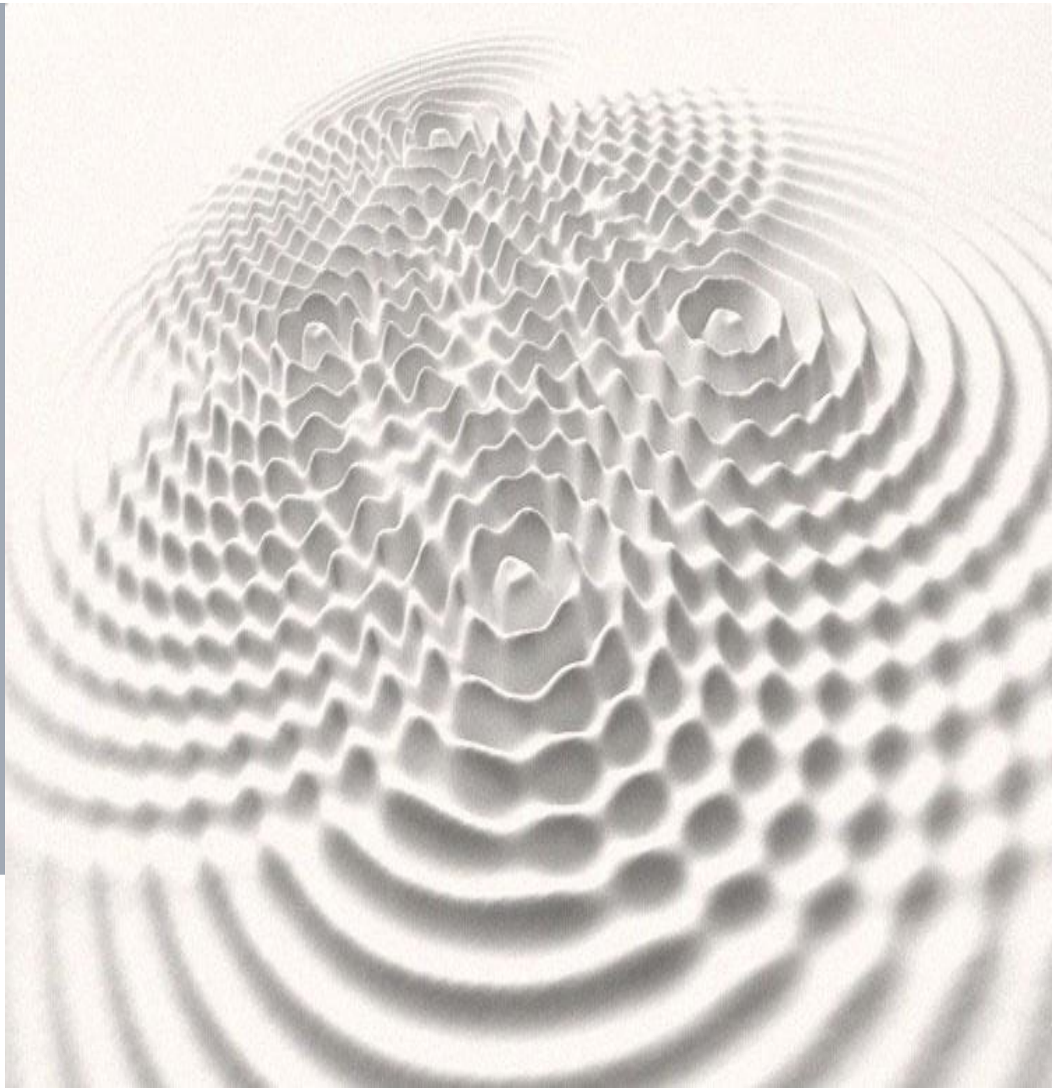
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Mecânica

