



PMR 3302

Sistemas Dinâmicos I



LABORATÓRIO 02

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - SISTEMAS LINEARES
E NÃO LINEARES

Ettore Barros

eabarros@usp.br

Larissa Driemeier

driemeie@usp.br

Arturo Forner- Cordero

aforner@usp.br

Rafael Traldi Moura

moura.gmsie@usp.br

Rodrigo Lima Stoeterau rodrigo.stoeterau@usp.br

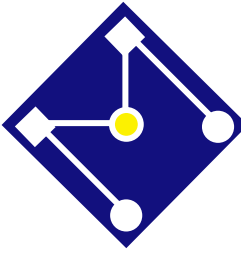
NOSSA AGENDA

#	Data	Tópico
1	27/02	Introdução ao modelamento e uso do software; Introdução à programação em Octave/Matlab Conceitos Básicos de Funções de Variáveis Complexas
2	01/03	Resolução de Equações Diferenciais – Sistemas Lineares e Não Lineares
3	03/03	Transformada de Laplace e Funções de Transferência
4	06/03	Representação de sistemas dinâmicos por diagrama de blocos. Diagrama de Blocos: manipulação e aplicações.
5	07/03	Análise de Sistemas de Primeira Ordem
6	09/03	Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Homogêneas

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$



Equações Diferenciais

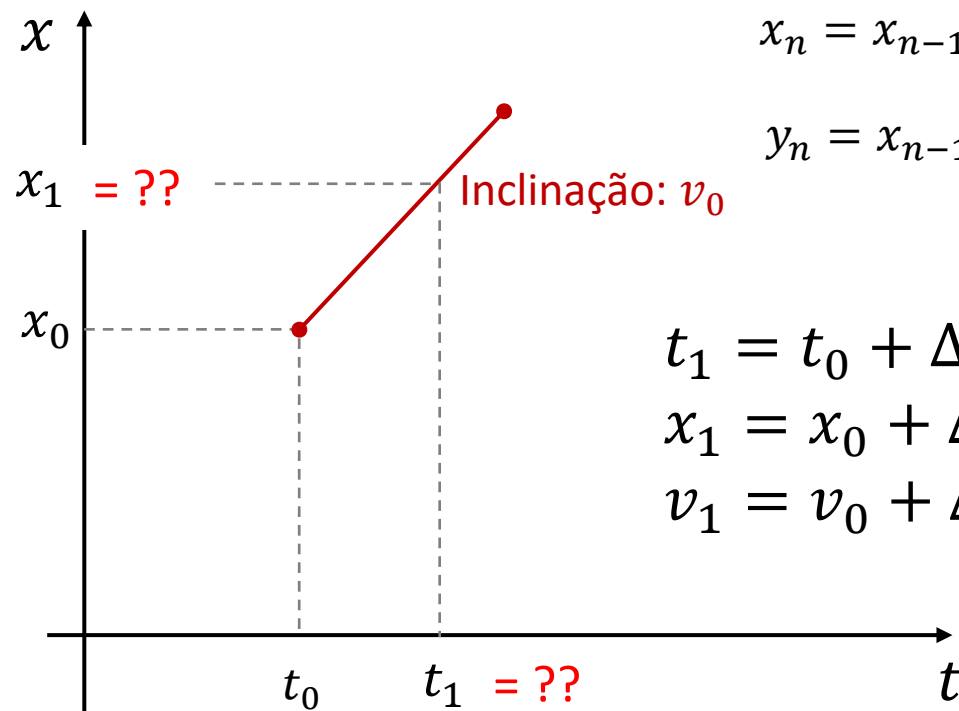
Equações Diferenciais Homogêneas

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Método de Euler

Equações Diferenciais

Método de Euler



$$x_n = x_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1}, x_{n-1})$$

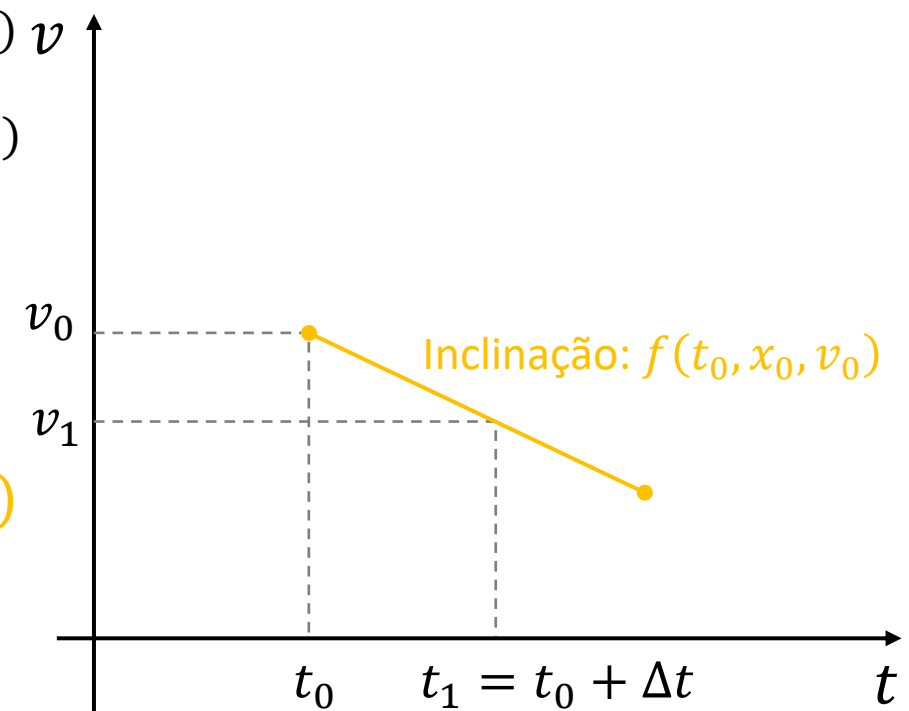
$$y_n = x_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1}, x_{n-1})$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

$$x_1 = x_0 + \Delta t v_0$$

$$v_1 = v_0 + \Delta t f(t_0, x_0, v_0)$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$



Equações Diferenciais

Método de Euler - Exemplo

$$\dot{y}(t) = -6y(t)$$

Problema



$$y(t) = e^{-6t}$$

Solução Exata

Discretizando no
domínio do tempo

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -6y(t)$$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = -6y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t(-6y_n)$$

Equações Diferenciais

Método de Euler - Exercício 1

Implementar o método de Euler no problema anterior com intervalos de 0.25, 0.2, 0.1 e 0.01 além da solução exata, entre $t=0$ e $t=1$. Assumir $y(0)=1$.

Equações Diferenciais

Método de Euler - Exercício 1

```
close all; clear all; clc
figura_handler = figure;
a=0;                % instante inicial
b=1;                % instante final
y_init=1;           % condicao inicial
yp = @(i) -6*i;      % equacao diferencial
y(1)=y_init;
```

```
%% intervalo 0.1
dt=0.1;             % incremento de tempo
t=a:dt:b;           % Vetor tempo

for n=1:length(t)-1
    y(n+1)= y(n)+dt*yp(y(n));
end
plot(t,y,'Linewidth',3)
hold on
clear t y;
y(1)=y_init;
```

```
%% intervalo 0.01
```

Implementar no fim para ajustar legenda e títulos de eixos, deixar fundo branco e SALVAR EM PNG!

```
%% Arrumando plot
grid on
legend({'dt=0.10', 'dt=0.01', 'Exata'}, 'FontSize', 12)
xlabel('t', 'FontSize', 20)
a=ylabel('y(t)', 'FontSize', 20);
set(figura_handler, 'Color', [1 1 1])
print(figura_handler, '-dpng')
```

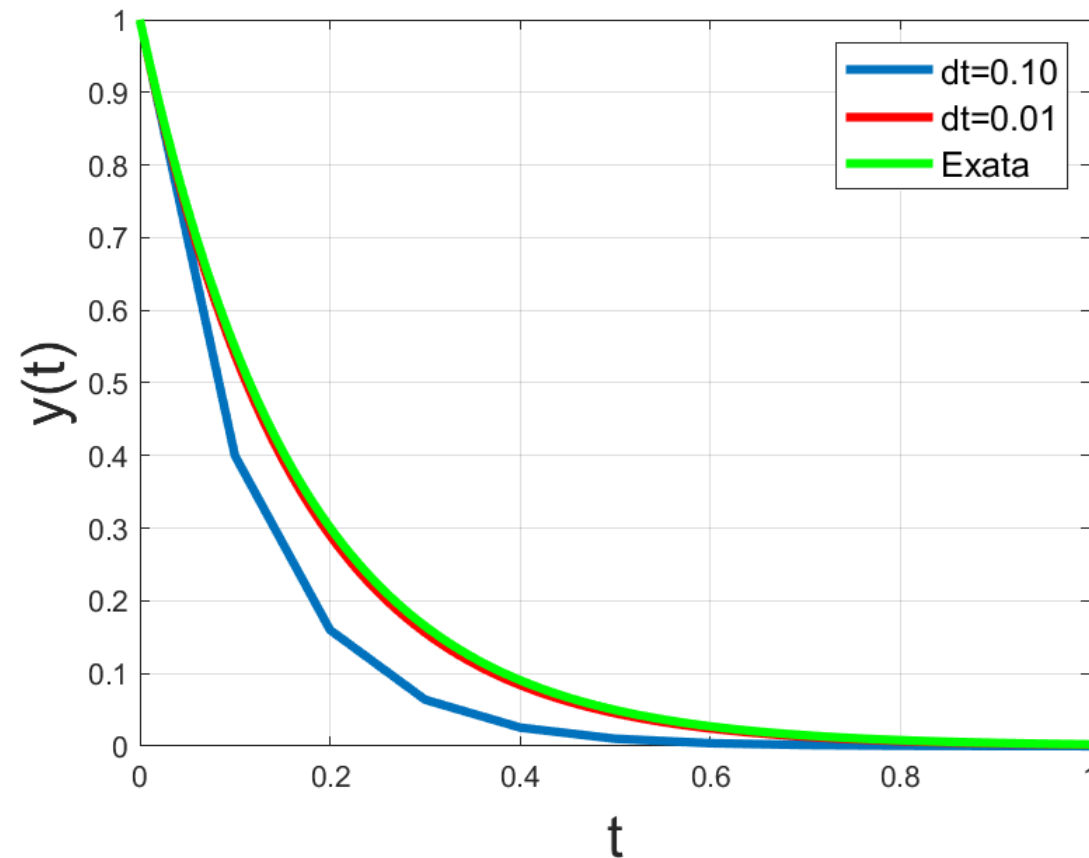
Equações Diferenciais

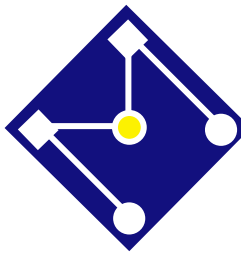
Método de Euler - Exercício 1

Implementar o método de Euler no problema anterior com intervalos de 0.25, 0.2, 0.1 e 0.01 além da solução exata, entre $t=0$ e $t=1$.

Equações Diferenciais

Método de Euler - Exercício 1





Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Homogêneas

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\ln x = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c$$

$$\text{onde: } v = \frac{y}{x}, .$$

Sistemas Dinâmicos I | Se $F(v) = v$, a solução se torna $y = cx$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$



$$\lambda^2 + a\lambda + bk = 0$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + bk = 0$$

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2$$

são reais e diferentes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + bk = 0$$

$\lambda_1 e \lambda_2$

são reais e diferentes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_1 e \lambda_2$

são reais e iguais

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t}$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_1 e \lambda_2$$

são reais e diferentes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 e \lambda_2$$

são reais e iguais

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_1 e \lambda_2$$

são complexas

$$y = e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt)$$

$$p = -a/2$$

$$q = \sqrt{b - a^2/4}$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem NÃO Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = R(x)$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem NÃO Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = R(x)$$

λ_1 e λ_2

são reais e diferentes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int e^{\lambda_1 x} R(x) dx + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int e^{\lambda_2 x} R(x) dx$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem NÃO Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = R(x)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

são reais e diferentes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int e^{\lambda_1 x} R(x) dx + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int e^{\lambda_2 x} R(x) dx$$

$\lambda_1 = \lambda_2$

são reais e iguais

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + x e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} R(x) dx - x e^{\lambda_1 x} \int x e^{-\lambda_1 x} R(x) dx$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem NÃO Homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = R(x)$$

λ_1 e λ_2

são reais e diferentes

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int e^{\lambda_1 x} R(x) dx + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int e^{\lambda_2 x} R(x) dx$$

λ_1 e λ_2

são reais e iguais

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + x e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} R(x) dx - x e^{\lambda_1 x} \int x e^{-\lambda_1 x} R(x) dx$$

