Sensibilidade em Otimização

Objetivo: Calcular as derivadas da função objetivo e restrições em relação às variáveis de projeto

$$F(x+\Delta x)=F(x)+\Delta x\boxed{\frac{dF(x)}{dx}}+\frac{\Delta x^2}{2}\boxed{\frac{d^2F(x)}{dx^2}}+\frac{\Delta x^3}{6}\boxed{\frac{d^3F(x)}{dx^3}}+\ldots$$

Permite analisar a mudança do comportamento da estrutura devido a pequenas mudanças de seus parâmetros (dimensões, propriedades de materiais, etc…) com custo menor do que realizar novas análises.

Métodos para o cálculo de sensibilidade
- Diferenças Finitas
- Métodos Semi-analíticos
- Métodos Analíticos

Precisão aumenta

Sensibilidade em Otimização

Considere um sistema mecânico modelado pelo sistema linear abaixo:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}=\{\mathbf{F}\}\Rightarrow\begin{bmatrix} A_1^2 & 2-A_1^2 \\ 2-A_1^2 & 4+2A_1^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix} \quad \text{onde } A_1=1$$

Determine o **valor numérico** da sensibilidade da função $f=\{\mathbf{U}\}^t[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}$ em relação à A_1 usando:

a) Método analítico;
b) Método semi-analítico (ΔA_1=0,01)
c) Método de diferenças finitas (ΔA_1=0,01);

Método Analítico

$$\frac{df}{dA_1}=\frac{\partial f}{\partial A_1}+\mathbf{z}^T\frac{d\mathbf{U}}{dA_1}, \quad \text{onde}: \mathbf{z}=\nabla f \quad \left(z_i=\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)$$

Sensibilidade em Otimização

Primeiro Passo: Calcular {**U**} para $A_1=1$

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}=\{\mathbf{F}\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\1&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}\Rightarrow\{\mathbf{U}\}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{Bmatrix}14\\1\end{Bmatrix}$$

Segundo Passo: Método Direto – calcular $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}$

$$\mathbf{K}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{dA}_1}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}\mathbf{U}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}=\mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{dA}_1}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}\mathbf{U}\right)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{dA}_1}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}=\mathbf{K}^{-1}\left(-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}\mathbf{U}\right);\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}=2\begin{bmatrix}A_1&-A_1\\-A_1&2A_1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&1\\1&6\end{bmatrix}^{-1}\left(-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}14\\1\end{Bmatrix}\right)=-\frac{2}{25}\begin{bmatrix}6&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}14\\1\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{Bmatrix}-36\\10\end{Bmatrix}$$

Sensibilidade em Otimização

Terceiro Passo: cálculo de **z**

$$\mathbf{z}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\end{Bmatrix};\frac{\partial f}{\partial u_1}=\frac{\partial\{\mathbf{U}\}^t}{\partial u_1}[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}+\{\mathbf{U}\}^t\frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial u_1}\{\mathbf{U}\}+\{\mathbf{U}\}^t[\mathbf{K}]\frac{\partial\{\mathbf{U}\}}{\partial u_1}=$$

$$=\{1\quad 0\}[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}+\{\mathbf{U}\}^t[\mathbf{K}]\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}=\{1\quad 0\}\begin{bmatrix}1&1\\1&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}+\{u_1\quad u_2\}\begin{bmatrix}1&1\\1&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}=$$

$$=2(u_1+u_2)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u_2}=\{0\quad 1\}[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}+\{\mathbf{U}\}^t[\mathbf{K}]\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}=2(u_1+6u_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathbf{z}=\begin{Bmatrix}2(u_1+u_2)\\2(u_1+6u_2)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6\\8\end{Bmatrix}$$

Sensibilidade em Otimização

Quarto Passo: cálculo de $\dfrac{\partial f}{\partial A_1}$

$$\frac{\partial f}{\partial A_1} = \{\mathbf{U}\}^t \frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial A_1}\{\mathbf{U}\} = 2\{\mathbf{U}\}^t \begin{bmatrix} A_1 & -A_1 \\ -A_1 & 2A_1 \end{bmatrix}\{\mathbf{U}\} = 2\{\mathbf{U}\}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\{\mathbf{U}\} =$$

$$= \frac{2}{25}\{14 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 14 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{68}{5}$$

