

PEA 3390 – Eletricidade Aplicada I – 2021

Docente: Prof. Eduardo Mario Dias

# Aula 2

Definições de Circuitos Elétricos

Leis de Kirchoff e Associação de Bipolos

# Leis de Kirchoff e Associação de Bipolos

## 3.1 INTRODUÇÃO

Podemos associar bipolos em série (Fig. 3.1) ou em paralelo (Fig. 3.2).

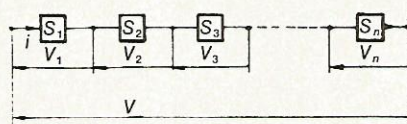


Fig. 3.1 Associação em série.

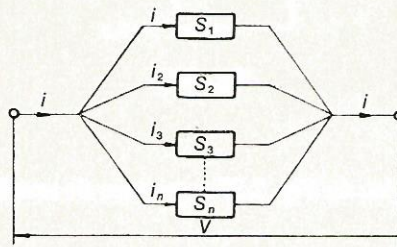


Fig. 3.2 Associação em paralelo.

Qualquer circuito elétrico recai na associação de bipolos passivos e fontes de corrente e de tensão conectados em série e/ou paralelo.

Neste capítulo apresentamos as duas leis de Kirchoff, as quais são básicas para a resolução de qualquer circuito elétrico, bem como descrevemos as regras para associação série e paralelo de bipolos passivos e fontes reais de tensão e corrente.

Por último, apresentamos o método de translação de fontes, que nos permite resolver circuitos onde existam fontes ideais de tensão e de corrente.

## 3.2 LEIS DE KIRCHOFF

### 3.2.1 Lei das correntes

Definimos nó como sendo um ponto qualquer de um circuito.

Assim, a lei das correntes diz que a somatória das correntes em um nó (Fig. 3.3) é sempre nula.

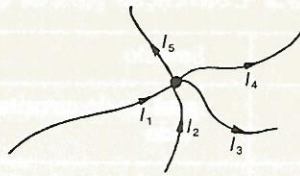


Fig. 3.3 Lei das correntes.

Para isto, fixamos uma convenção para as correntes conforme a Tab. 3.1.

Tabela 3.1 Convenção para as correntes

| Corrente | Sentido     |
|----------|-------------|
| positiva | atinge o nó |
| negativa | deixa o nó  |

Deste modo, para a Fig. 3.3, pode escrever-se:

$$+ I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

Genericamente:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.1)$$

### 3.2.2 Lei das tensões

Em tudo quanto se segue utilizaremos o conceito de *malha* como sendo um *circuito fechado qualquer*.

Assim, a lei das tensões diz que a somatória das tensões ao longo de uma malha (Fig. 3.4) é nula.

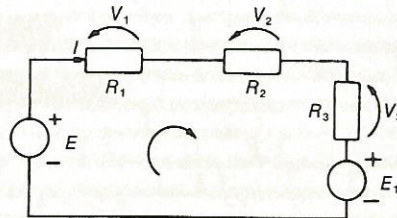


Fig. 3.4 Circuito em malha.

De forma análoga ao realizado para as correntes, deve-se estabelecer uma convenção de sinais para as tensões (Tab. 3.2) em função do sentido de circuitação adotado.

**Tabela 3.2** Convenção para as tensões

| Tensão   | Sentido                             |
|----------|-------------------------------------|
| positiva | igual ao de circuitação adotado     |
| negativa | contrário ao de circuitação adotado |

Desta forma, aplicando a convenção descrita na Tab. 3.2, temos:

$$E - V_1 - V_2 - V_3 - E_1 = 0$$

Genericamente:

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0 \quad (3.2)$$

### 3.3 ASSOCIAÇÃO DE BIPOLOS

#### 3.3.1 Introdução

Na associação em série (Fig. 3.5) a corrente  $i$  que entra na associação é igual à que sai, sendo a mesma em todos os bipolos.

A tensão  $v$  na associação é igual à soma algébrica das tensões nos bipolos componentes. Assim:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (3.3)$$

Ou

$$v = \sum_{j=1}^n v_j \quad (3.4)$$

Com base nestas duas propriedades, podemos determinar a característica do bipolo equivalente à associação série. Essa determinação pode ser gráfica ou analítica.