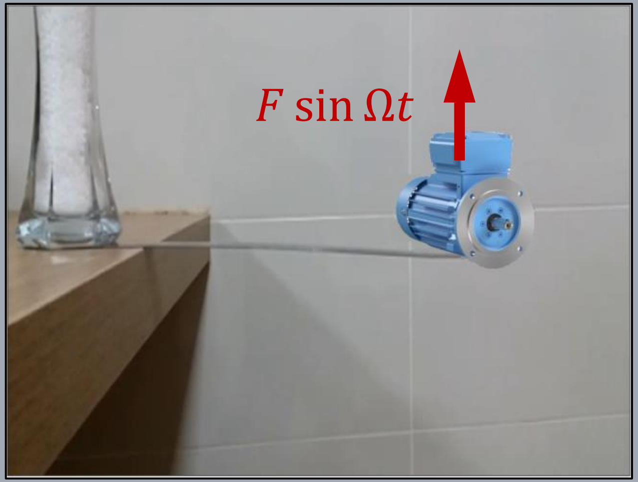
SEM 172 – Vibrações Mecânicas

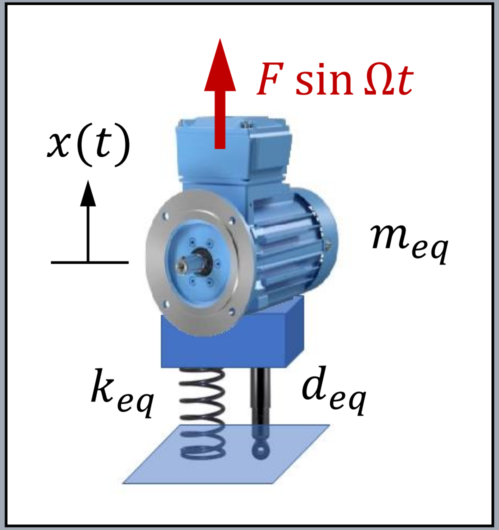
Prof. Rodrigo Nicoletti

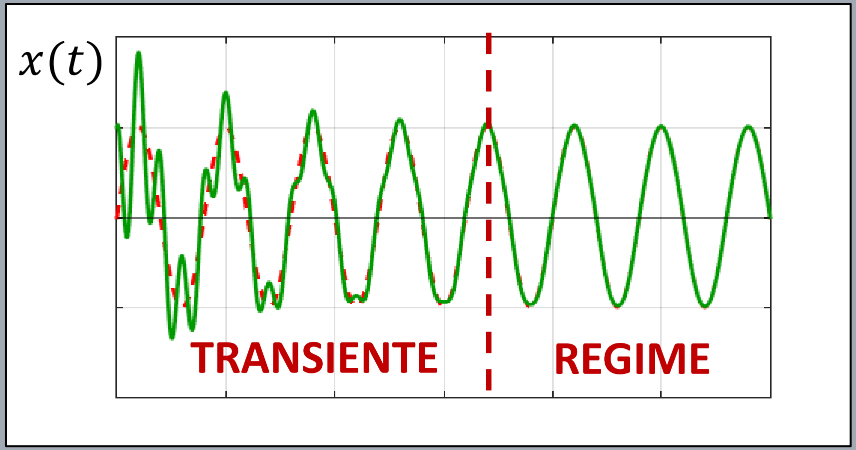
AULA 8 – Vibração Forçada Movimento de Base