λ_1 e λ_2

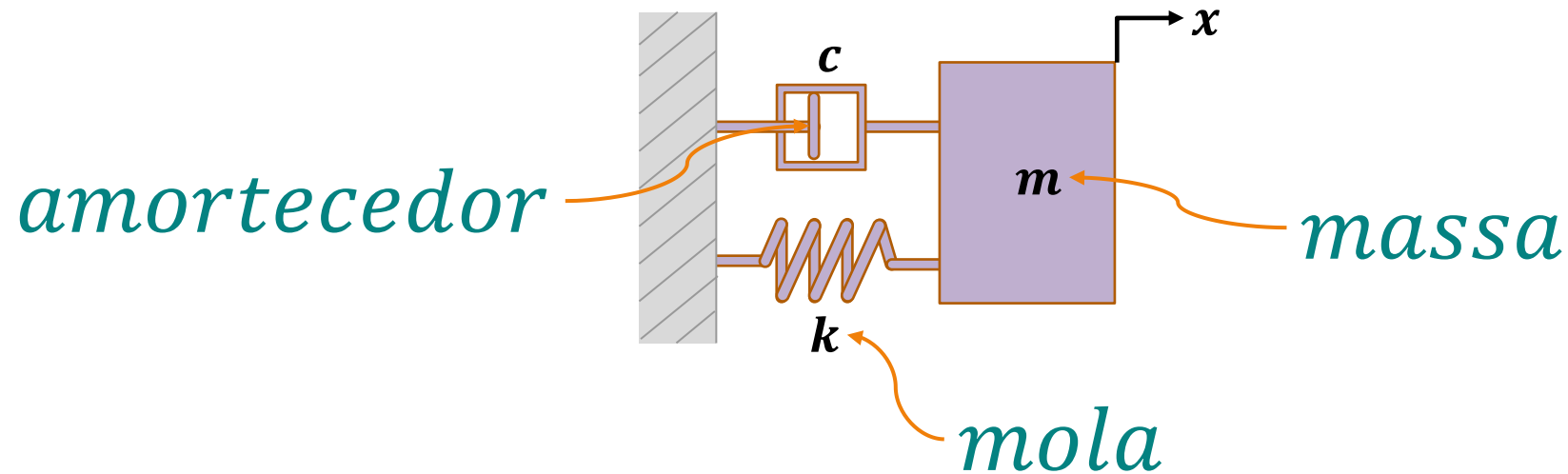
são complexas

$$y = e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) + \frac{e^{px} \sin qx}{q} \int e^{px} R(x) \cos qx dx - \frac{e^{px} \cos qx}{q} \int e^{-px} R(x) \sin qx dx$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos

Tomando como exemplo Sistema Massa-Mola-Amortecedor

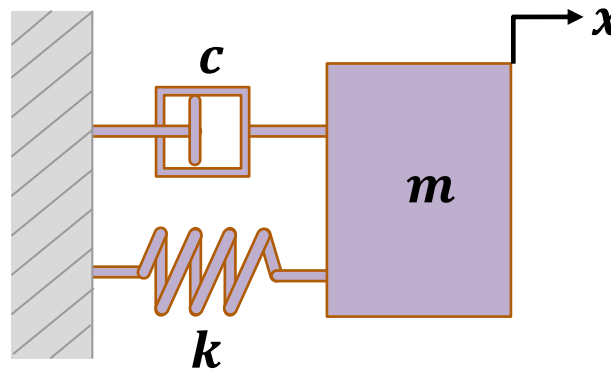


Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos

Tomando como exemplo Sistema Massa-Mola-Amortecedor

*Modelo matemático
do sistema MMA*



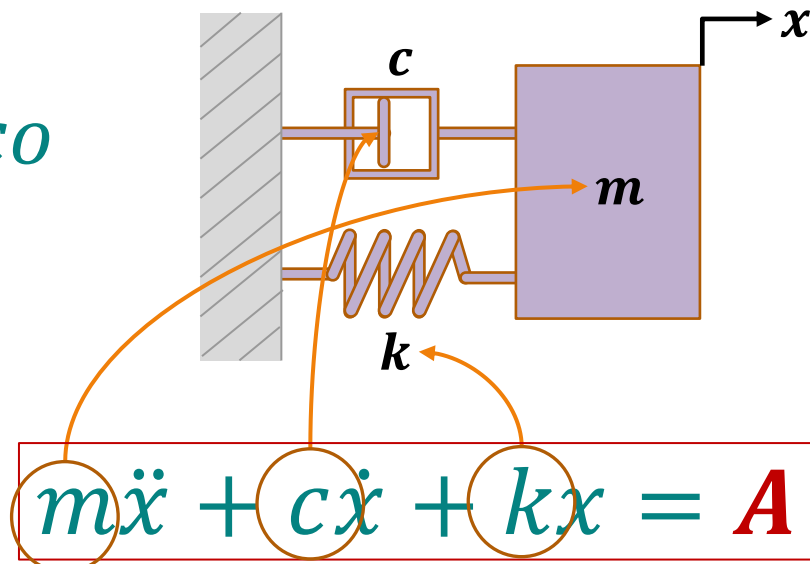
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A$$

Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos

Tomando como exemplo Sistema Massa-Mola-Amortecedor

*Modelo matemático
do sistema MMA*

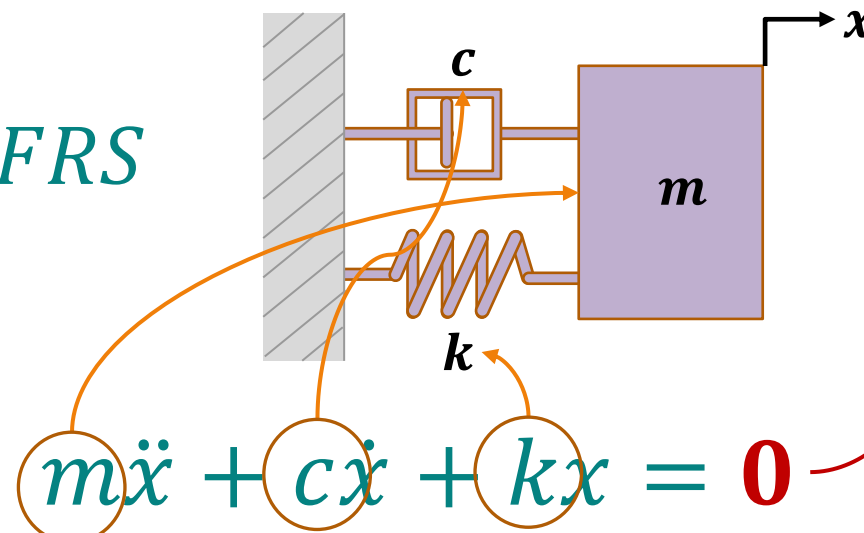


Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*

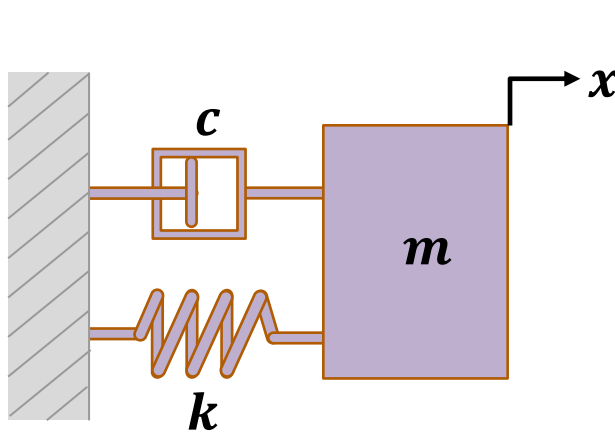
Se $A = 0$,
então $MMA \Rightarrow FRS$



Equações Diferenciais
Lineares de Segunda
Ordem Homogêneas

Equações Diferenciais

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

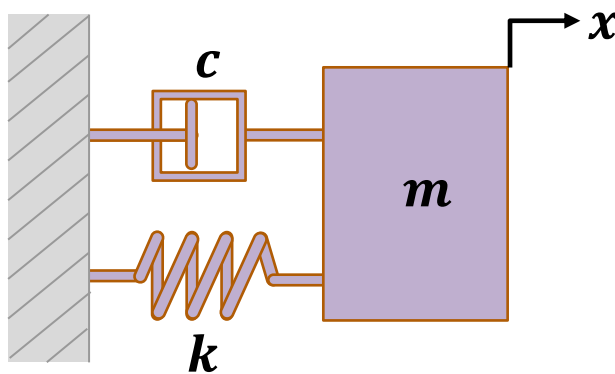
Força

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

aceleração

Equações Diferenciais

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

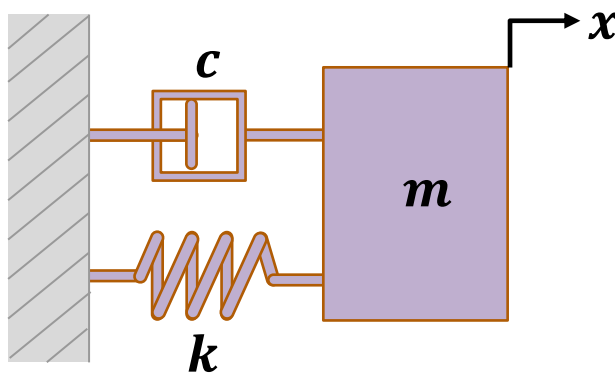
Força

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

velocidade

Equações Diferenciais

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*



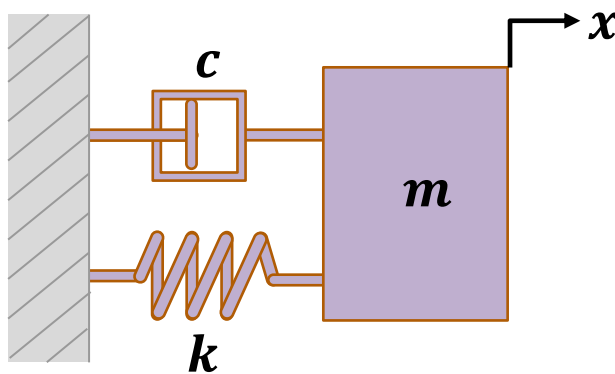
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \underbrace{kx}_{\text{Força}} = 0$$

Força

deslocamento

Equações Diferenciais

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS Free Response System



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Força Força Força

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ → aceleração

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ → velocidade

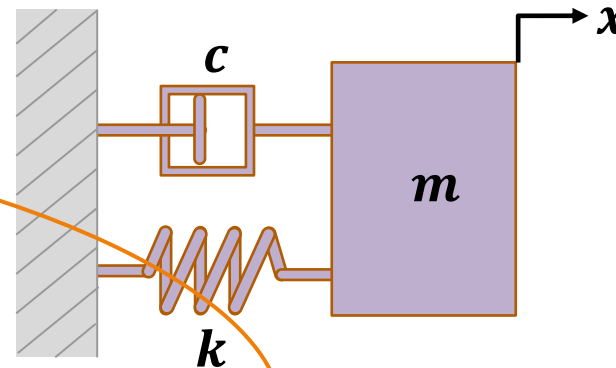
x → deslocamento

Equações Diferenciais

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS Free Response System

Frequência crítica ω_c

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad/s})$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



Período T_n

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (\text{s})$$

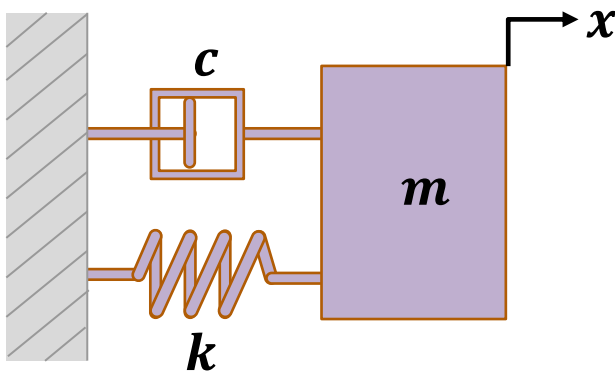
Decaimento

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

*Modelo matemático
do sistema SRL/FRS*

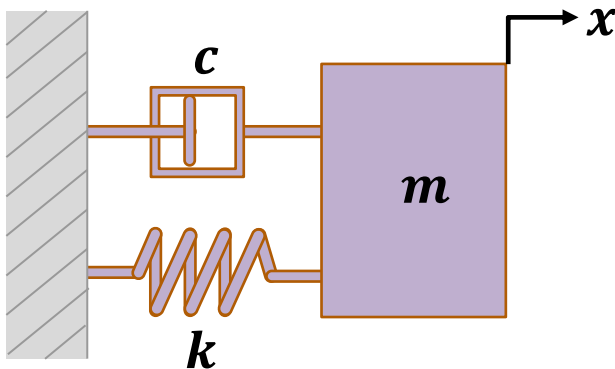


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

onde λ_1 e λ_2 são as soluções (raízes) da equação característica

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

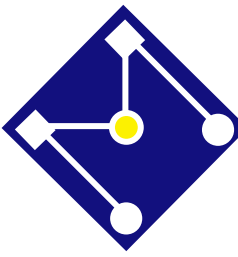


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Cuja a solução em termos
exponenciais é dada por

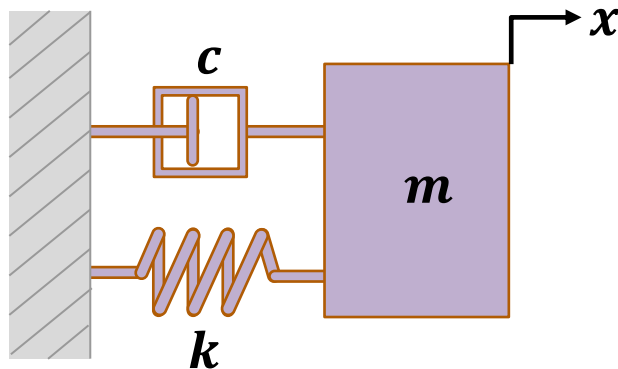
$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde λ_1 e λ_2 são as soluções (raízes) da equação característica



Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System



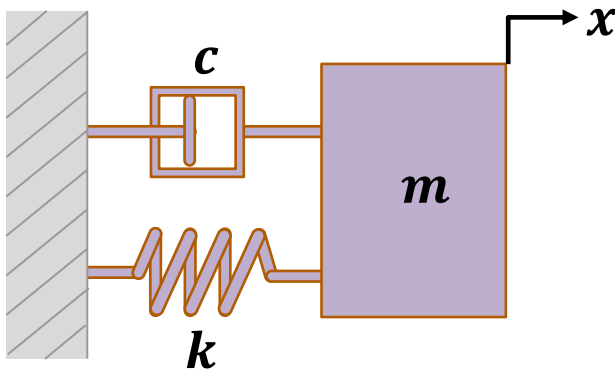
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

equação característica

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS Free Response System



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

λ_1 e λ_2 são reais

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

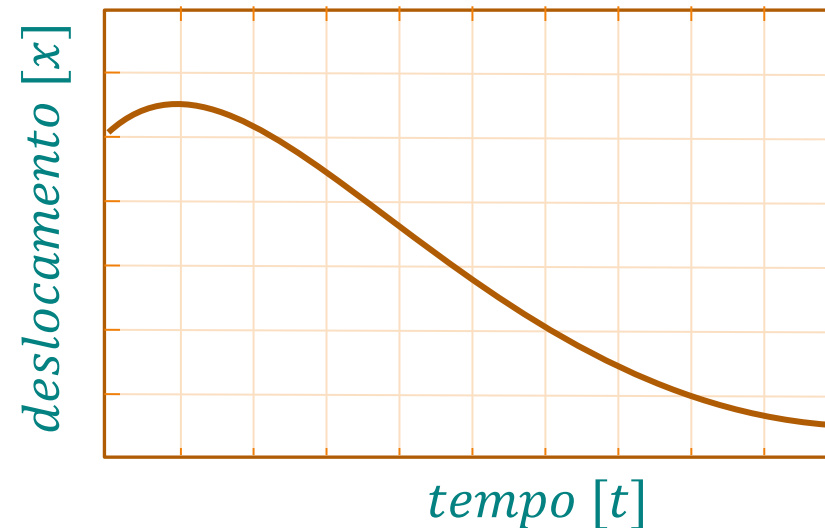
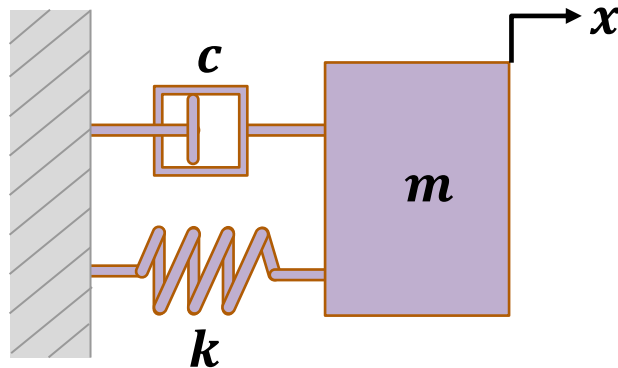
$$\lambda_2 = \frac{-c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

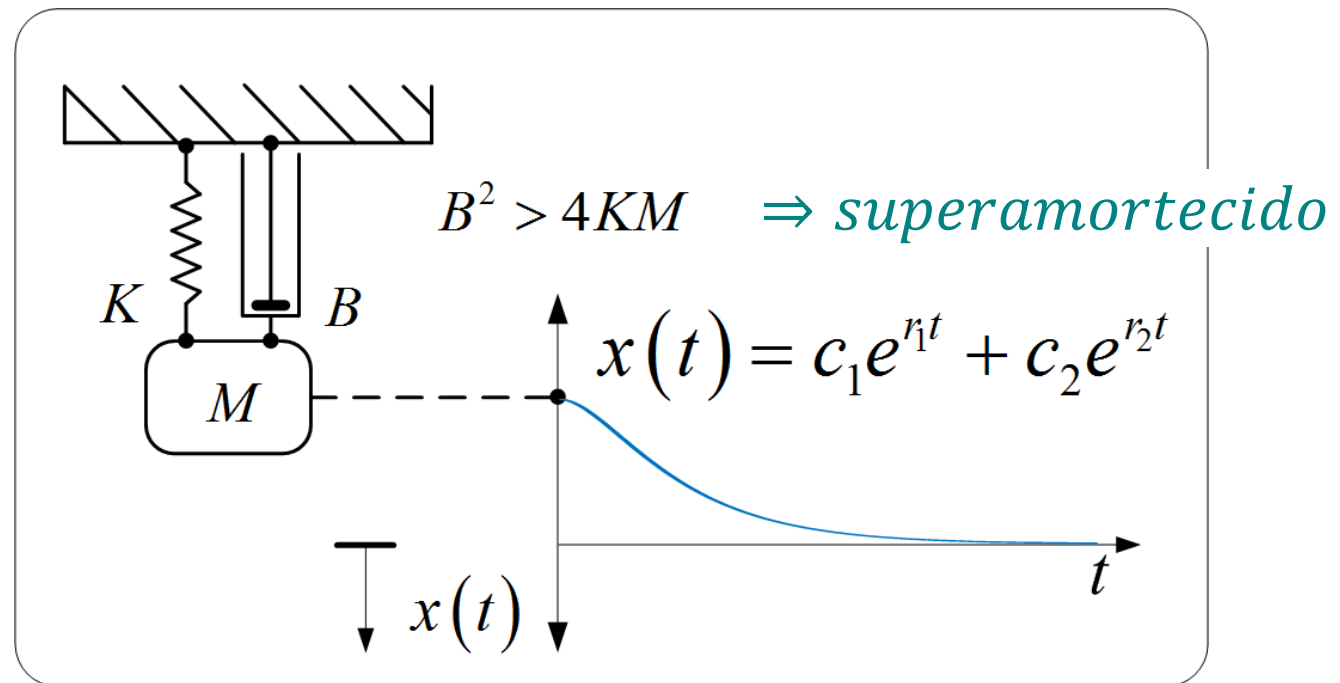
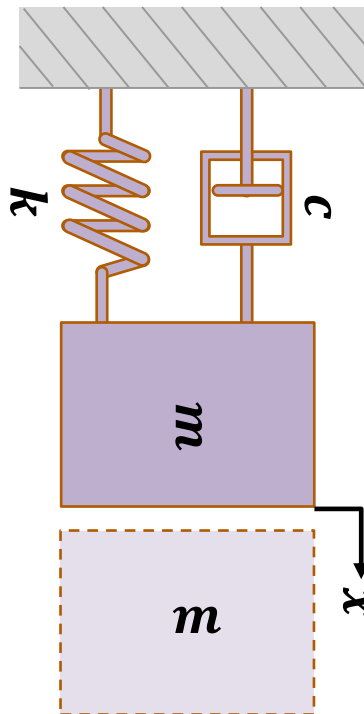
Se λ_1 e λ_2 são *negativas*

Sistema estável



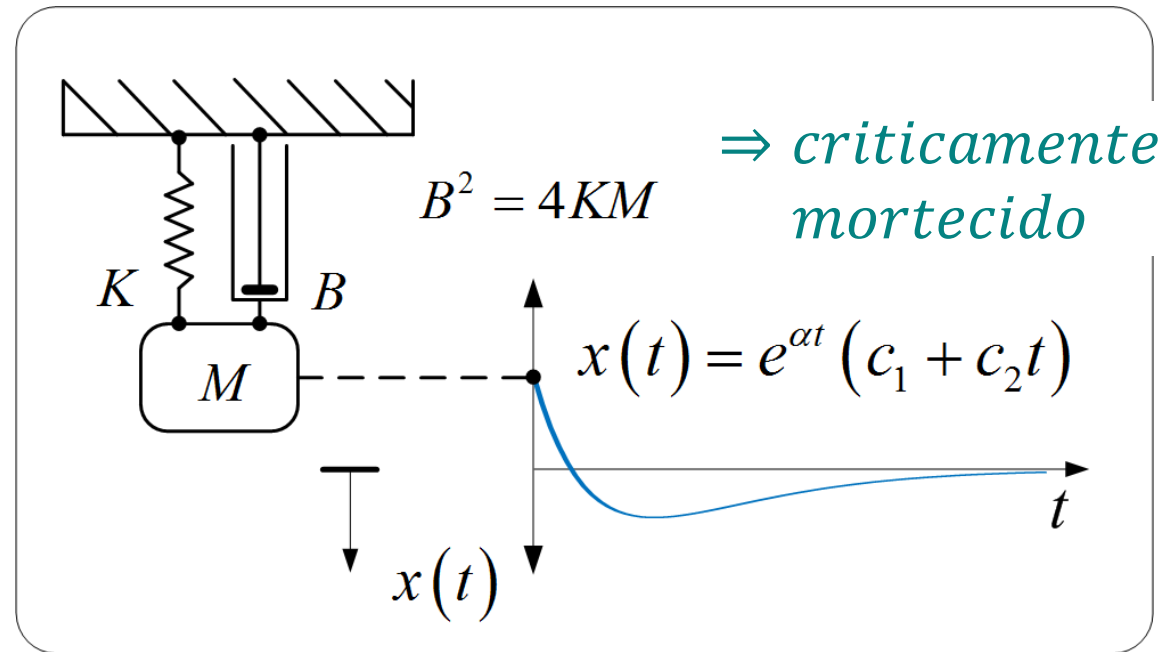
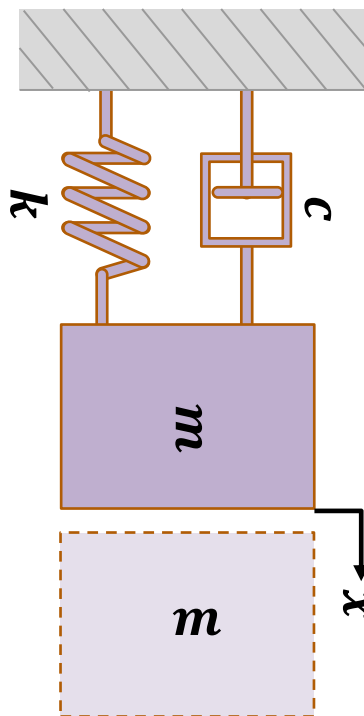
Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS Free Response System



Equações Diferenciais Ordinárias

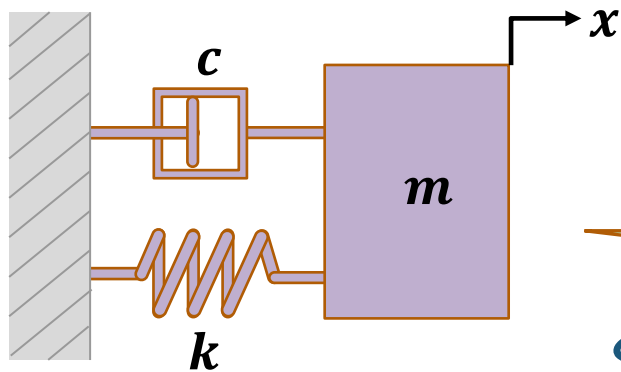
Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS Free Response System



Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

Se λ_1 e λ_2 são *positivas*



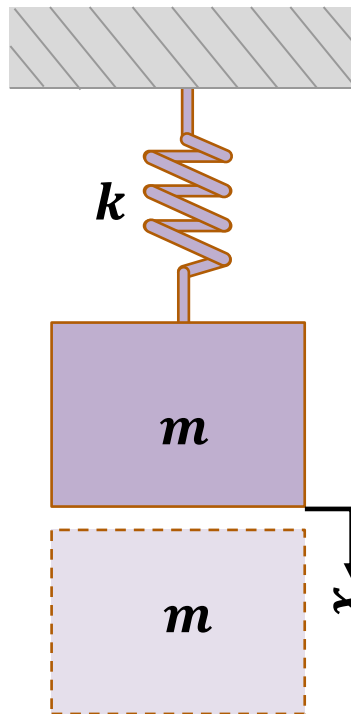
Sistema instável

Sistema fica oscilando
indefinidamente

Sistema vai ao colapso

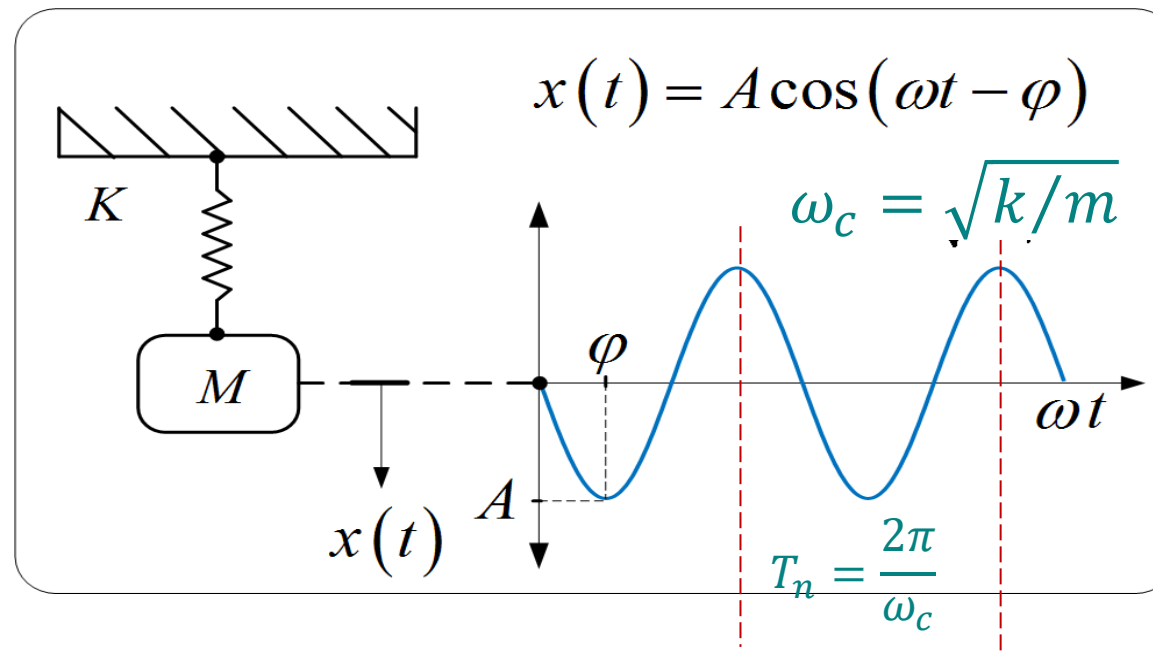
Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos



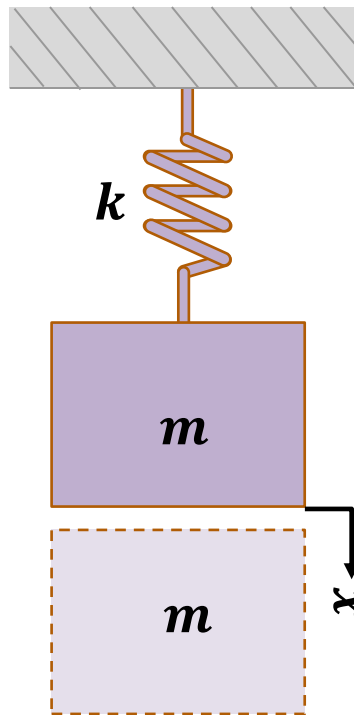
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Condições iniciais
 $\dot{x} = 0; x = 0$



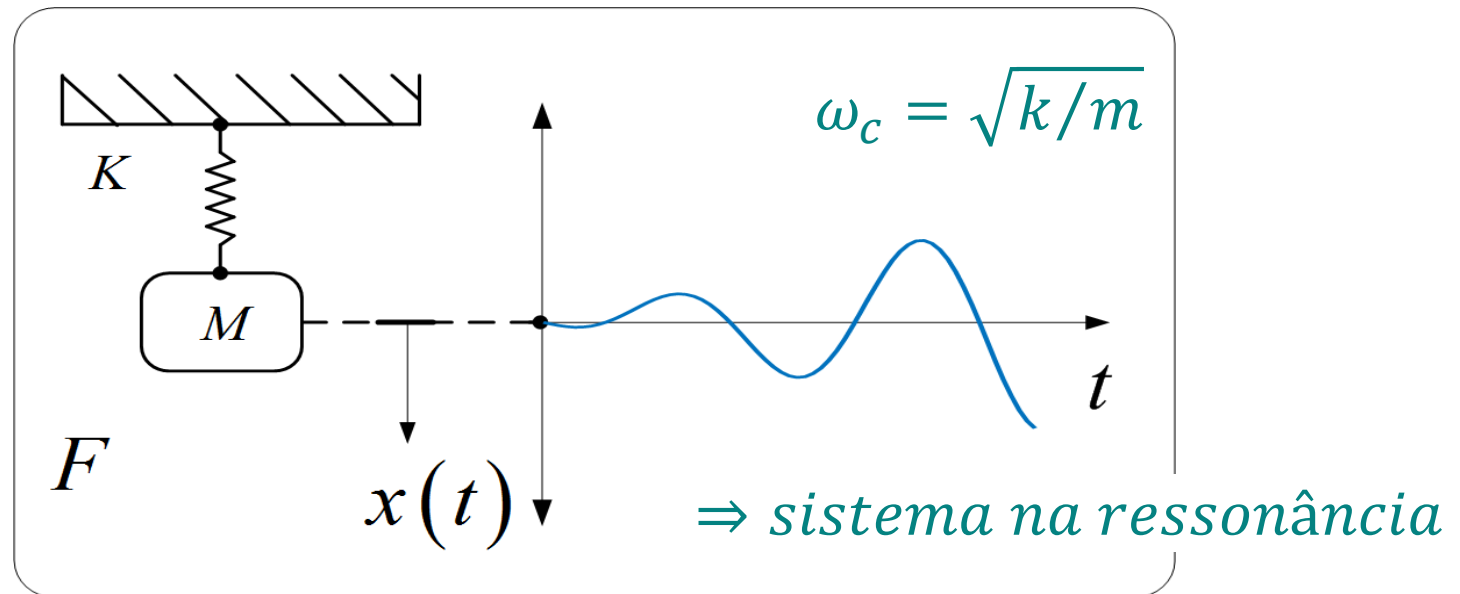
Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

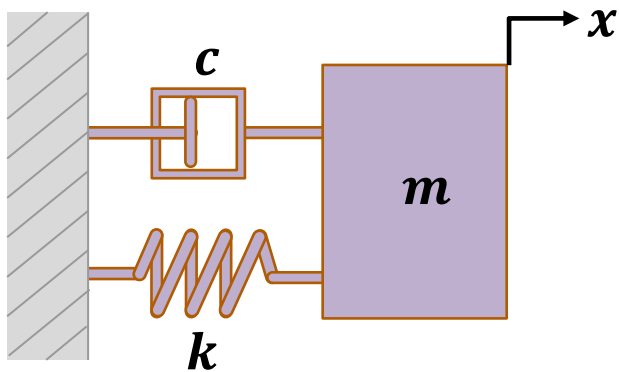
Condições iniciais
 $\dot{x} = 0; x = 0$



Equações Diferenciais Ordinárias

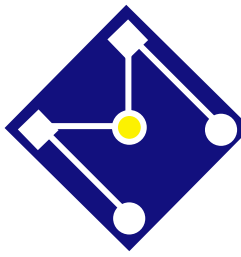
Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

Se λ_1 e λ_2 são complexas



$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \omega_d j$$

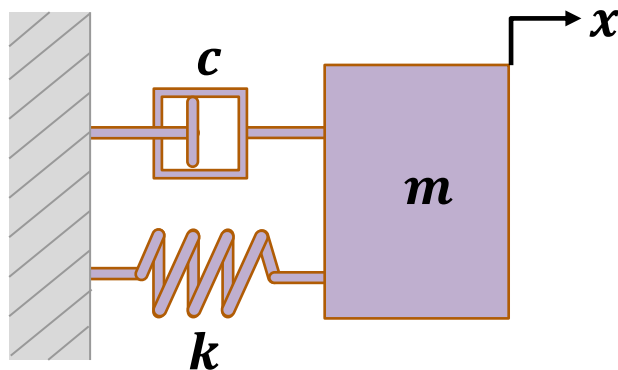




Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

Se λ_1 e λ_2 são complexas

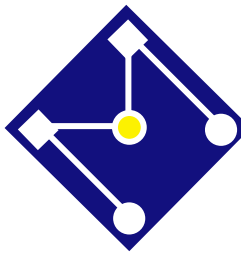


$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \omega_d j$$

Neste caso a solução pode ser reescrita em termos de senos e cossenos usando a Identidade de Euler

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

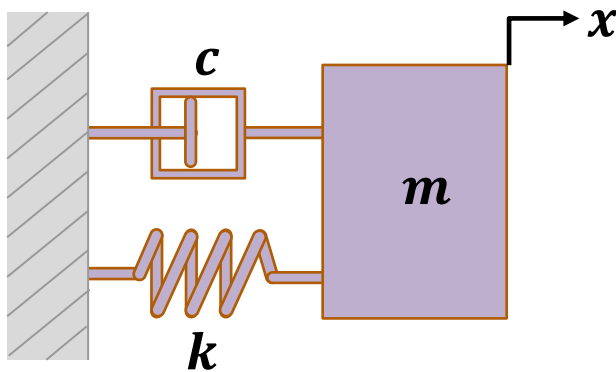




Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

Se λ_1 e λ_2 são complexas



$$a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

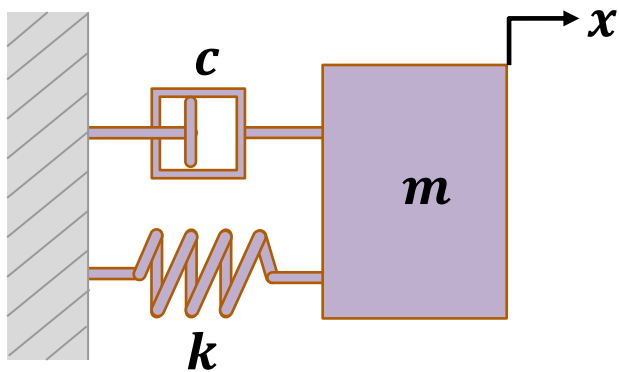
$$a_1 e^{(-\sigma + \omega_d j)t} + a_2 e^{(-\sigma - \omega_d j)t}$$

$$e^{-\sigma t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS
Free Response System

Se λ_1 e λ_2 são complexas



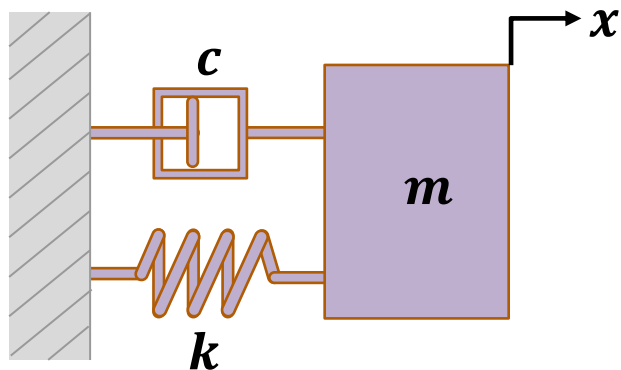
Então a Solução Fica:

$$x(t) = e^{-\sigma t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*

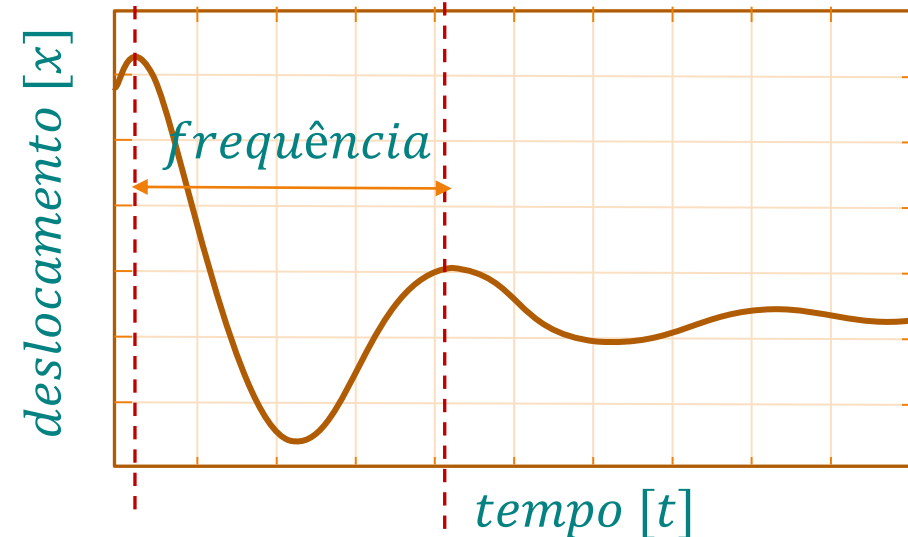
Se λ_1 e λ_2 são complexas



$$\lambda = -\sigma \pm \omega_d j$$

parte imaginária $\Rightarrow$ frequência de oscilação

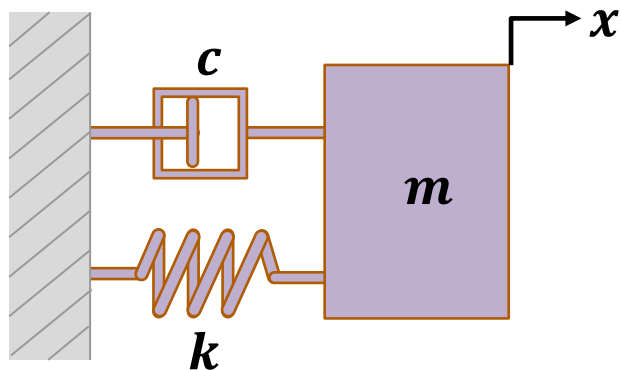
$$x(t) = e^{-\sigma t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$



Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*

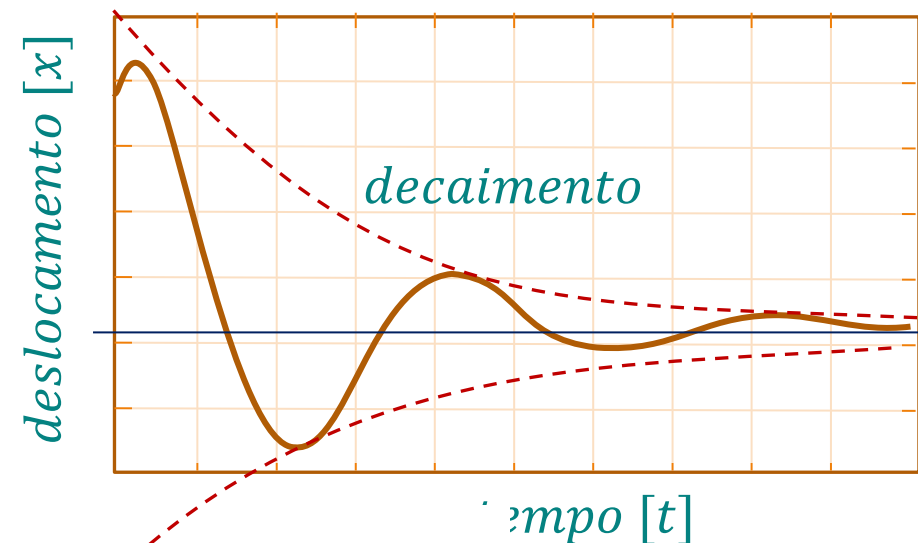
Se λ_1 e λ_2 são complexas



$$\lambda = -\sigma \pm \omega_d j$$

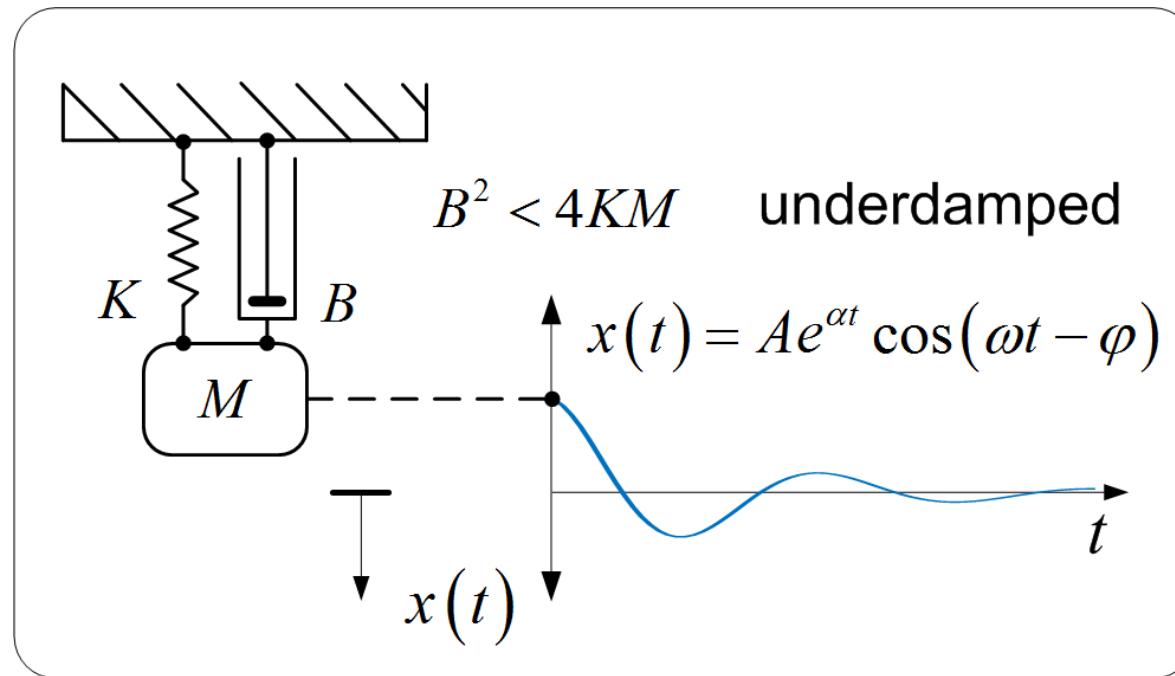
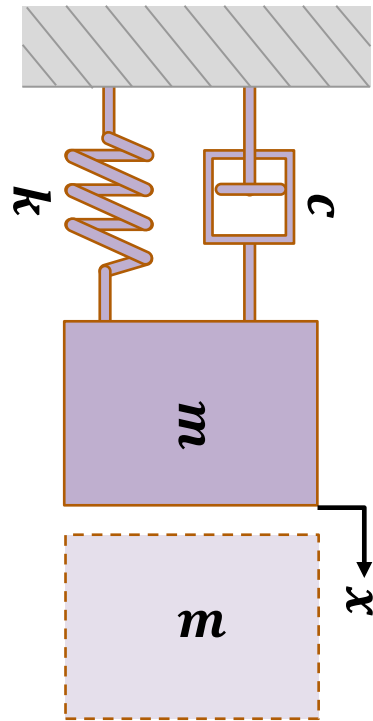
parte real $\Rightarrow$ decaimento

$$x(t) = e^{-\sigma t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$



Equações Diferenciais Ordinárias

Sistema de Resposta Livre – SRL/FRS *Free Response System*

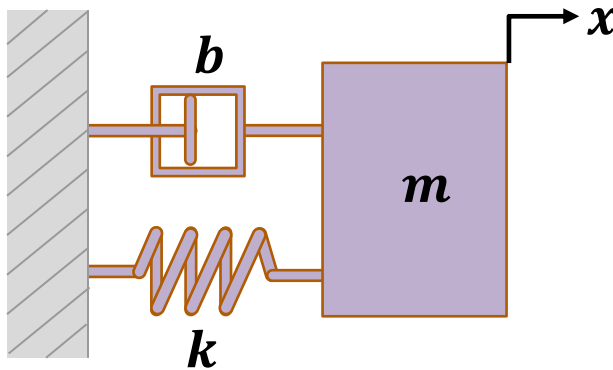


Equações Diferenciais Ordinárias

Exemplo - 2

Determine a solução analítica, identificando a equação característica, e classifique quanto a estabilidade da solução

$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$$



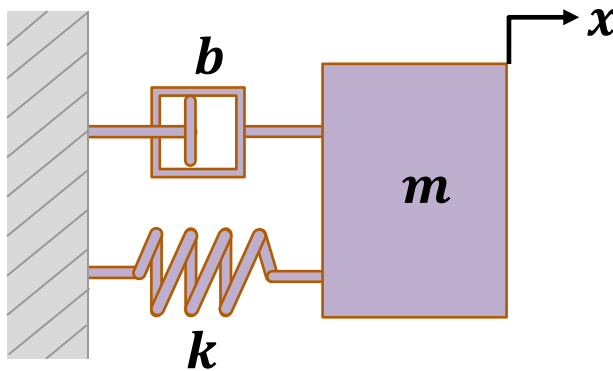
Equações Diferenciais Ordinárias

Exemplo - 1

Equação característica

$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$$



Equações Diferenciais Ordinárias

Exemplo - 2

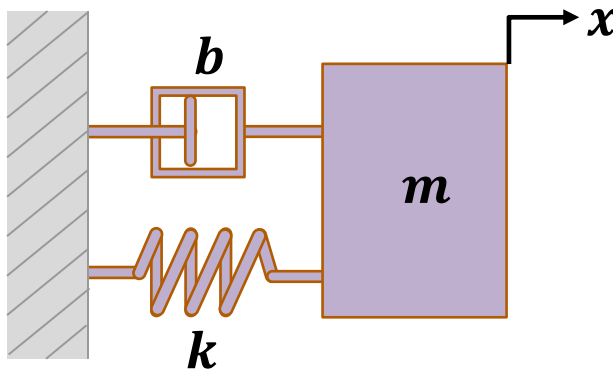
Equação característica

$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_1 = -4 + 3j$$

$$\lambda_2 = -4 - 3j$$



Equações Diferenciais Ordinárias

Exemplo - 2

Equação característica

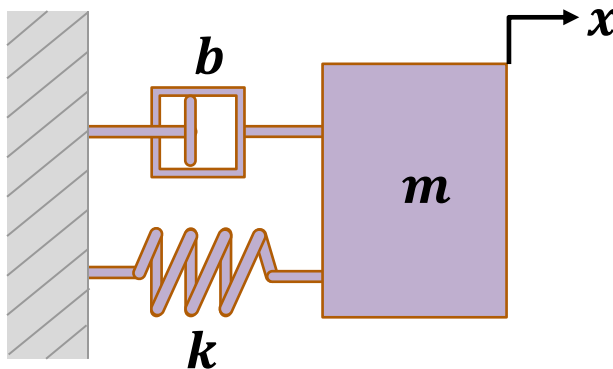
$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_1 = -4 + 3j$$

$$\lambda_2 = -4 - 3j$$

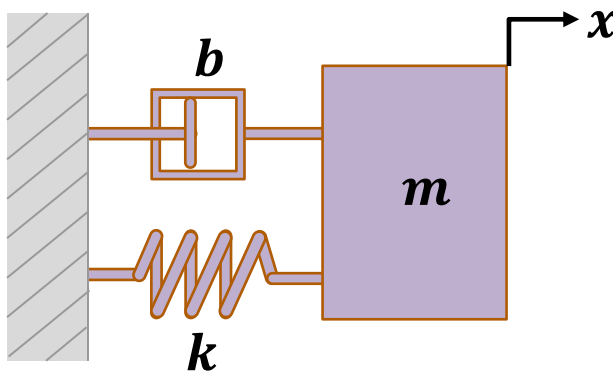
$$x(t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t)$$



Equações Diferenciais Ordinárias

Exercício - 2

Determine a solução analítica, identificando a equação característica, e classifique quanto a estabilidade da solução

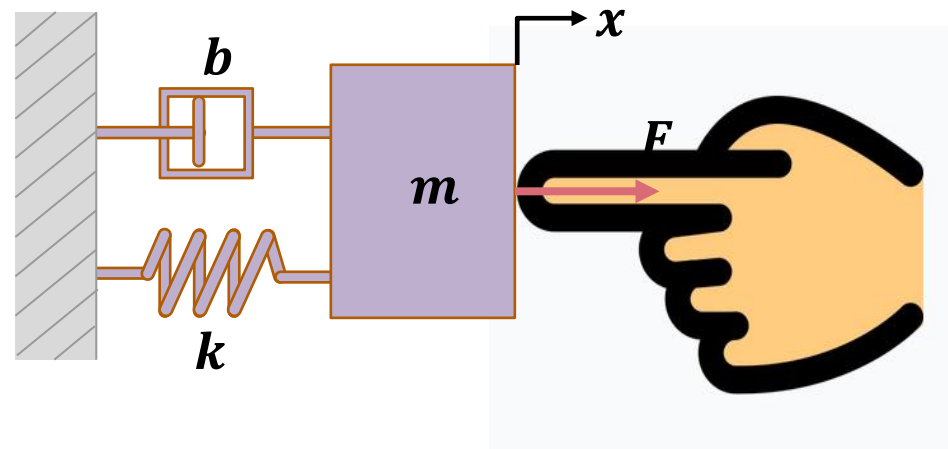


$$\Rightarrow 2\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$$

$$\Rightarrow -1\ddot{x} + 2\dot{x} - 2x = 0$$

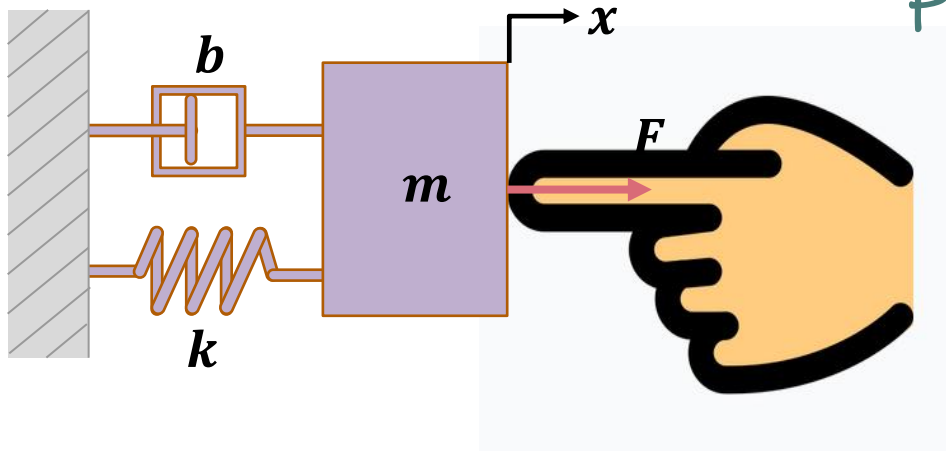
Equações Diferenciais Forçadas

Agora vamos excitar o nosso sistema de Resposta Livre – SRL através da aplicação de uma força $F(t)$



Equações Diferenciais Forçadas

Neste caso o modelo matemático do sistema MMA

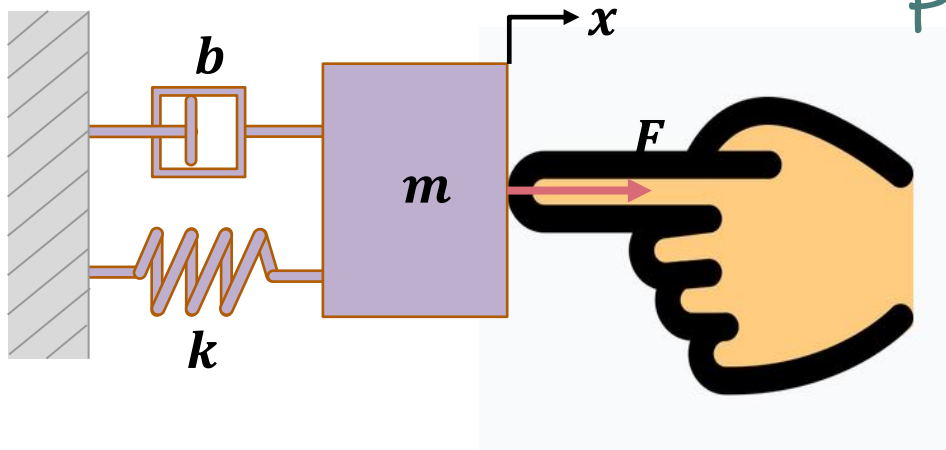


passa de:

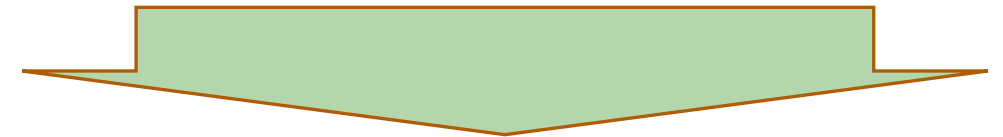
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Equações Diferenciais Forçadas