A solução analítica é possível quando são conhecidas as equações características de todos os bipolos componentes da associação.

A solução gráfica é possível quando possuímos as curvas características dos bipolos componentes, nas mesmas convenções.

Na Fig. 3.5 estão representadas as curvas características de dois bipolos  $S_1$  e  $S_2$  e a curva característica do bipolo  $S$  equivalente à associação série dos mesmos.

Da Fig. 3.5 temos que, para obter a característica da associação série, ponto por ponto, é suficiente fixar algumas correntes e para cada uma dessas correntes somar algebricamente as correspondentes tensões nos bipolos.

Na associação em paralelo (Fig. 3.2) a tensão  $v$  é a mesma em todos os bipolos e a corrente que entra na associação é a mesma que sai, sendo igual à soma algébrica das correntes nos bipolos. Assim:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (3.5)$$

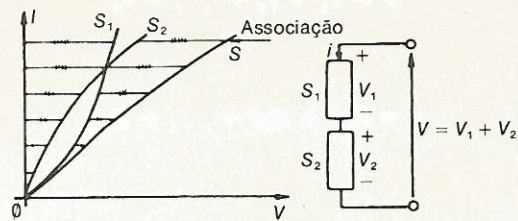


Fig. 3.5 Característica série.

Ou

$$i = \sum_{j=1}^n i_j \quad (3.6)$$

Com base nestas propriedades podemos determinar a característica do bipolo equivalente à associação paralelo. Essa determinação também poderá ser gráfica ou analítica.

A solução analítica é possível quando possuímos as equações características de todos os bipolos componentes da associação, e a solução gráfica pode ser realizada quando são conhecidas as suas curvas características.

Na Fig. 3.6 estão representadas as curvas características dos bipolos  $S_1$  e  $S_2$  e a curva característica do bipolo  $S'$  equivalente à associação paralelo dos mesmos.

Dessa forma, na Fig. 3.6, para conseguir-se a característica da associação paralelo de dois bipolos ponto por ponto, basta fixar algumas tensões e, para cada uma delas, somar algebricamente as correntes de cada um dos bipolos.

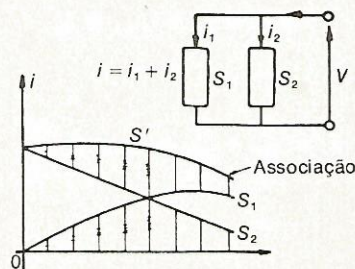


Fig. 3.6 Característica paralelo.

### 3.3.2 Resistores em série

Aplicando os princípios de associação vistos no item anterior, temos, para o circuito da Fig. 3.7,

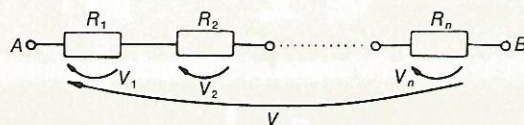


Fig. 3.7 Resistores em série.

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (3.7)$$

ou, ainda,

$$v = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \quad (3.8)$$

Assim:

$$v = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I \quad (3.9)$$

Da análise da Eq. (3.9), temos que a resistência do resistor equivalente da associação série é a soma das resistências dos resistores componentes da associação, ou seja,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (3.10)$$

### 3.3.3 Resistores em paralelo

Aplicando a lei de Kirchoff das correntes para o circuito da Fig. 3.8, obtemos:

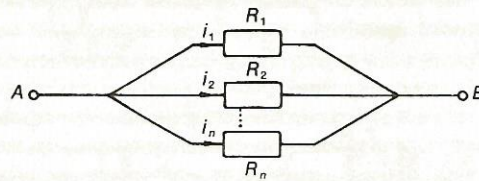


Fig. 3.8 Resistores em paralelo.

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (3.11)$$

ou, ainda,

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_n} \quad (3.12)$$

Resultando:

$$i = v \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \quad (3.13)$$

Assim, a resistência do resistor equivalente será dada por:

$$R_{eq} = \frac{1}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)} \quad (3.14)$$

Em tudo quanto se segue definiremos condutância de um resistor pela equação:

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.15)$$

medida em siemens (S).