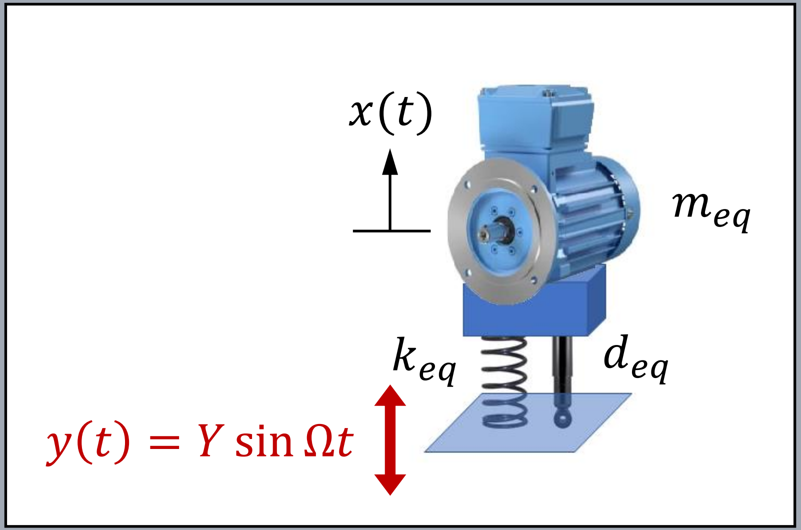


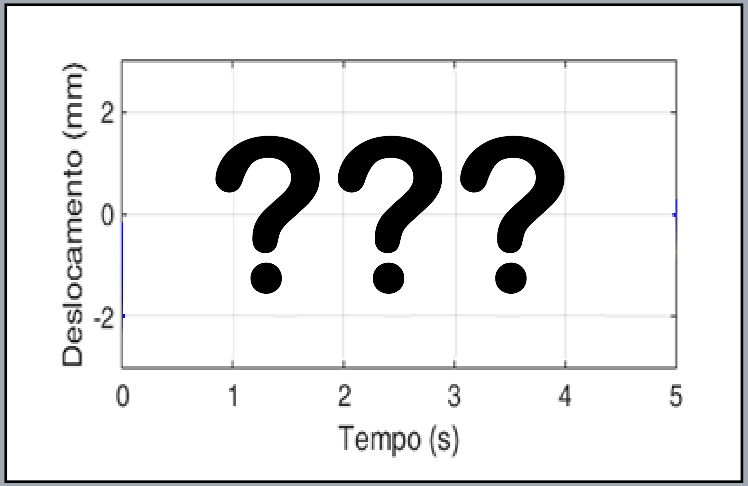
Resposta Forçada





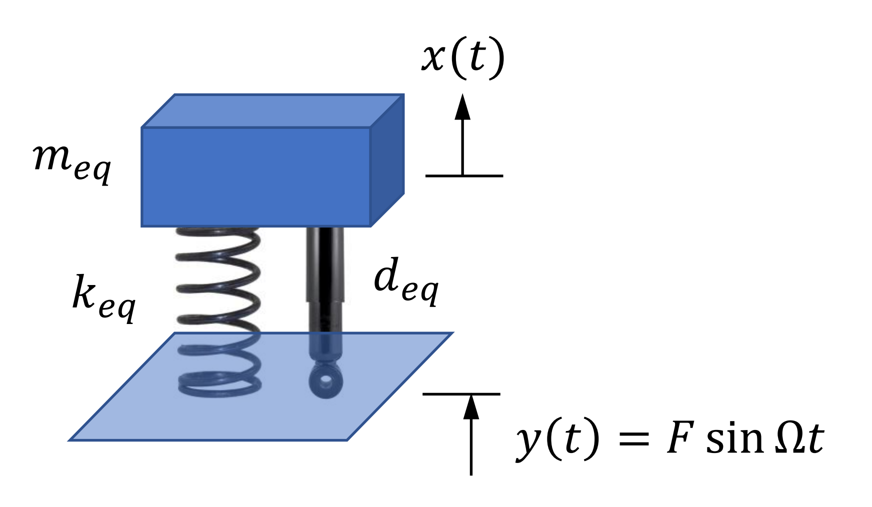




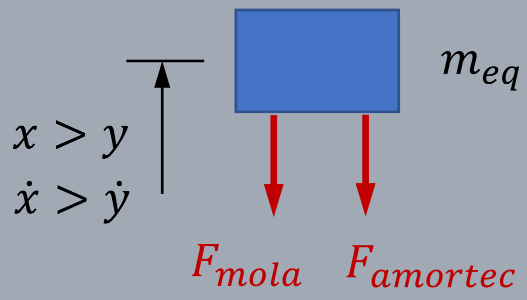


Vibração Forçada por Movimento da Base

Equação de Movimento do Sistema



Fazendo-se o DCL do corpo e aplicando-se a 2ª lei de Newton:



$$m_{eq}\ddot{x} = -F_{amortec} - F_{mola} = -d_{eq}(\dot{x} - \dot{y}) - k_{eq}(x - y)$$

