

# Sensibilidade em Otimização

1

Objetivo: Calcular as derivadas da função objetivo e restrições em relação às variáveis de projeto

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \Delta x \frac{dF(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2F(x)}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3F(x)}{dx^3} + \dots$$

Permite analisar a mudança do comportamento da estrutura devido a pequenas mudanças de seus parâmetros (dimensões, propriedades de materiais, etc...) com custo menor do que realizar novas análises.

Métodos para o cálculo de sensibilidade

- Diferenças Finitas
- Métodos Semi-analíticos
- Métodos Analíticos

Precisão aumenta

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Cálculo da Sensibilidade

2

### Aproximação por Diferenças Finitas

Séries de Taylor:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u(\xi)}{dx^2} \Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2u(\xi)}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_T(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2u(\xi)}{dx^2}$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{du(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2u(\xi)}{dx^2} \Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2u(\xi)}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_T(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2u(\xi)}{dx^2}$$

=

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{du(x)}{dx} + \frac{\Delta x^3}{3} \frac{d^3u(\xi)}{dx^3} \Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3u(\xi)}{dx^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_T(\Delta x) = -\frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3u(\xi)}{dx^3}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Cálculo da Sensibilidade

3

### Aproximação por Diferenças Finitas

Para n variáveis de projeto:	
Progressiva: $\frac{du}{dx} \cong \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	Requer n análises adicionais
Regressiva: $\frac{du}{dx} \cong \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	Requer n análises adicionais
Central: $\frac{du}{dx} \cong \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	Requer 2n análises adicionais
Altas ordens possuem erro menor mas envolvem mais pontos (custo computacional aumenta)	

Composição do erro em diferenças finitas

- Truncamento:
- Condicionamento (ou arredondamento);

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Aproximação por Diferenças Finitas

4

### Erros em diferenças finitas

**Erro de truncamento:**

- erro de aproximação da fórmula da derivada;
- aumenta com o aumento de  $\Delta x$  ;

**Estimativa:**

Seja a Série de Taylor Progressiva:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 u(\xi)}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 u(\xi)}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_T(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 u(\xi)}{dx^2}$$

Analogamente para a diferença central:

$$e_T(\Delta x) = \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3 u(\xi)}{dx^3}$$

**Erro de condicionamento (ou arredondamento):**

- depende do computador;
- não é uma função contínua;
- diminui com o aumento de  $\Delta x$ ;
- importante em métodos iterativos;

**Estimativa:**

$$e_C(\Delta x) = \frac{2}{\Delta x} \epsilon_u$$

Limite no erro absoluto para o cálculo da função u

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Aproximação por Diferenças Finitas

5

$$\text{Estimativa do erro total: } e = \frac{\Delta x}{2} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right| + \frac{2}{\Delta x} \varepsilon_u$$

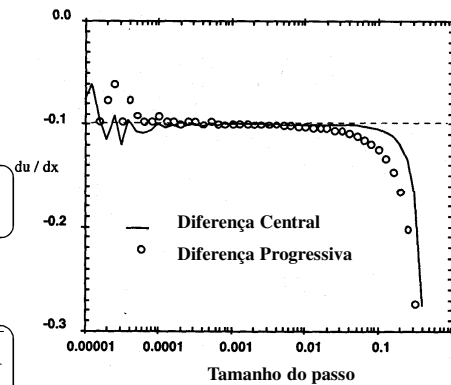
Limite no cálculo da segunda derivada

Dilema no tamanho do passo  $\Delta x$

$\Delta x$  grande  $\rightarrow$  predomina erro de truncamento

$\Delta x$  pequeno  $\rightarrow$  predomina erro de condicionamento

$$e = 0 \Rightarrow \Delta x_{\text{opt}} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_u}{|S_b|}}$$



Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Aproximação por Diferenças Finitas