Reescrevendo a Eq. (3.14) em termos das condutâncias, temos:

$$R_{eq} = \frac{1}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} \quad (3.16)$$

### 3.4 ASSOCIAÇÕES DE FONTES

Para qualquer circuito elétrico, quando tivermos várias fontes associadas, poderemos sempre substituir o conjunto por uma única fonte equivalente.

Nesta seção apresentaremos uma metodologia que permita determinar a fonte equivalente de uma associação qualquer de fontes.

#### 3.4.1 Fontes em série

Quando se tiver uma associação em série de fontes, deve-se inicialmente representar todas as fontes em suas equivalentes fontes de tensão. Assim, para o circuito da Fig. 3.9, podemos escrever:

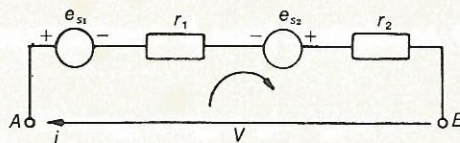


Fig. 3.9 Associação série de fontes de tensão.

$$v - e_{s1} + r_1 i + e_{s2} + r_2 i = 0 \quad (3.17)$$

que resulta:

$$v = (e_{s1} - e_{s2}) + (r_1 + r_2)i \quad (3.18)$$

resultando na fonte de tensão equivalente com f.e.m.:

$$e = e_{s1} - e_{s2} \quad (3.19)$$

e resistência interna:

$$r = (r_1 + r_2) \quad (3.20)$$

Genericamente, temos, para uma associação série de  $n$  fontes de tensão, uma f.e.m. dada por:

$$e = \sum_{i=1}^n e_i \quad (3.21)$$

e resistência interna:

$$r = \sum_{i=1}^n r_i \quad (3.22)$$

*Nota.* Ao se determinar a f.e.m. equivalente da associação série, deve-se tomar o necessário cuidado com as polaridades das f.e.m. componentes da associação.

### 3.4.2 Fontes em paralelo

Quando se tiver uma associação paralelo de fontes, deve-se inicialmente representar todas as fontes em suas equivalentes fontes de correntes. Assim, para o circuito da Fig. 3.10, podemos escrever:

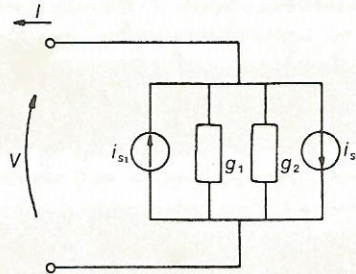


Fig. 3.10 Associação de fontes de correntes em paralelo.

$$-i + i_{s1} - i_{s2} + g_1v + g_2v = 0 \quad (3.23)$$

que resulta:

$$i = (i_{s1} - i_{s2}) + (g_1 + g_2)v \quad (3.24)$$

resultando na fonte de corrente equivalente tal que:

$$i_s = i_{s1} - i_{s2} \quad (3.25)$$

$$g = g_1 + g_2 \quad (3.26)$$

Genericamente, temos, para uma associação paralelo de  $n$  fontes de corrente, uma corrente característica dada por:

$$i_s = \sum_{i=1}^n i_i \quad (3.27)$$

e condutância interna:

$$g = \sum_{i=1}^n g_i \quad (3.28)$$

*Nota.* Ao se determinar a corrente característica equivalente da associação paralelo, deve-se tomar o necessário cuidado com os sentidos das correntes das fontes componentes.

### 3.5 EQUIVALÊNCIA ESTRELA/TRIÂNGULO PARA RESISTORES

Nosso objetivo nesta seção é obter para o circuito da Fig. 3.11 as relações de equivalência entre triângulo/estrela, e vice-versa.



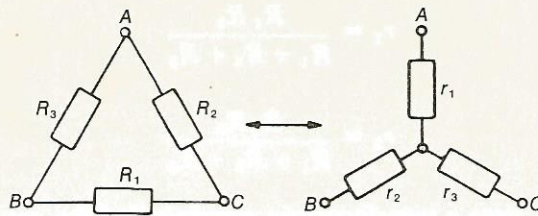


Fig. 3.11 Equivalência estrela/triângulo.

A condição de equivalência para os circuitos da Fig. 3.11 é que a resistência vista entre dois pontos quaisquer, ou seja,  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , seja a mesma em ambos os circuitos.