Quinto Passo: cálculo da derivada final

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dA}_1} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{A}_1} + \mathbf{z}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1} = \frac{68}{5} + \frac{1}{5}\{6 \quad 8\}\begin{Bmatrix} -36 \\ 10 \end{Bmatrix} = 13{,}6 - 27{,}2 = -13{,}6$$

Sensibilidade em Otimização

Segundo Passo: Método Adjunto – calcular $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}$

$$\mathbf{K}\lambda = \mathbf{z} \Rightarrow \lambda = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{z} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 6 \\ 8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} 28 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dA}_1} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{A}_1} + \lambda^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{dA}_1} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}\mathbf{U}\right) = \frac{68}{5} + \frac{1}{5}\{28 \quad 2\}\left(0 - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 14 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) =$$

$$= 13{,}6 - 27{,}2 = \boxed{-13{,}6}$$

Método Semi-Analítico

Primeiro Passo: calcular $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1} \cong \frac{\mathbf{K}(A_1 + \Delta A_1) - \mathbf{K}(A_1)}{\Delta A_1} = \frac{1}{0{,}01}\left(\begin{bmatrix} 1{,}01^2 & 2 - 1{,}01^2 \\ 2 - 1{,}01^2 & 4 + 2(1{,}01^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2-1 \\ 2-1 & 4+2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{0{,}01}\begin{bmatrix} 0{,}0201 & -0{,}0201 \\ -0{,}0201 & 0{,}0402 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}01 & -2{,}01 \\ -2{,}01 & 4{,}02 \end{bmatrix}$$

Sensibilidade em Otimização

Segundo Passo: cálculo de $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{A}_1}$

$$\frac{\partial f}{\partial A_1}=\{\mathbf{U}\}^t\frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial A_1}\{\mathbf{U}\}=\frac{1}{25}\{14\quad 1\}\begin{bmatrix}2{,}01 & -2{,}01\\ -2{,}01 & 4{,}02\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}14\\ 1\end{Bmatrix}=\frac{357}{25}=14{,}28$$

Terceiro Passo: Método Adjunto – calcular $\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA}_1}$

$$\mathbf{K}\lambda=\mathbf{z}\Rightarrow\lambda=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{z}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}6\\ 8\end{Bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{Bmatrix}28\\ 2\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dA}_1}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{A}_1}+\lambda^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{dA}_1}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}\mathbf{U}\right)=\frac{357}{25}+$$

$$+\frac{2}{5}\{14\quad 1\}\left(0-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2{,}01 & -2{,}01\\ -2{,}01 & 4{,}02\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}14\\ 1\end{Bmatrix}\right)=\frac{357}{25}-27{,}33=\boxed{-13{,}06}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Sensibilidade em Otimização

Método de Diferenças Finitas

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dA}_1}\cong\frac{f|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}-f|_{\mathrm{A}_1}}{\Delta\mathrm{A}_1}=\frac{\{\mathbf{U}\}^t|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}[\mathbf{K}]_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}\{\mathbf{U}\}|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}-\{\mathbf{U}\}^t|_{\mathrm{A}_1}[\mathbf{K}]_{\mathrm{A}_1}\{\mathbf{U}\}|_{\mathrm{A}_1}}{\Delta\mathrm{A}_1}$$

$$[\mathbf{K}]_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}\{\mathbf{U}\}|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}=\{\mathbf{F}\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1{,}01^2 & 2-1{,}01^2\\ 2-1{,}01^2 & 4+2(1{,}01^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}\bigg|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}=\begin{Bmatrix}3\\ 4\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}\bigg|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}=\begin{bmatrix}1{,}0201 & 0{,}9799\\ 0{,}9799 & 6{,}0402\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}3\\ 4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2{,}73022\\ 0{,}21931\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f|_{\mathrm{A}_1+\Delta\mathrm{A}_1}=\begin{Bmatrix}2{,}73022\\ 0{,}21931\end{Bmatrix}^t\begin{bmatrix}1{,}0201 & 0{,}9799\\ 0{,}9799 & 6{,}0402\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2{,}73022\\ 0{,}21931\end{Bmatrix}=9.068$$