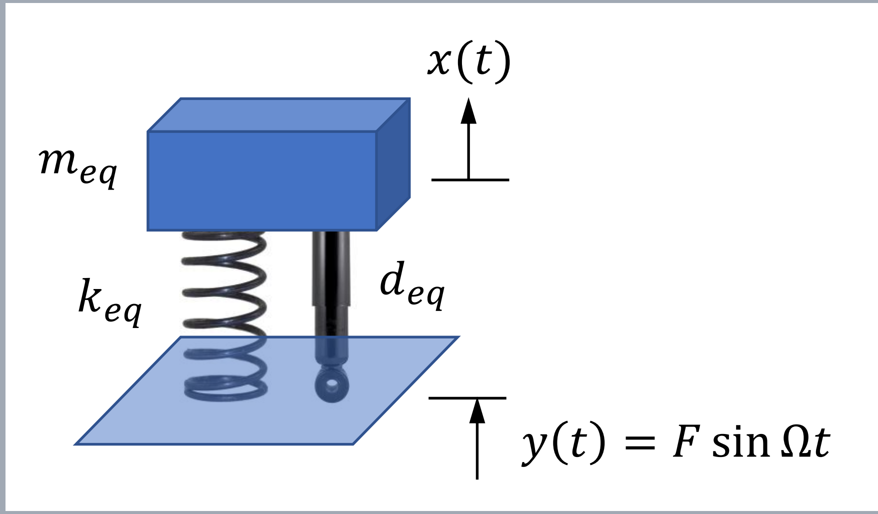
$$\Rightarrow \boxed{m_{eq}\ddot{x} + d_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = d_{eq}\dot{y} + k_{eq}y}$$

Eq. Movimento do Sistema

Fazendo-se uma transformação de coordenadas: $\boxed{z(t) = x(t) - y(t)}$

Tem-se: $m_{eq}\ddot{z} + d_{eq}\dot{z} + k_{eq}z = -m_{eq}\ddot{y}$

Resposta Forçada



Para uma excitação harmônica: $y(t) = Y \sin \Omega t$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \Omega Y \cos \Omega t$$
$$\Rightarrow \ddot{y}(t) = -\Omega^2 Y \sin \Omega t$$

Pode-se assumir que a resposta também será harmônica:

$$z(t) = Z \sin(\Omega t - \phi) \quad \Rightarrow \dot{z}(t) = \Omega Z \cos(\Omega t - \phi)$$
$$\Rightarrow \ddot{z}(t) = -\Omega^2 Z \sin(\Omega t - \phi)$$

Substituindo na equação, tem-se:

$$-m_{eq}\Omega^2 Z \sin(\Omega t - \phi) + d_{eq}\Omega Z \cos(\Omega t - \phi) + k_{eq} Z \sin(\Omega t - \phi) = m_{eq}\Omega^2 Y \sin \Omega t$$

Abrindo os senos e cossenos e rearranjando, pode-se escrever:

$$\begin{cases} Z\left[\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right)\cos\phi + d_{eq}\Omega \sin\phi\right] = m_{eq}\Omega^2 Y & (1) \\ Z\left[-\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right)\sin\phi + d_{eq}\Omega \cos\phi\right] = 0 & (2) \end{cases}$$