Assim, para o triângulo, temos:

$$R_{AB} = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.29)$$

$$R_{BC} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.30)$$

$$R_{CA} = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.31)$$

E, para a estrela:

$$R_{AB} = r_1 + r_2 \quad (3.32)$$

$$R_{BC} = r_2 + r_3 \quad (3.33)$$

$$R_{CA} = r_1 + r_3 \quad (3.34)$$

Igualando as equações correspondentes, resulta:

$$r_1 + r_2 = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.35)$$

$$r_2 + r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.36)$$

$$r_1 + r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.37)$$

Resolvendo o sistema de Eqs. (3.35) a (3.37), relativo à transformação triângulo/estrela, obtemos:

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.38)$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.39)$$

$$r_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.40)$$

Analogamente, para a transformação estrela/triângulo, resulta:

$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}{r_1} \quad (3.41)$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}{r_2} \quad (3.42)$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}{r_3} \quad (3.43)$$

Superpondo os circuitos da Fig. 3.11, obtemos a rede apresentada na Fig. 3.12.

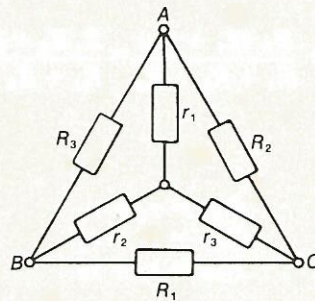


Fig. 3.12 Circuito  $\Delta$ -Y.

Da análise dos resultados obtidos nas Eqs. (3.38) a (3.43), as seguintes regras podem ser aplicadas:

### 3.5.1 Transformação triângulo/estrela

As resistências resultantes na estrela obedecerão sempre ao seguinte algoritmo:

Produto das duas resistências adjacentes pela somatória das resistências que constituem o triângulo.

### 3.5.2 Transformação estrela/triângulo

As resistências no triângulo obedecerão ao seguinte algoritmo:

Somatória dos duplos produtos das resistências que constituem a estrela dividida pela resistência que se opõe àquela que desejamos determinar.

## 3.6 TRANSLAÇÃO DE FONTES

### 3.6.1 Introdução

Em circuitos elétricos a utilização dos algoritmos de translação de fontes de corrente e de tensão facilita extremamente, em diversas situações, o processo de resolução de vários exercícios. Neste item apresentaremos a metodologia necessária, bem como solucionaremos diversos problemas onde o uso de translação de fontes implementa sobremaneira o processo de resolução.

### 3.6.2 Fontes de tensão

Seja a rede da Fig. 3.13.

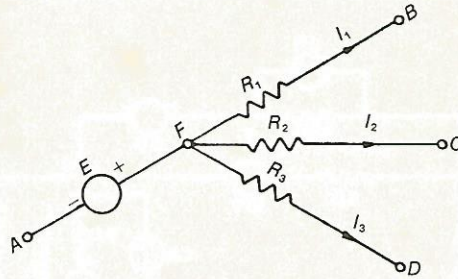


Fig. 3.13 Circuito em análise.

O objetivo deste nosso trabalho é obter um circuito equivalente ao da Fig. 3.13. A condição de equivalência a ser obedecida é que as tensões entre os pontos A e B, A e C, A e D permaneçam as mesmas.

Assim, aplicando a lei de Kirchoff das tensões para os pontos A e B do circuito da Fig. 3.13, ficamos com:

$$V_{AB} + R_1 I_1 - E = 0 \quad (3.44)$$

Ou, ainda,

$$V_{AB} = E - R_1 I_1 \quad (3.45)$$

De forma análoga, para A e C e A e D, temos, então:

$$V_{AC} = E - R_2 I_2 \quad (3.46)$$

$$V_{AD} = E - R_3 I_3 \quad (3.47)$$

Devemos agora procurar um circuito que verifique as Eqs. (3.45) a (3.47), transladando ainda a ideal existente entre os pontos A e F. A rede que obedece a estas condições é a apresentada na Fig. 3.14.

Da análise do circuito da Fig. 3.14, temos que as relações (3.45) a (3.47) estão sendo verificadas.

O processo apresentado de translação de fontes de tensão é quase sempre vantajoso, pois estaremos sempre suprimindo um nó da rede elétrica em análise.

Deve-se ressaltar que a translação da fonte de tensão ideal deverá ser feita para todos os ramos a ela adjacentes.

