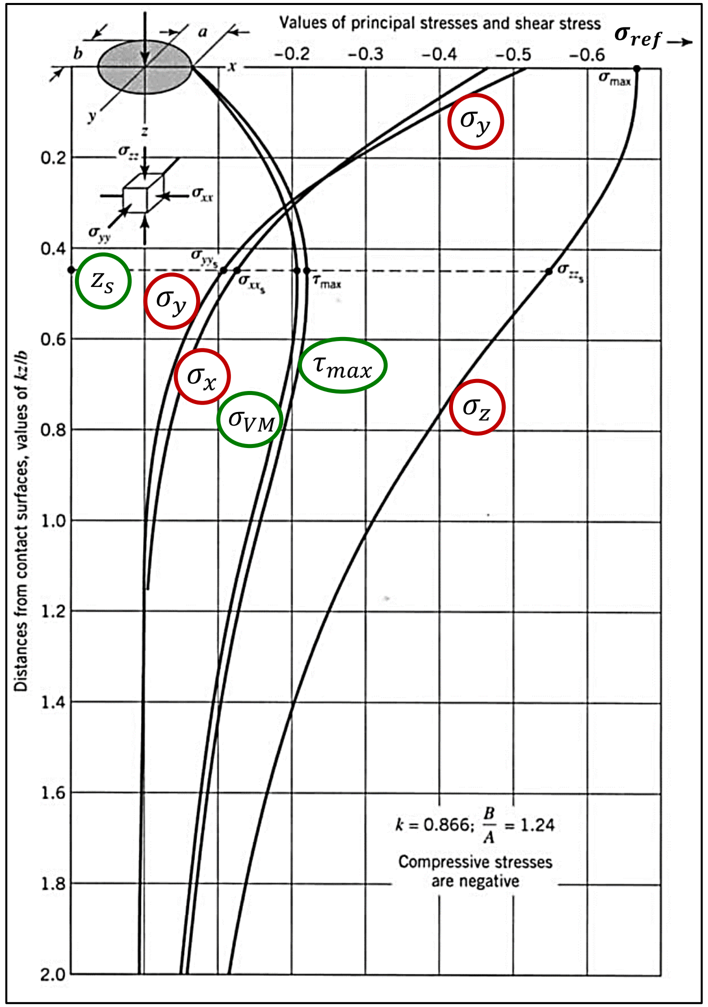
  - As tensões ao longo do **eixo Oz** são **tensões principais**, devido à simetria geométrica e de carregamento. Logo, as tensões de cisalhamento são nulas ao longo de Oz.

  - As **tensões principais** atingem o valor máximo na superfície e diminuem progressivamente com o aumento da profundidade.

$$\sigma_{máx} = p_0 = \sigma_{ZZ}^{máx} = C_\sigma \, \sigma_{ref}$$

$$\boxed{\sigma_{máx} = C_\sigma \, a \, (A+B) \, E^*}$$

$$\boxed{C_\sigma = \frac{3\,k}{2\,\pi} \, \frac{1}{C_a^3} \leq 1}$$ (ábaco)



Variação com a profundidade das tensões principais, tensão de cisalhamento máxima e tensão de von Mises ao longo do eixo *Oz*. Adaptado de [5]

Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

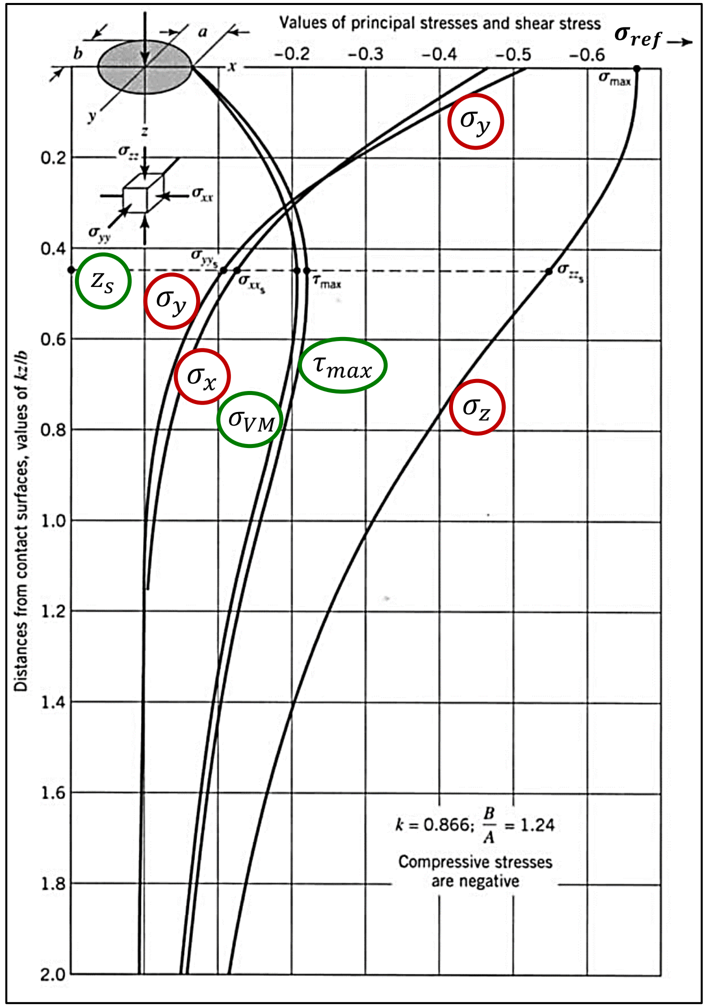
- **Tensões Principais** ao longo de Oz no centro do contato ($x = y = 0$)
  - A **tensão de cisalhamento máxima** atinge valor máximo na profundidade:

$$\boxed{Z_s = C_{Z_s}\, a} \quad \boxed{C_{Z_s} \leq 0.7861} \quad \text{(ábaco)}$$

  - Nesta profundidade, tem-se:

$$\boxed{\tau_{máx} = C_\tau\, \sigma_{ref} = C_\tau\, a(A+B)E^*} \quad \boxed{C_\tau \leq 0.3} \quad \text{(ábaco)}$$

$$\boxed{\tau_{máx}^{oct} = C_G\, \sigma_{ref} = C_G\, a(A+B)E^*} \quad \boxed{C_G \leq 0.27}$$



Variação com a profundidade das tensões principais, tensão de cisalhamento máxima e tensão de von Mises ao longo do eixo *Oz*. Adaptado de [5]

Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

- Ábaco para Solução

$$\sigma_{ref} = a\,(A+B)\,E^*$$

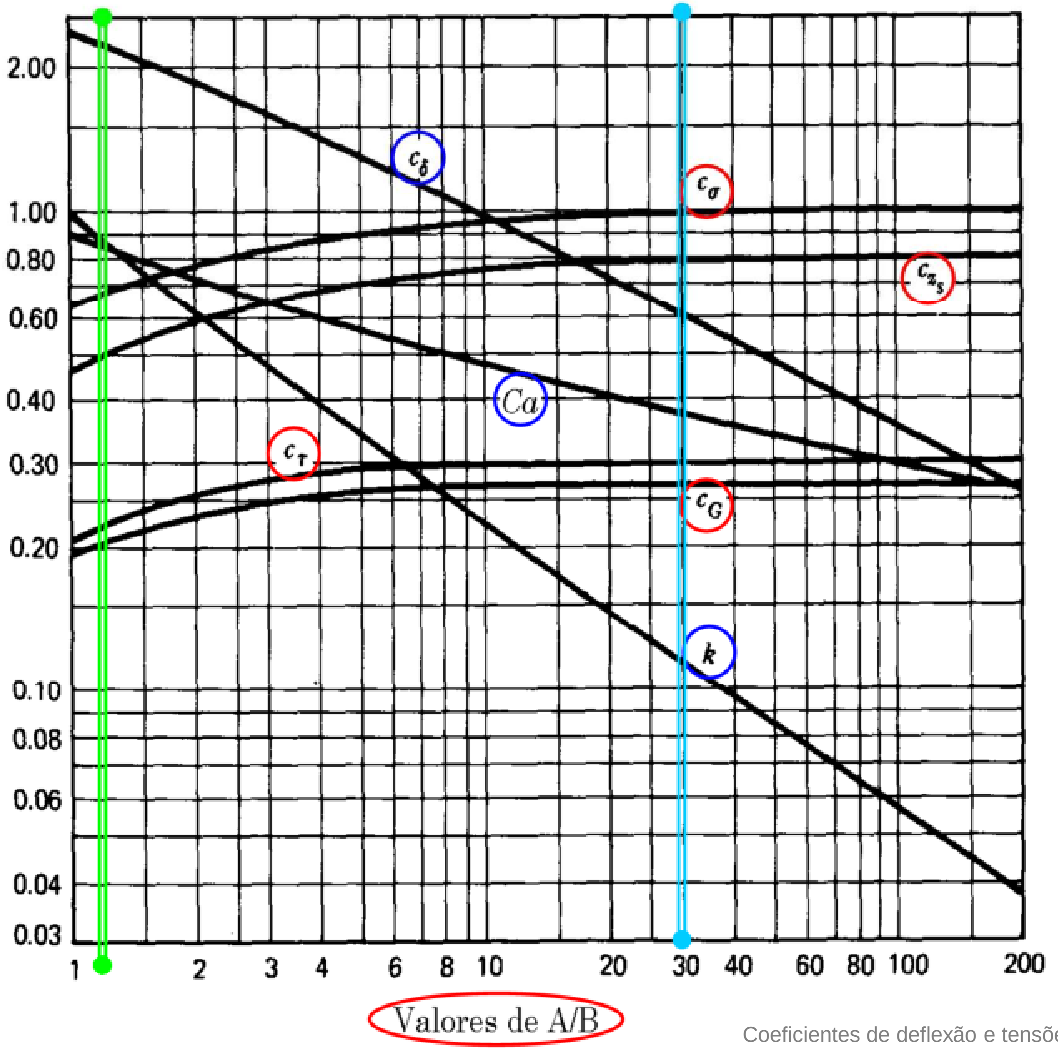
$$C_\sigma = \frac{3\,k}{2\,\pi}\,\frac{1}{C_a^3}$$