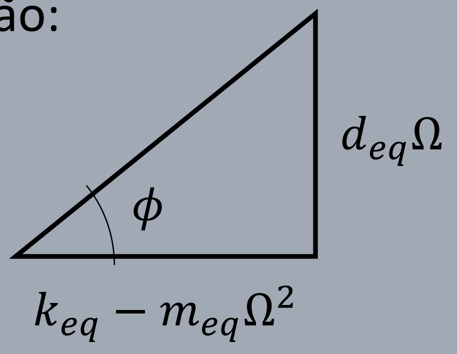
Resposta Forçada

Da equação (2), tem-se:

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{d_{eq}\Omega}{k_{eq} - m_{eq}\Omega^2}\right)}$$

Fase da resposta z(t) em relação a y(t)

Então:



$$\sin\phi = \frac{d_{eq}\Omega}{\sqrt{\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right)^2 + \left(d_{eq}\Omega\right)^2}}$$

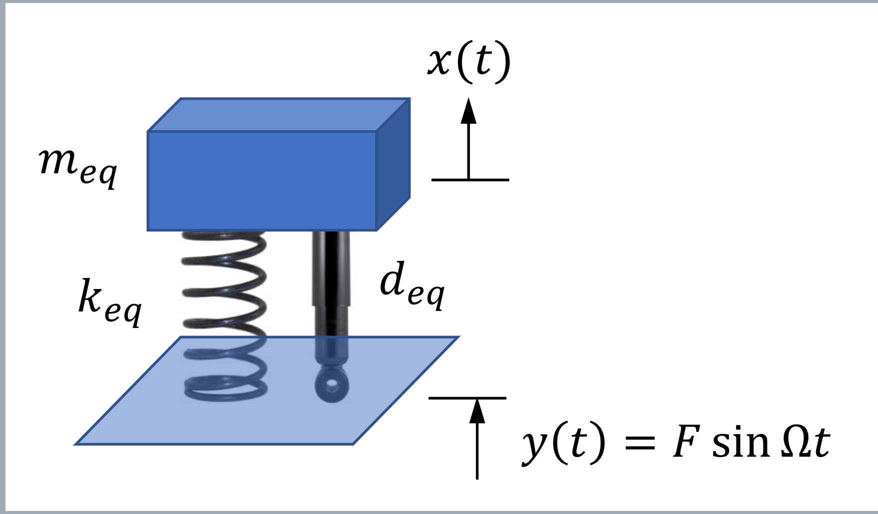
$$\cos\phi = \frac{k_{eq} - m_{eq}\Omega^2}{\sqrt{\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right)^2 + \left(d_{eq}\Omega\right)^2}}$$

Portanto, da equação (1):

$$\boxed{Z = \frac{m_{eq}\Omega^2 Y}{\sqrt{\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right)^2 + \left(d_{eq}\Omega\right)^2}}}$$

Amplitude da Resposta z(t)

Resposta Forçada



Porém, sabemos que: $z(t) = x(t) - y(t) \;\Rightarrow\; x(t) = z(t) + y(t)$

Supondo resposta também harmônica: $x(t) = X \sin(\Omega t - \psi)$

Então: $X \sin(\Omega t - \psi) = Z \sin(\Omega t - \phi) + Y \sin \Omega t$

Abrindo os senos e cossenos e rearranjando, pode-se escrever:

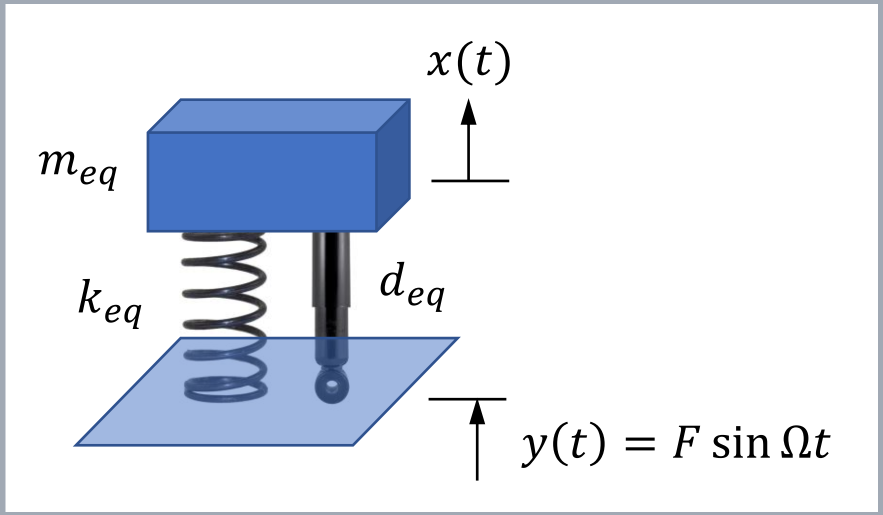
$$\begin{cases} X \cos\psi - Z \cos\phi = Y & (3) \\ X \sin\psi - Z \sin\phi = 0 & (4) \end{cases}$$

Dividindo-se (4) por (3), tem-se:

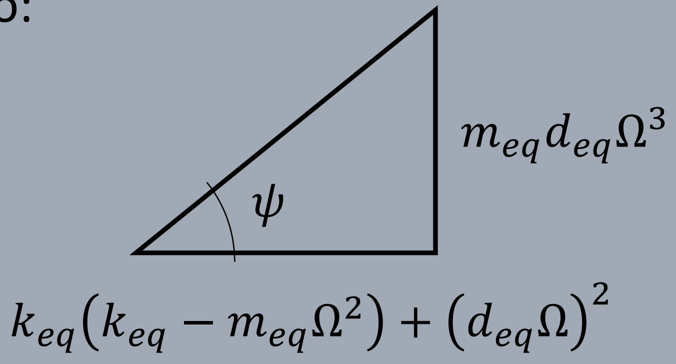
$$\boxed{\psi = \tan^{-1}\left[\frac{m_{eq} d_{eq} \Omega^3}{k_{eq}\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right) + \left(d_{eq}\Omega\right)^2}\right]}$$

Fase da resposta x(t) em relação a y(t)

Resposta Forçada



Então:



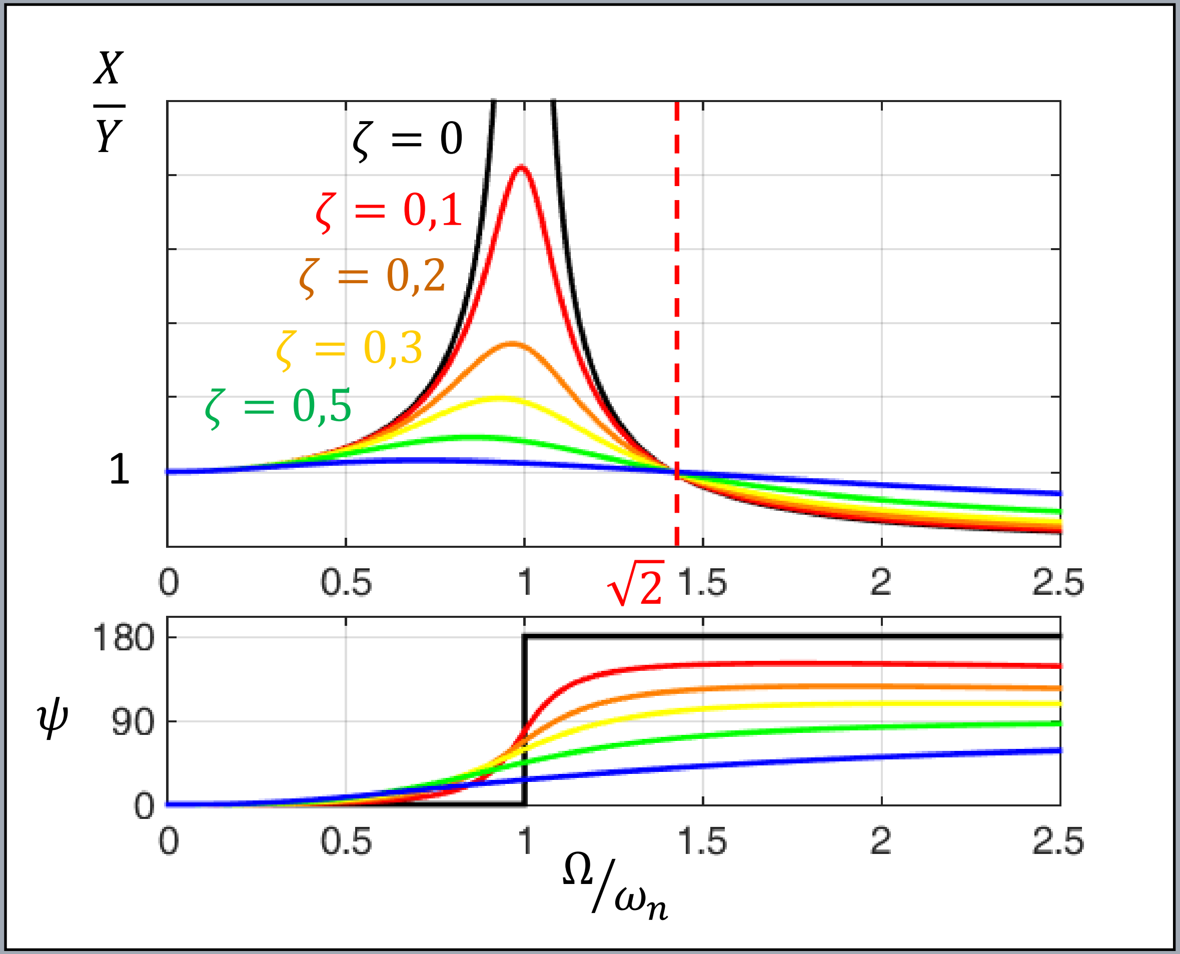
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\psi \\ \cos\psi \end{cases}$$

Substituindo $\sin\psi$ e $\cos\psi$ na equação (4):

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{k_{eq}^2 + \left(d_{eq}\Omega\right)^2}{\left(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2\right)^2 + \left(d_{eq}\Omega\right)^2}}$$

Amplitude da Resposta x(t)

Resposta Forçada por Movimento de Base



- $\Omega \ll \omega_n \quad \Rightarrow \quad X \approx Y$ (sistema acompanha o movimento da base)
- $\Omega \approx \omega_n \quad \Rightarrow \quad \uparrow X$ (RESSONÂNCIA)

  $\Rightarrow \quad X > Y$
- $\Omega = \sqrt{2}\,\omega_n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{X} = \mathrm{Y} \quad \forall\zeta$
- $\Omega \gg \omega_n \quad \Rightarrow \quad \downarrow X$ (atenuação)

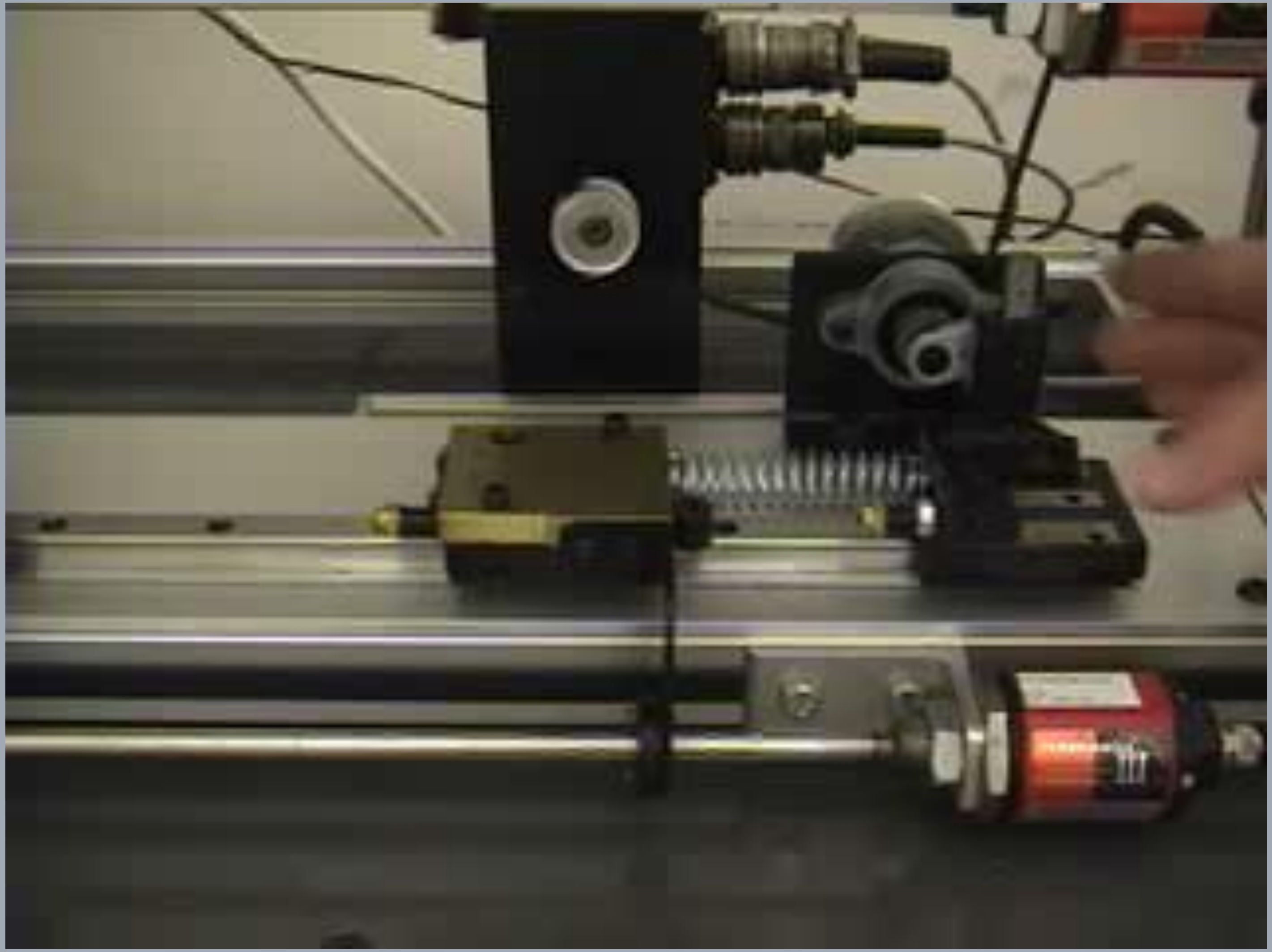
  $\Rightarrow \quad X < Y$

Ponto de Vista de Projeto:

Ω deve estar acima de $\sqrt{2}\,\omega_n$ para se ter mínima resposta vibratória do sistema

Exemplos de Movimento de Base

Exemplos de Movimento de Base



Exemplos de Movimento de Base

Conclusão

Moral da História...

1. A amplitude da vibração depende da frequência de excitação Ω

- Se $\Omega \ll \omega_n \;\Rightarrow\; X \to Y$ (sistema acompanha o movimento da base)
- Se $\Omega = \omega_n \;\Rightarrow\; \uparrow X > Y$ ***(RESSONÂNCIA)***
- Se $\Omega = \sqrt{2}\,\omega_n \;\Rightarrow\; \mathrm{X} = \mathrm{Y} \quad \forall\zeta$
- Se $\Omega \gg \omega_n \Rightarrow \downarrow X < Y$ (atenuação)

2. **Ponto de Vista de Projeto**:

Ω deve estar acima de $\sqrt{2}\,\omega_n$ para se ter minima resposta vibratória do sistema

Dúvidas ?