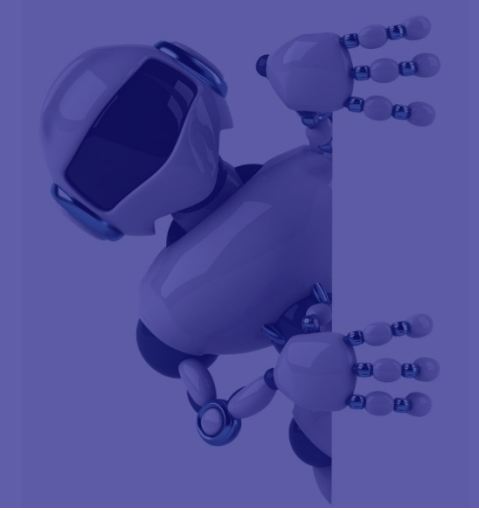


PMR 3302
Sistemas Dinâmicos I

LABORATÓRIO 05
ANÁLISE DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

Ettore Barros eabarros@usp.br
Larissa Driemeier driemeie@usp.br
Arturo Forner- Cordero aforner@usp.br
Rafael Traldi Moura moura.gmsie@usp.br
Rodrigo Lima Stoeterau rodrigo.stoeterau@usp.br

NOSSA AGENDA

#	Data	Tópico
~~1~~	~~27/02~~	~~Introdução ao modelamento e uso do software;~~ ~~Introdução à programação em Octave/Matlab~~
~~2~~	~~01/03~~	~~Conceitos Básicos de Funções de Variáveis Complexas~~ ~~Resolução de Equações Diferenciais – Sistemas Lineares e Não Lineares~~
~~3~~	~~03/03~~	~~Transformada de Laplace e Funções de Transferência~~
~~4~~	~~06/03~~	~~Representação de sistemas dinâmicos por diagrama de blocos.~~ ~~Diagrama de Blocos: manipulação e aplicações.~~
5	07/03	Análise de Sistemas de Primeira Ordem
6	09/03	Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de primeira ordem

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

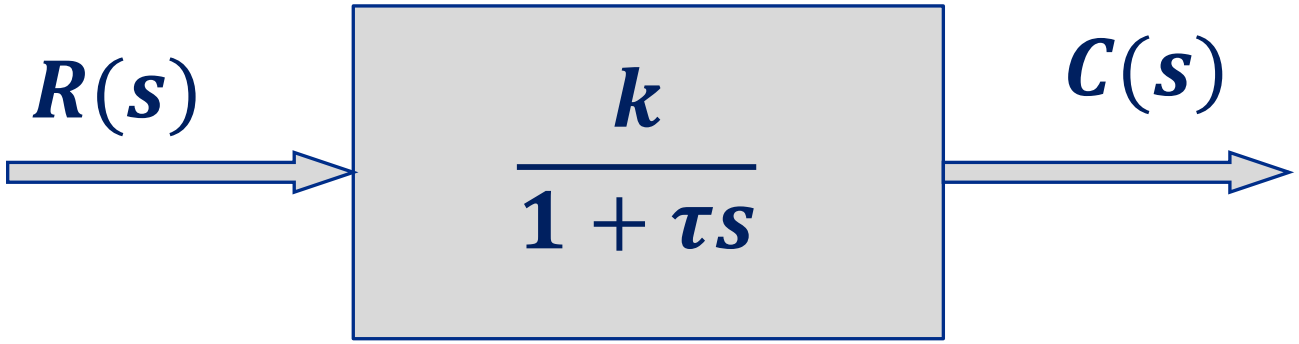
Revisando!

$$\textit{Onde}: \; k = \textit{ganho}$$
$$\tau = \textit{constante de tempo}$$

Muitos sistemas reais tem essa forma básica!

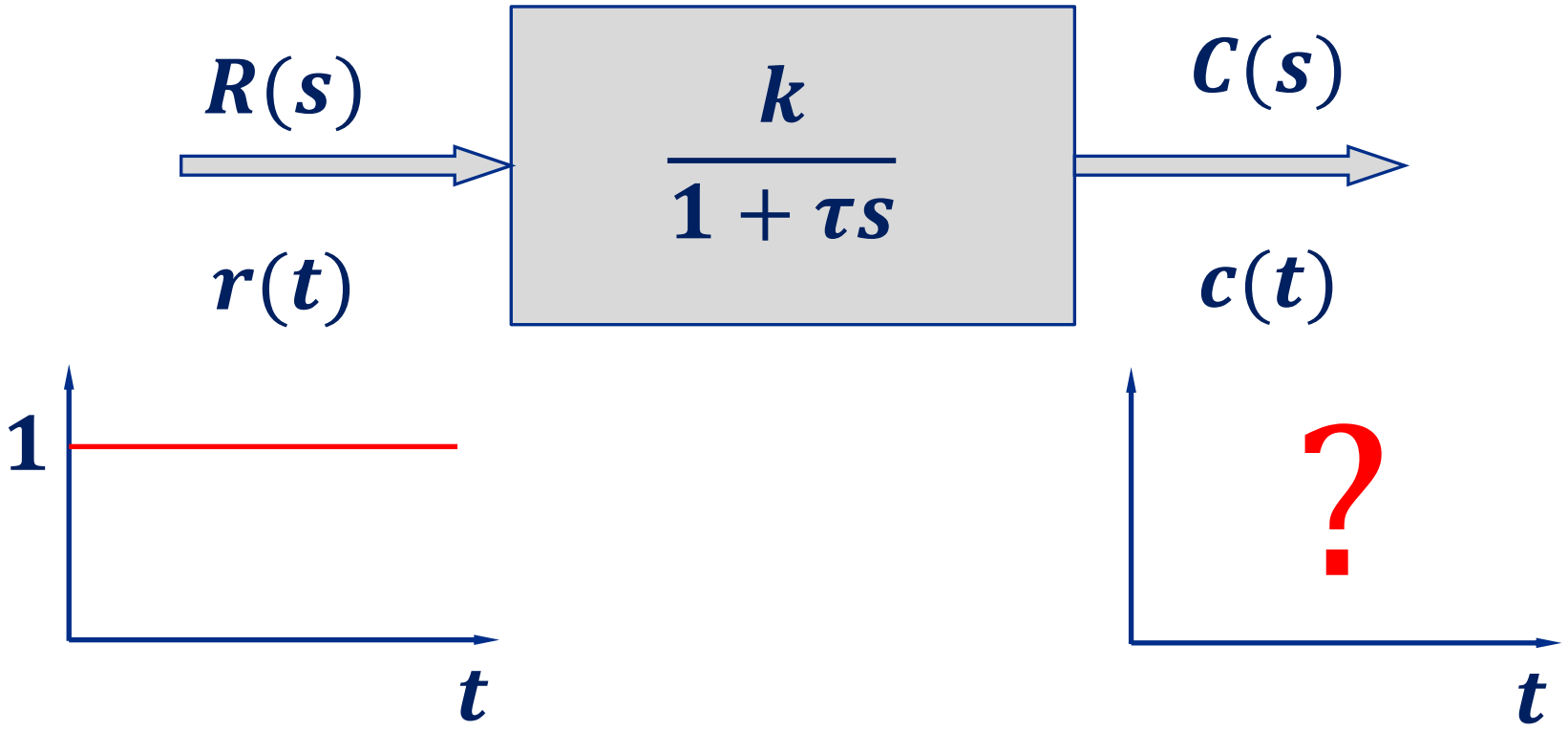
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



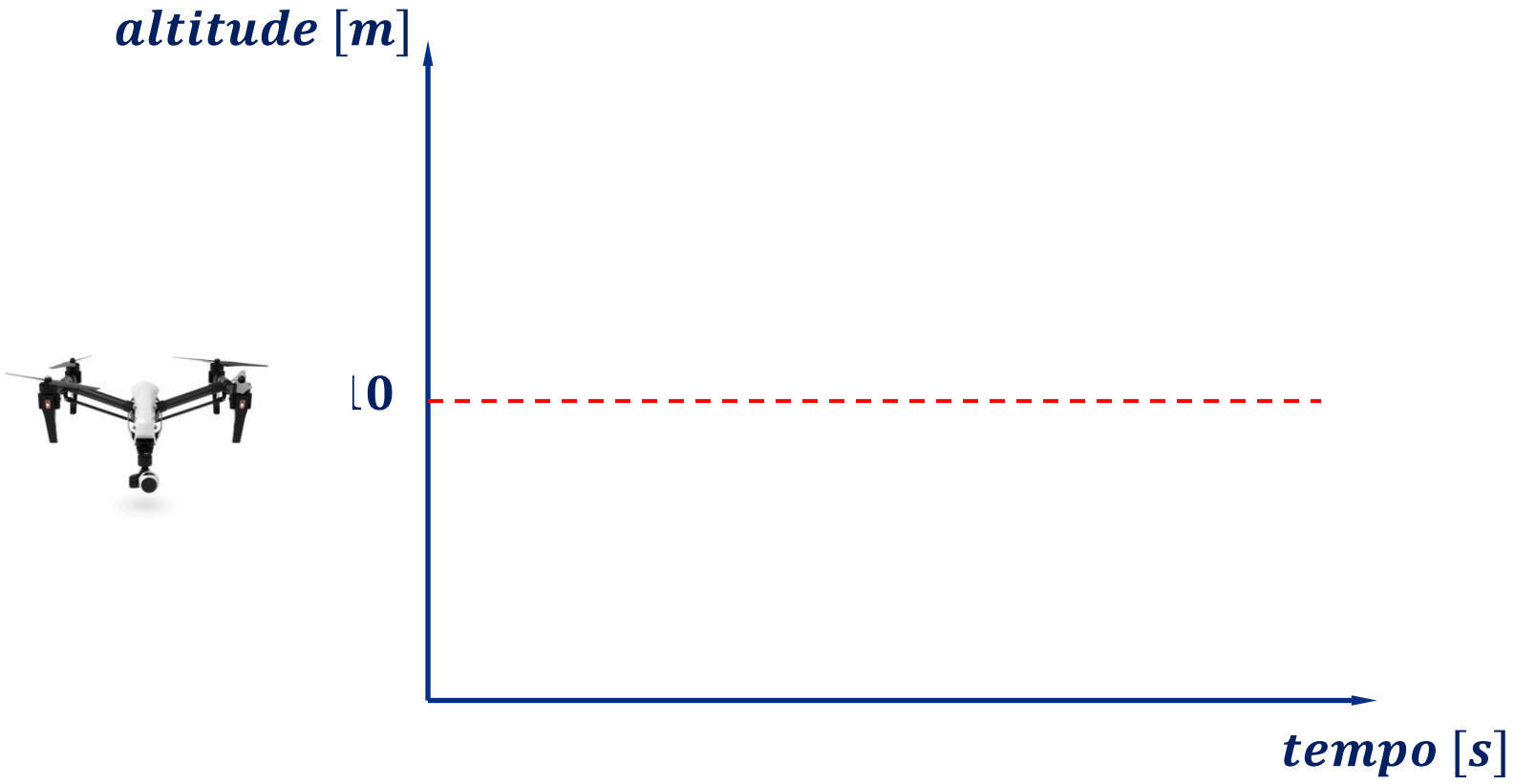
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



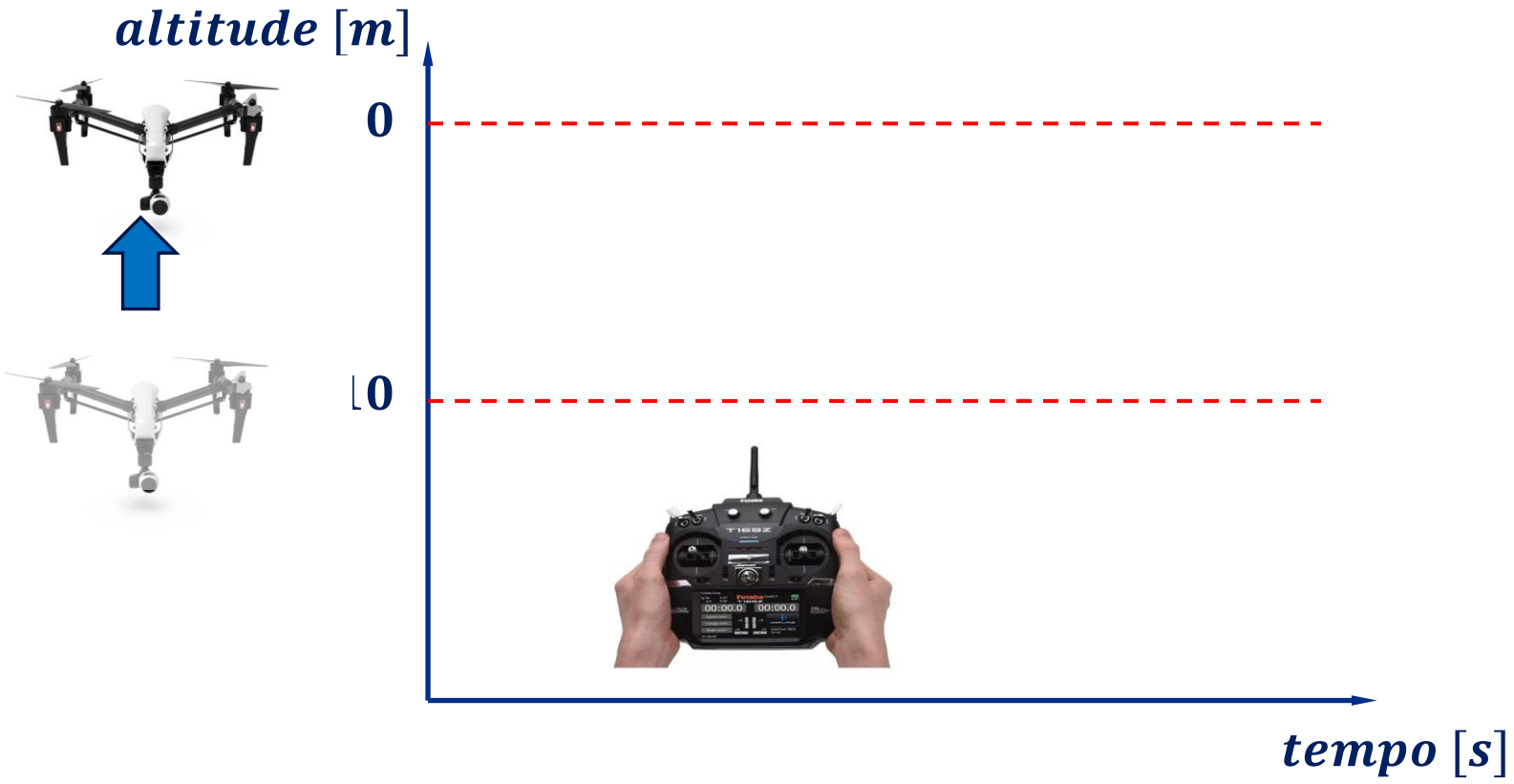
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