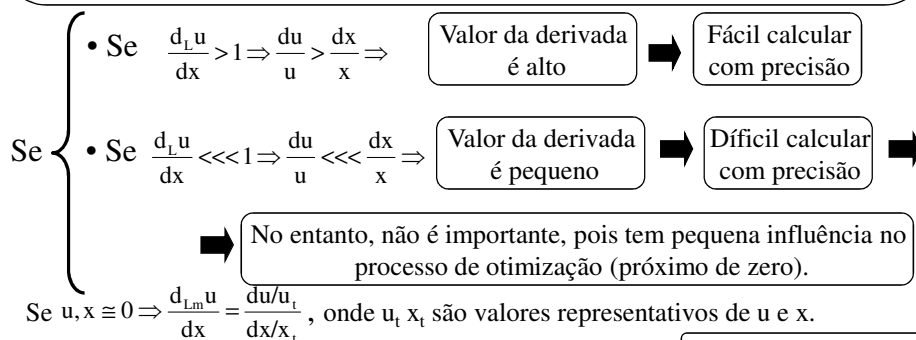
6

Efeito da magnitude da derivada na precisão.

Pequenas derivadas são calculadas com menos precisão do que grandes derivadas. A magnitude da derivada pode ser estimada pela expressão abaixo denominada derivada logarítmica:

$$\frac{d_L u}{dx} = \frac{d(\log u)}{d(\log x)} = \frac{du/u}{dx/x}$$

fornece a variação percentual de  $u$  devido à variação percentual de  $x$ .



Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

7

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_1, x_2} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\ \text{tal que} \quad & g(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1 x_2^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Assim: } f(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_2^2} + x_2 \Rightarrow \frac{df}{dx_2} = -\frac{2}{x_2^3} + 1$$

Calculando a derivada em dois pontos temos:

$$\text{Em } x_2 = 1 \quad (\Delta x_2 = 0,01) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x_2} = \frac{1/1,01^2 + 1,01 - 2}{0,01} = -0,97$$

$$3\% \text{ em relação ao valor exato } \frac{df}{dx_2} = -1,0$$

$$\begin{aligned} \text{Em } x_2 = 1,29 \quad (\Delta x_2 = 0,01) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x_2} = \\ = \frac{1/1,3^2 + 1,3 - (1/1,29^2 + 1,29)}{0,01} = -0,0791 \end{aligned}$$

$$16\% \text{ em relação ao valor exato } \frac{df}{dx_2} = -0,0683$$

Derivadas logarítmicas:

$$\begin{aligned} \text{Em } x_2 = 1 \Rightarrow f = 2 \Rightarrow \frac{d_L f}{dx_2} = \frac{\Delta f}{\Delta x_2} \frac{x_2}{f} = \\ = -0,97 \times 1/2 = -0,485 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Em } x_2 = 1,29 \Rightarrow f = 1,891 \Rightarrow \frac{d_L f}{dx_2} = \\ = \frac{\Delta f}{\Delta x_2} \frac{x_2}{f} = -0,0791 \times 1,29/1,891 = \\ = -0,054 \end{aligned}$$

Muito pequena, indicando pouca precisão no cálculo, como verificado.

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Métodos Analíticos

8

Seja a equação de equilíbrio:  $\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{F}$  onde:  $\mathbf{u}$  - vetor de deslocamentos nodais;  $\mathbf{K}$  - matriz de rigidez;  $\mathbf{F}$  - vetor de carga; Considerando uma função  $f(\mathbf{u}, x)$  que dependa de  $\mathbf{u}$  e  $x$  (variável de projeto), temos que a sensibilidade de  $f$  é dada por:

$$\frac{df}{dx} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{Parte explícita (geralmente zero)}} + \underbrace{\mathbf{z}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx}}_{\text{Parte implícita}} \quad \text{onde: } \mathbf{z} = \nabla f \left( z_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \right)$$

Exemplo: Seja  $\mathbf{u}^T = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)$  e

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, x) = xu_1 + u_2^2 - \ln(u_3) + x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u_1 + 2x; \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \partial f / \partial u_1 \\ \partial f / \partial u_2 \\ \partial f / \partial u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 2u_2 \\ -1/u_3 \end{Bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \begin{Bmatrix} du_1/dx \\ du_2/dx \\ du_3/dx \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{z}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx} = u_1 + 2x + x \frac{du_1}{dx} + 2u_2 \frac{du_2}{dx} - \frac{1}{u_3} \frac{du_3}{dx} \end{aligned}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Métodos Analíticos