Neste caso o modelo matemático do sistema MMA



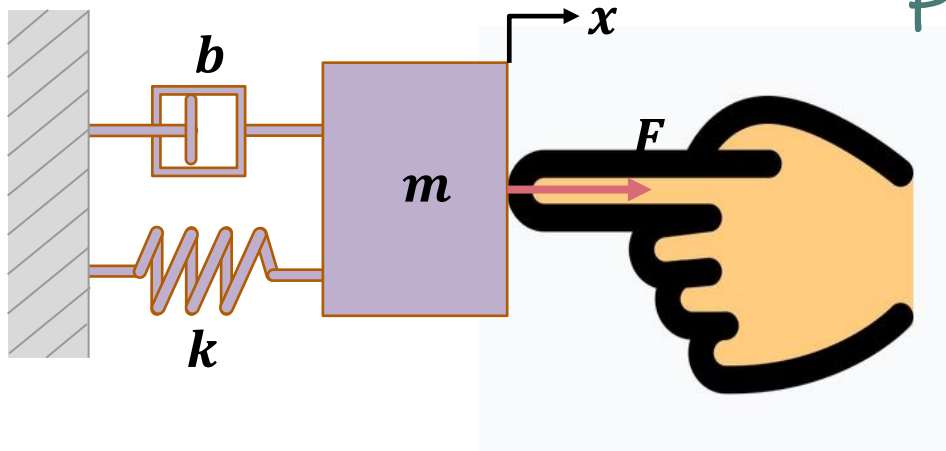
passa de: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$



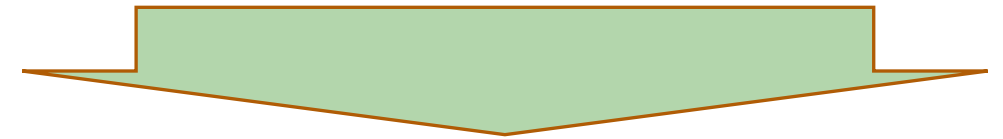
para: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

Equações Diferenciais Forçadas

Neste caso o modelo matemático



passa de: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$



para: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

Note que:

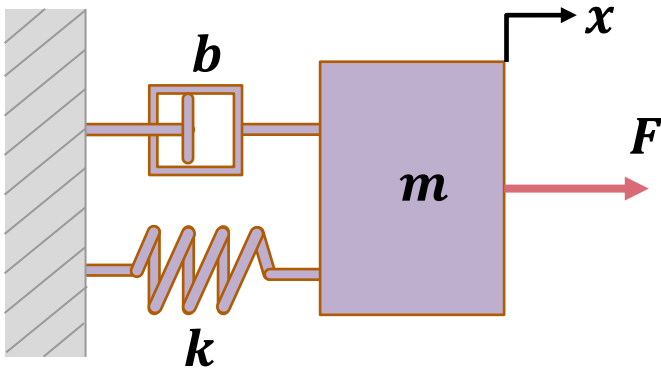
Força

Força

Força

Força

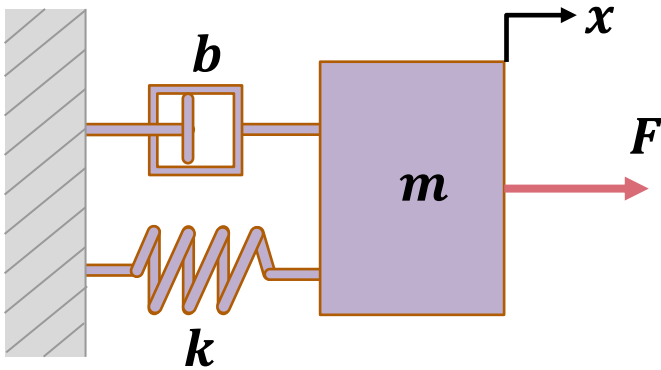
Equações Diferenciais Forçadas



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

A solução dessa equação é composta por duas partes

Equações Diferenciais Forçadas



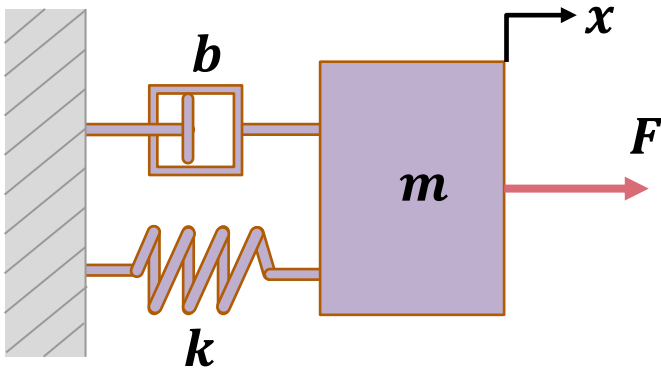
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

A solução dessa equação é composta por duas partes

Solução homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Equações Diferenciais Forçadas



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

A solução dessa equação é composta por duas partes

Solução homogênea

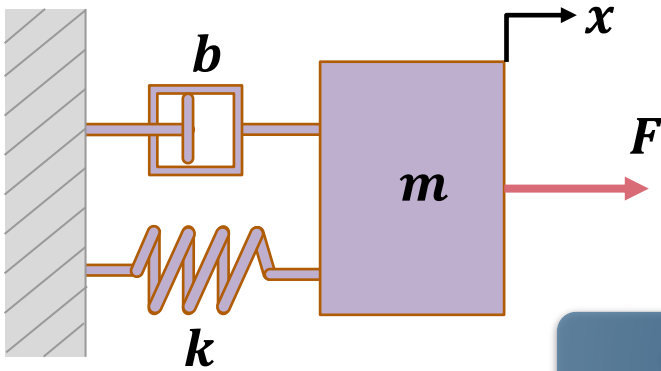
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

+

Solução particular

Que depende da $F(t)$

Equações Diferenciais Forçadas



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Solução homogênea

+

Solução particular

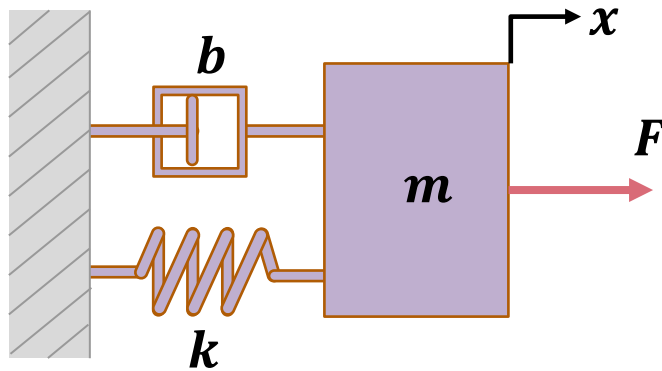
$$x_h(t)$$

$$x_p(t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Equações Diferenciais Forçadas

Exemplo - 2

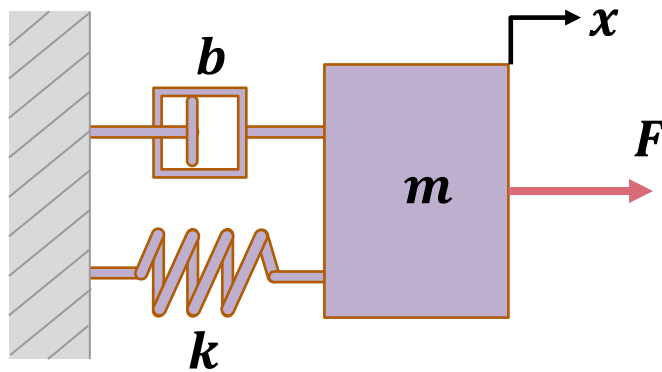


O modelo de um sistema MMA com excitação forçada é dado por:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 2t$$

Equações Diferenciais Forçadas

Exemplo - 2



A solução desse modelo é composta por

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 2t$$

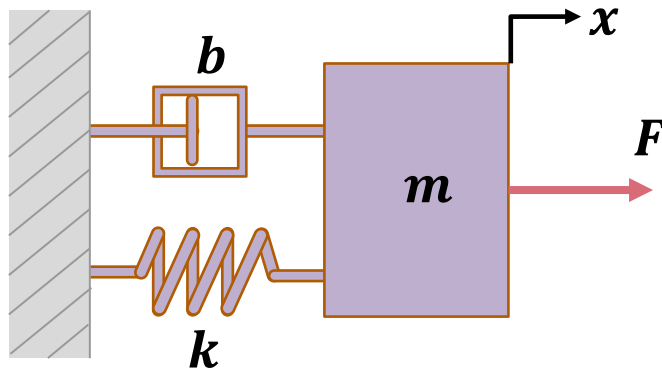
$$x_h(t)$$

$$x_p(t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Equações Diferenciais Forçadas

Exemplo - 3



Solução homogênea

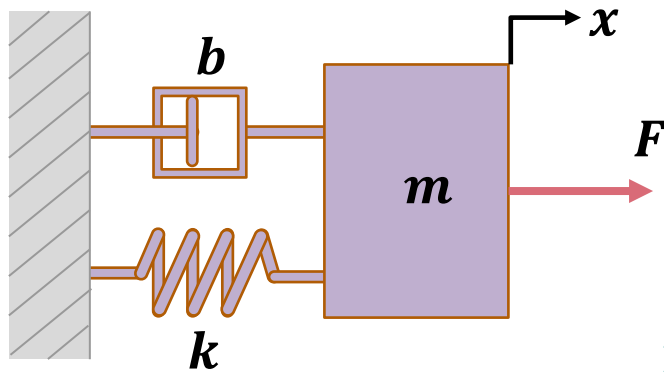
$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 2t$$

$$x_h(t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t)$$

Exemplo - 1

Equações Diferenciais Forçadas

Exemplo - 3

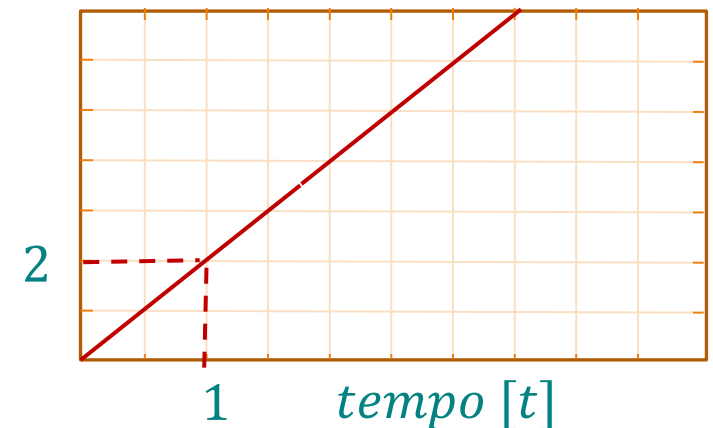


Solução particular

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 2t$$

$$F(t) = 2t \Rightarrow at + b \rightarrow$$

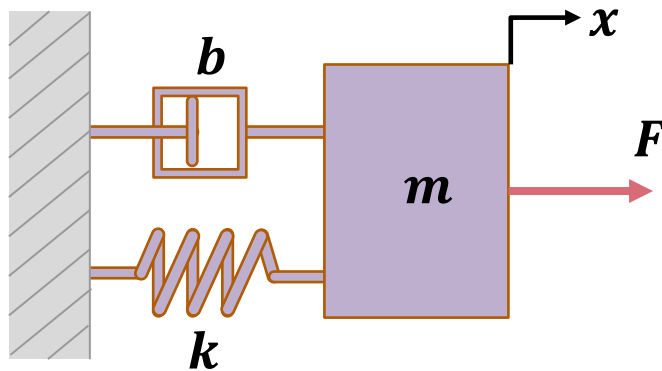
$$x_p(t) = at + d$$



Equações Diferenciais Forçadas

Exemplo - 3

Solução completa fica:



$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 2t$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_h(t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t)$$

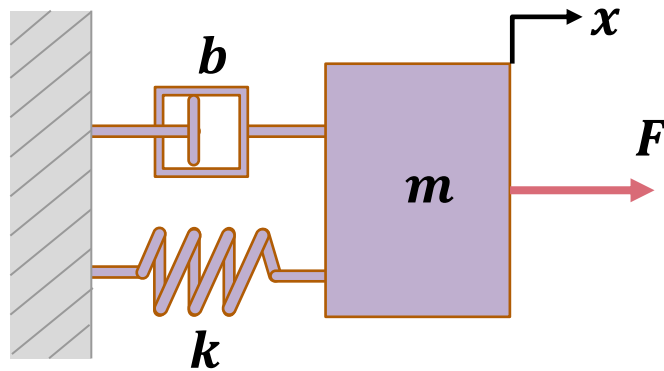
$$x_p(t) = at + d$$

$$x(t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t) + at + b$$

Equações Diferenciais Forçadas

Considere outros tipos de funções de entrada $F(t)$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 5$$