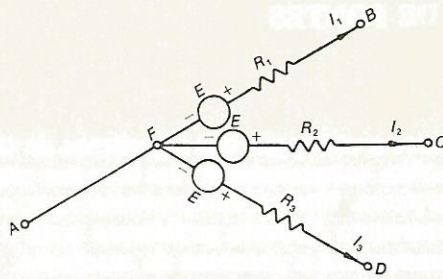


Fig. 3.14 Circuito equivalente — fonte de tensão.

**EXEMPLO**

Obter a fonte de tensão equivalente entre os pontos *A* e *B*, da figura que se segue.

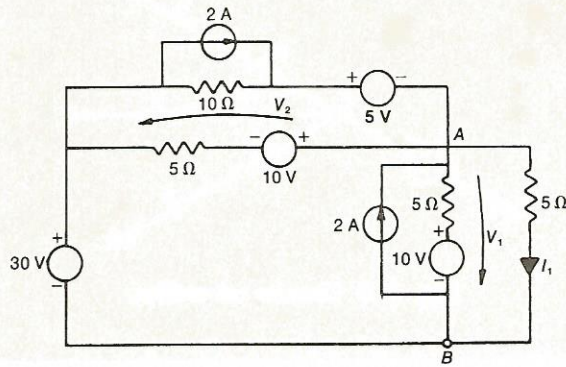


Fig. 3.15

Transladando a fonte de 30 V:

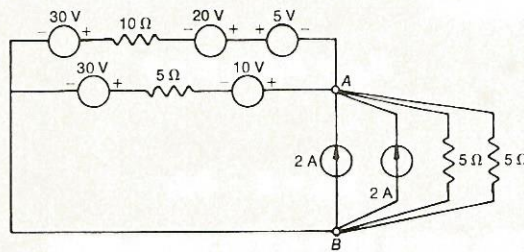


Fig. 3.15a

Ou, ainda,

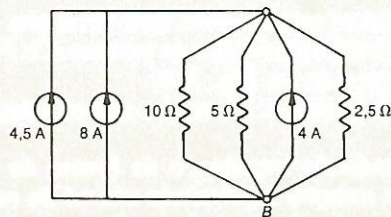


Fig. 3.15b

Resultando em:

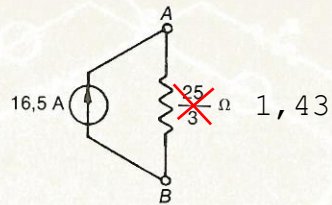


Fig. 3.15c

Ou seja:

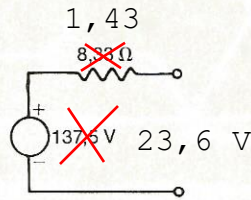


Fig. 3.15d

### 3.6.3 Fontes de corrente

Seja o circuito da Fig. 3.16. Nosso objetivo agora é transladar a fonte ideal de corrente  $I$ .

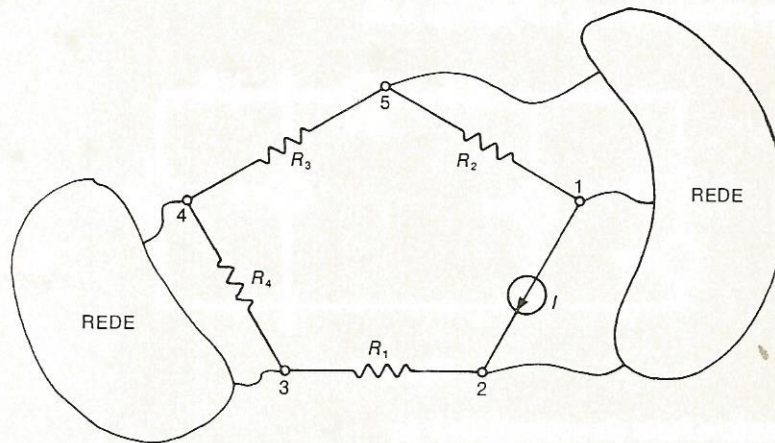


Fig. 3.16 Circuito em análise.

Para isto, devemos observar, inicialmente, as condições de contorno dos nós 1 e 2, que vêm a ser:

Sai corrente  $I$  do nó 1 (-)  
Entra corrente  $I$  do nó ~~X~~(+)  
 $\rightarrow$  2

O circuito equivalente deve então, necessariamente, obedecer às condições de contorno especificadas. Deste modo, executando a translação da fonte ideal de

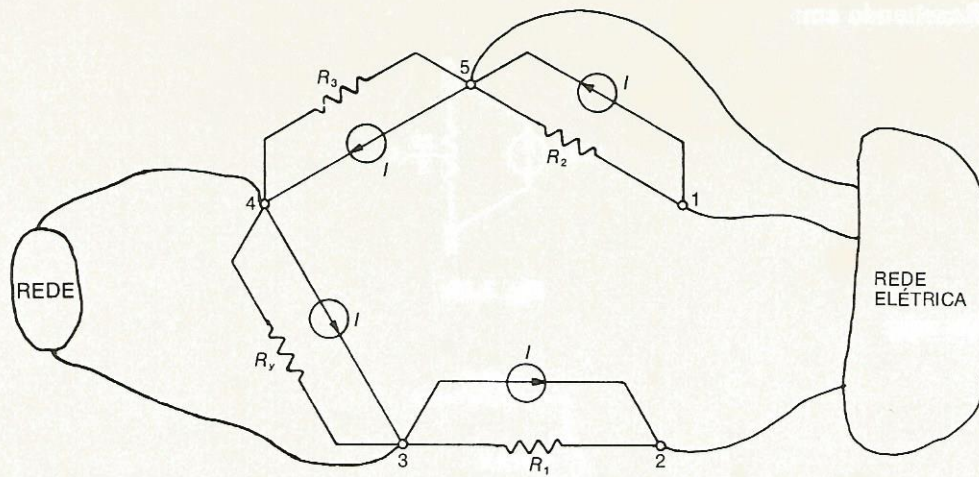


Fig. 3.17 Circuito equivalente — fonte de corrente transladada.

corrente  $I$  ao longo da malha delimitada pelos pontos 1, 2, 3, 4, 5, ficamos com o circuito apresentado na Fig. 3.17.

Deve ser frisado que a translação da fonte de corrente será feita sempre ao longo de uma única malha da rede (necessariamente deve conter a fonte ideal de corrente  $I$ ).

**EXEMPLO**

Obter, utilizando translação de fontes de corrente, a fonte de corrente equivalente vista pelos pontos  $A$  e  $B$  da Fig. 3.18.

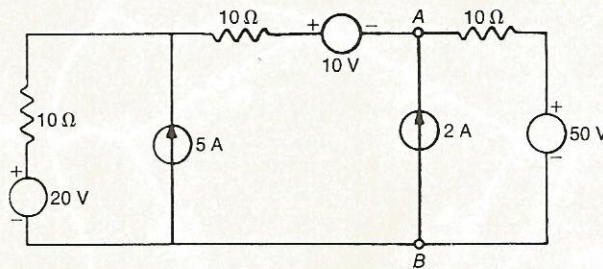


Fig. 3.18

Transladando a fonte de corrente de 2 A:

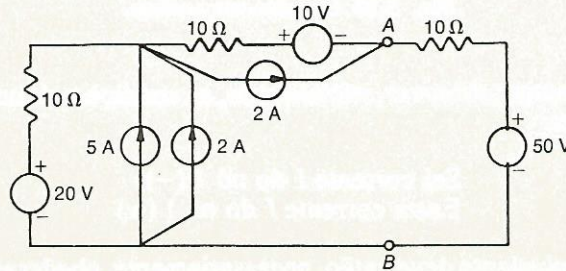


Fig. 3.18a

Ou, ainda,

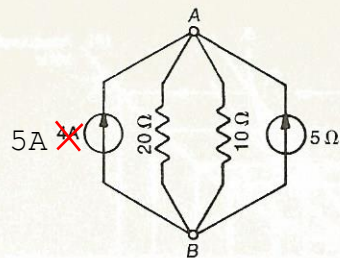


Fig. 3.18b

Ficando, finalmente:

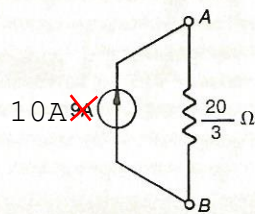


Fig. 3.18c