9

Para obter  $\frac{du}{dx}$  existem dois métodos clássicos:

### Método Direto

Resolvido para  
cada variável  
de projeto

$$\mathbf{K} \frac{du}{dx} = \frac{dF}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{dF}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}^T \frac{du}{dx} = \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{dF}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \right) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{dF}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \right)$$

Mais eficiente quando: n° variáveis de projeto < n° de restrições (funções)

### Método Adjunto

Resolvido para  
função objetivo e  
cada restrição

$$\mathbf{K} \lambda = \mathbf{z} \Rightarrow \lambda = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{z} \Rightarrow \lambda^T = \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{-1} \quad (\mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}^{-1})^T)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{z}^T \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{dF}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \right) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \left( \frac{dF}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \right)$$

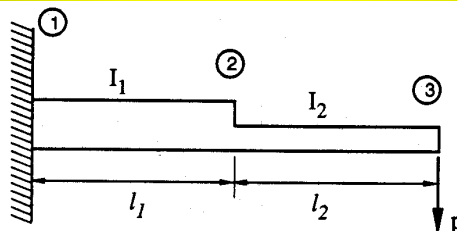
Mais eficiente quando: n° variáveis de projeto > n° de restrições

Função Multiobjetivo  $\Rightarrow$  Método Adjunto

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

10



Restrição de deslocamento na ponta:  $g = c - w_3 \geq 0$ ; Calcular  $\frac{dg}{dI_1}$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \text{ onde:}$$

$$\mathbf{K} = E \begin{bmatrix} 12(I_1/l_1^3 + I_2/l_2^3) & -6(I_1/l_1^2 - I_2/l_2^2) & -12I_2/l_2^3 & 6I_2/l_2^2 \\ 4(I_1/l_1 + I_2/l_2) & -6I_2/l_2^2 & 2I_2/l_2 & 2I_2/l_2 \\ \text{sim.} & 12I_2/l_2^3 & -6I_2/l_2^2 & 4I_2/l_2 \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} p \\ E \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1^3/3I_1 + l_1^2 l_2/2I_1 \\ l_1^2/2I_1 + l_1 l_2/I_1 \\ (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2)/3I_1 + l_2^3/3I_2 \\ l_1^2/2I_1 + l_1 l_2/I_1 + l_2^2/I_2 \end{Bmatrix}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

11

### 1º Método: Método Direto

$$\begin{aligned}
 g = c - w_3 \geq 0 &\Rightarrow \frac{dg}{dI_1} = \frac{\partial g}{\partial I_1} + \mathbf{z}^T \frac{d\mathbf{u}}{dI_1} = \mathbf{z}^T \frac{d\mathbf{u}}{dI_1}; \quad \frac{d\mathbf{u}}{dI_1} = \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{d\mathbf{F}}{dI_1} - \frac{d\mathbf{K}}{dI_1} \mathbf{u} \right); \quad \frac{d\mathbf{F}}{dI_1} = \mathbf{0}; \\
 \frac{d\mathbf{K}}{dI_1} &= \begin{pmatrix} \frac{E}{l_1^3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -6l_1 & 0 & 0 \\ -6l_1 & 4l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{K}}{dI_1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{E}{l_1^3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 12w_2 - 6l_1\theta_2 \\ -6l_1w_2 + 4l_1^2\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{I_1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dI_1} &= -\mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{dI_1} \mathbf{u} = -\frac{p}{EI_1^2} \begin{bmatrix} l_1^2 l_2 / 2 + l_1^3 / 3 \\ l_1 l_2 + l_1^2 / 2 \\ l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + l_1^3 / 3 \\ l_1 l_2 + l_1^2 / 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \partial g / \partial w_2 \\ \partial g / \partial \theta_2 \\ \partial g / \partial w_3 \\ \partial g / \partial \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dg}{dI_1} &= \mathbf{z}^T \frac{d\mathbf{u}}{dI_1} = \frac{p}{EI_1^2} \left( l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + \frac{l_1^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