$$\sigma_{máx} = C_\sigma\, a\,(A+B)\,E^*$$

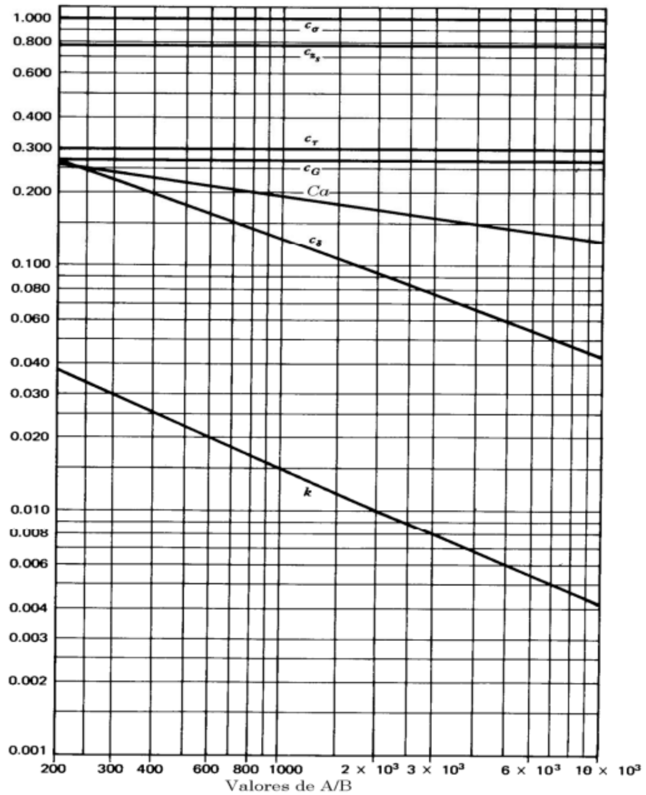
$$\tau_{máx} = C_\tau\, a\,(A+B)\,E^*$$

$$\tau_{máx}^{oct} = C_G\, a\,(A+B)\,E^*$$

$$Z_s = C_{Z_s}\, a$$



$$\frac{A}{B} > 200$$

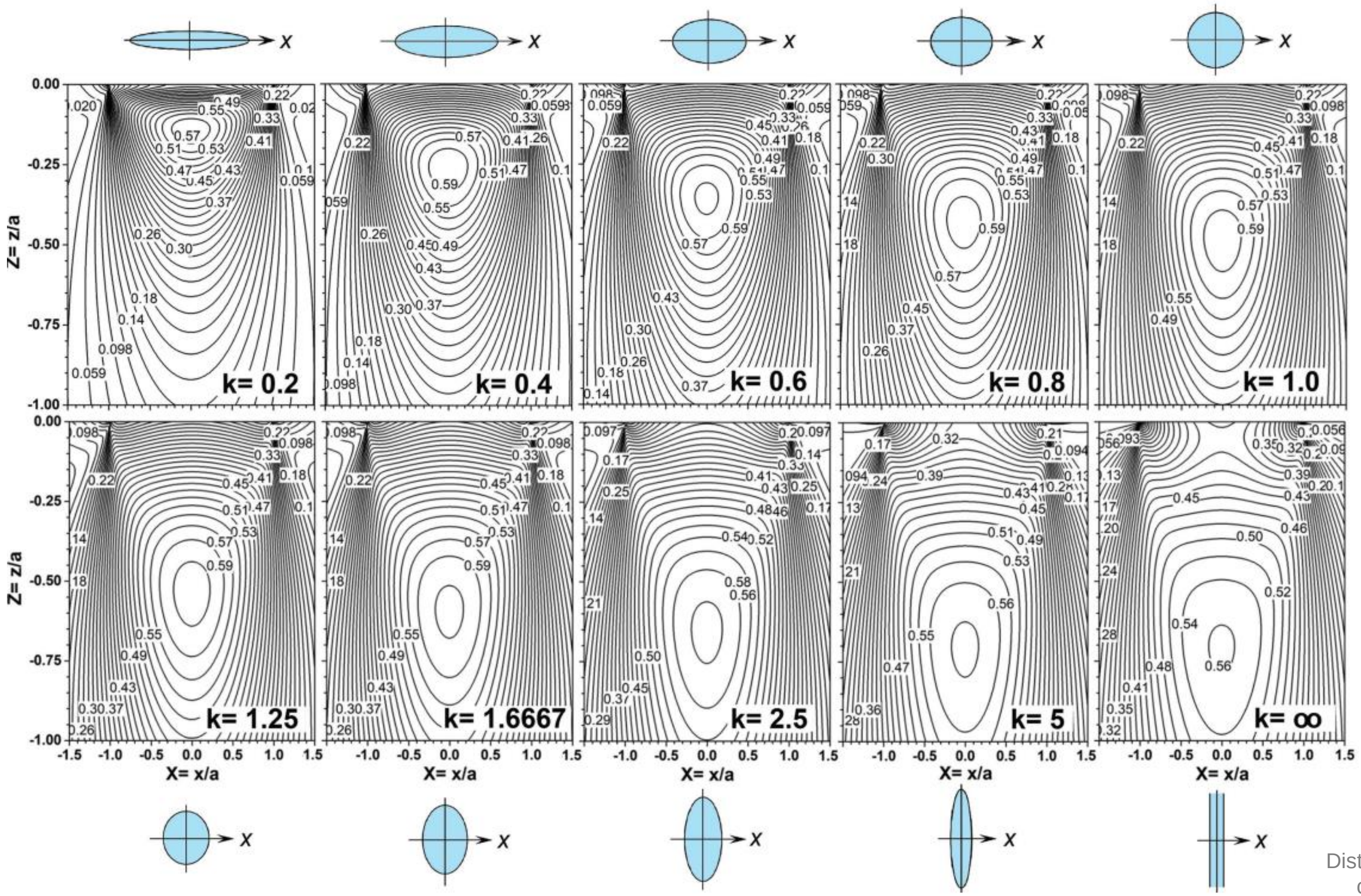


Coeficientes de deflexão e tensões para contato pontual. Adaptado de [5]

Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

- **Tensão de von Mises vs. Elipsidade (plano xz)**

$$k = \frac{b}{a}$$



Distribuições da tensão de von Mises para contatos com diferentes elipsidades. Adaptado de [12]

- A magnitude de $\boldsymbol{\sigma_{VM}^{max}}$ praticamente não varia com a elipsidade
- A profundidade de $\boldsymbol{\sigma_{VM}^{max}}$ aumenta com o aumento da elipsidade k

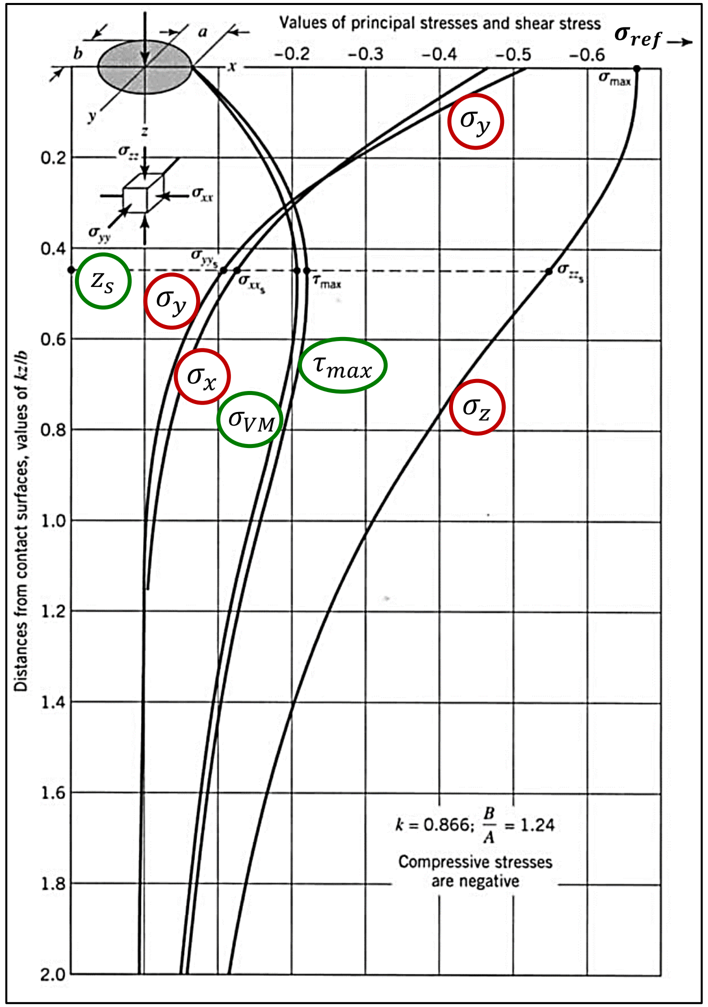
Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

- Qual a maior tensão atuante no corpo? Em que região esta tensão atua?

Tensão principal máxima (na superfície)

- Qual a tensão associada a deformação plástica do material? Em que região esta tensão atua?

Tensão de cisalhamento máxima (subsuperficial)

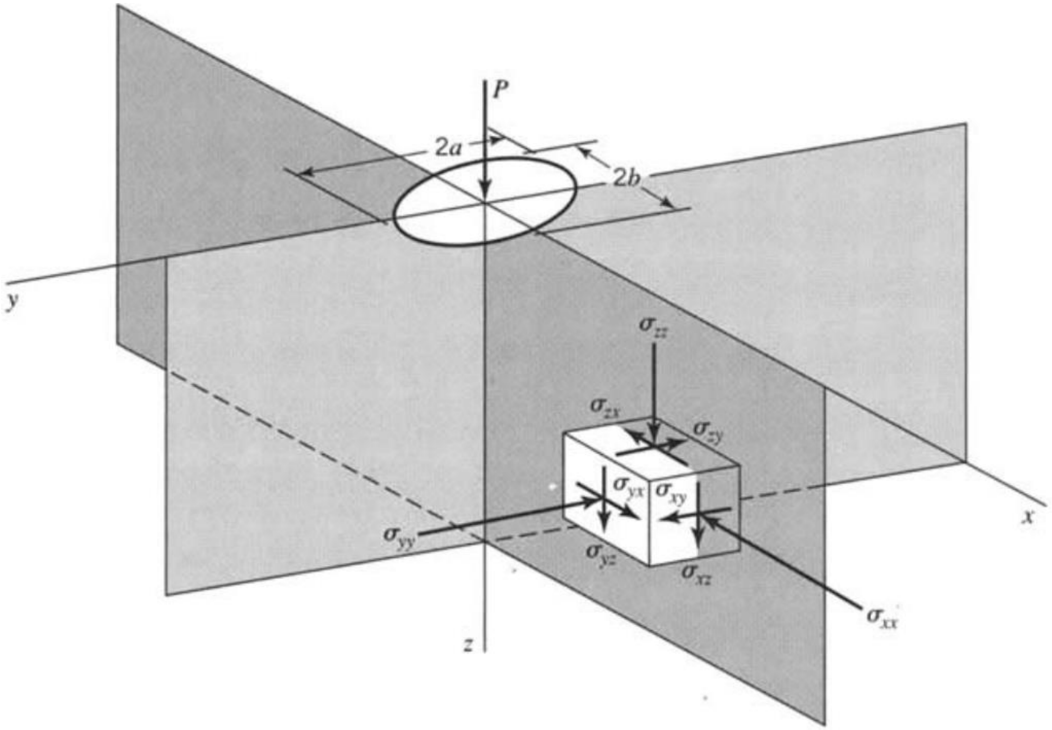


Variação com a profundidade das tensões principais, tensão de cisalhamento máxima e tensão de von Mises ao longo do eixo *Oz*. Adaptado de [5]

Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

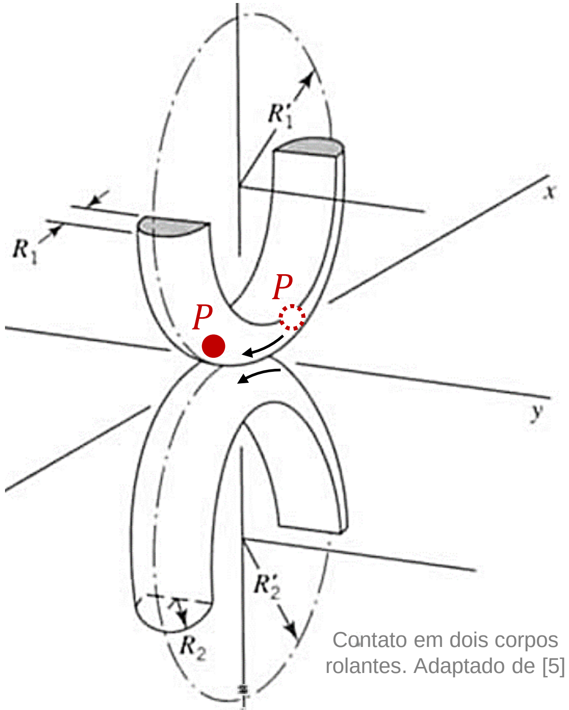
Tensões de Cisalhamento Ortogonais

- Tensões de cisalhamento τ_{xz} (τ_{zx}) e τ_{yz} (τ_{zy}) que atuam em planos perpendiculares ao eixo Oz.
- Tensões de cisalhamento ortogonais são **nulas ao longo do eixo Oz no centro do contato**;
- Importantes para efeitos de **fadiga de contato**;
- Tensões de cisalhamento ortogonais dependem da cinemática do sistema, sendo **mais importantes na direção de rolamento**.

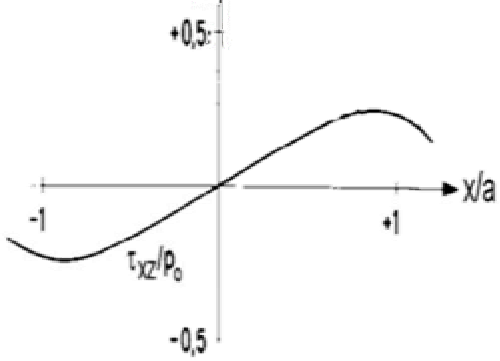


Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

- **Tensões de Cisalhamento Ortogonais**
  - Considere o contato entre dois corpos rolantes
  - Sólidos em contato rolam, sem escorregar, na direção de rolamento Ox, que coincide com um dos eixos da elipse de contato (a ou b);
  - Durante o movimento de rolamento, um dado ponto ***P*** no interior de um dos sólidos **aproxima-se da região de contato, passa sob ela, e afasta-se**;
  - A **variação da tensão de cisalhamento ortogonal** $\boldsymbol{\tau_{xz}}$ no ponto ***P*** durante um ciclo de movimento, apresenta **máximo positivo e negativo**.



Contato em dois corpos rolantes. Adaptado de [5]



❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

➢ Tensões de Cisalhamento Ortogonais

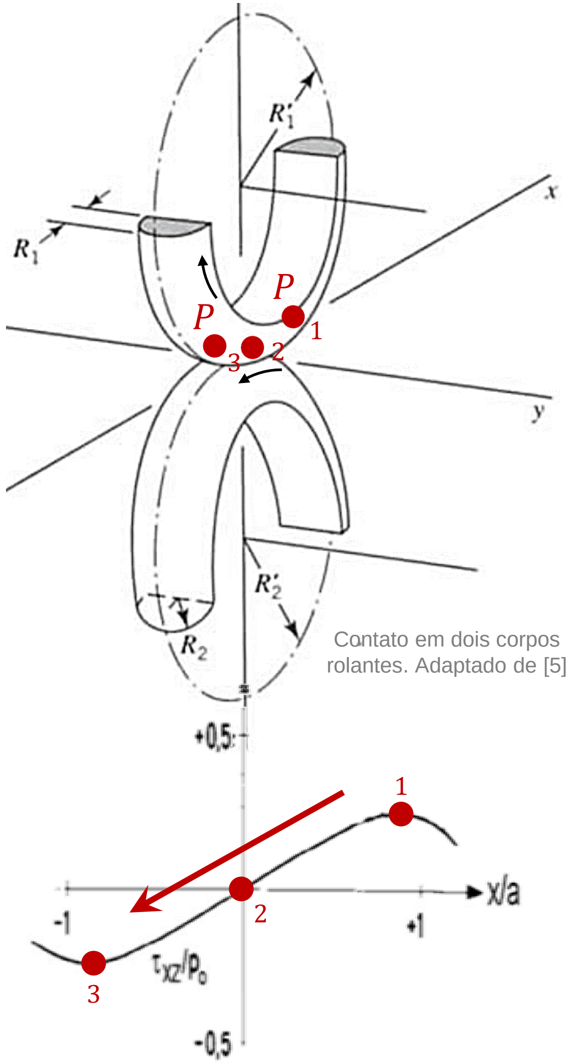
- Durante o movimento de rolamento, a tensão τ_{xz} no ponto ***P*** vai aumentando até atingir um valor **máximo positivo** para $x/a \approx 1$;

- Decresce progressivamente e passa a ter valores negativos a partir do centro do contato ($x/a = 0$);

- Continua a decrescer atingindo um valor **máximo negativo** para $x/a \approx -1$. Valores extremos de τ_{xz}:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tau_{xz}^{máx} = \tau_0 \, , & para \; x/a \simeq 1; \\ \tau_{xz}^{\min} = -\tau_0 \, , & para \; x/a \simeq -1. \end{array}}$$

- A profundidade em que τ_{xz} é máximo é definida por Z_0.



Contato em dois corpos rolantes. Adaptado de [5]

Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

Tensões de Cisalhamento Ortogonais

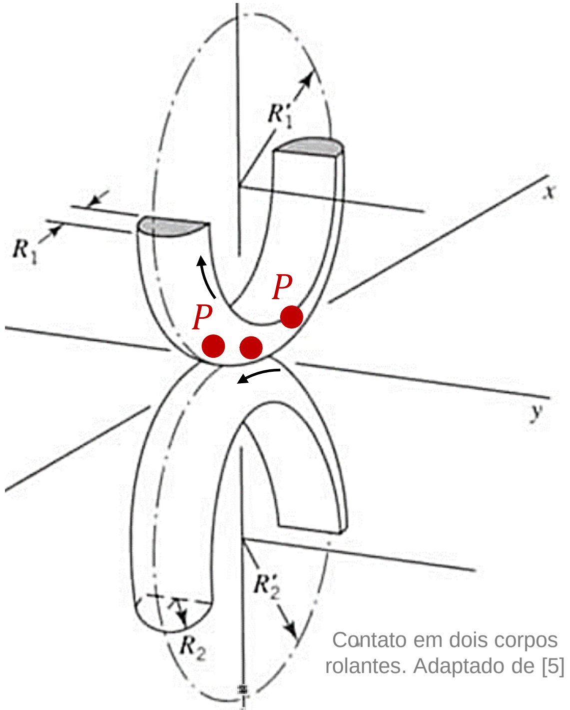
- A tensão de cisalhamento ortogonal máxima é sempre **inferior** à tensão de cisalhamento máxima:

$$\tau_{xz}^{max} = \tau_0 < \tau_{max}$$

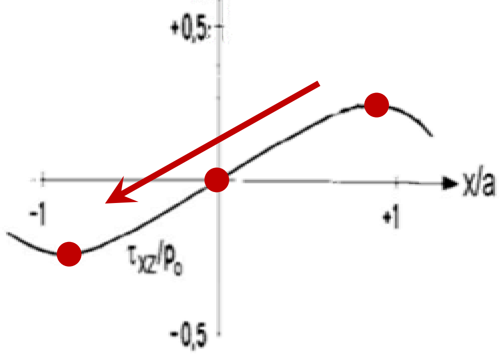
- Durante um **ciclo de carregamento**, a **variação** da tensão de cisalhamento ortogonal é superior à variação da tensão de cisalhamento máxima;

- Para **um ciclo de carregamento**:

$$\Delta\tau_{xz}^{max} = 2\tau_0 > \Delta\tau_{max}$$



Contato em dois corpos rolantes. Adaptado de [5]



❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

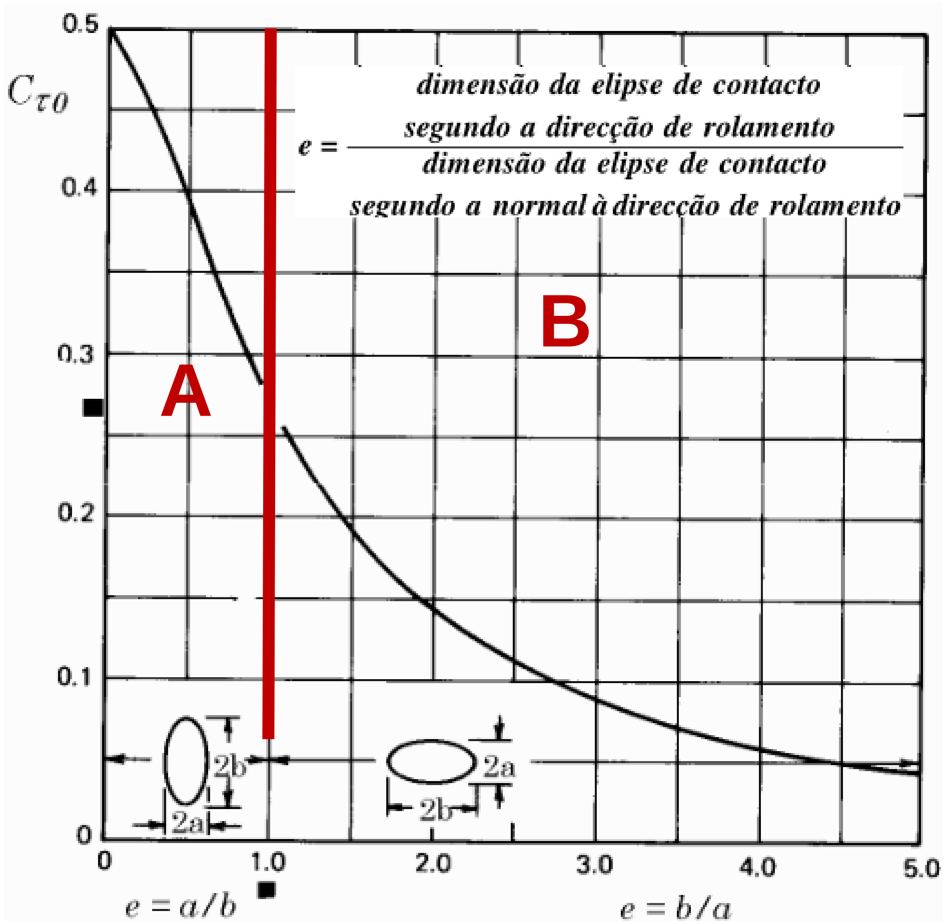
➢ Tensões de Cisalhamento Ortogonais

- Variação máxima da tensão de cisalhamento ortogonal:
  - **Zona A:** $e = {a}/{b} \leq 1$

$$\Delta\tau_{XZ}^{máx} = 2\tau_0 = C_{\tau 0}\, a\,(A+B)\,E^*$$

- **Zona B:** $e = {b}/{a} > 1$

$$\Delta\tau_{XZ}^{máx} = 2\tau_0 = C_{\tau 0}\, b\,(A+B)\,E^*$$



Magnitude da máxima tensão de cisalhamento ortogonal. Adaptado de [5]

❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

➢ **Tensões de Cisalhamento Ortogonais**

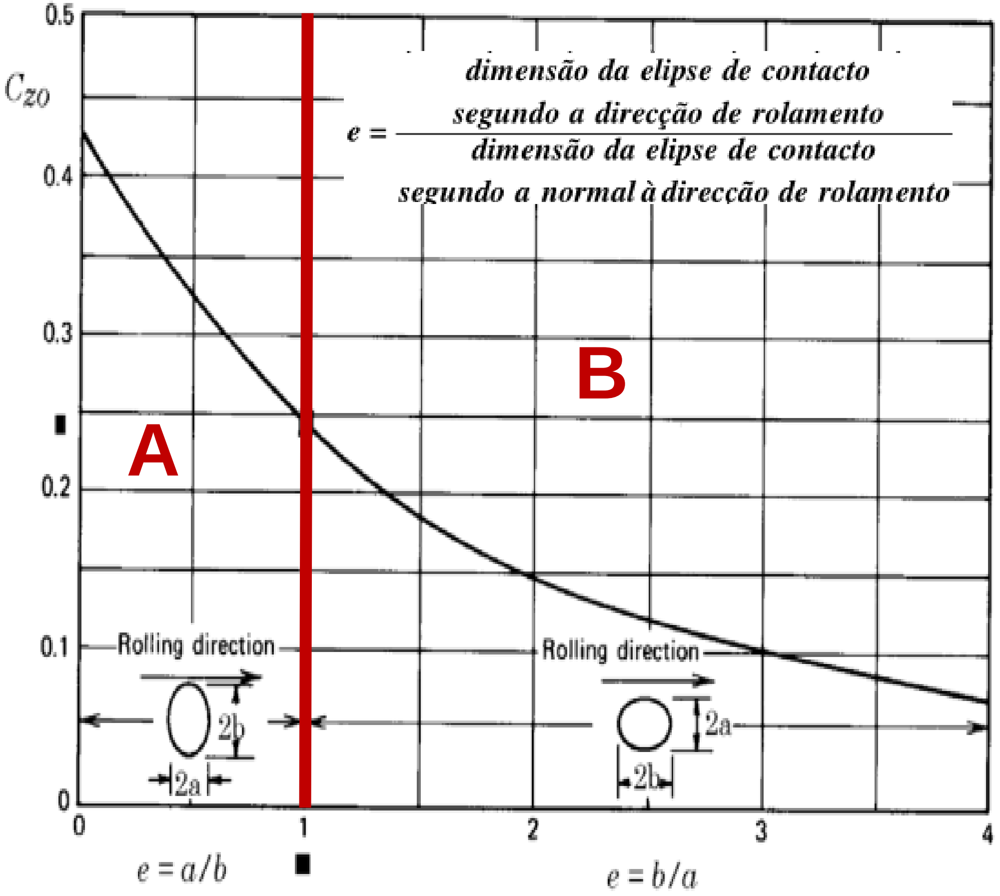
- Profundidade máxima da tensão de cisalhamento ortogonal:

  - **Zona A:** $\boxed{e = a/b \leq 1}$

    $\boxed{Z_0 = C_{Z0}\, a}$

- **Zona B:** $\boxed{e = b/a > 1}$

  $\boxed{Z_0 = C_{Z0}\, b}$



Distância de ocorrência da máxima tensão de cisalhamento ortogonal. Adaptado de [5]

❑ Tensões no Interior dos Sólidos – Contato Pontual

➢ Roteiro de Solução

1) Dados:

- Geometria: $r_{1x}, r_{1y}, r_{2x}, r_{2y}$
- Materiais: $E_1, \upsilon_1, E_2, \upsilon_2$
- Força Normal: W

2) Cálculo do módulo de Young equivalente:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\upsilon_1{}^2}{E_1} + \frac{1-\upsilon_2{}^2}{E_2}$$

3) Calcular curvaturas:

$$A = \frac{1}{R_X} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{X1}} + \frac{1}{R_{X2}}\right)$$

$$B = \frac{1}{R_Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{Y1}} + \frac{1}{R_{Y2}}\right)$$

Perfil **convexo**: curvatura **positiva**
Perfil **côncavo**: curvatura **negativa**

4) Tabelas e Ábacos: $[\boldsymbol{C_a}, \boldsymbol{C_\delta}, \boldsymbol{k}]$; $[\boldsymbol{C_{\tau 0}}, \boldsymbol{C_{Z0}}]$; $[\boldsymbol{C_\sigma}, \boldsymbol{C_\tau}, \boldsymbol{C_G}, \boldsymbol{C_{Zs}}]$

5) Determinar área de contato (a e b):

$$a = C_a \sqrt[3]{\frac{F_n}{(A+B)E^*}} \qquad b = \frac{a}{k}$$

7) Determinar δ:

$$\delta = C_\delta \frac{F_n}{\pi a E^*}$$

8) Determinar p_0, p_m e σ_{REF} :

$$p_m = \frac{F_n}{\pi a b} \qquad p_0 = \frac{3}{2}\frac{F_n}{\pi a b} \qquad \sigma_{REF} = a(A+B)E^*$$

9) Determinar as tensões e profundidades:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{MÁX} &= -C_\sigma \sigma_{REF} = -p_0 \\ \tau_{MÁX} &= -C_\tau \sigma_{REF} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z_S &= -C_{ZS}\, a \\ \tau_{XZ}^{MÁX} &= -C_{\tau 0} \sigma_{REF} \\ Z_0 &= -C_{Z0}\, a \end{aligned}}$$

❑ Teoria do Contato de Hertz

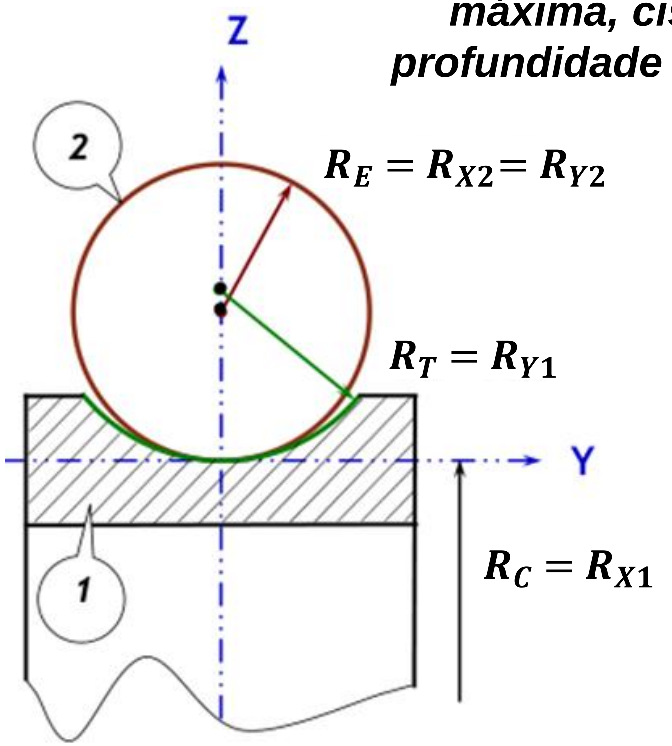
Software HertzWin (free):
https://www.vinksda.com/toolkit-mechanical-calculations/hertz-contact-stress-calculations/

Tribology ABC:
https://www.tribology-abc.com/sub10.htm

➢ Exemplo de Aplicação

Calcule as tensões de referência, normal máxima, cisalhamento máxima e a profundidade em que esta última ocorre

Parâmetro	Unidade	Corpo 2	Corpo 1
F_N	[N]	1000	
E_i	[Pa]	$200\ 10^{9}$	$200\ 10^{9}$
ν_i	[/]	0.29	0.29
R_{Xi}	[m]	$12\ 10^{-3}$	$60\ 10^{-3}$
R_{Yi}	[m]	$12\ 10^{-3}$	$12.5\ 10^{-3}$



Contacto seco	
Po	1,1809E+09
Pm	7,8725E+08
a	2,1343E-04
b	1,8944E-03
Ac	1,2702E-06
δ	8,2591E-06

Tensões instaladas	
σ ref	1,2040E+09
τ máx	3,5426E+08
ZS	1,6454E-04
2 τ0	5,7791E+08
Z0	1,0245E-04

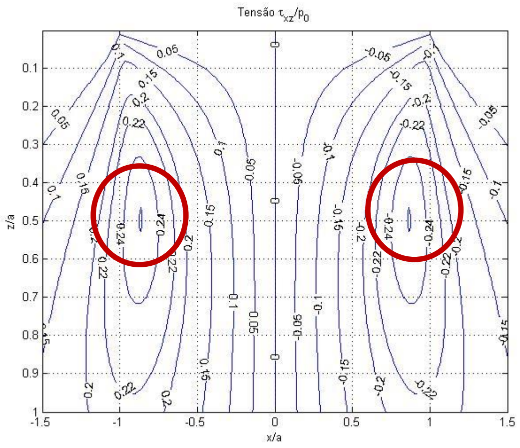
30,000	0,11266	0,99363	3,57788	1,01956	0,37993	0,60463	0,98082	0,2942	0,7709	0,48	0,48
A/B	k	e	K(e)	E(e)	C_a	C_δ	C_σ	C_τ	C_{Zs}	$C_{\tau ort}$	C_{Zo}

❑ Teoria do Contato de Hertz

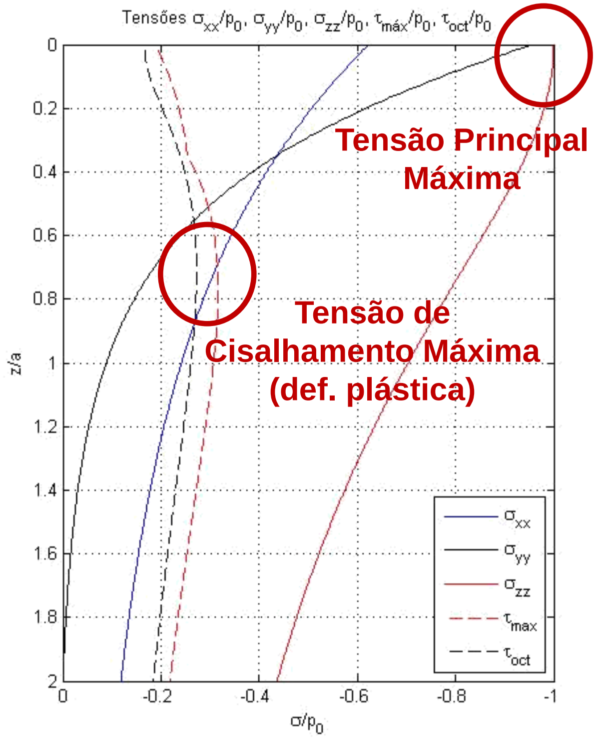
➢ Exemplo de Aplicação

Contacto seco	
Po	1,1809E+09
Pm	7,8725E+08
a	2,1343E-04
b	1,8944E-03
Ac	1,2702E-06
δ	8,2591E-06

Tensões instaladas	
σ ref	1,2040E+09
τ máx	3,5426E+08
ZS	1,6454E-04
2 τ0	5,7791E+08
Z0	1,0245E-04



Tensão de Cisalhamento Ortogonal Máxima (fadiga de contato)



- Qual a maior tensão atuando no corpo? Em que região esta tensão atua?
- Qual a tensão associada a deformação plástica do material? Em que região esta tensão atua?
- Qual a tensão associada com a fadiga de contato? Em que região esta tensão atua?

Conteúdo

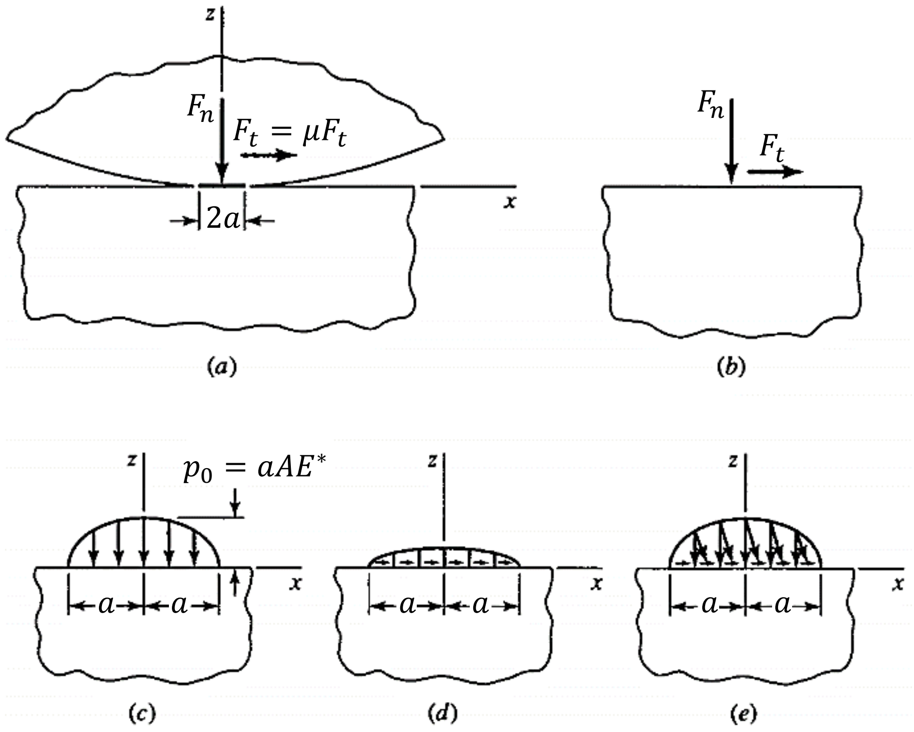
❑ Efeito de Carregamentos Tangenciais (Atrito)

- Solicitação **normal** (F_n) e **tangencial** (F_t) na superfície;

- Análises baseadas nas teorias de Boussinesq e Cerruti para semi-espaços elásticos;

- Matematicamente, os problemas de contato normal e tangencial são **independentes/desacoplados**. Logo, aplica-se o princípio da **sobreposição** de efeitos;

- Soluções analíticas existentes apenas para situações muito particulares. Métodos numéricos são utilizados para a solução geral.

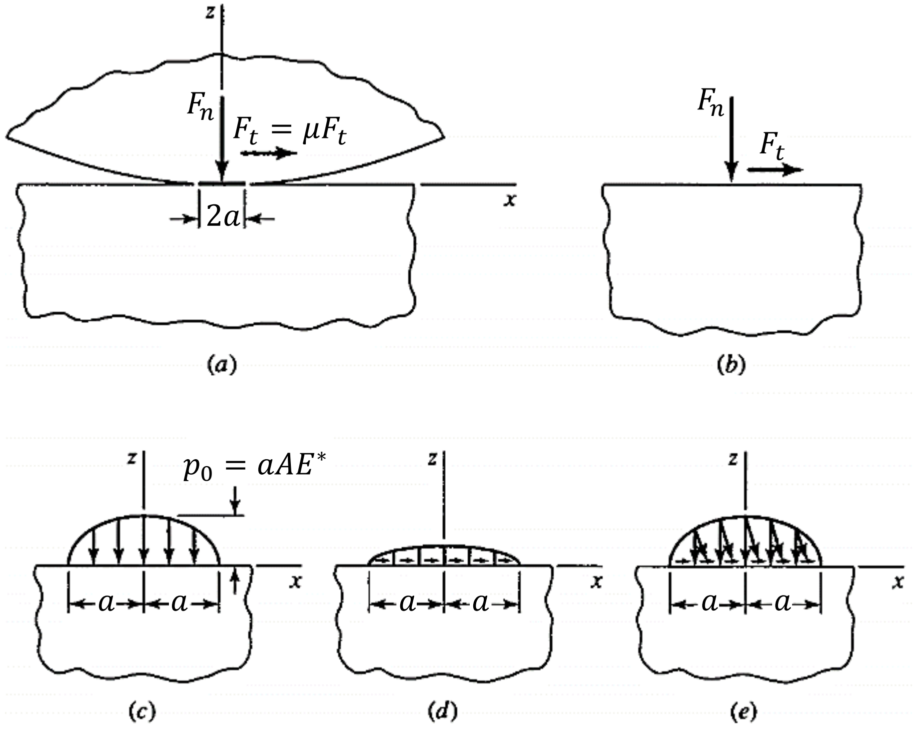


Esforços tangenciais (cisalhamento) em adição aos esforços normais na área de contato. Adaptado de [5]

Efeito de Carregamentos Tangenciais (Atrito)

- A distribuição da **pressão interfacial é ligeiramente alterada** pela presença de esforços tangenciais;

- As **tensões no interior dos sólidos são significantemente alteradas** devido à presença de esforços tangenciais:
  - aumento da intensidade das tensões;
  - alteração da natureza das tensões: compressão → tração;
  - alteração da localização dos pontos de máxima tensão;
  - as tensões de **cisalhamento ortogonais são ligeiramente alteradas**.



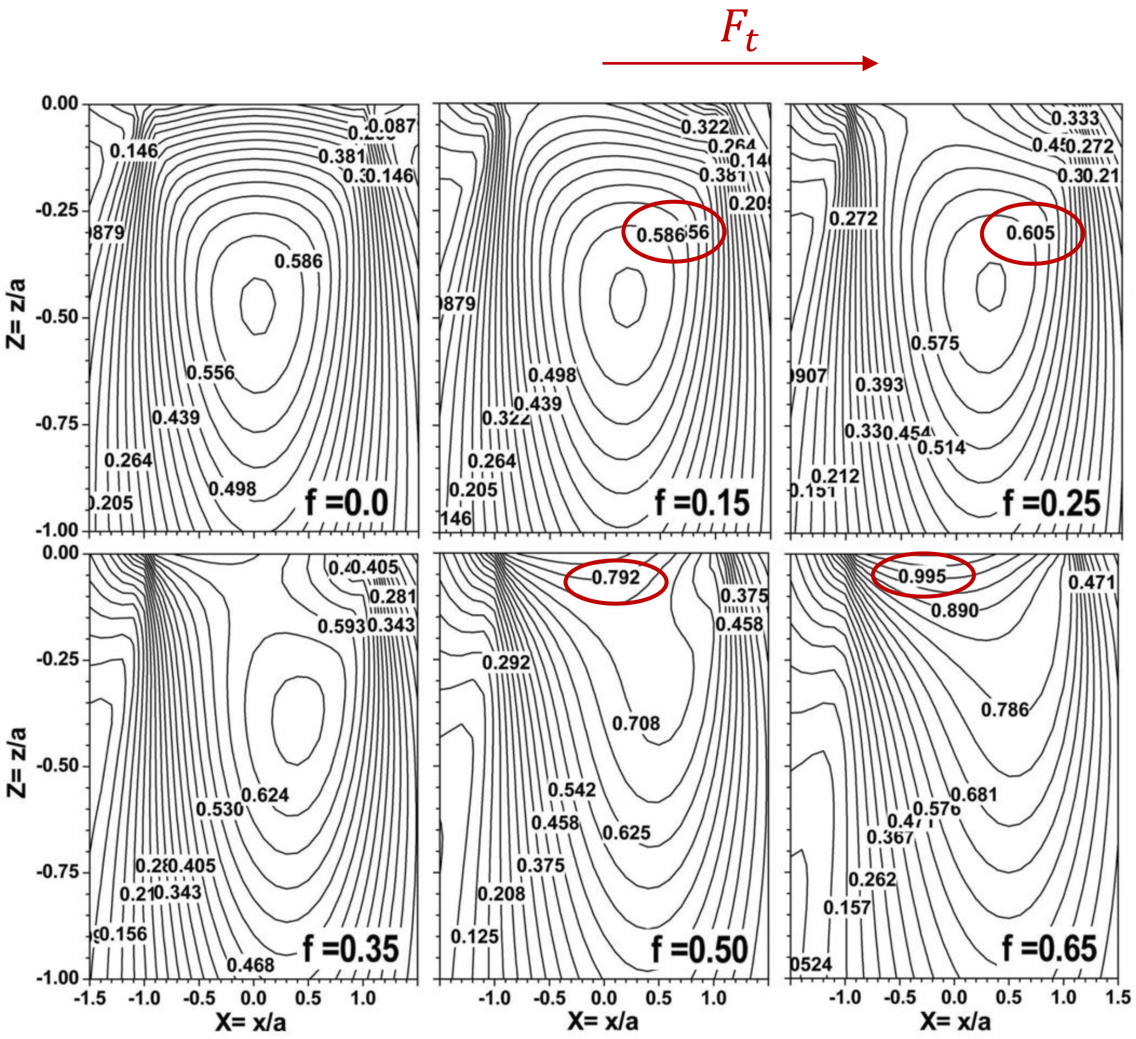
Esforços tangenciais (cisalhamento) em adição aos esforços normais na área de contato. Adaptado de [5]

❑ Efeito de Carregamentos Tangenciais (Atrito)

➢ Tensão de von Mises (plano xz)

$$\upsilon = 0.3, \qquad k = 1, \qquad f = 0 - 0.65 \text{ (COF)}$$

- Distribuição geralmente assimétrica em relação à linha de centro no sentido do carregamento tangencial aplicado.
- As tensões máximas na presença de atrito são significativamente maiores do que as tensões na ausência de atrito.
- À medida que o atrito aumenta, a localização das tensões máximas se move para a superfície.



Distribuições da tensão de von Mises devido à combinação de carregamento interfacial normal e atrito tangencial. Adaptado de [12]

Efeito de Carregamentos Tangenciais (Atrito)

Tensão de von Mises e Máxima Tensão de Cisalhamento (plano xz)

$$\upsilon = 0.3, \qquad k = 1, \qquad f = 0 - 0.65\ (\text{COF})$$

- Distribuição geralmente assimétrica em relação à linha de centro no sentido do carregamento tangencial aplicado.
- As tensões máximas na presença de atrito são maiores do que as tensões na ausência de atrito.
- À medida que o atrito aumenta, a localização das tensões máximas se move para a superfície.

TABLE 3.3
Locations and Values of the Maximum Tresca and von Mises Stresses Influenced by Friction

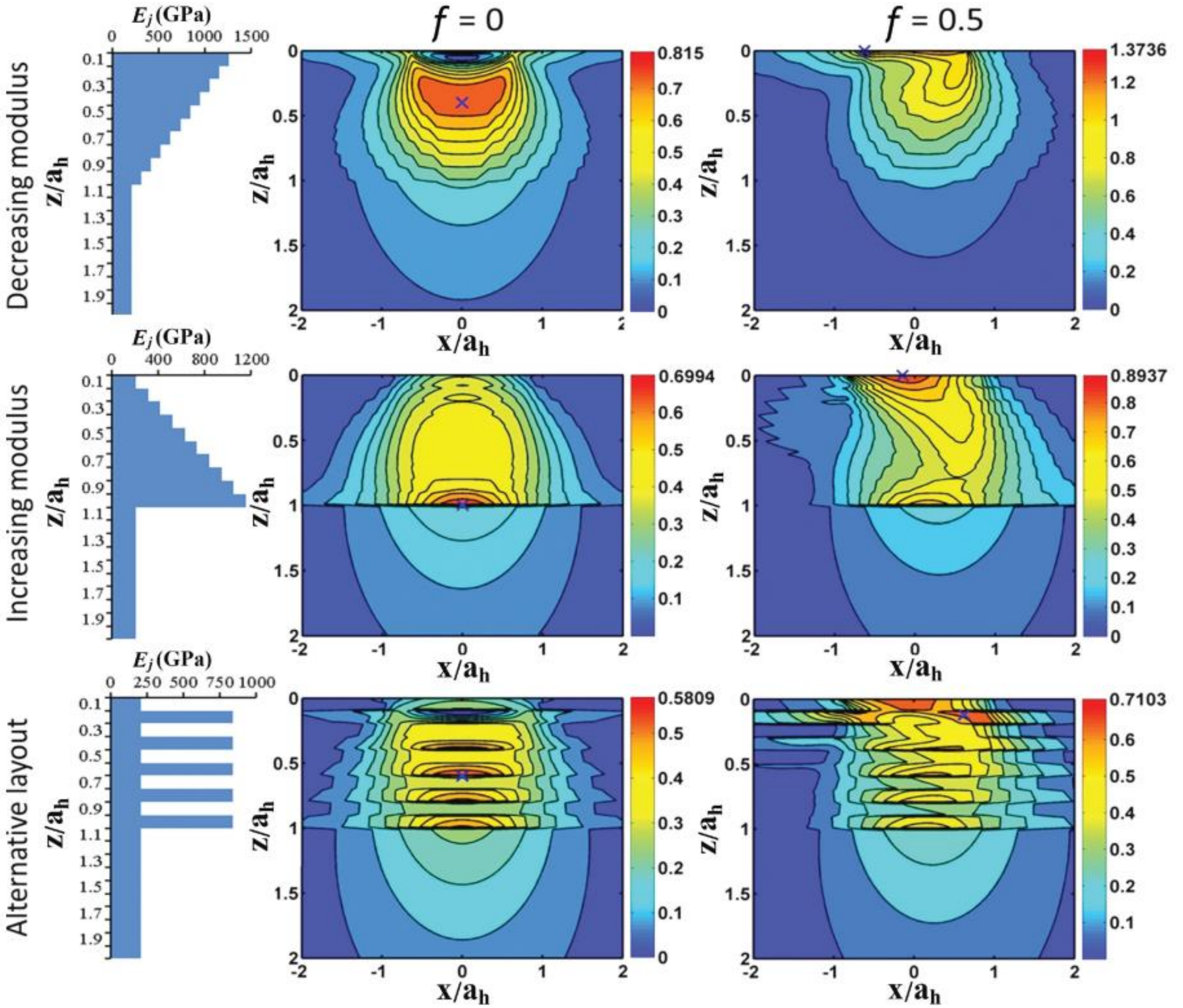
Coefficient of Friction	Max. Shear Stress τ_{max}		Max. von Mises Stress σ_{VM}	
	τ_{max}/p_h	at $z/a=$	$(\sigma_{VM}/p_h)_{max}$	at $z/a=$
0.0	0.310	0.480	0.620	0.480
0.15	0.315	0.465	0.620	0.463
0.25	0.325	0.438	0.639	0.438
0.35	0.387	0.000	0.688	0.000
0.50	0.529	0.000	0.916	0.000
0.65	0.674	0.000	1.165	0.000

Data from Wang and Zhu (2013a).

Localização e valores das tensões máximas de cisalhamento máximo e de von Mises influenciadas pelo atrito. Adaptado de [12]

Efeito de Carregamentos Tangenciais (Atrito)

- **Materiais com Múltiplas Camadas de Recobrimento ("*Multi-Layer Coatings*")**
  - Exemplo de materiais com 10 camadas de recobrimento
  - Distribuições da tensão de von Mises para COF = 0.0 e COF = 0.5
  - Soluções numéricas baseadas na extensão da teoria de semi-espaço elástico (**não** por MEF).



Distribuição da tensão de von Mises para três materiais com 10 camadas de recobrimentos. Esquerda: mapas dos módulos de Young; meio: tensões para COF = 0; e direita: tensões para COF = 0.5. Adaptado de [12]

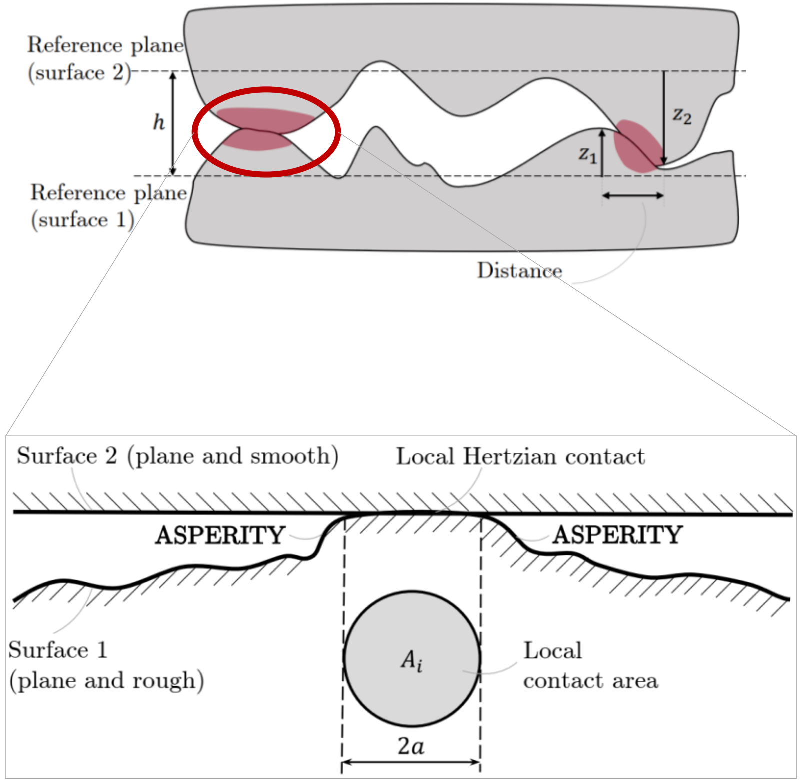
Conteúdo

Efeito da Rugosidade

- As superfícies reais dos sólidos em contato **não são perfeitamente lisas** devido à presença de irregularidades superficiais (ondulação e rugosidade).

- A rugosidade afeta:
  - a área real de contato;
  - a distribuição da pressão interfacial;
  - as tensões no interior dos sólidos;
  - o número de ciclos de carregamento na superfície e no interior dos sólidos;

- Ausência de soluções analíticas (simulação numérica)



Efeito da Rugosidade

Pressão Interfacial e Área de Contato

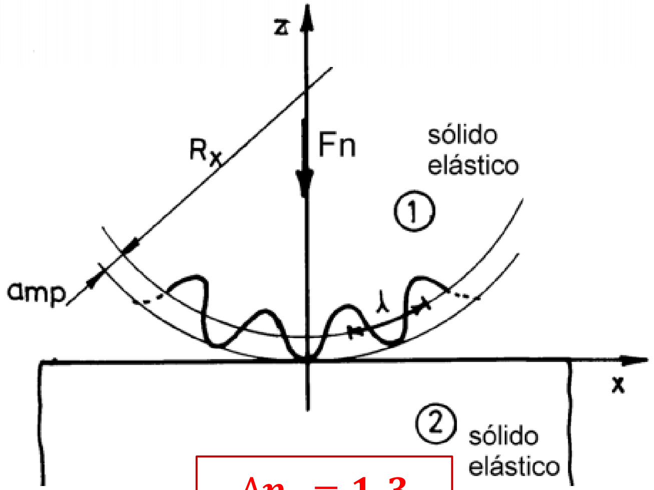
- Alteração na distribuição da pressão interfacial devido ao surgimento de picos de pressão com **intensidade muito superior** à pressão máxima de Hertz.

$$\Delta p_r = \frac{p_{max} - p_0}{p_0}$$

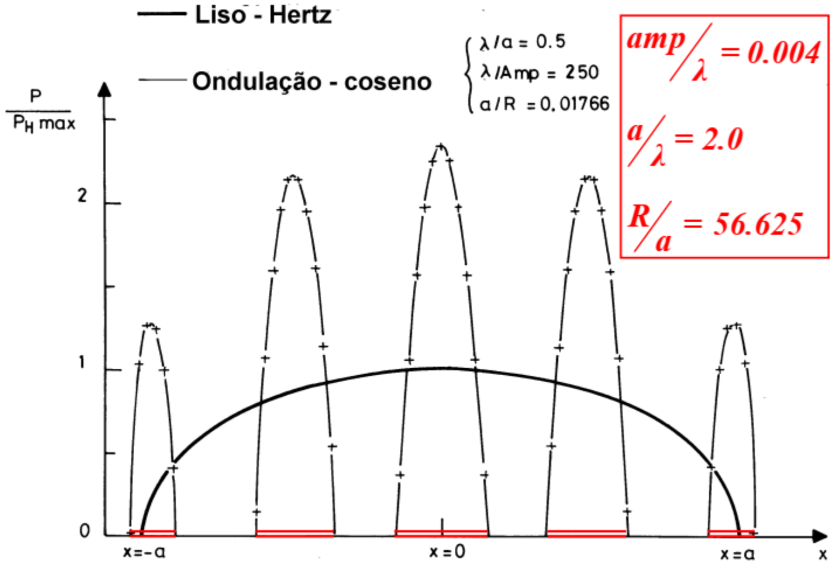
- Em geral, a área (real) de contato é **menor** do que área de contato Hertziana.

$$\Delta A_r = \frac{A - A_0}{A_0}$$

- Δp_r e ΔA_r dependem fortemente da **geometria da ondulação** (amplitude e comprimento de onda) e da **carga aplicada**.



$$\Delta p_r = 1.3$$
$$\Delta A_r = -0.4$$

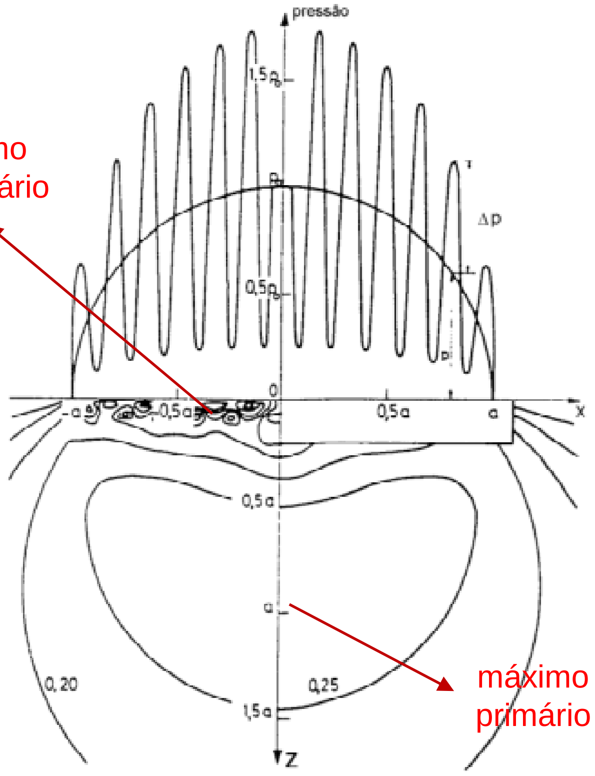


$$amp/\lambda = 0.004$$
$$a/\lambda = 2.0$$
$$R/a = 56.625$$

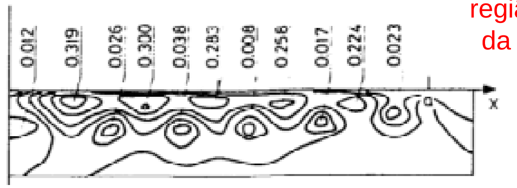
❑ Efeito da Rugosidade

➢ **Tensão de <u>Cisalhamento Máxima</u>**

- Surgimento de máximos primários (abaixo da superfície) e secundários (próximos da superfície)
- Máximos **primários independentes** dos picos de pressão interfacial.
- Máximos **secundários dependentes** dos picos de pressão interfacial.
- Máximos secundários ligeiramente superiores aos primários e concentrados em torno das rugosidades



$\Delta p_r = 0.75$

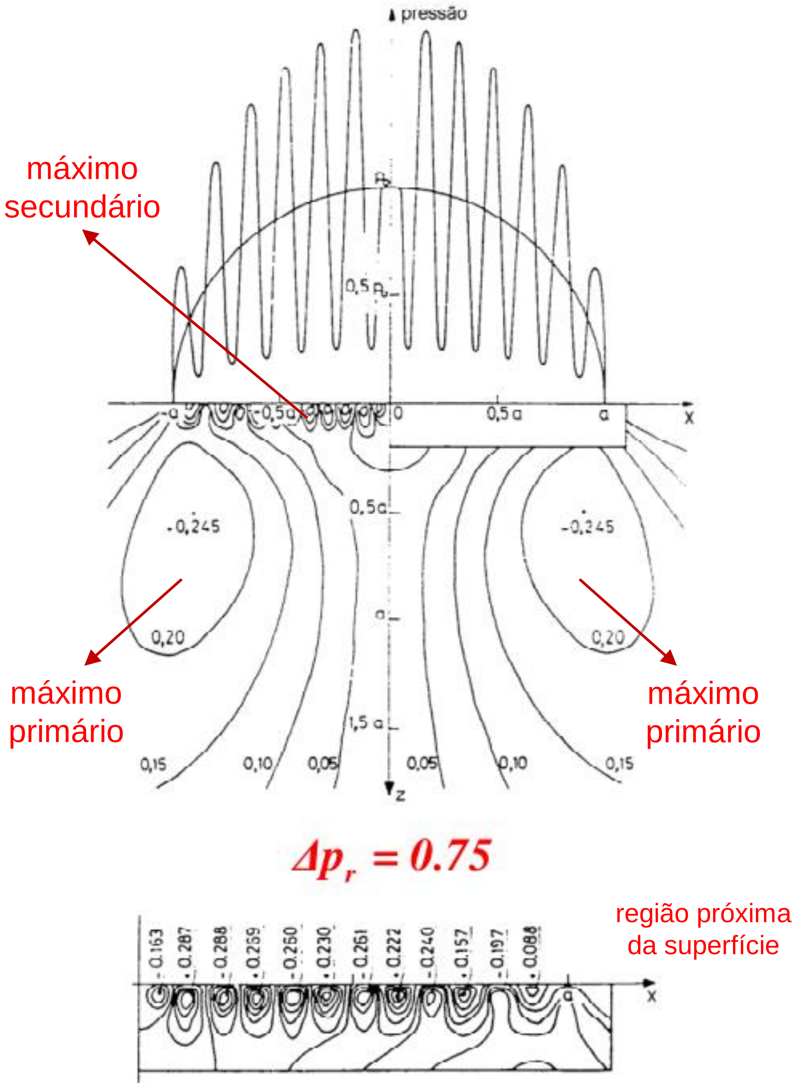


Tensões de Cisalhamento Máximas (contato linear)

❑ Efeito da Rugosidade

➢ **Tensão de <u>Cisalhamento Ortogonal</u>**

- Surgimento de máximos primários (abaixo da superfície) e secundários (próximos da superfície)
- Máximos **primários independentes** dos picos de pressão interfacial.
- Máximos **secundários dependentes** dos picos de pressão interfacial.
- Máximos secundários ligeiramente superiores aos primários e concentrados em torno das rugosidades.



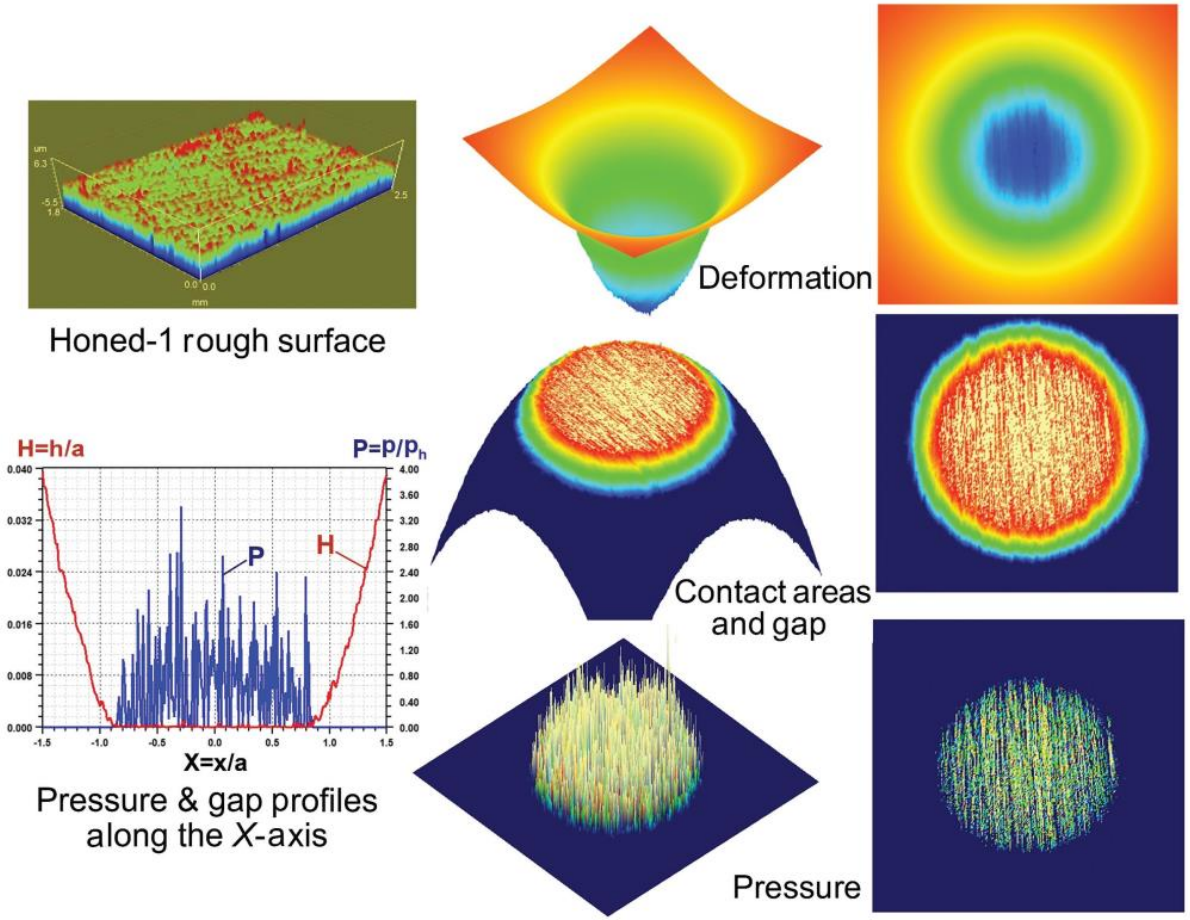
Tensões de Cisalhamento Ortogonais Máximas (contato linear)

Efeito da Rugosidade

Estado-da-Arte: Exemplos

- Soluções numéricas de uma esfera em contato com uma superfície plana rugosa real (**contato pontual**).

- Soluções numéricas baseadas na extensão da teoria do semi-espaço elástico (**não** por MEF).



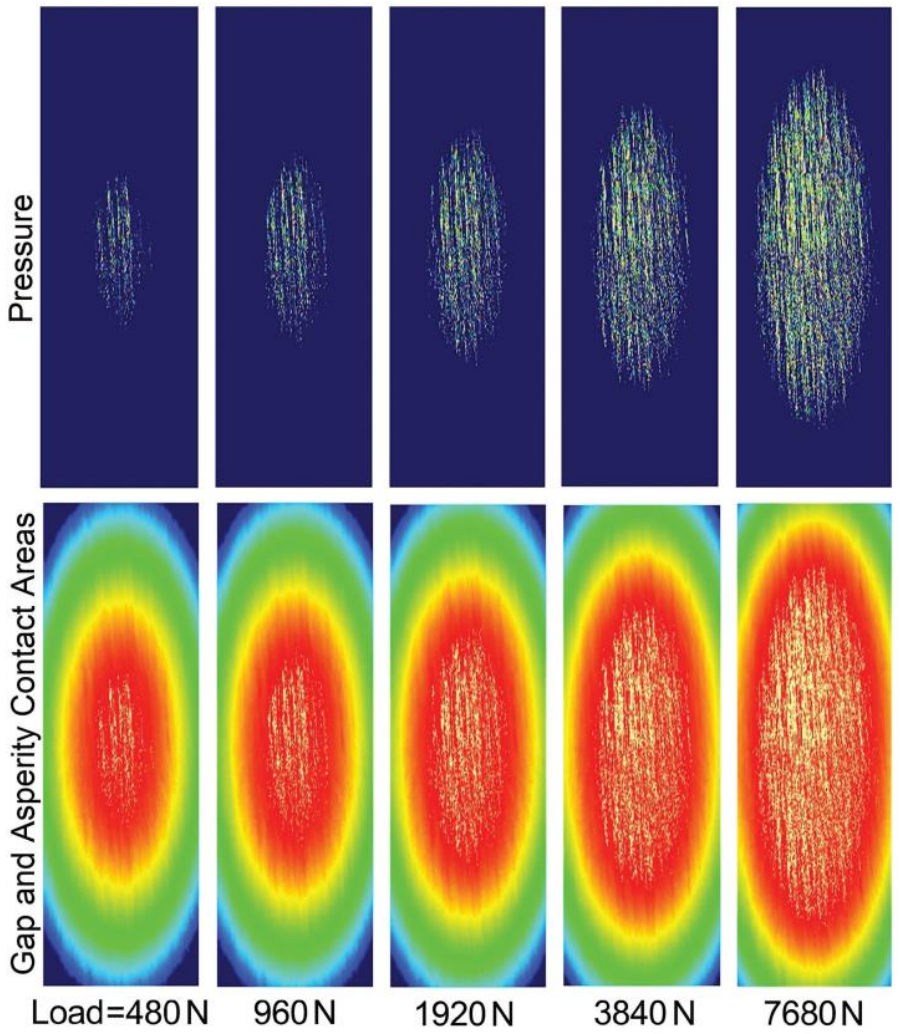
Exemplo de simulação numérica de uma esfera em contato sem atrito com uma superfície plana rugosa real.. Adaptado de [12]

Efeito da Rugosidade

Estado-da-Arte: Exemplos

- Soluções numéricas de **contatos elípticos** com superfícies rugosas considerando o aumento da carga externa aplicada.

- Soluções numéricas baseadas na extensão da teoria do semi-espaço elástico (**não** por MEF).



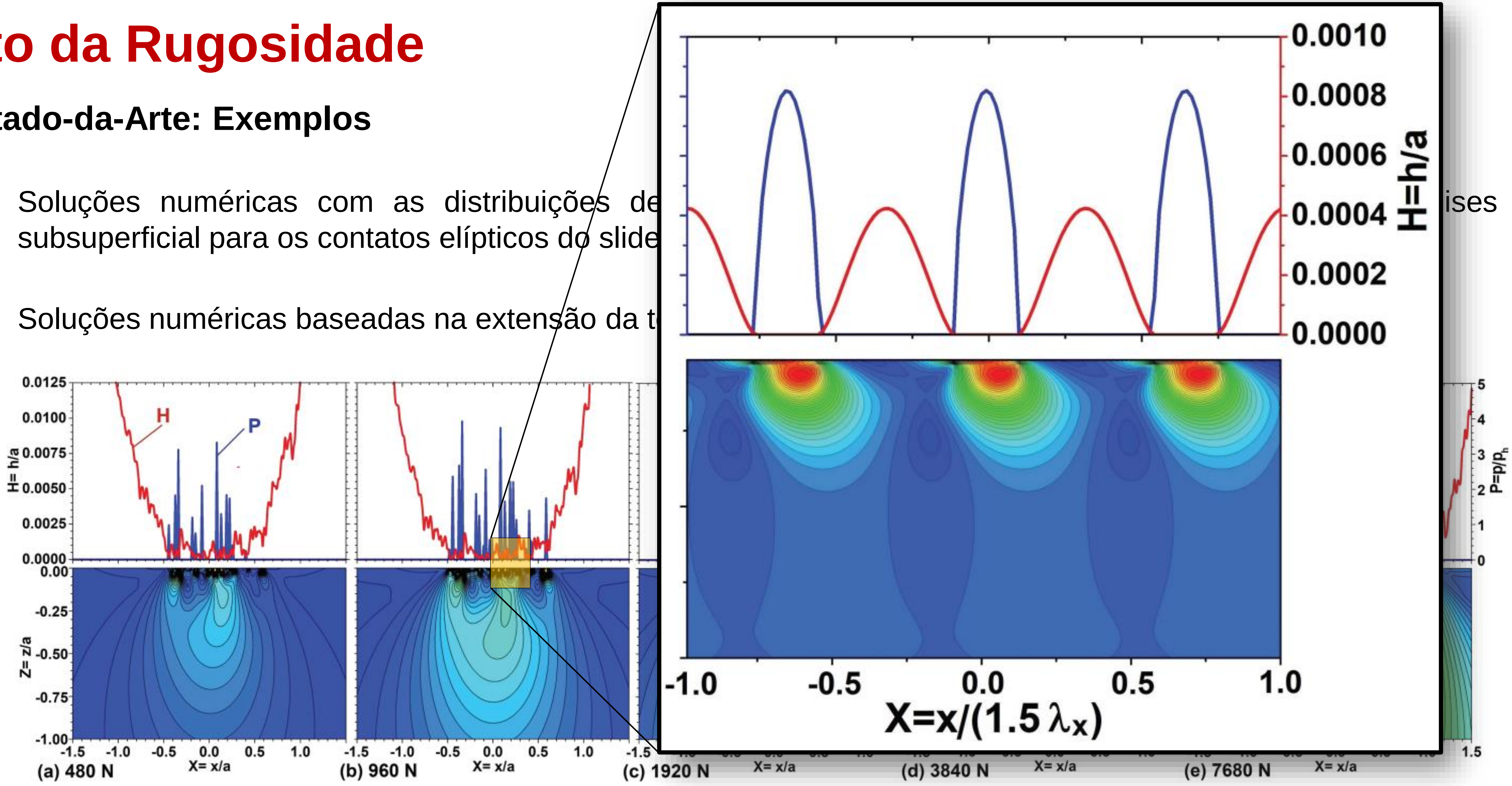
Exemplo de simulações numéricas de contatos elípticos com superfícies rugosas considerando o aumento contínuo de carga. Adaptado de [12]

❑ Efeito da Rugosidade

➢ Estado-da-Arte: Exemplos

- Soluções numéricas com as distribuições de … ises subsuperficial para os contatos elípticos do slide …

- Soluções numéricas baseadas na extensão da t…



Exemplo de simulações numéricas com as distribuições de pressão de contato, separação, e tensão de von Mises subsuperficial para os contatos elípticos do slide anterior. Adaptado de [12]

Referências

1. Johnson K.L., Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1987.
2. Barber J.R., Contact Mechanics, Springer, 2018.
3. Hills D.A., Nowell D., Mechanics of Elastic Contacts. Butterworth-Heinemann, 1993.
4. **Seabra J.H.O., Mecânica do Contato Hertziano (Apostila), 2ª edição, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP), 2003.**
5. Boresi A.P., Schmidt R.J., Advanced Mechanics of Materials. 6th edition. John Wiley & Sons, 2003. (Chap. 17)
6. Popov V.L., Contact Mechanics and Friction, 2nd edition, Springer, 2017.
7. Kalker J.J., Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Springer, 1990
8. https://www.wikiwand.com/en/Contact_mechanics (visited on 02/05/2021)
9. Kadiric A., Smooth Surfaces in Contact. Imperial College London Tribology Course (Lecture Notes), 2013.
10. Stachowiak G.W., Batchelor A.W., Engineering Tribology, 4th edition, Butterworth-Heinemann, 2014.
11. https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor (visited on 02/05/2021)
12. **Wang J., Zhu D., Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication, CRC Press, 2019.**
13. https://9gag.com/gag/aWZqjzA (visited on 02/05/2021)
14. Heckmann A., Keck A., Kaiser I., Kurzeck B., The Foundation of the DLR Railway Dynamics Library: the Wheel-Rail-Contact. Proceedings of the 10th International Modelica Conference; March 10-12; 2014; Lund; Sweden.
15. https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz (visited on 02/05/2021)