$$[\mathbf{K}]_{\mathrm{A}_1}\{\mathbf{U}\}|_{\mathrm{A}_1}=\{\mathbf{F}\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2-1\\ 2-1 & 4+2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}\bigg|_{\mathrm{A}_1}=\begin{Bmatrix}3\\ 4\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}\bigg|_{\mathrm{A}_1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3\\ 4\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{Bmatrix}14\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2{,}8\\ 0{,}2\end{Bmatrix}\Rightarrow f|_{\mathrm{A}_1}=\begin{Bmatrix}2{,}8\\ 0{,}2\end{Bmatrix}^t\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2{,}8\\ 0{,}2\end{Bmatrix}=9{,}2\Rightarrow\boxed{\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dA}_1}\cong\frac{9.068-9{,}2}{0{,}01}=-13{,}2}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Sensibilidade em Otimização

Elaborando melhor o método analítico

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dA_1}}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{A_1}}+\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dA_1}},\quad \text{onde}:\mathbf{z}=\nabla \mathrm{f}\ \left(\mathrm{z_i}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u_i}}\right)$$

$$\frac{df}{dA_1}=\{\mathbf{U}\}^t\frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial A_1}\{\mathbf{U}\}+\frac{d\{\mathbf{U}\}^t}{dA_1}[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}+\{\mathbf{U}\}^t[\mathbf{K}]\frac{d\{\mathbf{U}\}}{dA_1};$$

$$\frac{d\{\mathbf{U}\}}{dA_1}=[\mathbf{K}]^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{dA_1}}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}\mathbf{U}\right)=[\mathbf{K}]^{-1}\left(-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}\mathbf{U}\right)\Rightarrow\frac{d\{\mathbf{U}\}^t}{dA_1}=\left(-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}\mathbf{U}\right)^t[\mathbf{K}]^{-t}=-\mathbf{U}^t\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}[\mathbf{K}]^{-1}$$

$$\Rightarrow\frac{df}{dA_1}=\{\mathbf{U}\}^t\frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial A_1}\{\mathbf{U}\}-\mathbf{U}^t\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}[\mathbf{K}]^{-1}[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}+\{\mathbf{U}\}^t[\mathbf{K}][\mathbf{K}]^{-1}\left(-\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}\mathbf{U}\right)=$$

$$=\{\mathbf{U}\}^t\cancel{\frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial A_1}}\{\mathbf{U}\}-\mathbf{U}^t\cancel{\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}}\{\mathbf{U}\}-\{\mathbf{U}\}^t\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}\mathbf{U}=\boxed{-\mathbf{U}^t\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}\{\mathbf{U}\}}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Sensibilidade em Otimização

Considere um sistema mecânico modelado pelo sistema linear abaixo:

$$\{[\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}]\}\{\mathbf{u}\}=0\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}1+\frac{1}{A_1^3} & -\frac{1}{A_1^3}\\ -\frac{1}{A_1^3} & 3+\frac{1}{A_1^3}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}2A_1 & 0\\ 0 & A_1\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\quad \text{onde } A_1=1$$

Determine o **valor numérico** da sensibilidade da função ω_1 em relação à A_1 usando:

a) método analítico;

b) Método semi-analítico (ΔA_1=0,01);

c) método de diferenças finitas (ΔA_1=0,01);