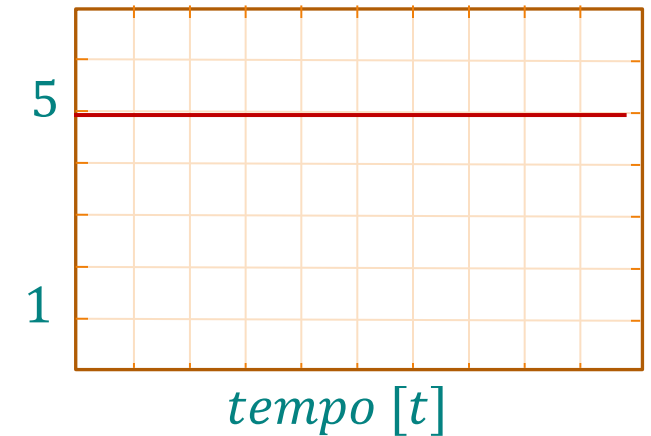
Solução particular

$$F(t) = 5$$

$$x_p = a$$

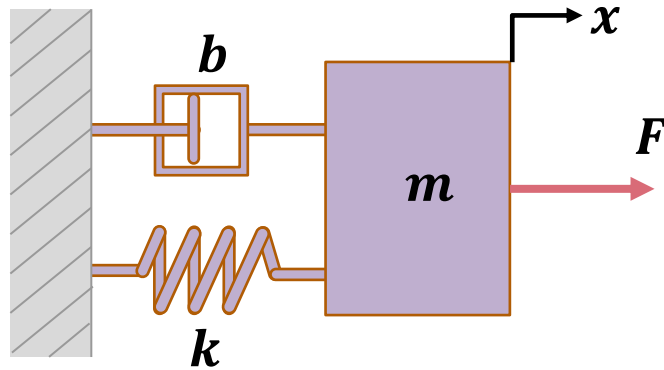
Solução completa

$$x(t) = e^{-4t}(A \cos 3t + B \sin 3t) + a$$



Equações Diferenciais Forçadas

Considere outros tipos de funções de entrada $F(t)$



$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 3e^{-2t}$$

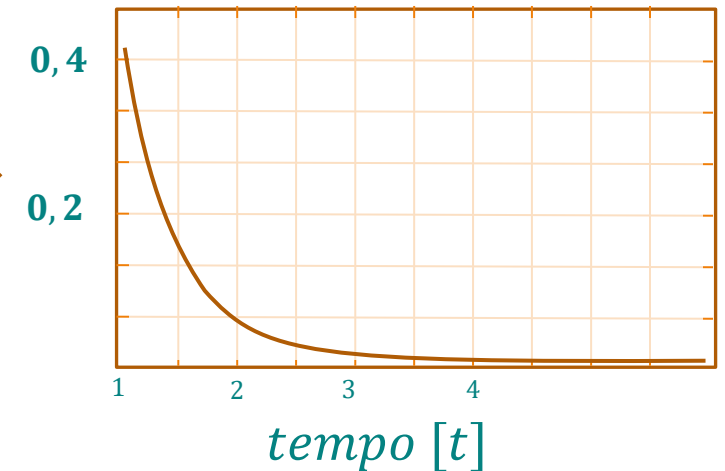
Solução particular

$$F(t) = 3e^{-2t}$$

$$x_p = ae^{-2t}$$

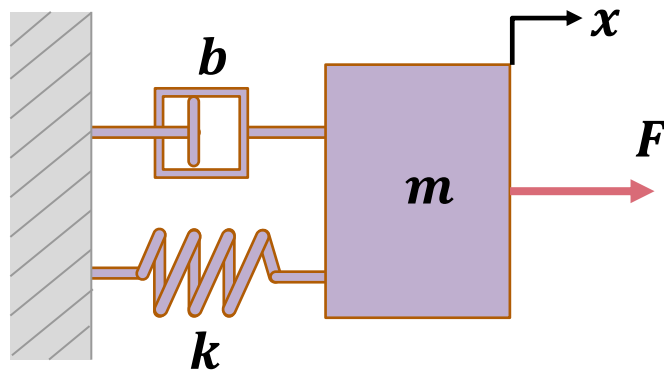
Solução completa

$$x(t) = e^{-4t}(A \cos 3t + B \sin 3t) + ae^{-2t}$$



Equações Diferenciais Forçadas

Considere outros tipos de funções de entrada $F(t)$



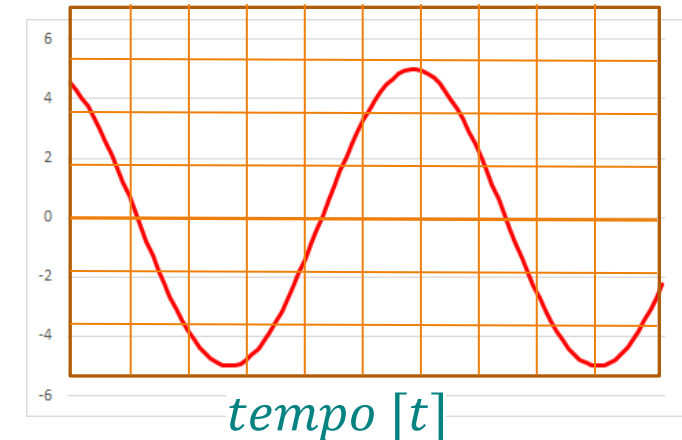
$$\Rightarrow \ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 5 \sin 2t$$

$$F(t) = 5 \sin 2t$$

$$x_p = a \sin(2t + \phi)$$

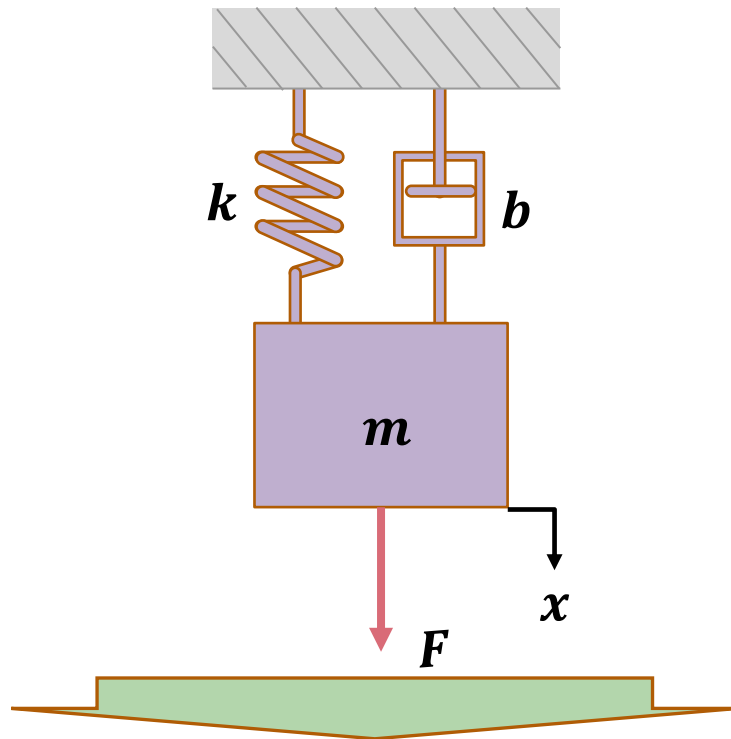
Solução completa

$$x(t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t) + a \sin(2t + \phi)$$

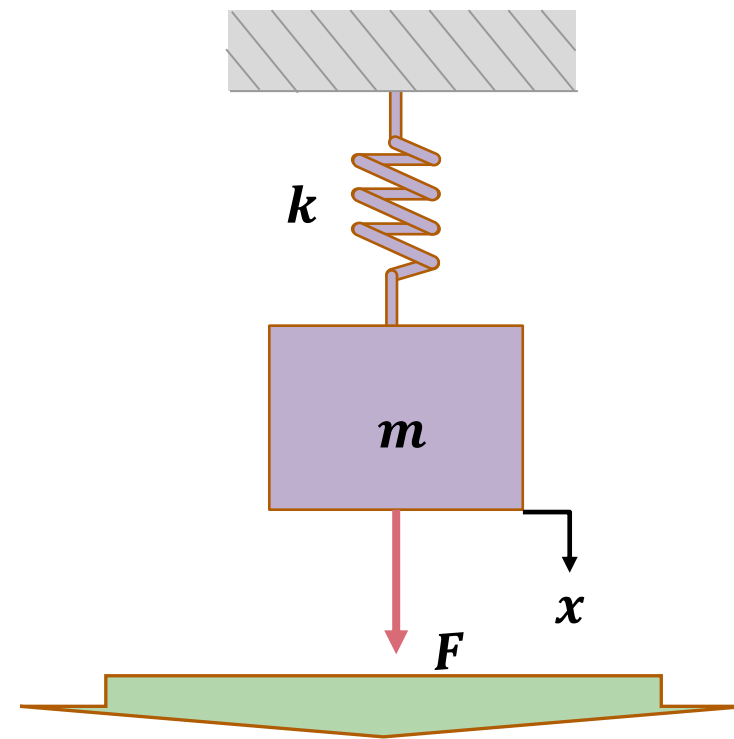


Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Orientadas a Sistemas Dinâmicos



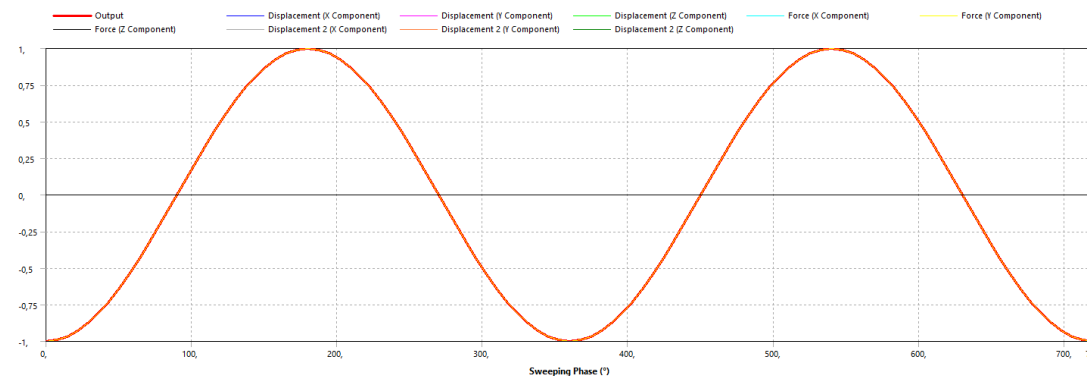
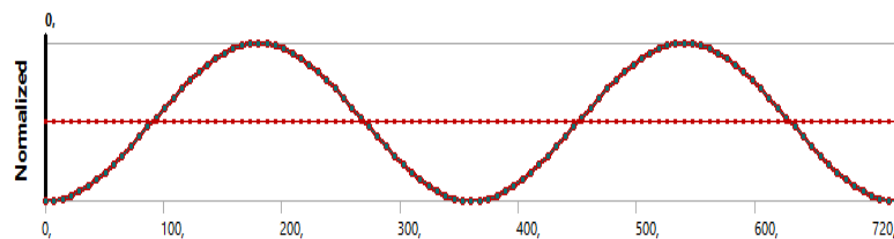
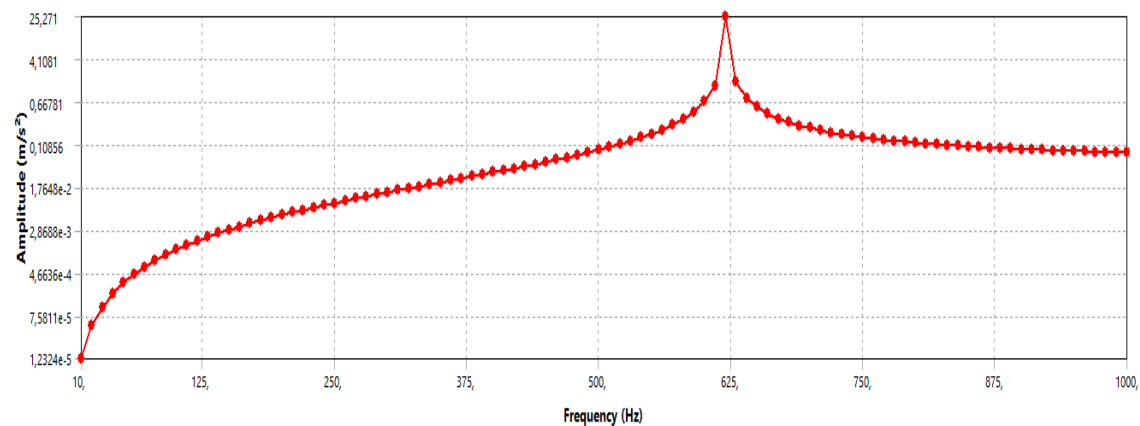
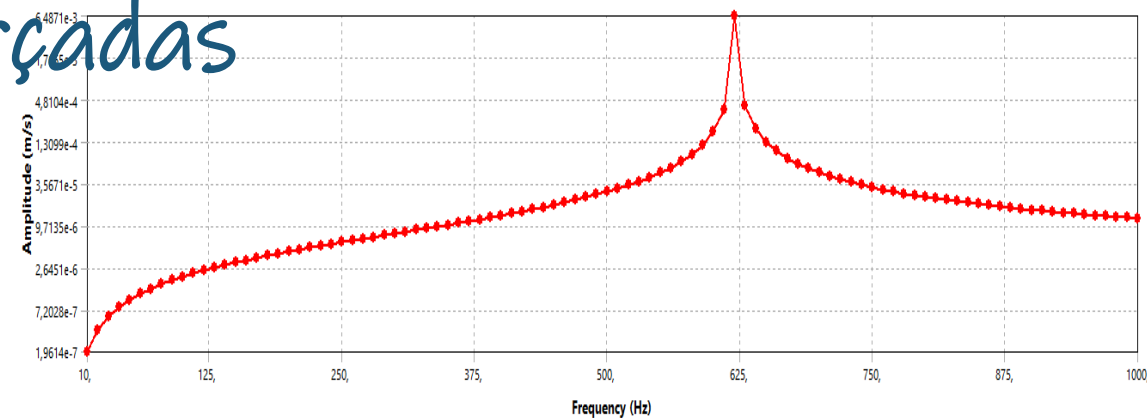
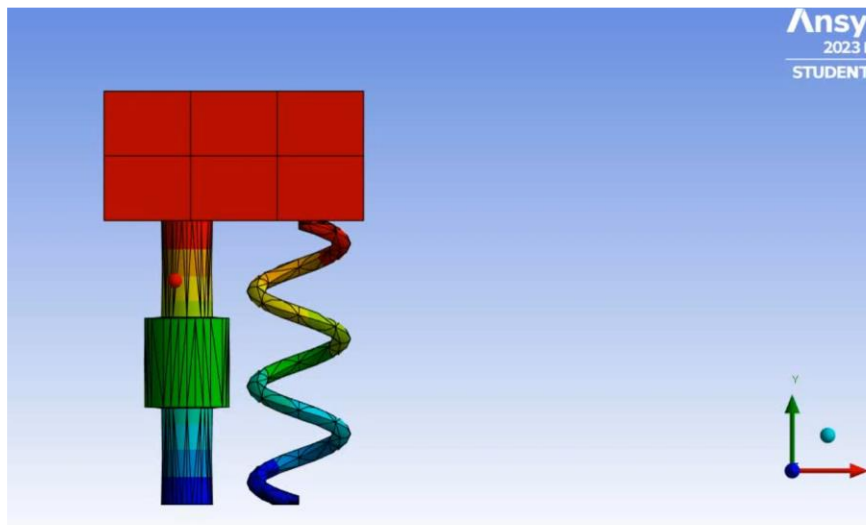
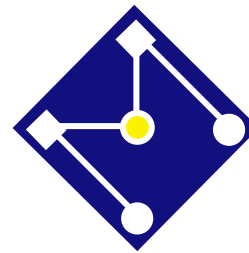
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

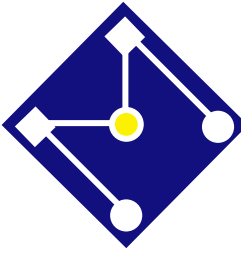


$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

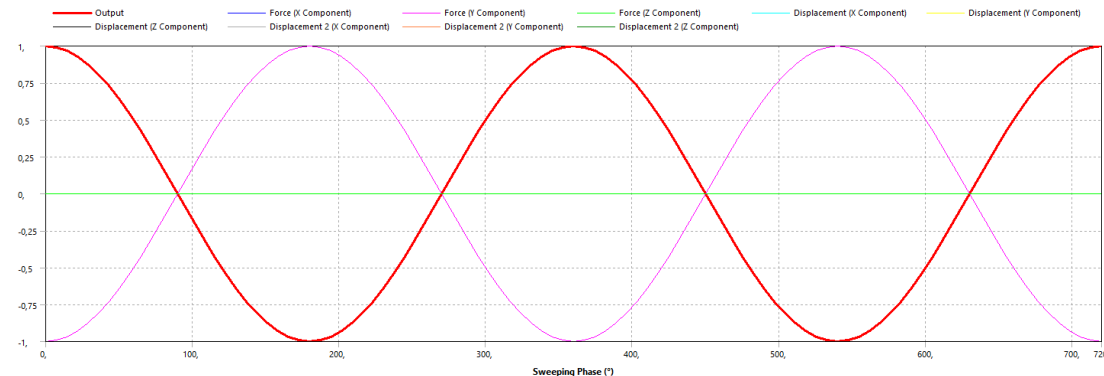
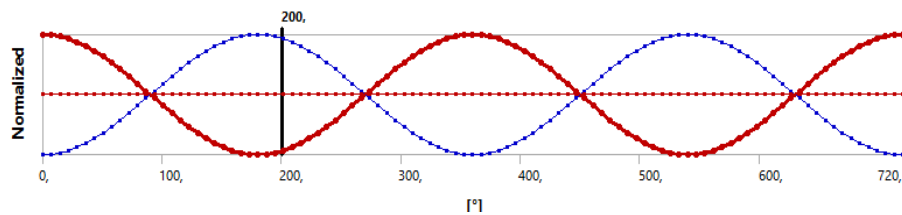
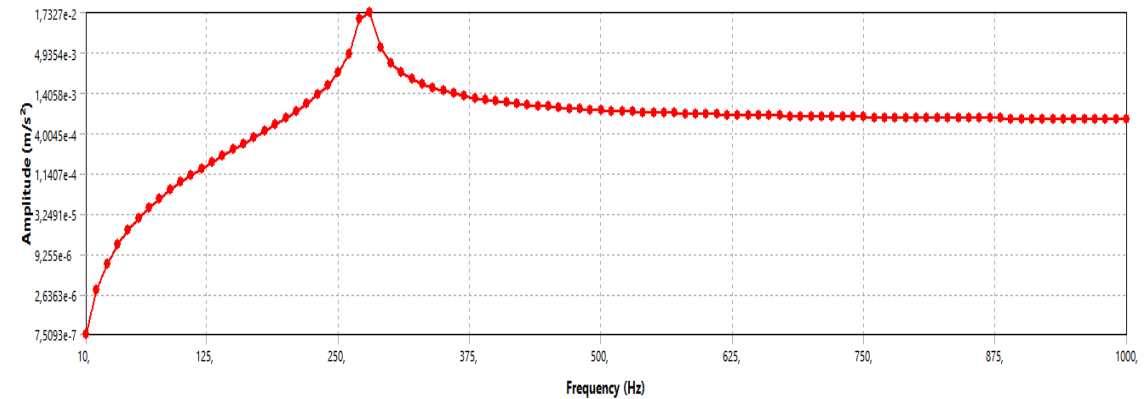
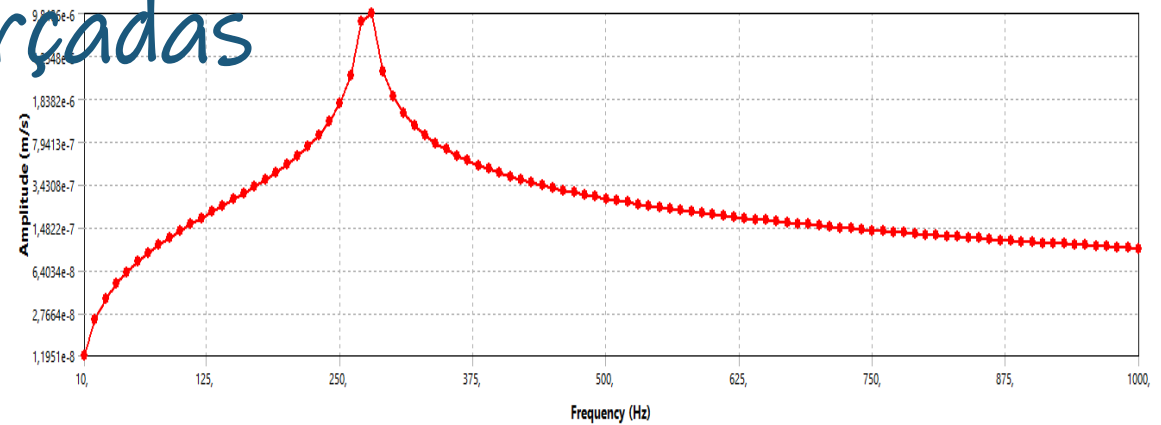
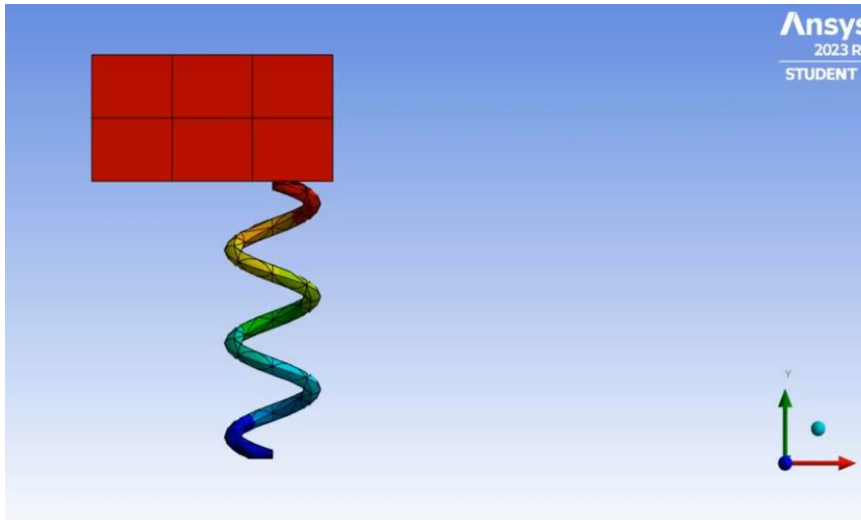
Equações Diferenciais Forçadas

POLI

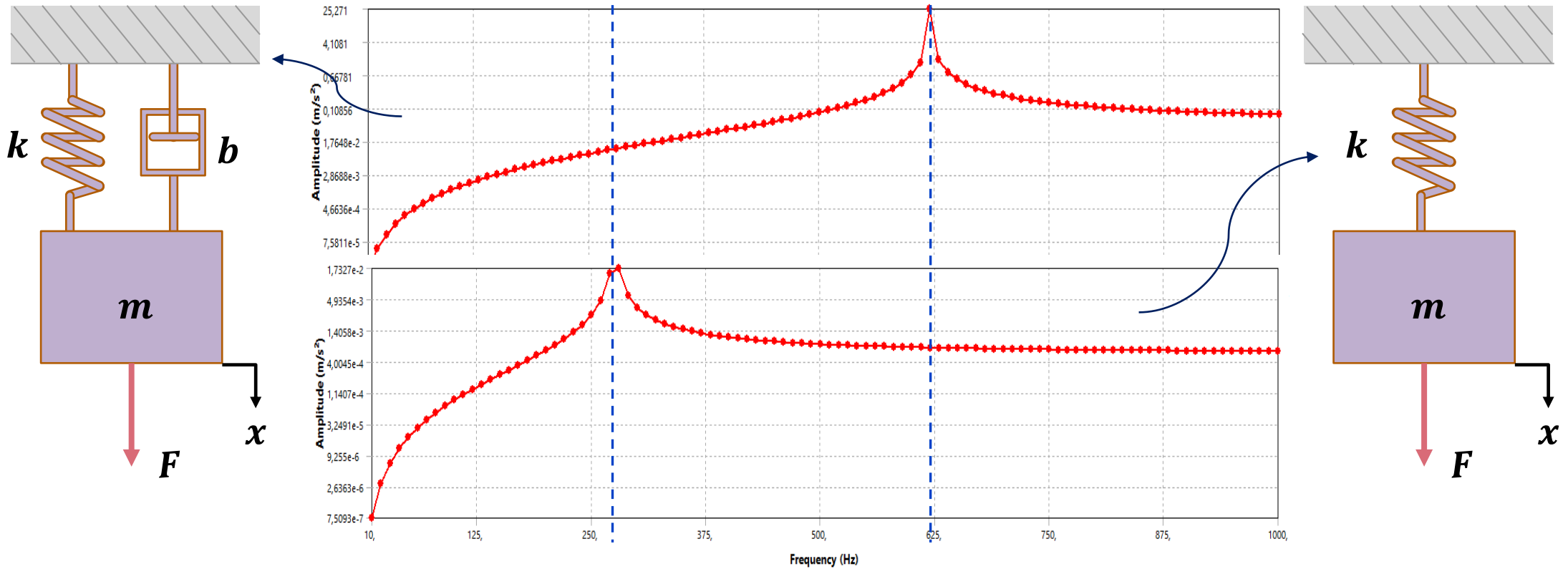




Equações Diferenciais Forçadas



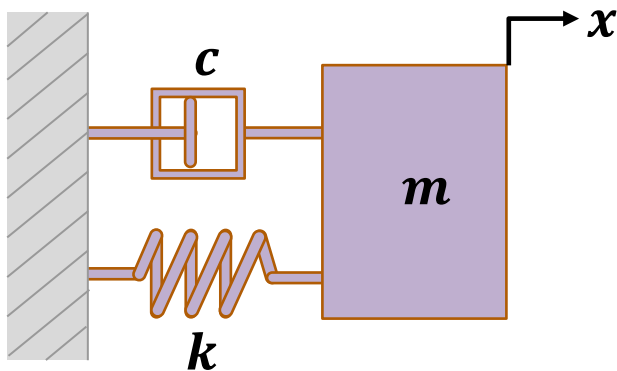
Equações Diferenciais Forçadas



Equações Diferenciais Forçadas

Exercício - 3

Determine a solução analítica para as seguintes EDÑO



$$\Rightarrow 2\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 3e^{-2t}$$

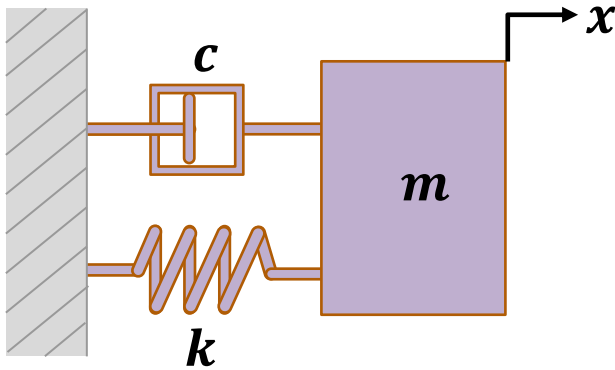
$$\Rightarrow 1\ddot{x} + 2\dot{x} - 2x = 5 \sin 2t$$

$$\Rightarrow 5\ddot{x} + 0,5\dot{x} - 1x = 8$$

Equações Diferenciais

Exercício - 3

Desenvolva um script no Octavia que permita solucionar a equação diferencial do modelo MMA homogêneo e Não homogêneo



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A$$

FIM lab-02



Dilbert says,
"The road to success... is
always under
construction!"