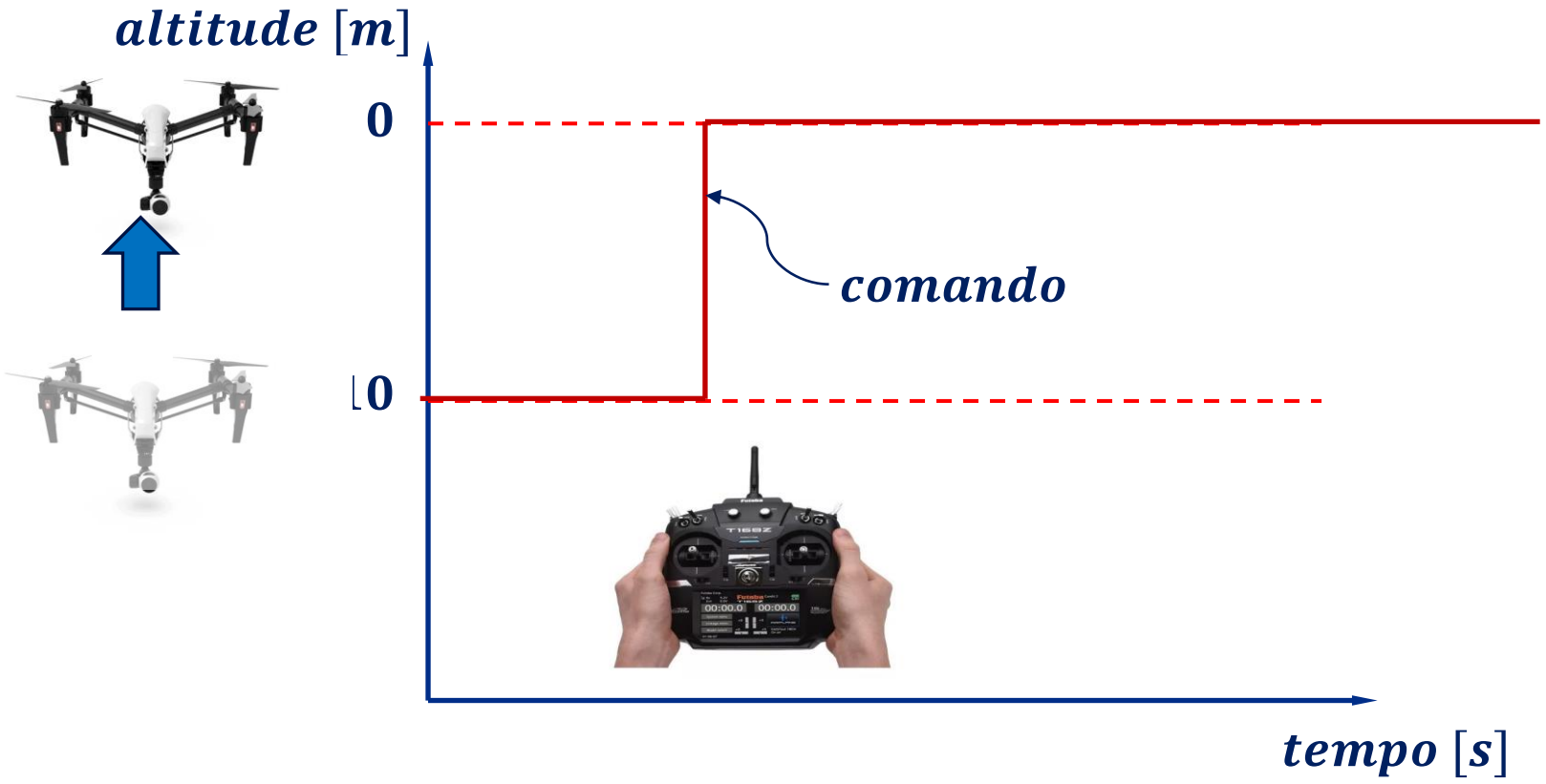
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



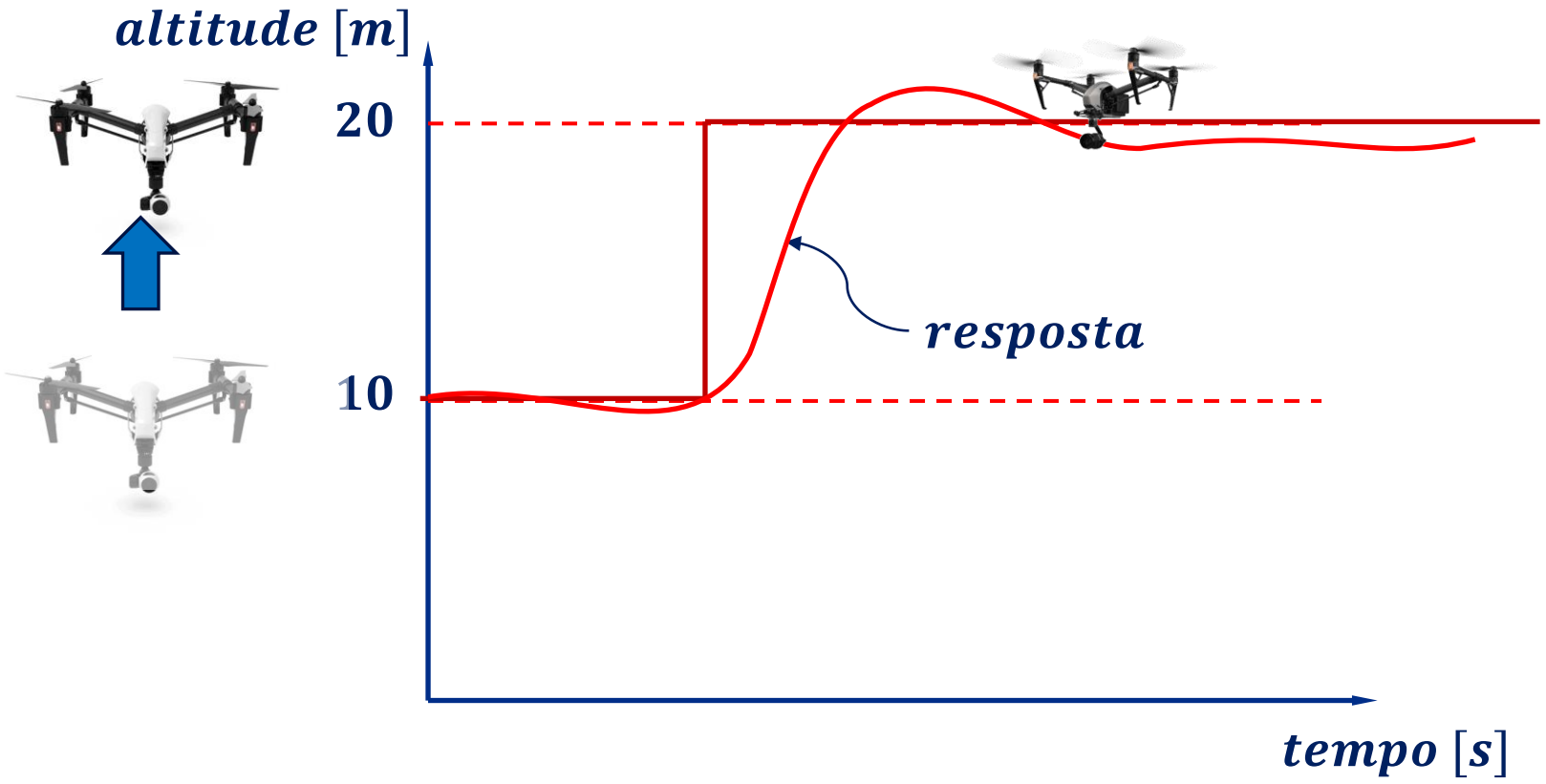
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



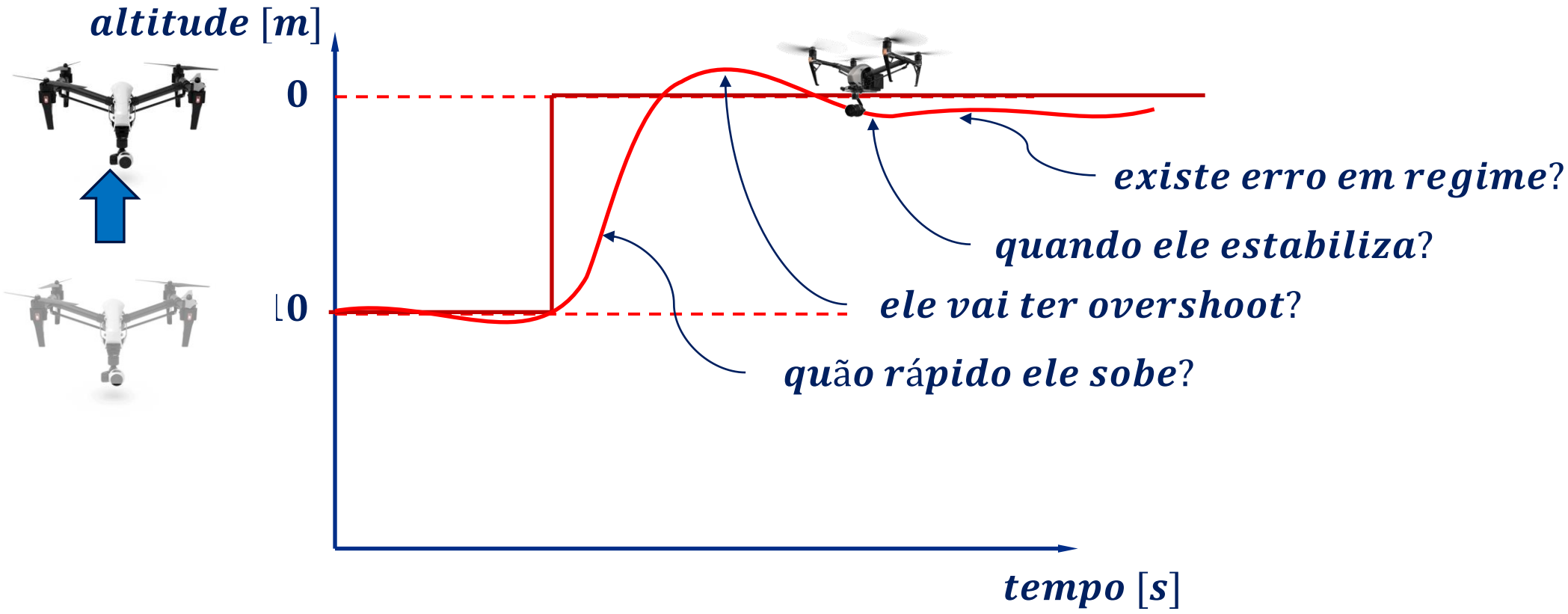
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



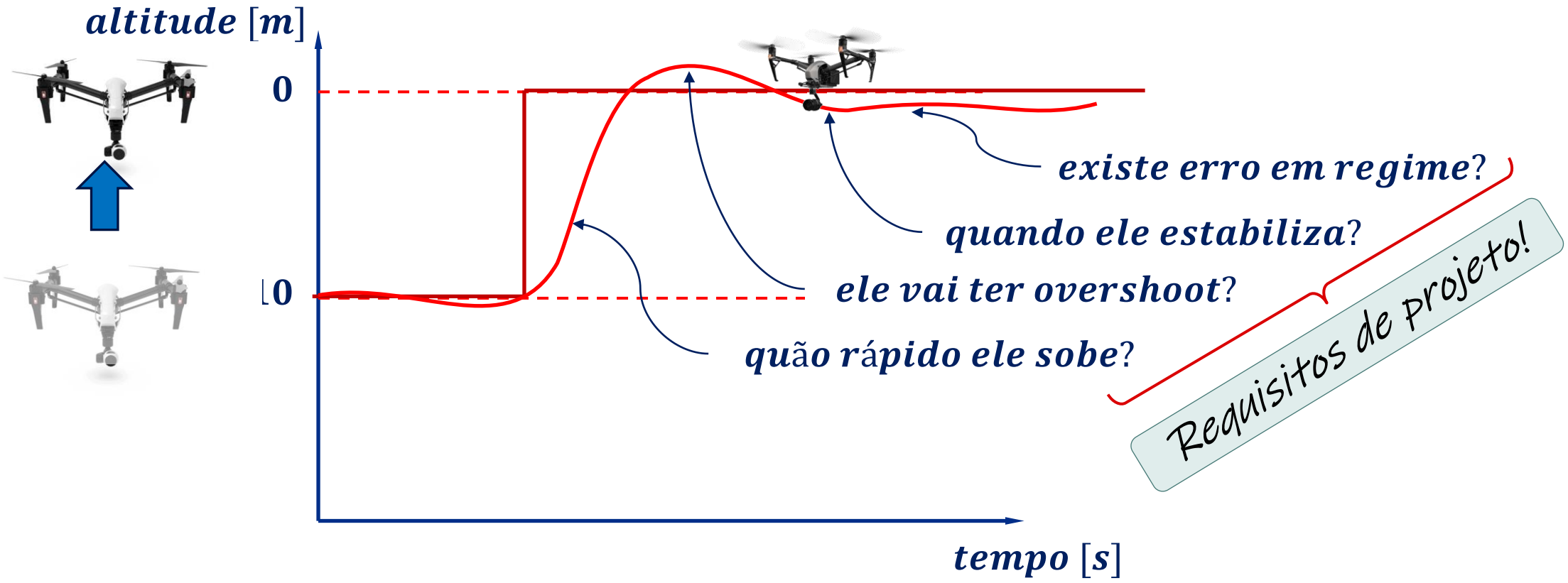
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