Método Analítico

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{K}-\mu\mathbf{M}) & -\mathbf{M}\mathbf{u}\\ -\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{dA_1}}\\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{dA_1}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA_1}}-\mu\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{dA_1}}\right)\mathbf{u}\\ \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{dA_1}}\mathbf{u}\end{Bmatrix}\qquad \frac{d\omega_1}{dA_1}=\frac{1}{2\omega_1}\frac{d\mu}{dA_1}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Sensibilidade em Otimização

$$[\mathbf{K}]=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix};\quad [\mathbf{M}]=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad \frac{d[\mathbf{K}]}{dA_1}=\frac{3}{A_1^{\,4}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix};\quad \frac{d[\mathbf{M}]}{dA_1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2(1-\omega^2) & -1\\ -1 & 4-\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix}2(1-\omega^2) & -1\\ -1 & 4-\omega^2\end{bmatrix}=0\Rightarrow 2(1-\omega^2)(4-\omega^2)-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1=\omega_1^{\,2}=\boxed{0{,}842;}\,\mu_2=\omega_2^{\,2}=4{,}16\Rightarrow\omega_1=0{,}918;\omega_2=2{,}04$$

$$\omega_1^{\,2}=0{,}842\Rightarrow\begin{bmatrix}0{,}316 & -1\\ -1 & 3{,}158\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow u_1=3{,}158u_2\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2^{\,2}=4{,}16\Rightarrow\begin{bmatrix}-6{,}32 & -1\\ -1 & -0{,}16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow u_1=-0{,}16u_2\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}-0{,}16\\ 1\end{Bmatrix}$$

Sensibilidade em Otimização

$\boxed{\mu_1=0{,}842;}$

$$[\mathbf{K}]-\mu_1[\mathbf{M}]=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}-0{,}842\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}316 & -1\\ -1 & 3{,}158\end{bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}\Rightarrow[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6{,}316\\ 1\end{Bmatrix};$$

$$\{\mathbf{u}\}^t[\mathbf{M}]=\{3{,}158\quad 1\}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\{6{,}316\quad 1\}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{dA}_1}-\mu_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{dA}_1}\right)\mathbf{u}_1=\left\{3\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}-0{,}842\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-4{,}684 & 3\\ 3 & -3{,}842\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-11{,}792\\ 5{,}632\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_1^{\,T}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{dA}_1}\mathbf{u}_1=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}^t\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3{,}158\\ 1\end{Bmatrix}=\boxed{10{,}475}$$

Sensibilidade em Otimização

$$\begin{bmatrix} 0{,}316 & -1 & 6{,}316 \\ -1 & 3{,}158 & 1 \\ 6{,}316 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{d\mathbf{u}}{dA_1} \\ \dfrac{d\mu}{dA_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11{,}792 \\ 5{,}632 \\ 10{,}475 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{d\mathbf{u}}{dA_1} \\ \dfrac{d\mu}{dA_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}239 \\ 2{,}653 \\ -1{,}509 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{d\omega_1}{dA_1} = \frac{1}{2*0{,}918}\frac{d\mu}{dA_1} =$$

$$= \boxed{-0.822}$$

Método Semi-Analítico

$$\frac{d[\mathbf{K}]}{dA_1} = \frac{[\mathbf{K}]_{A_1+\Delta A_1} - [\mathbf{K}]_{A_1}}{\Delta A_1} = \frac{1}{0{,}01}\left\{\begin{bmatrix} 1{,}971 & -0{,}971 \\ -0{,}971 & 3{,}971 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{0{,}01}\begin{bmatrix} -0{,}029 & 0{,}029 \\ 0{,}029 & -0{,}029 \end{bmatrix} = 2{,}9\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d[\mathbf{M}]}{dA_1} = \frac{[\mathbf{M}]_{A_1+\Delta A_1} - [\mathbf{M}]_{A_1}}{\Delta A_1} = \frac{1}{0{,}01}\left\{\begin{bmatrix} 2{,}02 & 0 \\ 0 & 1{,}01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{0{,}01}\begin{bmatrix} 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sensibilidade em Otimização

Portanto:

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dA_1} - \mu_1\frac{d\mathbf{M}}{dA_1}\right)\mathbf{u}_1 = \left\{2{,}9\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 0{,}842\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} 3{,}158 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4{,}584 & 2{,}9 \\ 2{,}9 & -3{,}742 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 3{,}158 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.576 \\ 5.4162 \end{Bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 0{,}316 & -1 & 6{,}316 \\ -1 & 3{,}158 & 1 \\ 6{,}316 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{d\mathbf{u}}{dA_1} \\ \dfrac{d\mu}{dA_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11{,}576 \\ 5{,}4162 \\ 10{,}475 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{d\mathbf{u}}{dA_1} \\ \dfrac{d\mu}{dA_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}25 \\ 2{,}58 \\ -1{,}487 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{d\omega_1}{dA_1} = \frac{1}{2*0{,}918}\frac{d\mu_1}{dA_1} =$$

$$= \boxed{-0.81}$$

Sensibilidade em Otimização

Método de Diferenças Finitas

$$\frac{d\mu_1}{dA_1} \cong \frac{\mu_1\big|_{A_1+\Delta A_1} - \mu_1\big|_{A_1}}{\Delta A_1}; \qquad \frac{d\omega_1}{dA_1} \cong \frac{\omega_1\big|_{A_1+\Delta A_1} - \omega_1\big|_{A_1}}{\Delta A_1}$$

Para $A_1 = 1{,}01$:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{A_1^{\,3}} & -\frac{1}{A_1^{\,3}} \\ -\frac{1}{A_1^{\,3}} & 3+\frac{1}{A_1^{\,3}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix} 1{,}971 & -0{,}971 \\ -0{,}971 & 3{,}971 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2{,}02 & 0 \\ 0 & 1{,}01 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0{,}8267; \mu_2 = 4.08 \Rightarrow \frac{d\mu_1}{dA_1} \cong \frac{0{,}8267 - 0.842}{0{,}01} = -1{,}53 \Rightarrow \frac{d\omega_1}{dA_1} = \frac{1}{2 * \sqrt{0{,}8267}}\frac{d\mu_1}{dA_1} = \boxed{-0{,}841}$$

Se fosse $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$:

Mas: $\dfrac{d\omega_1}{dA_1} \cong \dfrac{\sqrt{0{,}8267} - \sqrt{0{,}842}}{\Delta A_1} = \boxed{-0.837}$

$$f = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{df}{dA_1} = \frac{d\omega_1}{dA_1}\frac{1}{\omega_2} - \frac{\omega_1}{\omega_2^{\,2}}\frac{d\omega_2}{dA_1} \Rightarrow \mu = \omega_1^{\,2} \Rightarrow 2\omega_1\frac{d\omega_1}{dA_1} = \frac{d\mu}{dA_1} \Rightarrow \frac{d\omega_1}{dA_1} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{d\mu}{dA_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dA_1} = \frac{d\mu}{dA_1}\frac{1}{2\omega_1\omega_2} - \frac{\omega_1}{2\omega_2^{\,3}}\frac{d\mu}{dA_1}$$

Algoritmos Probabilísticos

Limitações dos algoritmos baseados na teoria de Programação Matemática:

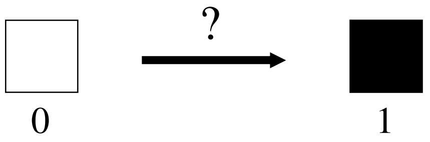
- não garantem que foi obtido o mínimo global (a menos que o problema seja convexo). Devem ser feitas várias tentativas alterando-se o “chute” inicial;
- não permitem lidar com variáveis discretas – informação de derivadas é inútil ou não é definida (espaço de solução disjunto e desconexo); introdução de múltiplos mínimos locais;

Solução ➡ Algoritmos Probabilísticos

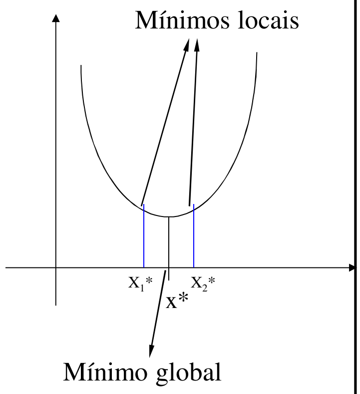
- Maior probabilidade de obter o mínimo global;
- Permitem lidar com váriáveis discretas
- baseados em fenômenos observados na natureza
- processo de busca randômica guiada por decisões probabilísticas

Problema Discreto
17

Como lidar com variáveis discretas?



O problema considerando valores discretos (zero ou um) é mal-posto, ou seja, NÃO apresenta solução. Essencialmente, o que acontece é que a utilização de valores discretos origina múltiplos mínimos locais causando instabilidades numéricas. Isso também origina uma dependência da solução em relação a discretização do problema.



Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Simulated Annealing
18

Algoritmos probabilísticos mais usados:
- "Simulated Annealing"
- Algoritmos Genéticos

"Simulated Annealing" ou Recozimento Simulado

Baseado num fenômeno de mecânica estatística relacioando com o equilíbrio de um grande número de átomos em sólidos e líquidos numa certa temperatura de solidificação de metais ou formação de cristais

Resfriamento rápido ➡ estado sólido pouco estável (átomos assumem posições de mínimos locais de energia potencial na estrutura matricial do metal). Para obter um estado mais estável de energia (mínimo global) ➡ Recozimento: metal é reaquecido até altas temperaturas e resfriado lentamente (átomos tem tempo para encontrar locais de energia potencial mínima globais estáveis)

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Simulated Annealing

Baseado no Algoritmo "Metropólis"

Dado *T* (temperatura) ➡ perturbação randômica da posição do átomo ➡ calcula ΔE:

- Se *ΔE*<0 aceita nova configuração de átomos;
- Se *ΔE*>=0 decisão é baseada na seguinte função probabilística que calcula a probabilidade de aceitação:

$$P(\Delta E) = e^{\left(\frac{-\Delta E}{k_B T}\right)}$$

k_B – constante de Boltzmann

A decisão é obtida escolhendo-se de forma randômica um número ρ em (0,1) e comparando com *P(ΔE):*

Se ρ < *P(ΔE)* ➡ configuração é aceita

Se ρ > *P(ΔE)* ➡ configuração é rejeitada

Simulated Annealing

Note que:

- Se *T* é alto ➡ *P(ΔE)* é próximo de 1;
- Se *T* é próximo de zero *P(ΔE)* é muito pequeno;

Assim a cada temperatura um conjunto de estruturas atômicas seria gerada pela perturbação randômica da posição até que o "equilíbrio térmico" seja atingido (estado estável). A temperatura é reduzida e as iterações são repetidas. Os passos são repetidos iterativamente enquanto a temperatura é reduzida de forma lenta até atingir o mínimo estado de energia.

Analogia com o problema matemático de otimização

Estados de energia ➡ funções objetivo

Configurações dos átomos ➡ variáveis de projeto x

Temperatura T ➡ parâmetro de controle de convergência

Somente valores de função são usados

Simulated Annealing

Desempenho do Método

- Temperatura T_0;
- Atualização de T;
- Número de iterações (combinações de variáveis de projeto) necessárias para atingir o "equilíbrio térmico", antes de reduzir *T*;

} "Cooling Schedule"

Se T_0 é baixo ➡ baixa probabilidade de atingir o mínimo

Escolha de T_0:

$$P(\Delta E) = 0{,}95 = e^{\left(\frac{-\overline{\Delta f}}{T_0}\right)} \Rightarrow T_0 = \frac{\overline{\Delta f}}{\ln(1/0{,}95)}$$

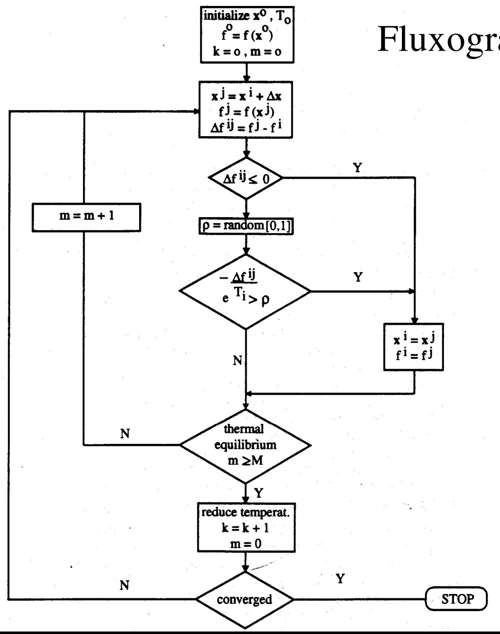
Regras de Atualização da temperatura:

- $T_{k+1} = \alpha T_k \quad k = 0,1,2,\ldots K \quad 0{,}5 \le \alpha \le 0{,}95$
- Dividir $[0,T_0]$ em K passos: $T_k = \dfrac{K-k}{K} T_0 \quad k = 0,1,2,\ldots K$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Simulated Annealing

Fluxograma do Método



Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Algoritmo Genético

Derivados da biologia ➡ Teoria de Darwin (sobrevivência do mais resistente. Ao longo das gerações, características que são úteis para sobrevivência são passadas adiante para os indivíduos sucessores. Essas características são armazenadas na codificação dos cromossomos. Os mecanismos da genética para troca randômica de informações entre os cromossomos dos pais reprodutores são baseadas nas seguintes operações: reprodução, cruzamento, ocasional, mutação e inversão do código cromossômico.

Algoritmos Genéticos simulam os mecanismos da genética natural para solução de problemas de otimização. Código cromossômico é representado por uma “palavra”.As operações envolvem trocas randômicas das localizações de números numa palvra. Utiliza somente o valor da função.

Algoritmo Genético

Representação da combinação de variáveis de projeto palavras de bits que “emulam” os cromossomos. Por exemplo:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{6,5,3,11\} = \underbrace{0110}_{x_1}\underbrace{101}_{x_2}\underbrace{11}_{x_3}\underbrace{1011}_{x_4}$$

Ideal para variáveis discretas ou inteiras, no caso de variáveis contínuas ➡ grande número de bits para representação (depende da precisão desejada). Nesse caso, número m de dígitos binários necessários para representar uma variável x_i num intervalo x^L_i e x^U_i com precisão x^{incr} vale:

$$\{x_i^L \le x_i \le x_i^U\} \Rightarrow 2^m \ge \left(\left(x_i^U - x_i^L\right)/\,x^{incr} + 1\right)$$

Algoritmo Genético

Trabalha com população de palavras (ou cromossomos) e não com um único ponto do espaço de projeto ➡ Implementação com vantagens em computadores paralelos. O resultado do algoritmo genético é uma população de bons projetos ("palavras").

Exemplo de seqüência de operações de um algoritmo genético:

1. Dimensão da população é escolhida e valor das variáveis em cada "palavra" é decidido randomicamente (0s e 1s para os bits).
2. Reprodução: "palavras" com um bom valor de função objetivo são copiadas para formar uma nova população (Teoria de Darwin), ou seja, é aumentada a probabilidade de sua escolha em relação ao resto da população. A nova população terá múltipla cópias dos indívíduos mais resistentes.

Algoritmo Genético

3. Cruzamento: "palavras" da nova população são agrupadas randomicamente em pares para o cruzamento. Um inteiro randômico k é selecionado entre 1 e L-1, onde L é o comprimento da palavra, e então (por exemplo, L=9 e k=5):

$$\begin{array}{l} \text{pai } 1: 01101\|0111 \\ \text{pai } 2: 01001\|0001 \end{array} \quad \text{geram} \quad \begin{array}{l} \text{palavra gerada } 1: 01101\|0001 \\ \text{palavra gerada } 2: 01001\|0111 \end{array}$$

Cruzamento de "um ponto". Outras possibilidades: cruzamento de "dois pontos" e "multi-ponto".

4. Mutação: seleciona uma palavra randomicamente e altera seu valor de 0 para 1 ou vice-versa. Evita uniformidade, ou seja, que hajam muitas palavras iguais na mesma população, o que ocorre no estágio da reprodução. Caso contrário, a chance de encontrar melhores soluções seria reduzida. Efeito no desempenho do algoritmo é secundário (1 mutação em 1000 operações de bit).