12

### 2º Método: Método Adjunto

$$\begin{aligned}
 g = c - w_3 \geq 0 &\Rightarrow \frac{dg}{dI_1} = \frac{\partial g}{\partial I_1} + \lambda^T \left( \frac{d\mathbf{F}}{dI_1} - \frac{d\mathbf{K}}{dI_1} \mathbf{u} \right); \quad \frac{d\mathbf{F}}{dI_1} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{K}\lambda = \mathbf{z} \Rightarrow \lambda = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= -\left( \frac{1}{E} \right) \begin{bmatrix} l_1^3 / 3I_1 + l_1^2 l_2 / 2I_1 \\ l_1^2 / 2I_1 + l_1 l_2 / I_1 \\ (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2) / 3I_1 + l_2^3 / 3I_2 \\ l_1^2 / 2I_1 + l_1 l_2 / I_1 + l_2^2 / I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{dg}{dI_1} = -\lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{dI_1} \mathbf{u} = \frac{p}{EI_1^2} \left( l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + \frac{l_1^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

### 3º Método: Derivação da expressão de $w_3$

$$w_3 = \frac{p}{3EI_1} \left( l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2 \right) + \frac{pl_2^3}{3EI_2} \Rightarrow \frac{dw_3}{dI_1} = -\frac{dw_3}{dI_1} = \frac{p}{EI_1^2} \left( \frac{l_1^3}{3} + l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 \right)$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

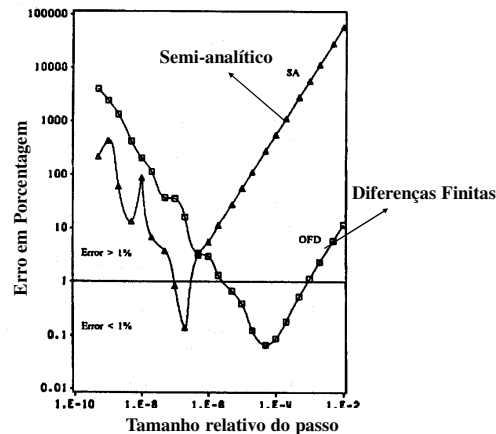
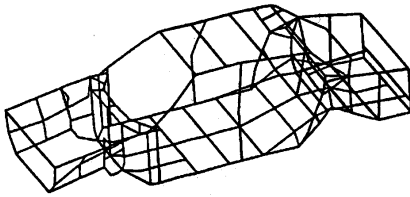
## Métodos Semi-Analíticos

13

Somente a derivada da matriz rigidez é aproximada por diferenças finitas:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dx} \cong \frac{\mathbf{K}(x + \Delta x) - \mathbf{K}(x)}{\Delta x}$$

Problema de precisão:



Em algumas situações, a aproximação por diferenças finitas no cálculo da sensibilidade é mais precisa do que o método semi-analítico para altos  $\Delta x$ .

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Métodos Semi-Analíticos

14

Explicação (considere o problema anterior)

Calculando  $\frac{dg}{dI_1}$  por diferenças finitas: erro de truncamento da série de Taylor

$$\frac{dg}{dI_1} \cong \frac{w_3(I_1 + \Delta I_1) - w_3(I_1)}{\Delta I_1} \Rightarrow e_T = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial I_1^2} \frac{\Delta I_1}{2} = -\frac{p}{3EI_1^3} (l_1^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2) \Delta I_1 \Rightarrow \boxed{e_T = -\frac{\Delta I_1}{I_1} \frac{dg}{dI_1}}$$

e para  $\frac{dg}{dl_1}$  o erro vale:  $e_T = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial l_1^2} \frac{\Delta l_1}{2} = -\frac{p}{EI_1} (l_1 + l_2) \Delta l_1 \Rightarrow \boxed{e_T = -\frac{\Delta l_1}{l_1 + l_2} \frac{dg}{dl_1}}$

Pelo método semi-analítico:

$$\frac{dg}{dI_1} \cong \lambda^T \frac{\mathbf{K}(I_1 + \Delta I_1) - \mathbf{K}(I_1)}{\Delta I_1} \mathbf{u} \Rightarrow \boxed{e_T = \frac{\Delta I_1}{2} \lambda^T \frac{d^2 \mathbf{K}}{dI_1^2} \mathbf{u} = 0}$$