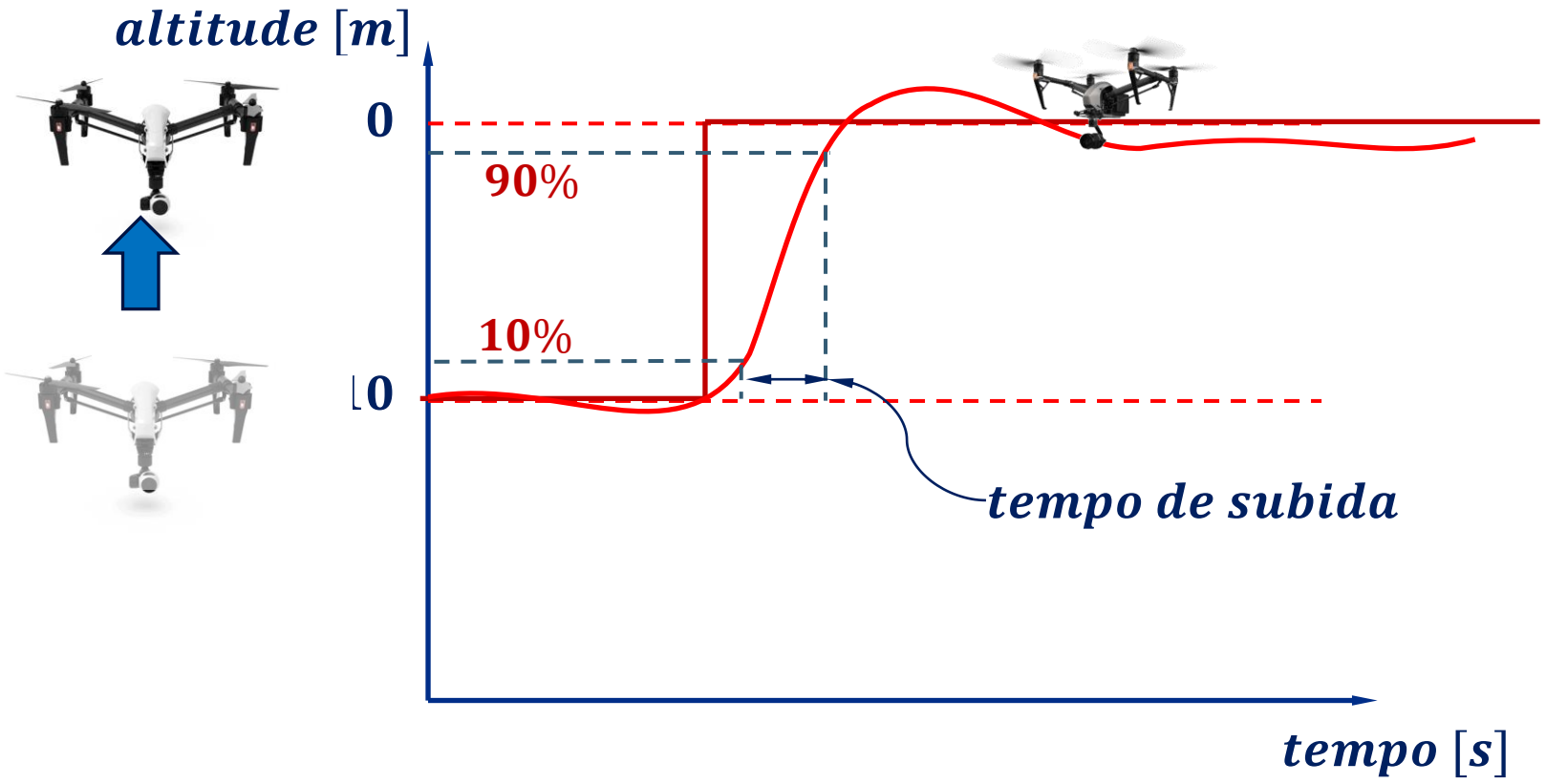
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



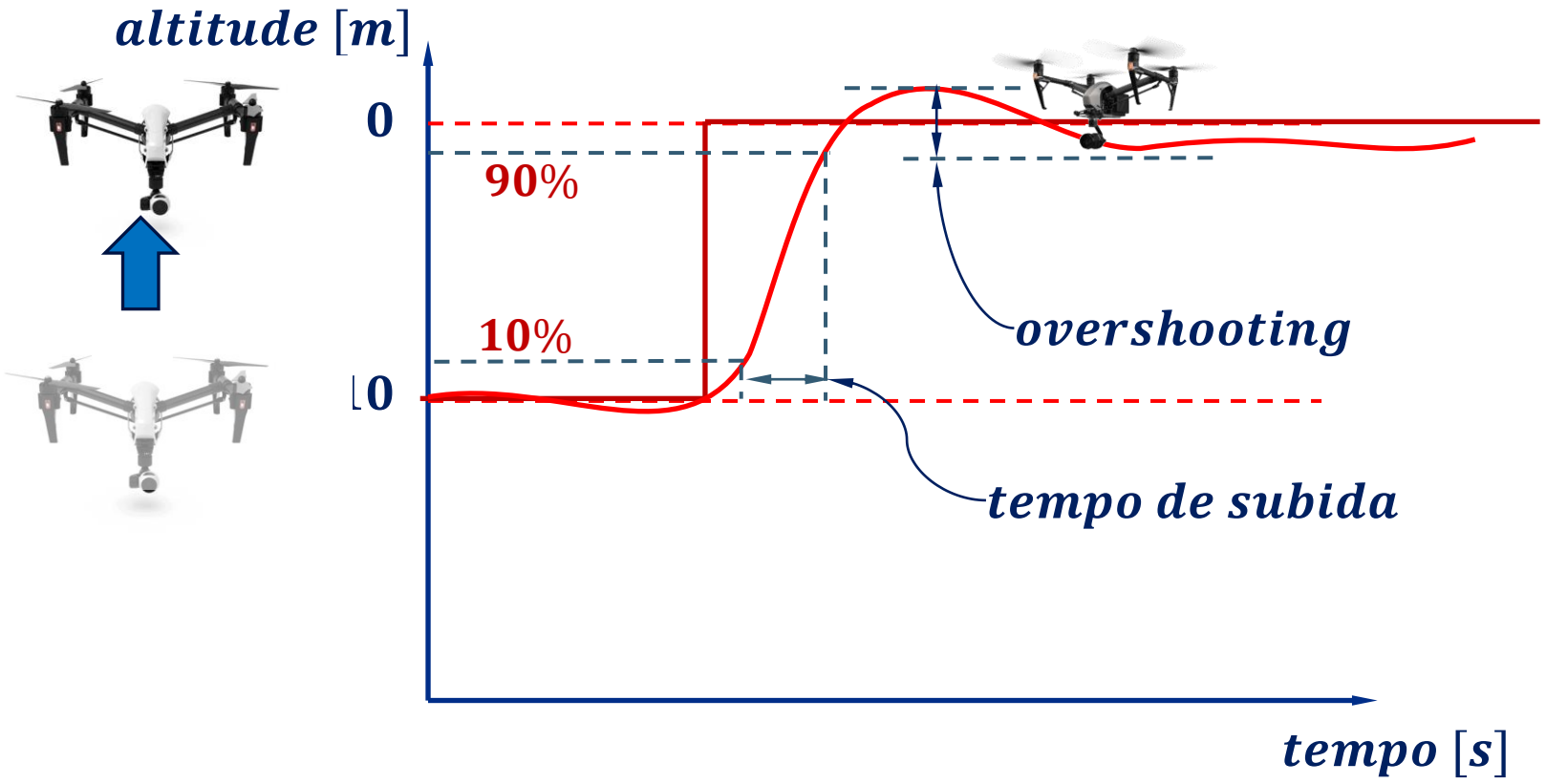
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



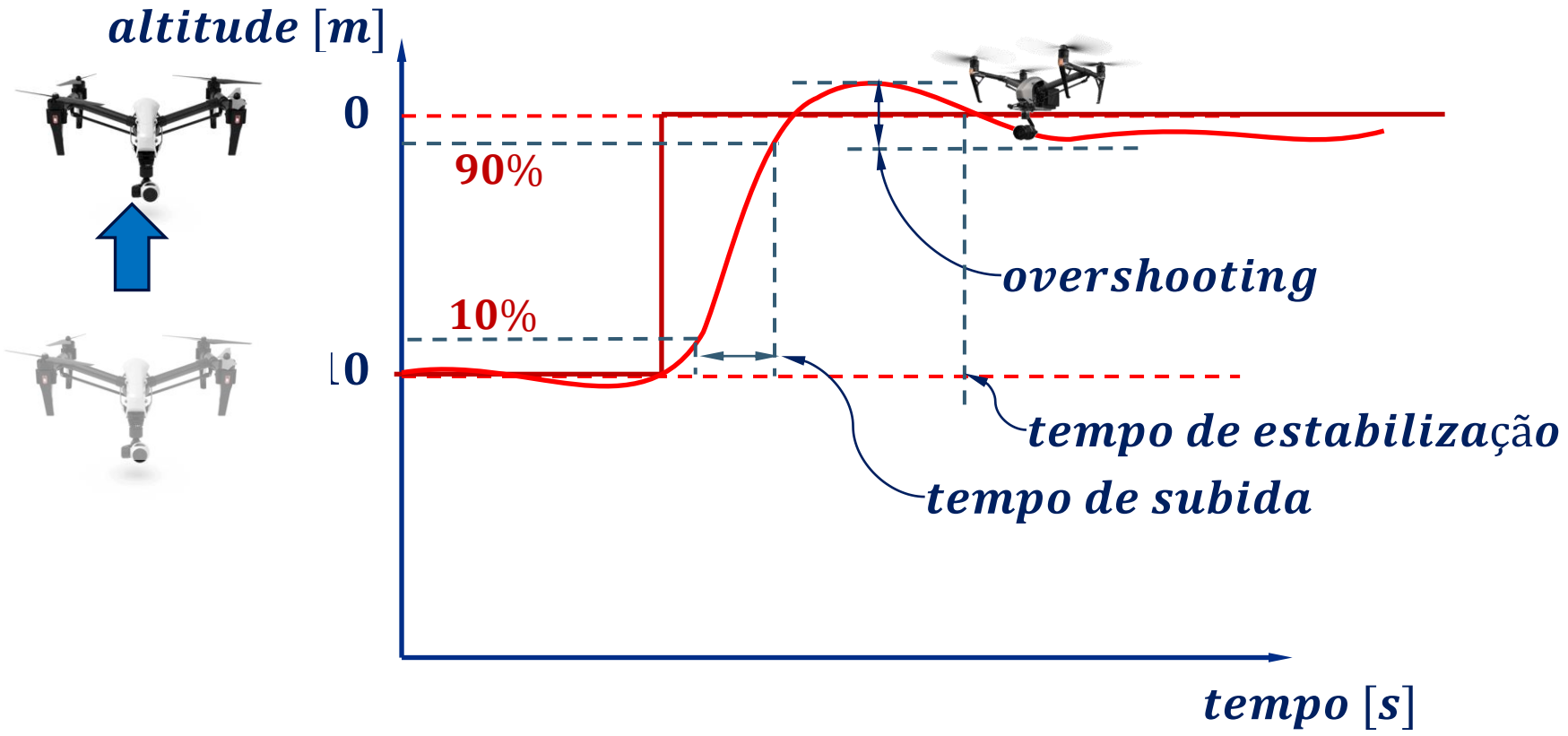
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



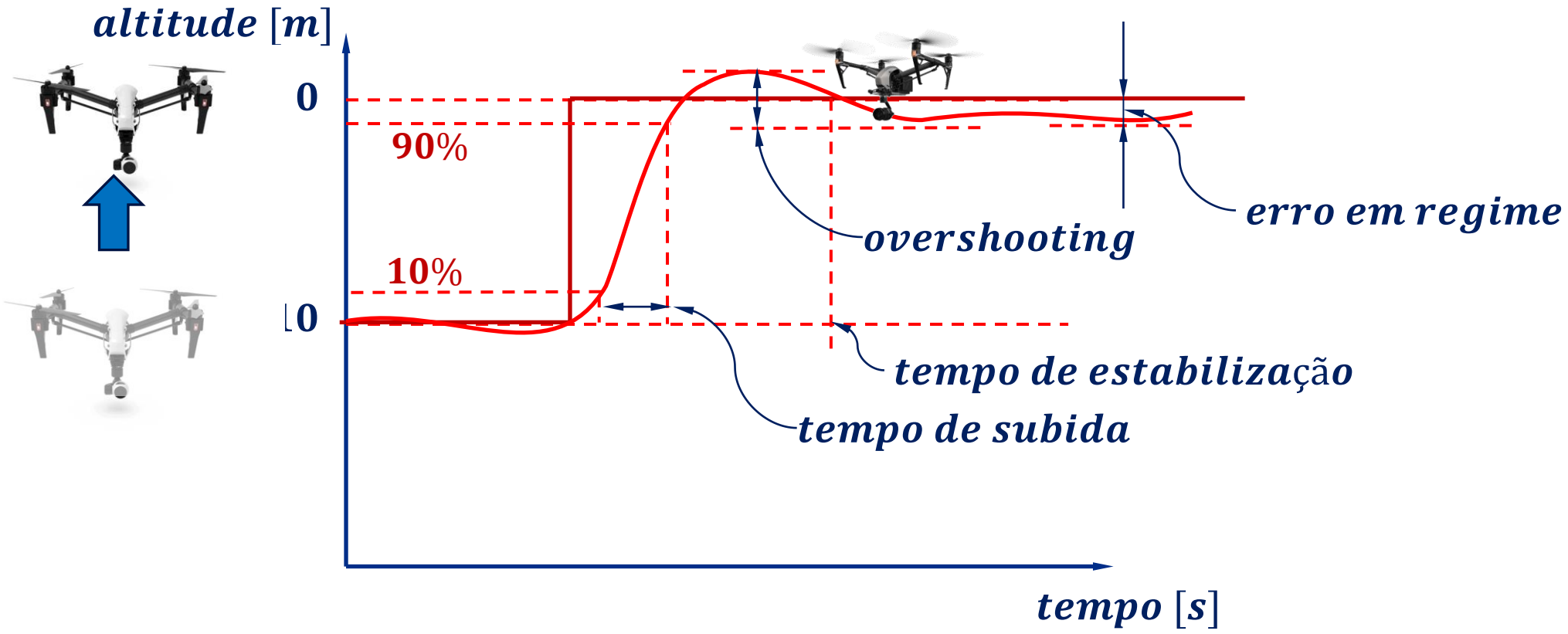
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



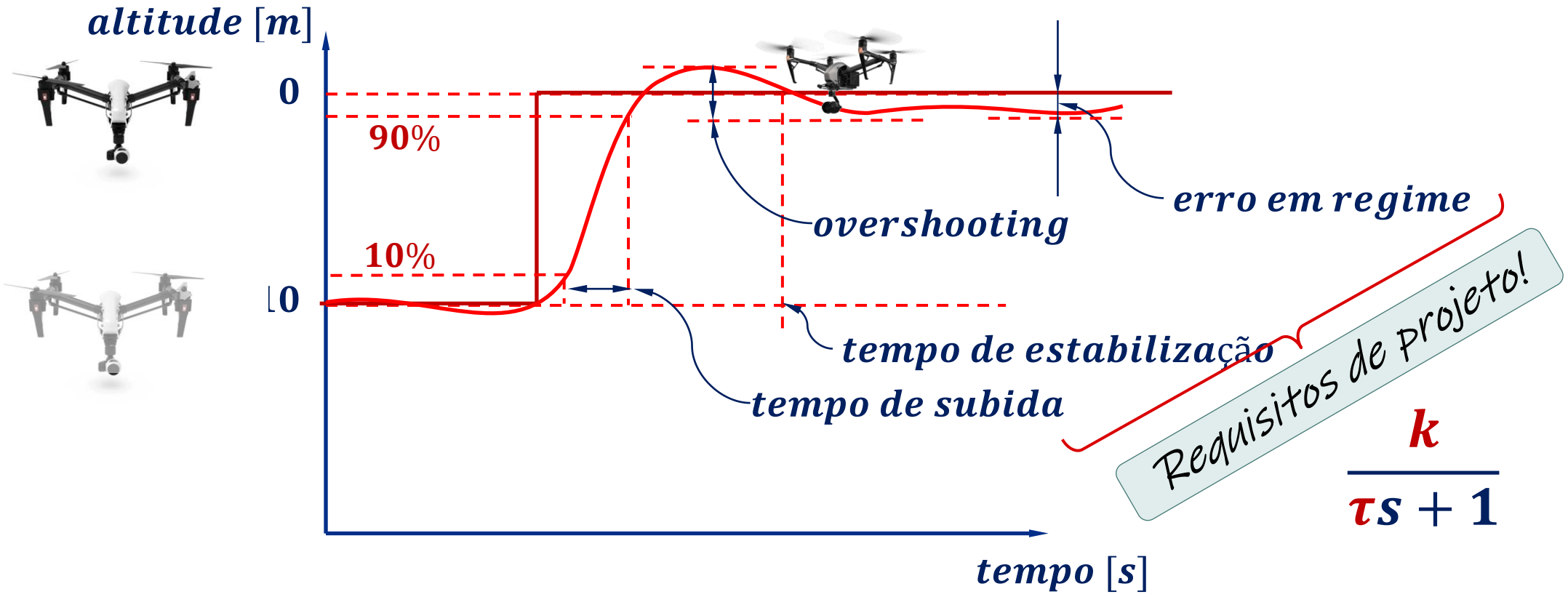
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem



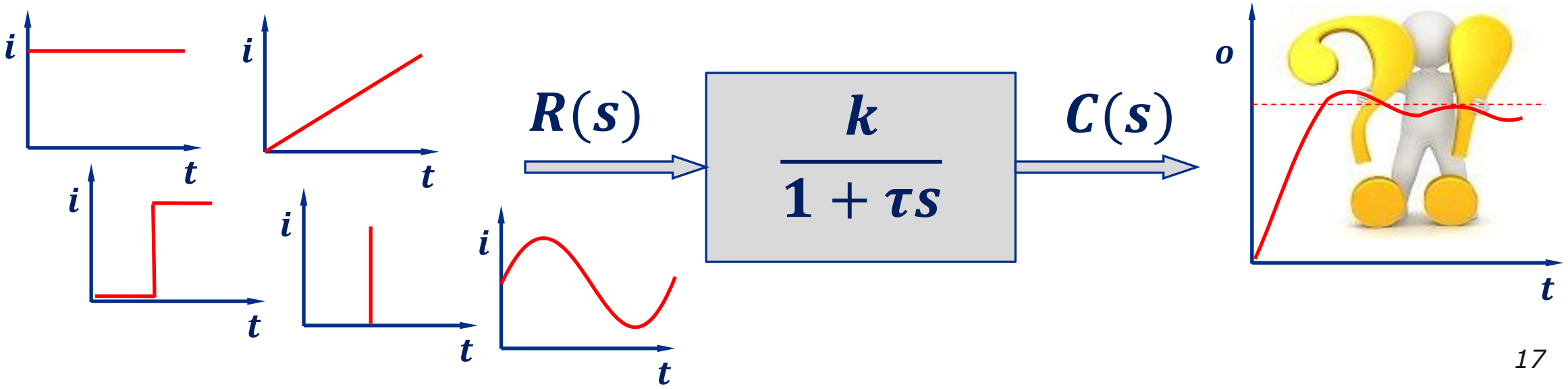
$$\frac{k}{\tau s + 1}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Introdução a análise de resposta no tempo

A análise no tempo permite:

- Classificar a resposta de alguns sistemas para padrões de entrada conhecidos



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Introdução a análise de resposta no tempo

A análise no tempo permite:

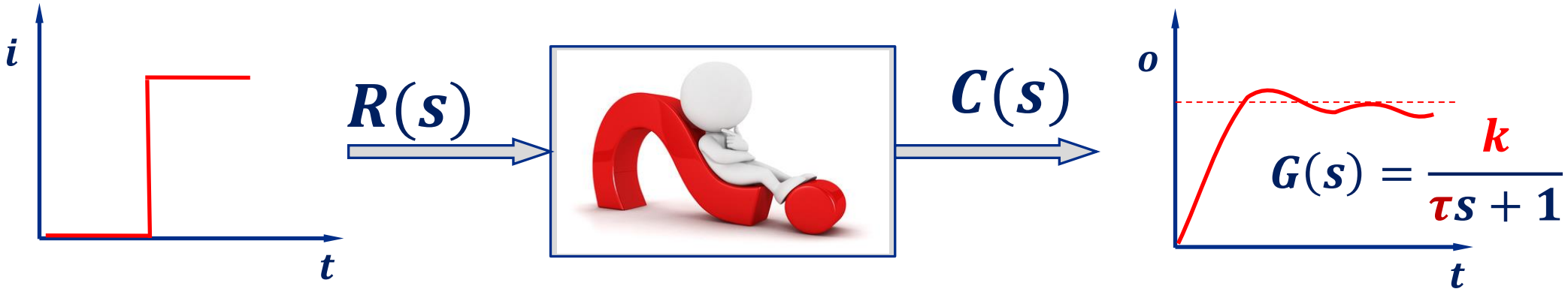
- Com base nas características da resposta a uma entrada conhecida, pode-se definir as especificações de um sistema

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Introdução a análise de resposta no tempo

A análise no tempo permite:

- Sabendo a resposta a padrões de entrada conhecidos, pode-se identificar os parâmetros de um sistema



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Introdução a análise de resposta no tempo

A análise no tempo permite:

- A resposta a padrões de entrada conhecidos podem ser usadas para identificar sua função transferência

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

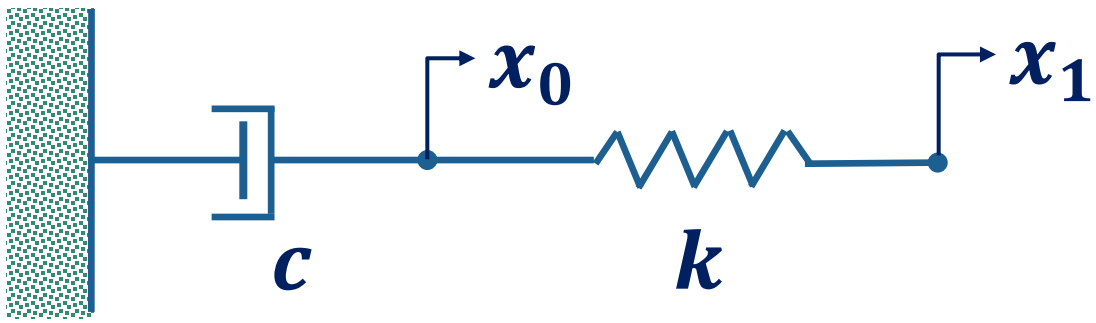
Introdução a análise de resposta no tempo

A análise no tempo permite:

- Identificar a ordem de um sistema

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplos de sistemas reais tem essa forma básica

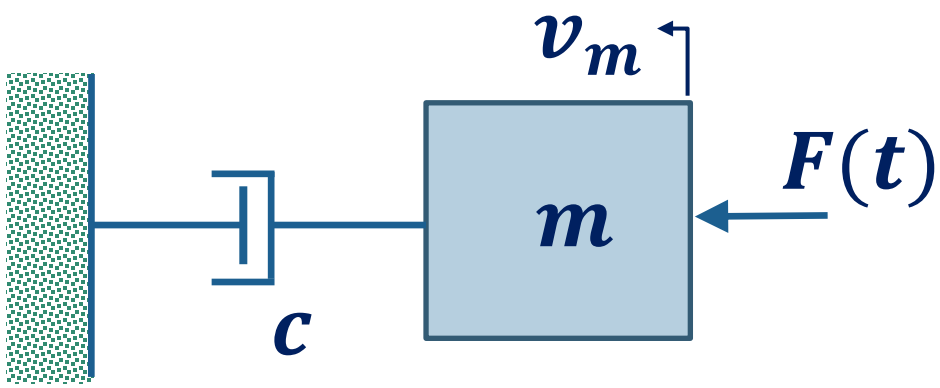


$$\frac{c}{k}\dot{x}_0 + x_o = x_i$$

$$\tau = \frac{c}{K}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplos de sistemas reais tem essa forma básica

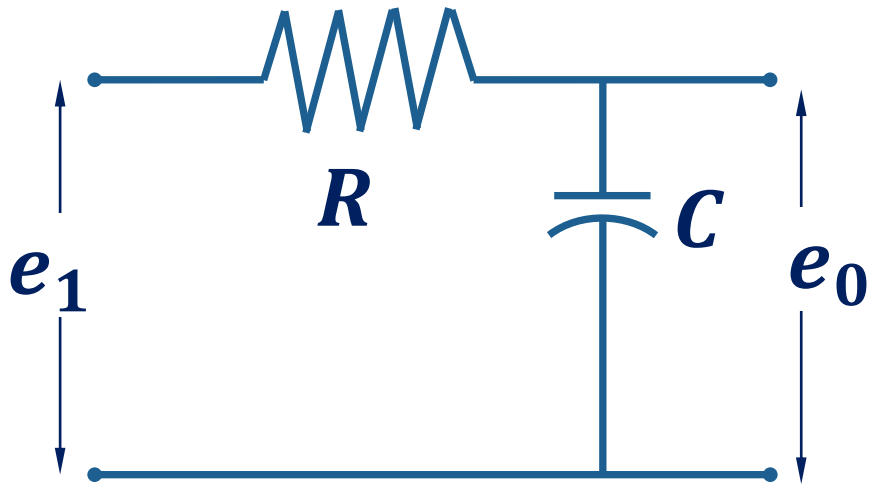


$$\frac{m}{c}\dot{v}_m + v_m = \frac{1}{c}F(t)$$

$$\tau = \frac{m}{c}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplos de sistemas reais tem essa forma básica

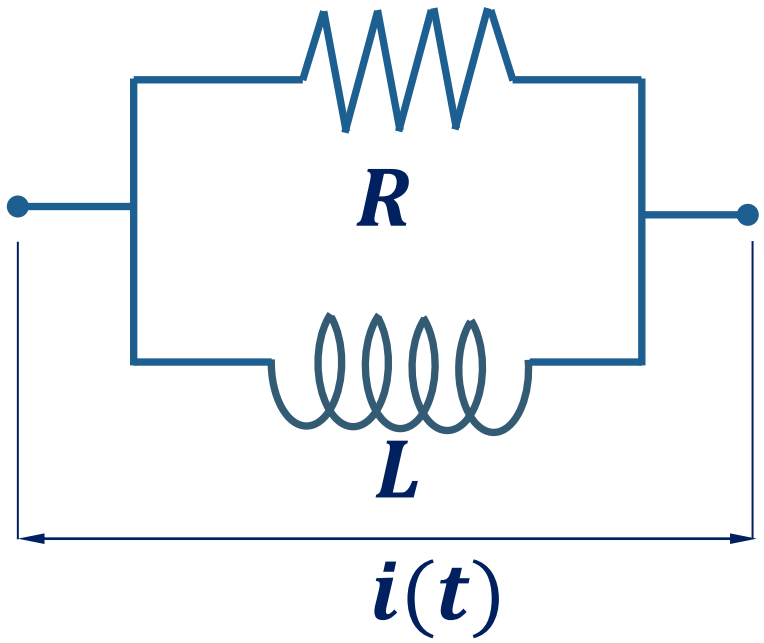


$$RC\dot{e}_0 + e_0 = e_i$$

$$\tau = RC$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplos de sistemas reais tem essa forma básica

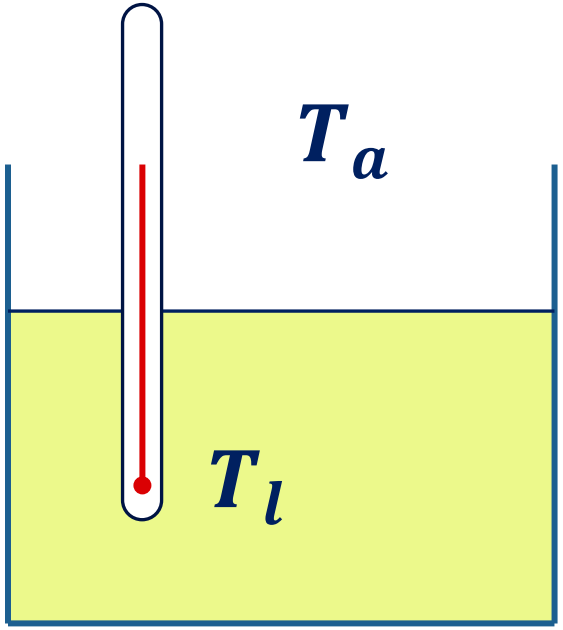


$$\frac{L}{R}\dot{i}_L + i_L = I(t)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

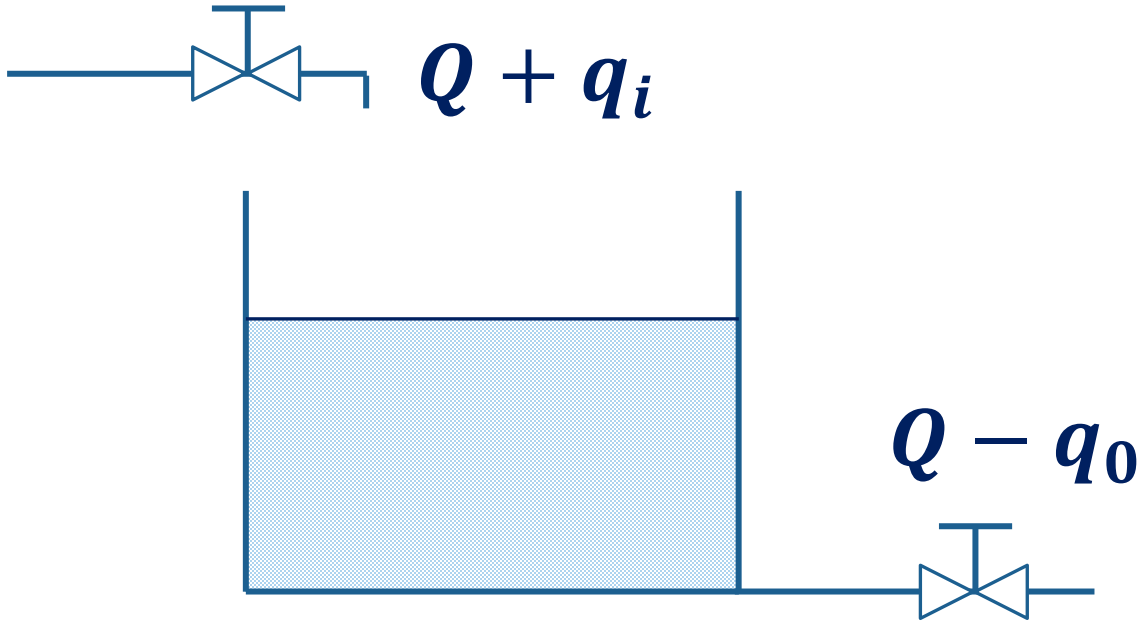
Exemplos de sistemas reais tem essa forma básica



$$RC\dot{T}_l + T_l = T_a$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplos de sistemas reais tem essa forma básica



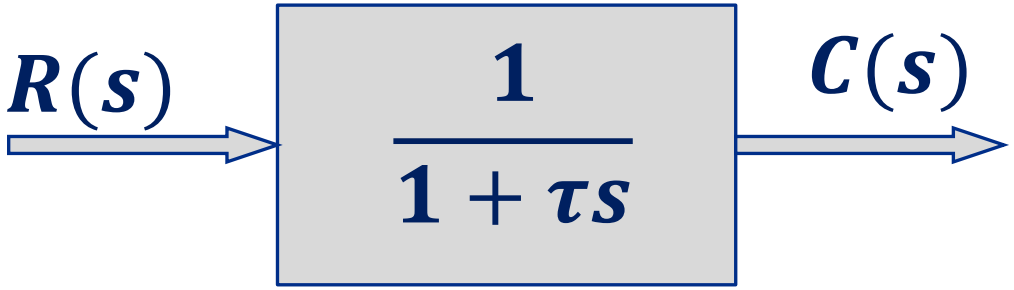
$$RC\dot{q}_0 + q_o = q_i$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de primeira ordem

formato de um sistema de primeira ordem

Revisando!



$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de primeira ordem

$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

$$\mathcal{L}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Revisando!

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de primeira ordem

$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

$$\mathcal{L}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

Revisando!

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $\boldsymbol{u(t) = 1(t)}$

$$\boldsymbol{u(t) = 1(t)}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$u(t) = 1(t) \Longrightarrow \mathcal{L} \Longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$u(t) = 1(t) \Longrightarrow \mathcal{L} \Longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$u(t) = 1(t) \Longrightarrow \mathcal{L} \Longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{1}{s}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{1}{s}$$

$$\Downarrow$$

Reescrevendo $Y(s)$ soba forma de frações parciais, temos:

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{1}{s}$$

$$\Downarrow$$

Reescrevendo $Y(s)$ soba forma de frações parciais, temos:

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$Onde:$$

$$A \text{ e } B = constantes$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$A = \lim_{s \to 0} [s\, C(s)]$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$A = \lim_{s \to 0} [s\, C(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$A = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{\tau s + 1} \right]$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$A = \lim_{s \to 0} [s\, C(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$A = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{\tau s + 1} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A = 1}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$A = \lim_{s \to 0} [s\, C(s)]$$

$$B = \lim_{s \to -1/t} [(1 + s\tau)\, C(s)]$$

$$A = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{\tau s + 1}\right]$$

$$\boxed{A = 1}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$A = \lim_{s \to 0} [s\, C(s)]$$

$$A = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{\tau s + 1}\right]$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$B = \lim_{s \to -1/t} [(1 + s\tau)\, C(s)]$$

$$B = \lim_{s \to -1/t} \left[\frac{1}{s}\right]$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$A = \lim_{s \to 0} [s\, C(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$A = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{\tau s + 1}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$B = \lim_{s \to -1/t} [(1 + s\tau)\, C(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$B = \lim_{s \to -1/t} \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B = -t}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

Reescrevendo $\boldsymbol{Y(s)}$ em termos de A e B:

$$\boldsymbol{Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

Reescrevendo $Y(s)$ em termos de A e B:

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{-t}{\tau s + 1} + \frac{1}{s}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Determinando as constantes A e B

Reescrevendo $Y(s)$ em termos de A e B:

$$Y(s) = \frac{B}{\tau s + 1} + \frac{A}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-t}{\tau s + 1} + \frac{1}{s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s + 1}}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $\boldsymbol{u(t) = 1(t)}$

$$\boldsymbol{Y(s) = G(s)U(s)}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s + 1}}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s + 1}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s + 1}}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s + 1}\right]$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s + 1}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s} - \underbrace{\frac{k\tau}{\tau s + 1}}_{\frac{k}{s + 1/\tau}}\right]$$

Forma canônica

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s} - \underbrace{\frac{k\tau}{\tau s + 1}}_{\frac{k}{s + 1/\tau}}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s} - \frac{k}{s + 1/\tau}\right]$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s} - \frac{k}{s + 1/\tau}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(t) = k - ke^{-t/\tau}} \qquad com\ \tau \geq 0$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $\boldsymbol{u(t) = 1(t)}$

$$\boldsymbol{y(t) = k - ke^{-t/\tau}}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

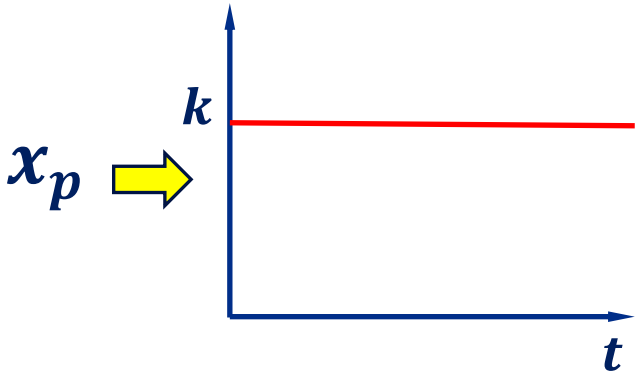
$$y(t) = \underbrace{k}_{x_p} - \underbrace{ke^{-t/\tau}}_{x_h}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$y(t) = \underbrace{k}_{x_p} - \underbrace{ke^{-t/\tau}}_{x_h}$$

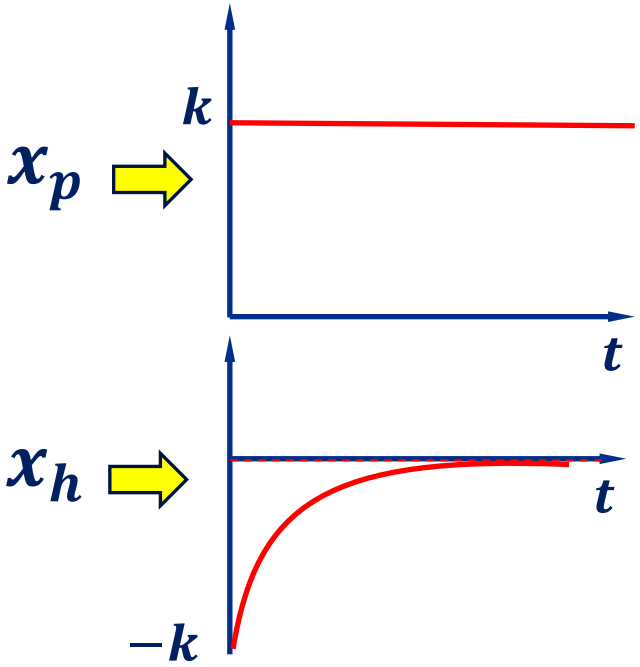


Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$y(t) = \underbrace{k}_{x_p} - \underbrace{ke^{-t/\tau}}_{x_h}$$

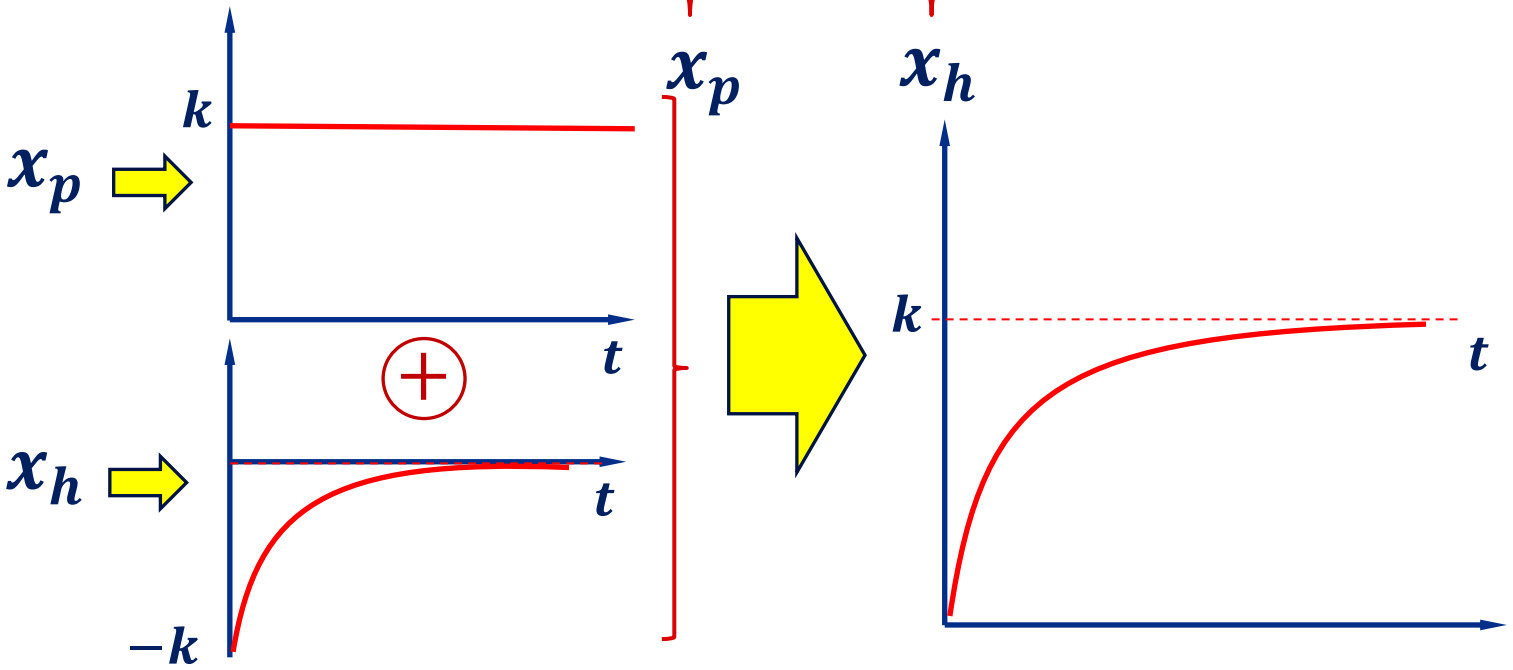


Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Revisando!

Resposta ao Degrau - $u(t) = 1(t)$

$$y(t) = \underbrace{k}_{x_p} - \underbrace{ke^{-t/\tau}}_{x_h}$$



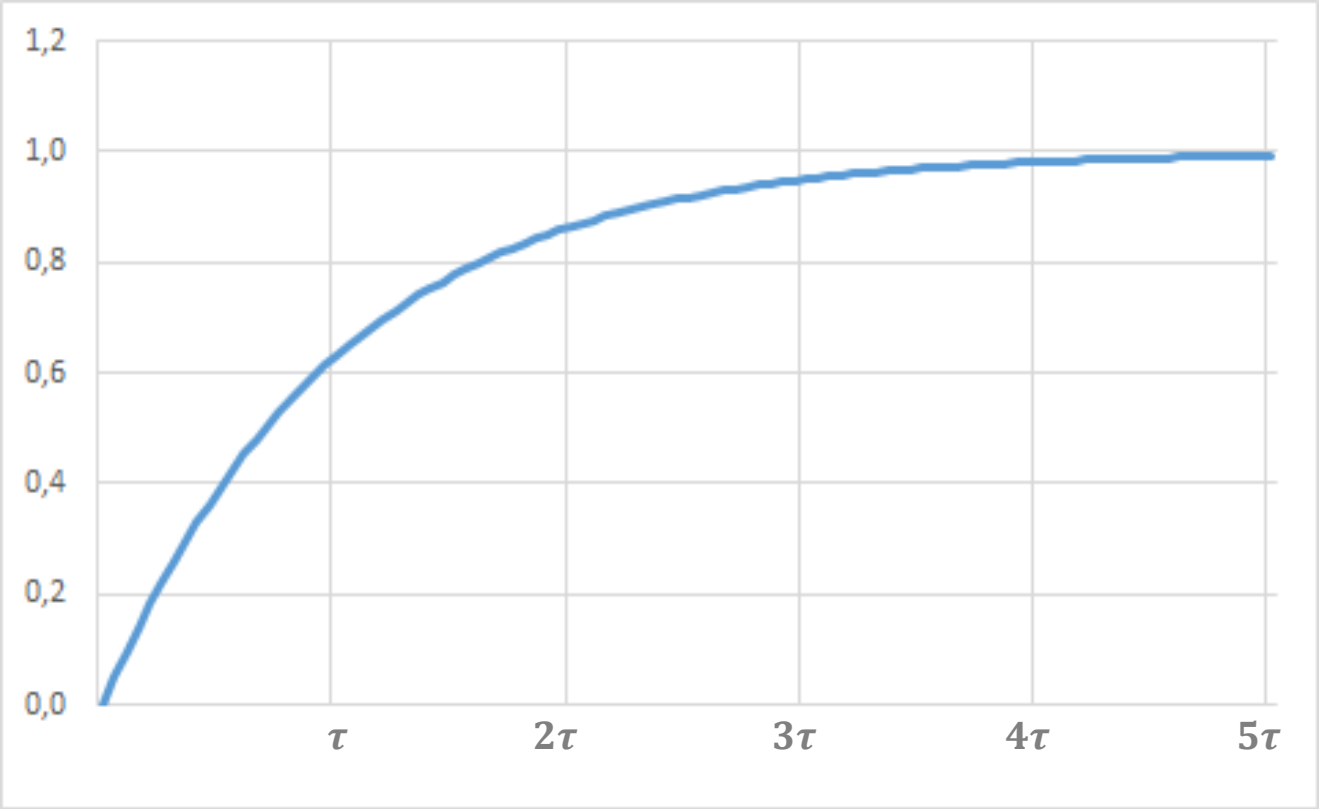
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta de $y(t)$ ao degrau

Revisando

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



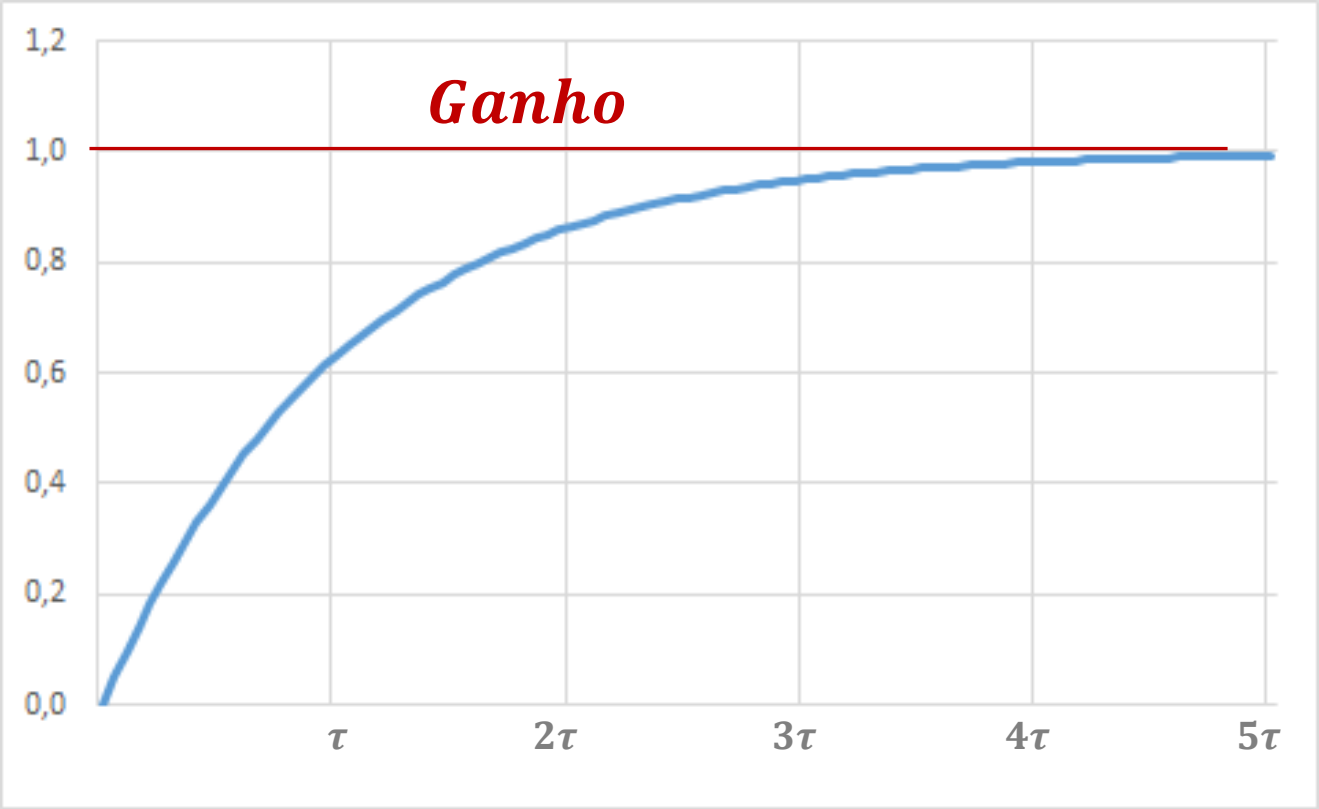
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



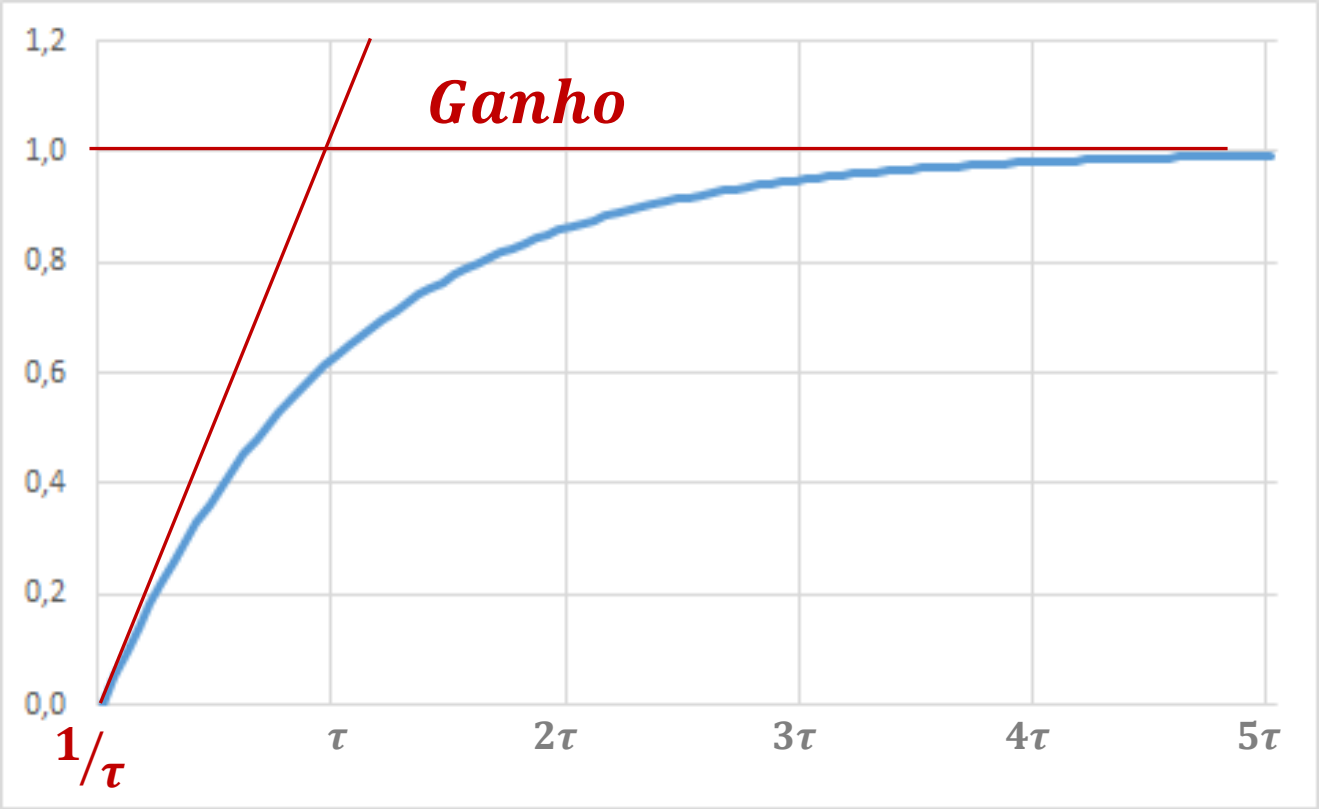
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



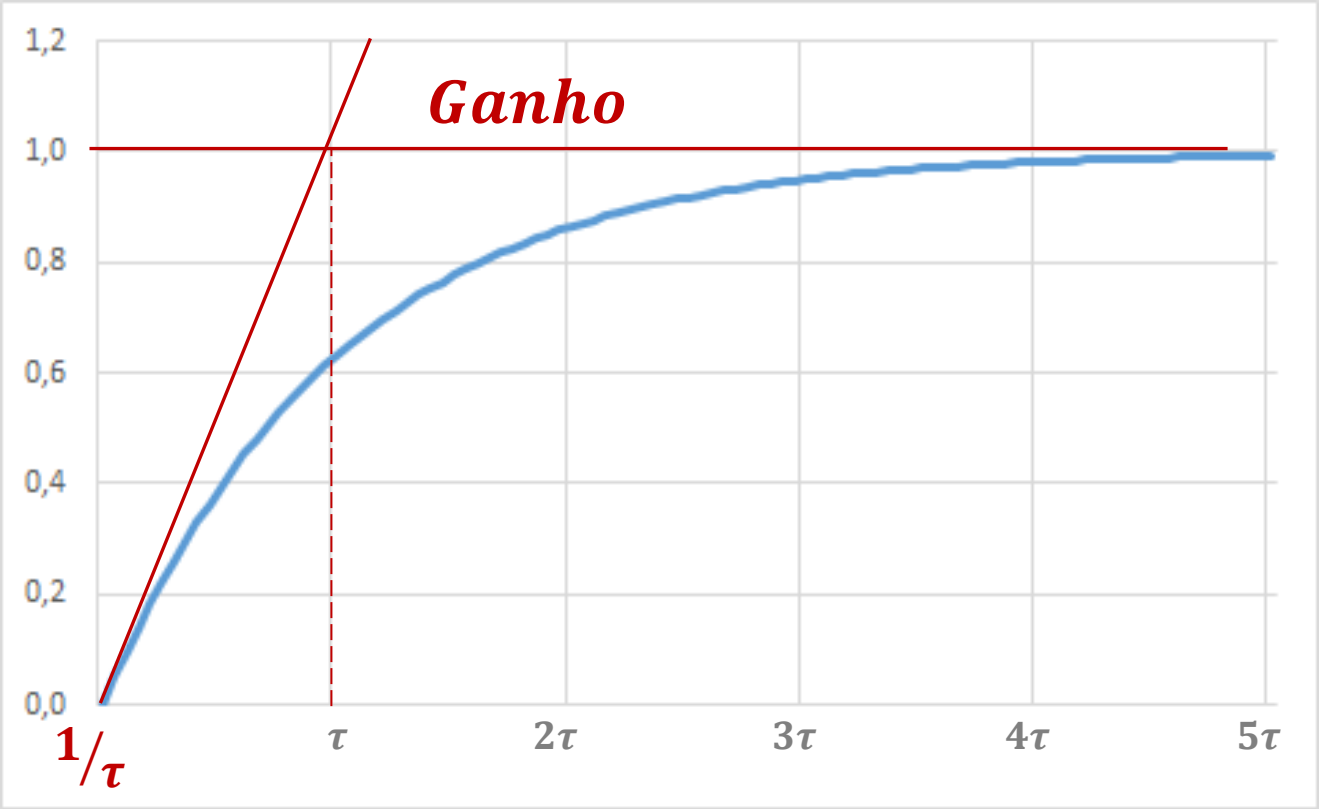
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



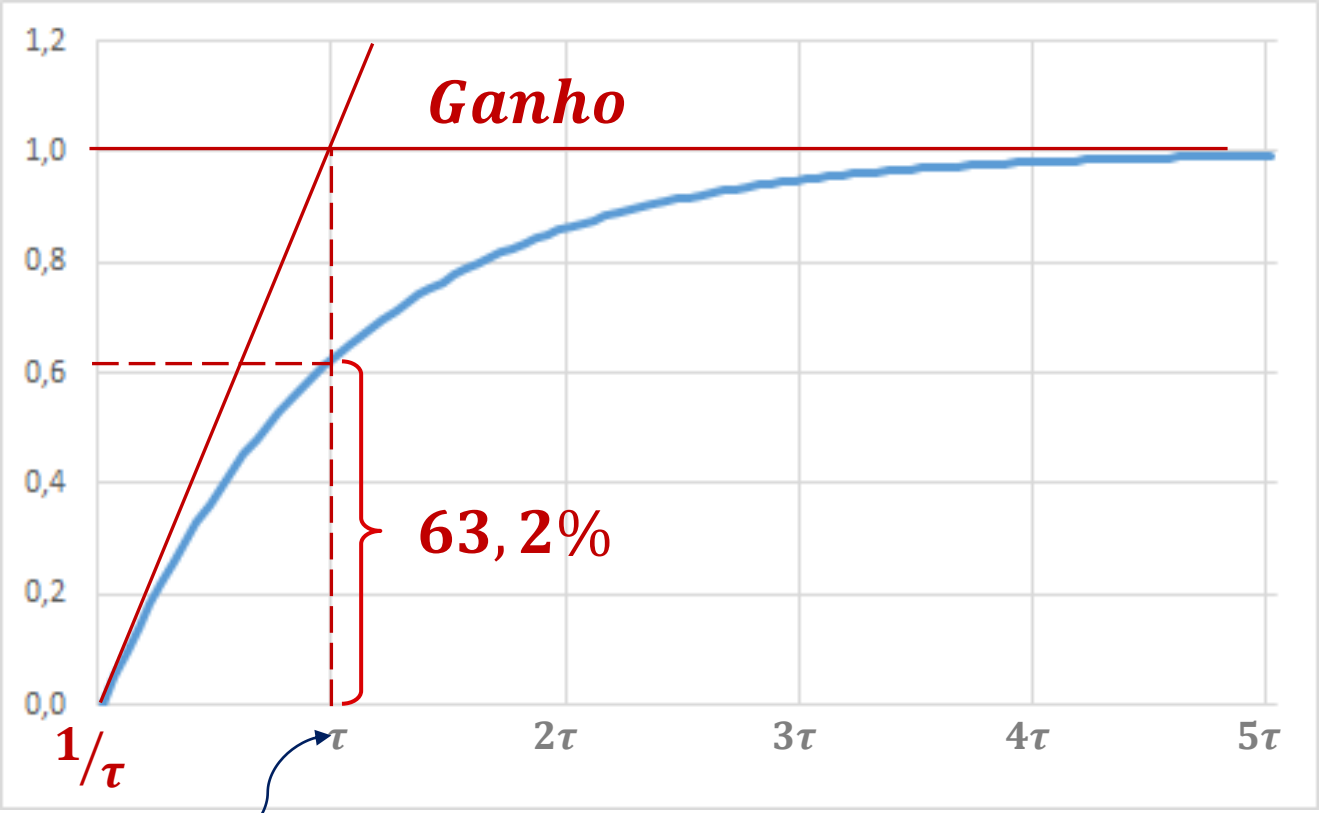
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



Constante de tempo τ

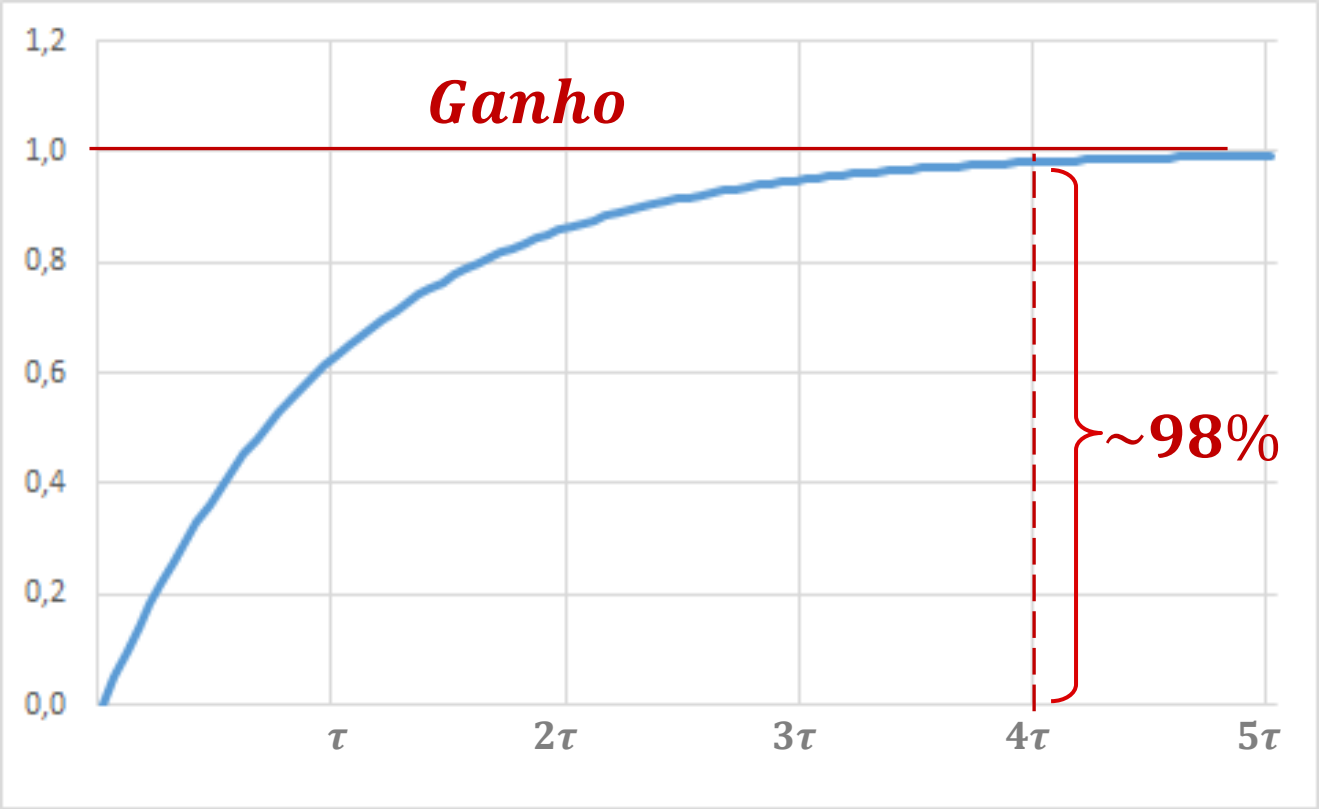
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



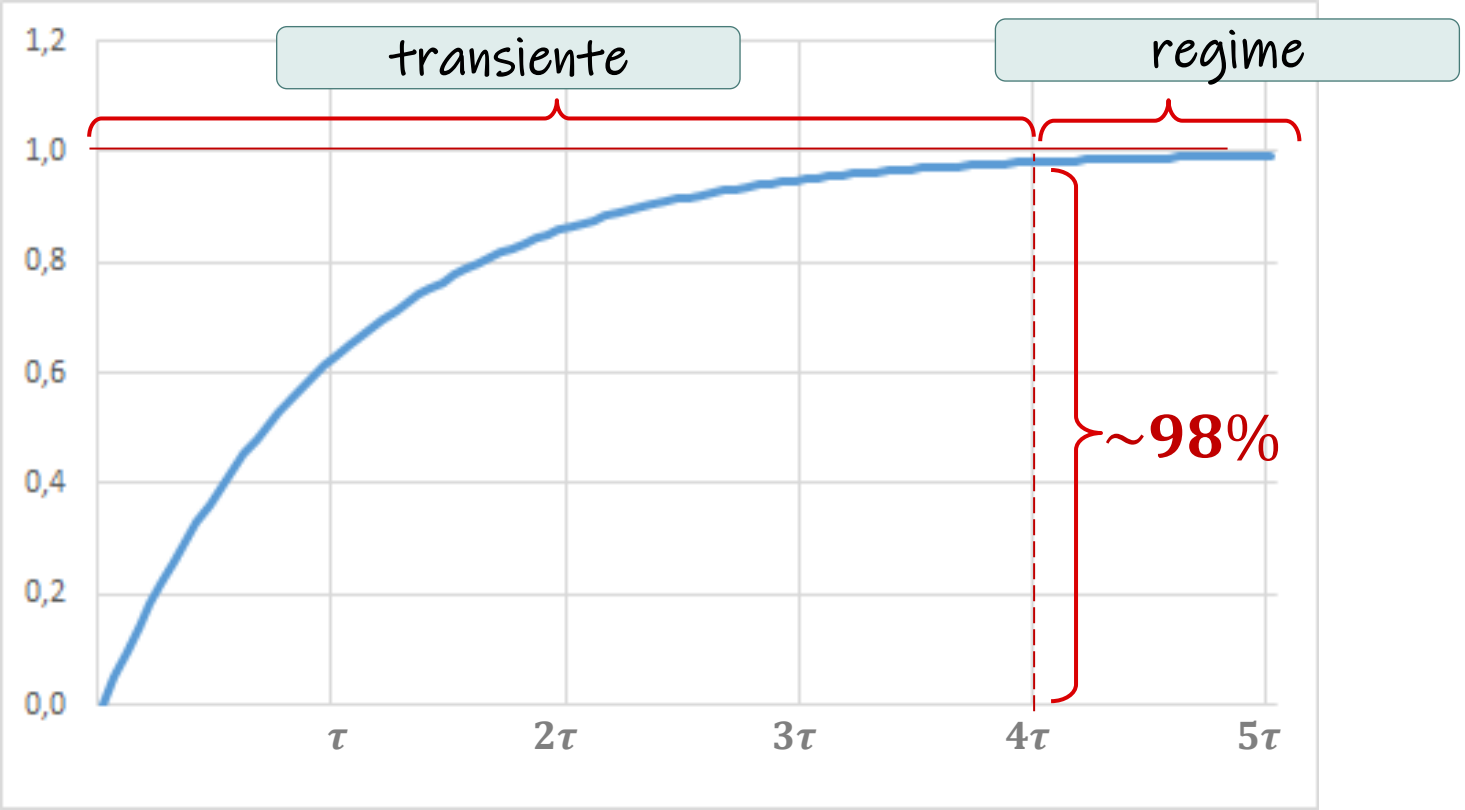
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



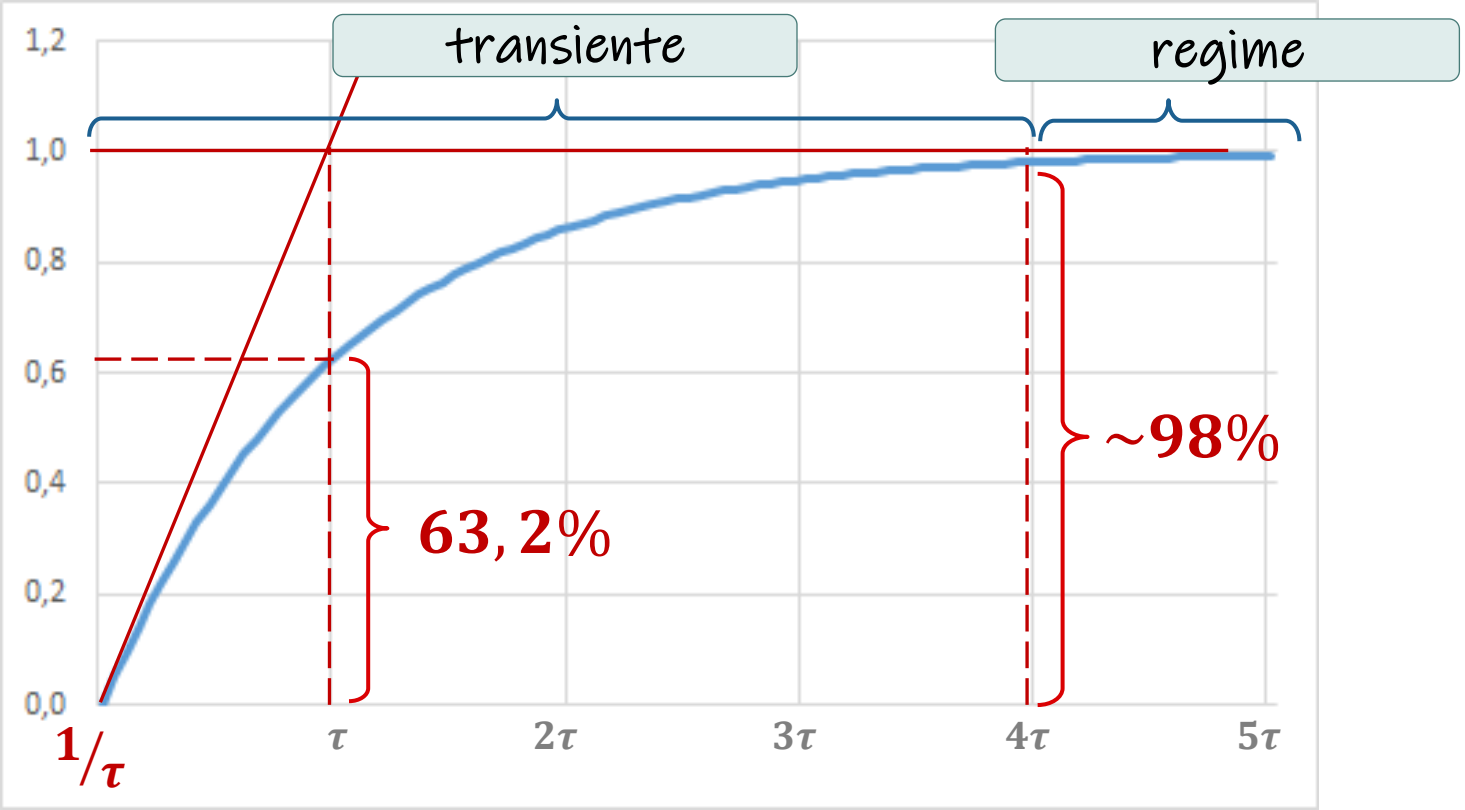
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Analisando a função resposta $y(t)$

Revisando!

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}$$

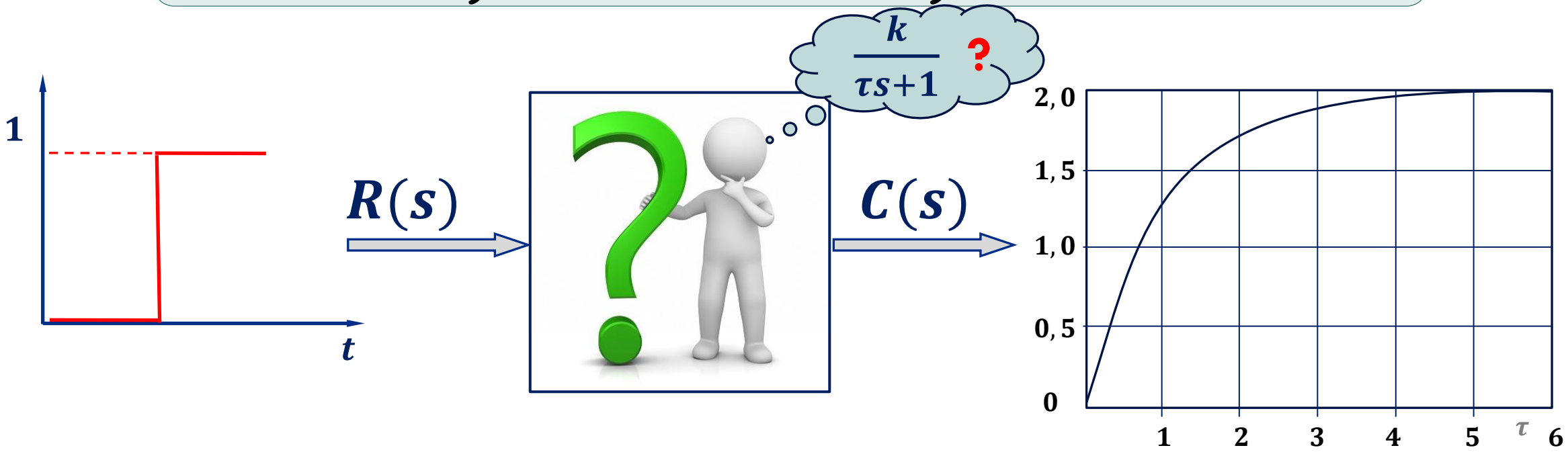
τ	$y(t)$
0	0
0,5	0,39347
1,0	0,63212
1,5	0,77687
2,0	0,86466
2,5	0,91792
3,0	0,95021
3,5	0,96980
4,0	0,98168
4,5	0,98889
5,0	0,99326



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

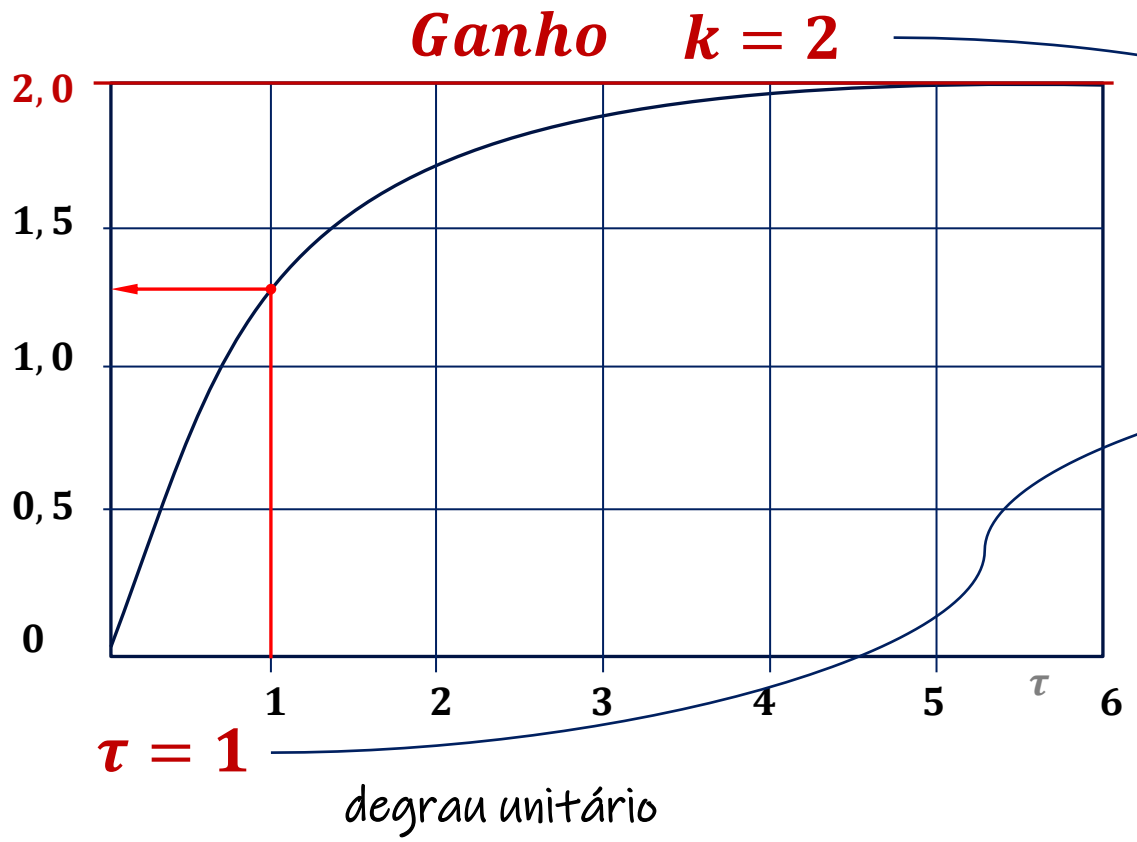
Exemplo 2

Determine a Função Transferência para o sistema que produz a seguinte resposta ao degrau unitário (*input*)



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplo 2



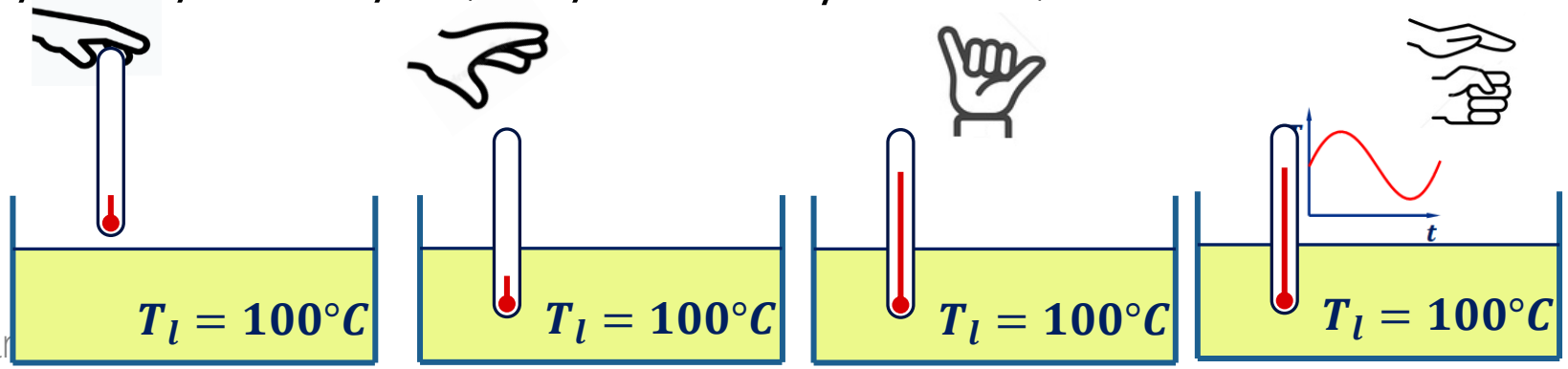
$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{2}{s + 1}}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 1

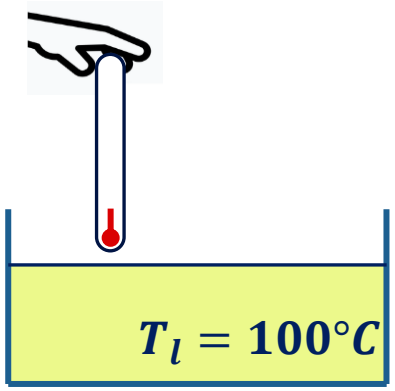
- Um termômetro de mercúrio com constante de tempo de $\mathbf{0,1\ min}$ e amplificação $\mathbf{1}$ é colocado em uma temperatura T=100°C até atingir o equilíbrio com o líquido.
- No instante $\boldsymbol{t = 0}$, a temperatura do líquido começa a variar de forma senoidal, em torno de 100 °C, com amplitude de 2°C. Considerando as frequências de oscilação de $\mathbf{1/\pi}$, $\mathbf{5/\pi}$, $\mathbf{10/\pi}$, $\mathbf{50/\pi}$ e $\mathbf{100/\pi}$ ciclos/min.

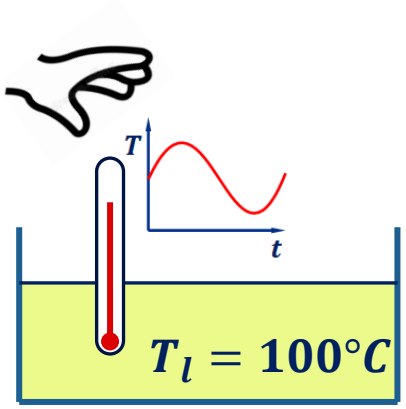


Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 1

1. Plote a resposta do termômetro com o tempo
2. Qual a máxima temperatura medida pelo termômetro em cada frequência?
3. Qual o atraso da resposta em cada frequência?



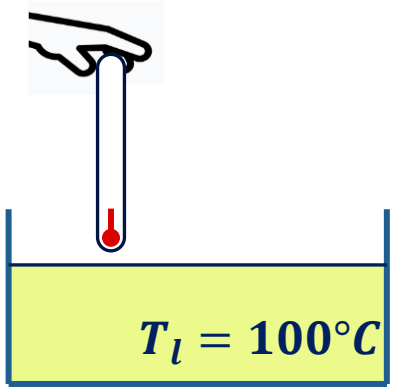


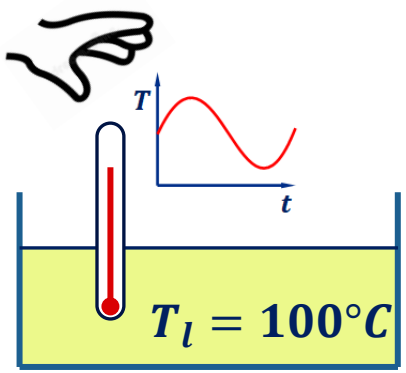
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 1

4. Sabe-se que a razão entre as amplitudes da resposta (solução estacionária) e da entrada é a chamada razão de amplitude, $M_P(\omega)$, e representa o efeito da dinâmica do processo, τ, sobre a resposta senoidal. Explique a diferença entre as saídas para as diferentes frequências.

$$M_P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$





Análise de Sistemas de Primeira Ordem

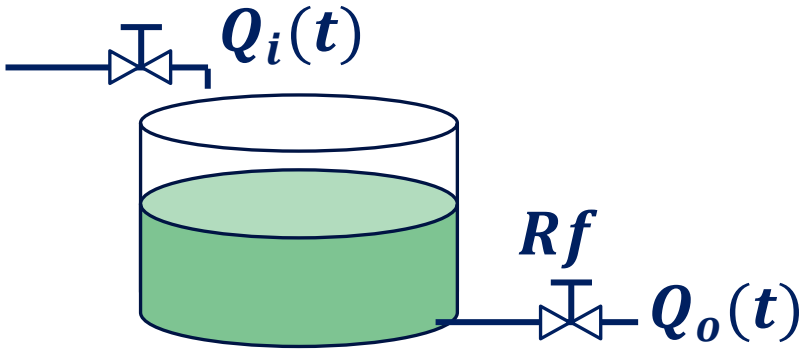
Exercício 1

5. Um sistema de primeira ordem pode ser usado como filtro? Que tipo de filtro? Justifique.

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

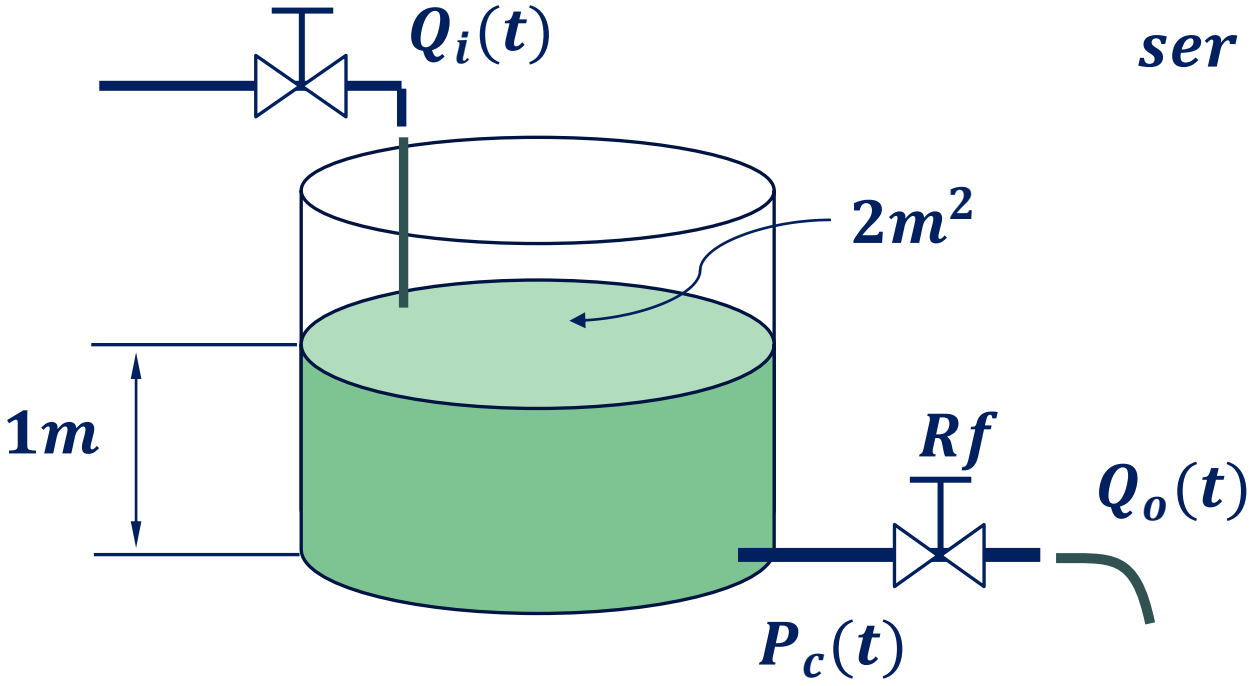
Exercício 2

- Um tanque de água com lados verticais e área de seção transversal de $\boldsymbol{2m^2}$, conforme a figura, é alimentado por uma bomba de deslocamento constante, que pode ser modelada como uma fonte de fluxo $\boldsymbol{Q_i(t)}$.
- Uma válvula, representada por uma resistência de fluido linear $\boldsymbol{Rf}$, na base do tanque está sempre aberta e permitindo que a água saia.



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 2



O fluído no tanque pode ser modelado como um capacitor C_f

$$C_f = \frac{A}{\rho g} \Rightarrow \boxed{C_f = 10^6 \frac{Ns}{m^5}}$$

capacitância do fluido

$$P_c(t)$$

$$\boxed{R_f C_f \dot{P}_c + P_c = R_f Q_i(t)}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 2

- Em operação normal, o tanque é enchido até uma profundidade de $\mathbf{1m}$
- No tempo $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}+$, a energia da bomba é removida e o fluxo para o tanque é interrompido.

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 2

- Se o fluxo através da válvula for de $\mathbf{10,6\ m^3/s}$ quando a pressão através dela for de $\mathbf{1N/m^2}$, determine a pressão no fundo do tanque conforme ele se esvazia.
- Estime quanto tempo leva para o tanque esvaziar.
- Plote a resposta do fluxo de saída com o tempo
- Qual o máximo fluxo na válvula?

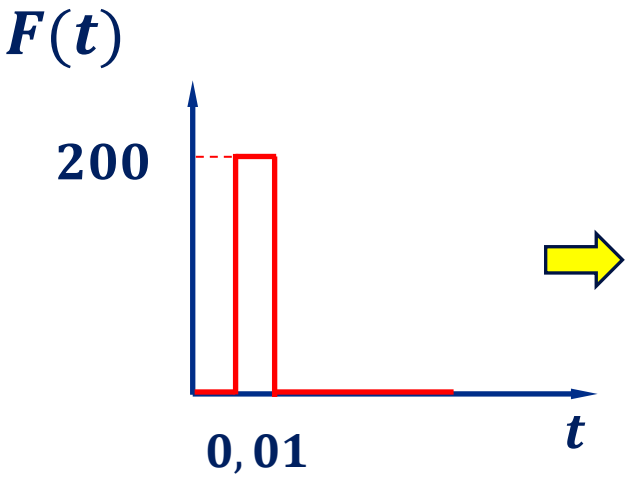
Análise de Sistemas de Primeira Ordem

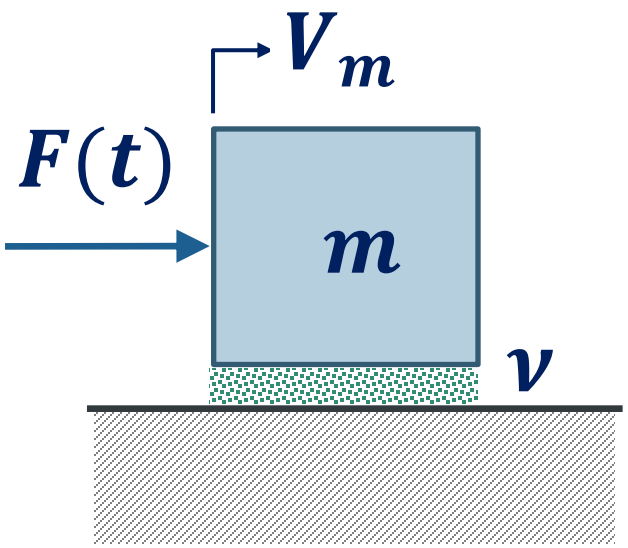
Exercício 3

- Um bloco de massa $\boldsymbol{m = 10\ kg}$ está em repouso em um plano horizontal.
- Na interface entre bloco/plano horizontal existe um fluido que proporciona um coeficiente de atrito viscoso $\boldsymbol{\nu = 20\ Ns/m}$, conforme mostrado na Figura a seguir.
- Uma força impulsiva curta de amplitude $\boldsymbol{200N}$ e duração de $\boldsymbol{0,01s}$ é aplicada no bloco.

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 3





$$\frac{m}{\nu}\dot{V}_m + V_m = \frac{1}{\nu}F(t)$$

$$\tau = \frac{m}{\nu}$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Exercício 3

- Determine graficamente a distância que a massa percorre antes de chegar ao repouso
- Quanto tempo levará para a velocidade cair para menos de 1% de seu valor inicial.

FIM lab-05

Dilbert says,
"The road to success... is always under construction!"