Uma vez que  $\mathbf{K}$  é função linear de  $I_1$

Mas para  $\frac{dg}{dl_1}$ :  $e_T = \frac{\Delta l_1}{2} \lambda^T \frac{d^2 \mathbf{K}}{dl_1^2} \mathbf{u} = \frac{p \Delta l_1}{EI_1 l_1} (3l_1^2 + 7l_1 l_2 + 4l_2^2) \Rightarrow \boxed{e_T = -\frac{(3l_1^2 + 7l_1 l_2 + 4l_2^2) \Delta l_1}{(l_1 + l_2)^2} \frac{dg}{dl_1}}$

Se por exemplo  $l_1 = l_2 = l \Rightarrow \boxed{e_T^{SA} = \frac{7\Delta l}{2l} \text{ e } e_T^{DF} = \frac{\Delta l}{2l}}$

Assim, nesse caso o erro do semi-analítico é 7 vezes maior do que por diferenças finitas!!

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Sensibilidade de Autovalores e Autovetores

15

Considere o problema de autovetor e autovalor:

$$(\underbrace{\mathbf{K}}_{\text{autovalor}} - \underbrace{\mu \mathbf{M}}_{\text{autovetor}}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\mu = \omega^2) \text{ e } \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = 1$$

Objetivo é encontrar:  $\frac{d\mu}{dx_i}$  e  $\frac{d\mathbf{u}}{dx_i}$

Derivando as equações acima:

$$(\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} - \frac{d\mu}{dx_i} \mathbf{M} \mathbf{u} = - \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \right) \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = 1 \Rightarrow \mathbf{u}^T \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \mathbf{u} \quad (2)$$

Pré-multiplicando (1) por  $\mathbf{u}^T$ :

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} - \frac{d\mu}{dx_i} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = - \mathbf{u}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \right) \mathbf{u} \Rightarrow \frac{d\mu}{dx_i} = \frac{\mathbf{u}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \right) \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}$$

Sensibilidade de um autovalor

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

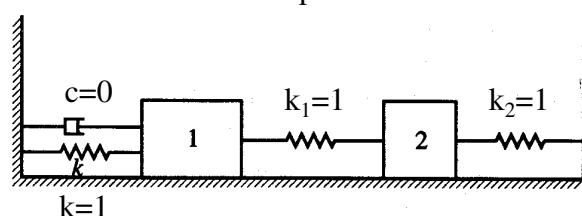
## Sensibilidade de Autovalores e Autovetores

16

A sensibilidade dos autovetores é obtida combinando-se as equações (1) e (2) e resolvendo o sistema:

$$\text{Singular} \rightarrow \begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) & -\mathbf{M} \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \\ \frac{d\mu}{dx_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \right) \mathbf{u} \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \mathbf{u} \end{Bmatrix}$$

Exemplo



Calcular a sensibilidade da primeira frequência de ressonância e modo de vibrar em relação ao valor de k.

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva



## Exemplo

17

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1+k & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\omega^2 & -1 \\ -1 & 2-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = 1 \text{ e } \omega_2 = \sqrt{3}$$

Para o primeiro modo de vibrar:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0 \\ -u_1 + u_2 &= 0 \end{aligned} \text{ e } \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{M}' = \mathbf{0}$$

Assim, a sensibilidade da primeira frequência vale:  $\frac{d(\omega^2)}{dx_i} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}' \mathbf{u} = 0,5$

Sensibilidade do primeiro modo de vibrar:

$$(\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{M} \mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; -(\mathbf{K}' - \mu \mathbf{M}') \mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M}' \mathbf{u} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}/2 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \mu' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/8 \\ \sqrt{2}/8 \end{Bmatrix}; \mu' = 1/2$$

Deve se tomar cuidado quando o autovalor for repetido (possue multiplicidade)

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Sensibilidade de Autovalores e Autovetores

18

Sensibilidade da frequência de ressonância considerando o amortecimento

Com o amortecimento, o problema fica:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} e^{\eta t} \Rightarrow (\eta^2 \mathbf{M} + \eta \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\eta = i\omega)$$

A sensibilidade agora vale:

$$\frac{d\eta}{dx_i} = - \frac{\eta^2 \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx_i} \mathbf{u} + \eta \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{C}}{dx_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}}{2\eta \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}}$$

### Exemplo

Considerando o problema anterior, estimar a variação da frequência de ressonância de um sistema não amortecido pela adição de amortecimento ( $c=0,2$  e  $c=1,0$ ) e comparar com o valor exato:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{0}; \mathbf{K}' = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{C} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d(i\omega)}{dx_i} = - \frac{\eta \phi^T \frac{d\mathbf{C}}{dx_i} \phi}{2\eta \phi^T \mathbf{M} \phi} = - \frac{\phi^T \frac{d\mathbf{C}}{dx_i} \phi}{2\phi^T \mathbf{M} \phi} \text{ e } \phi = \sqrt{2}/2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

19

Variável de projeto  $x_i=c$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{C}}{dc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ e } \phi^T \mathbf{M} \phi = 1 \Rightarrow \frac{d\eta}{dc} = -0,5 \phi^T \frac{d\mathbf{C}}{dc} \phi = -0,25$$

Mas sendo:

$$\omega_1 = 1 \Rightarrow \eta = i \Rightarrow \eta_a = \eta|_{c=0} + \frac{d\eta}{dc}(c-0) = i - 0,25c \Rightarrow \begin{cases} c = 0,2 \Rightarrow \eta_a = i - 0,05 \\ c = 1,0 \Rightarrow \eta_a = i - 0,25 \end{cases}$$

Valores exatos:

$$\begin{bmatrix} \eta^2 + \eta c + 2 & -1 \\ -1 & \eta^2 + 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0,2 \Rightarrow \eta_1 = 1,0013i - 0,05025 \\ c = 1,0 \Rightarrow \eta_1 = 1,0326i - 0,29178 \end{cases}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Sensibilidade da Solução Ótima

20

Seja o problema de otimização:

$$\text{Min}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p)$$

$$\text{tal que } g_j(\mathbf{x}, p) \geq 0, \quad j=1, \dots, n_g$$

Cuja solução é  $\mathbf{x}^*(p) \Rightarrow f^*(p) = f(\mathbf{x}^*(p), p)$

O objetivo é encontrar  $\frac{df^*}{dp}$  e  $\frac{dg^*}{dp}$ .

As equações que governam a solução ótima são:

• equação de estacionaridade:

$$\nabla f - \mathbf{N}\lambda = 0 \text{ e } n_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad j=1 \dots r \text{ e } i=1 \dots n$$

• restrições ativas:  $\mathbf{g}_a(\mathbf{x}^*, p) = 0$

Conjunto de r  
restrições ativas

Satisfeitas por  $\mathbf{x}^*(p)$   
para todos os  
valores de p  
que não alterem as  
restrições ativas

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Sensibilidade da Solução Ótima

21

Diferenciando as equações com relação à  $p$  tem-se:

$$\frac{d(\nabla f - \mathbf{N}\lambda)}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\nabla f)}{\partial p} + \frac{d(\nabla f)}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} - \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial p} + \frac{d\mathbf{N}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} \right) \lambda + \mathbf{N} \frac{d\lambda}{dp} = 0 \Rightarrow$$

$$\left( \mathbf{A} - \mathbf{Z} \right) \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} - \mathbf{N} \frac{d\lambda}{dp} + \frac{\partial(\nabla f)}{\partial p} - \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial p} \right) \lambda = 0$$

Matrix Hessiana

onde:  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ;  $z_{kl} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_k \partial x_l} \lambda_j$

$$\frac{d\mathbf{g}_a(\mathbf{x}^*, p)}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p} + \left( \frac{d\mathbf{g}_a}{d\mathbf{x}} \right)^T \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} = 0 \Rightarrow \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} + \frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p} = 0$$

Resolvendo o sistema de equações acima obtém-se  $\frac{d\mathbf{x}^*}{dp}$  e  $\frac{d\lambda}{dp}$ .

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Sensibilidade da Solução Ótima

22

Assim, pode-se obter a derivada  $\frac{df^*}{dp}$ :

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i^*}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + (\nabla f)^T \frac{d\mathbf{x}^*}{dp}; \text{ mas: } (\nabla f)^T = \lambda^T \mathbf{N}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \lambda^T \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} \Rightarrow \frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p}$$

Por exemplo, se  $g_j(\mathbf{x}) = G_j(\mathbf{x}) - p \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial g_j}{\partial p} = -1 \Rightarrow \frac{df}{dp} = \lambda_j$

Assim,  $\lambda_j$  é o preço que se paga em termos de aumento de  $f$  por tornar mais difícil de satisfazer  $g_j$ . Por isso,  $\lambda_j > 0$  caso contrário ( $\lambda_j < 0$ ) a função  $f$  seria reduzida (otimizada) quando a restrição se torna mais difícil de ser satisfeita (um absurdo). Portanto,  $\lambda_j$  representa o “preço” das restrições.

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

23

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1, x_2, x_3$$

$$\text{tal que } g_1 = p - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2 = x_3 - 4 \geq 0$$

$$g_3 = x_2 + p \geq 0$$

Para  $p=8$ :

$$\mathbf{x}^* = (-2, -2, 4)^T \Rightarrow f = 0; \quad g_1 = 0; g_2 = 0;$$

$$\lambda^T = (0, 25; 1)$$

restrições ativas

Encontrar  $\frac{d\mathbf{x}^*}{dp}$  e  $\frac{df}{dp}$ .

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{df}{dp} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p} = -0,25; \quad \text{Além disso: } \mathbf{A} = \mathbf{0}; \nabla f = (1, 1, 1)^T \Rightarrow \frac{\partial \nabla f}{\partial p} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -2x_1 & 0 \\ -2x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial p} = \mathbf{0}; \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{11} = -2\lambda_1 = -0,5; \quad z_{22} = -2\lambda_1 = -0,5; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{Z}) \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} - \mathbf{N} \frac{d\lambda}{dp} + \frac{\partial(\nabla f)}{\partial p} - \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial p} \right) \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0,5\dot{x}_1 - 4\dot{\lambda}_1 = 0 \\ 0,5\dot{x}_2 - 4\dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \end{cases}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

## Exemplo

24

$$\mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} + \frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 1 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema de equação é:  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -0,125$ ;  $\dot{x}_3 = 0$ ;  $\dot{\lambda}_1 = -0,0156$ ;  $\dot{\lambda}_2 = 0$

Variando  $p$  de 8 para 9  $\Rightarrow x_1 = x_2 = -2,121$ ;  $x_3 = 4$ ;  $f = -0,242$ ;

Pela extrapolação ( $\Delta p = 1$ )  $\Rightarrow x_1 = x_2 = -2,125$ ;  $x_3 = 4$ ;  $f = -0,25$ ;

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

# Problemas Clássicos

25

## Minimização da Flexibilidade

flexibilidade

$$\begin{aligned} &\text{Min}_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \quad \mathbf{u}^T \mathbf{F} \\ &\text{tal que} \quad \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \text{ (e condições de contorno)} \\ &\quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\min} \geq 0 \\ &\quad V - V_{\max} \leq 0 \end{aligned}$$

Considerando a equação de equilíbrio:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{F} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\text{Min}_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} \\ &\text{tal que} \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\min} \geq 0 \\ &\quad V - V_{\max} \geq 0 \end{aligned}$$

## Sensibilidade da Flexibilidade

$$\begin{aligned} C = \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} &\Rightarrow \frac{dC}{dx_i} = \frac{d\mathbf{u}^T}{dx_i} \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i}; \text{ mas: } \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d(\mathbf{K}\mathbf{u})}{dx_i} = \\ &= \frac{d\mathbf{F}}{dx_i} \Rightarrow \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = \frac{d\mathbf{F}}{dx_i} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = -\frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dC}{dx_i} = -\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \Rightarrow \boxed{\frac{dC}{dx_i} = -\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}} \end{aligned}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva