Otimização Usando Cálculo Variacional

Um **Funcional** (J) é definido como:

$$J(y(x)) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx \quad \text{onde:} \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$$

e: $y(a)=y_a$; $y(b)=y_b$ ➡ condições de contorno cinemáticas (problema de "extremidades fixas")

Muitas leis físicas são formuladas como extremos de um funcional.

Ex.:equilíbrio de uma estrutura ➡ mínima energia potencial

<u>Problema</u>: Encontrar uma função apropriada que minimize (ou maximize) o funcional ➡ objetivo do **Cálculo Variacional**

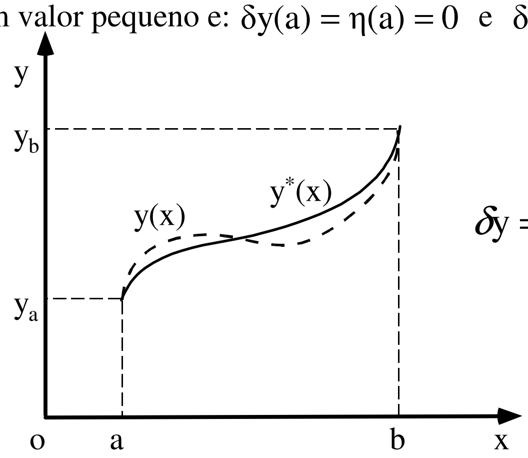
Aplicações do Cálculo Variacional: Teoria de Otimização, Formulação do MEF, Mecânica Analítica, etc...

Otimização Usando Cálculo Variacional

Solução: Seja $y^*(x)$ a função que minimize o funcional J e satisfaça $y^*(a)=y_a$ e $y^*(b)=y_b$. Podemos escrever que:

$$y(x) = y^*(x) + \varepsilon\eta(x) = y^*(x) + \varepsilon\delta y$$

onde ε tem valor pequeno e: $\delta y(a) = \eta(a) = 0$ e $\delta y(b) = \eta(b) = 0$



$$\delta y = \bar{y}(x) - y^*(x)$$

Otimização Usando Cálculo Variacional

Portanto:

$$J(\varepsilon) = J(y(x,\varepsilon)) = \int_a^b F\Big(x, \underbrace{y^* + \varepsilon\eta}_{y}, \underbrace{y'^* + \varepsilon\eta'}_{y'}\Big)dx$$

A condição necessária para que o extremo de J, ou o mínimo de J ocorra em ε=0 é:

$$\delta J\big|_{y=y^*} = \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\varepsilon}\right]\bigg|_{\varepsilon=0} dx =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\bigg|_{\varepsilon=0} dx = 0$$

Operador variacional $\delta \equiv$ Operador diferencial *d*

Propriedade: $$\frac{d(\delta y)}{dx} = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \delta y'$$

Otimização Usando Cálculo Variacional

Integrando por partes:

$$\delta J\big|_{y=y^*} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\bigg|_{\varepsilon=0} \delta y dx + \boxed{\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_a^b} = 0$$

Nulo, pois: $\delta y(b) = \delta y(a) = 0$

Assim:

$$\delta J\big|_{y=y^*} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\bigg|_{\varepsilon=0} \delta y dx = 0$$

Mas como δy é arbitrário:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$

Equação de Euler-Lagrange

Otimização Usando Cálculo Variacional

5

Se $\delta y(b) \neq 0$ e $\delta y(a) \neq 0$ então devemos ter:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=a} = 0 \quad e \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=b} = 0$$ "Condições de Contorno Naturais"

Casos mais genéricos:

• Funcional com derivadas de alta ordem:

$$J(y(x)) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x), y''(x)..., y^{(n)}(x)\right)dx$$

e:

$$y(a) = y_a; y'(a) = y'_a; y''(a) = y''_a; ...; y^{(n-1)}(a) = y_a^{(n-1)}$$

$$y(b) = y_b; y'(b) = y'_b; y''(b) = y''_b; ...; y^{(n-1)}(b) = y_b^{(n-1)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0}$$

Equação de Euler-Lagrange

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Otimização Usando Cálculo Variacional

6

• Funcional com várias funções incógnita: $\mathbf{y}(x)=\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}^T$

$$J(\mathbf{y}(x)) = \int_a^b F\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}''(x)..., \mathbf{y}^{(n)}(x)\right)dx$$

e: $$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a; \mathbf{y}'(a) = \mathbf{y}'_a; \mathbf{y}''(a) = \mathbf{y}''_a; ...; \mathbf{y}^{(n-1)}(a) = \mathbf{y}_a^{(n-1)}$$

$$\mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_b; \mathbf{y}'(b) = \mathbf{y}'_b; \mathbf{y}''(b) = \mathbf{y}''_b; ...; \mathbf{y}^{(n-1)}(b) = \mathbf{y}_b^{(n-1)}$$

$$\boxed{\nabla_y F - \frac{d}{dx}\left(\nabla_{y'} F\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\nabla_{y''} F\right) + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\nabla_{y^{(n)}} F\right) = 0}$$

onde:

$$\nabla_y F = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial y_m}\right)^T$$

Equação de Euler-Lagrange

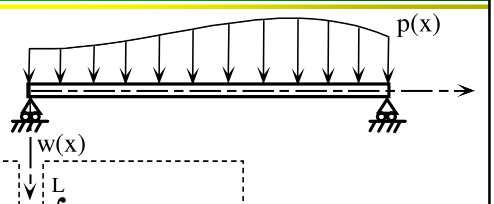
• Funcional com função incógnita de variáveis múltiplas:

$$J(w(x,y)) = \iint_\Omega F\left(x, y, w(x,y), w_x(x,y), w_y(x,y)\right)dxdy$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Exemplo

Equação de uma viga:



No equilíbrio:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L p(x)w(x)dx$$

Energia Potencial **Energia Elástica** **Trabalho Externo**

$$\delta\Pi\Big|_{w=w^*} = 0 \Rightarrow \delta\Pi = \int_0^L EIw''\delta w''dx - \int_0^L p\delta w dx = \int_0^L (EIw'')''\delta w dx +$$

$$-\int_0^L p\delta w dx + EIw''\delta w'\Big|_0^L - (EIw'')'\delta w\Big|_0^L = 0$$

Sendo δw arbitrário (mas admissível): $\boxed{(EIw'')'' = p(x)}$ **Equação da viga**

e para $x = 0, L$ $\begin{cases} EIw'' = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w' = 0 \\ (EIw'')' = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w = 0 \end{cases}$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Otimização Usando Cálculo Variacional

Restrições ➡ Multiplicadores de Lagrange

•Restrição Integral:

$$\int_a^b g[y(x)]dx = c \Rightarrow \quad L = J + \lambda\left[\int_a^b g[y(x)]dx - c\right]$$

• Restrição ponto-a-ponto ("point-wise"):

$$h_i\left(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_p, \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y_p}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad i = 1,\ldots,m \Rightarrow$$

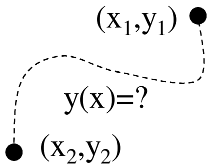
$$\Rightarrow L = \int_v \left(f + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{x})h_i\right)dv$$

• Nota: $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\mathbf{x})h_i\Delta v_i \Rightarrow \int_v \lambda_i(\mathbf{x})h_i dv$

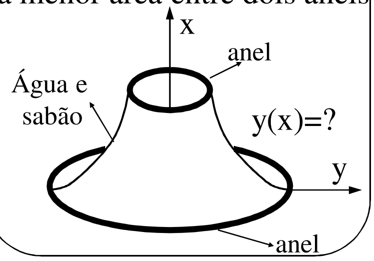
Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Problemas Variacionais Clássicos

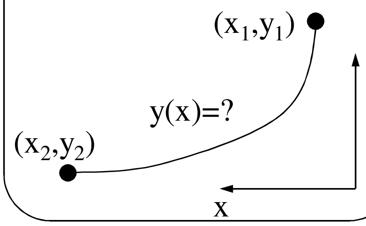
Arco de menor comprimento conectando dois pontos



Superfície de revolução com a menor área entre dois anéis



Problema “Brachistochrone”



Problema de “Dido” - Encontrar a equação da curva que circunda a maior área;

Princípio de Hamilton: “Equação de Lagrange de Movimento”

Equação de Euler Lagrange

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\, y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Casos Especiais

Caso 1:
Se $F = F(y')$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$

então: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' = 0$

$\boxed{y'' = 0}$

Caso 3:
Se $F = F(x, y)$

então: $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = 0}$

Caso 2:
Se $F = F(x, y')$
então: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y'} = C \text{ (constante)}}$

Caso 4:
Se $F = F(y, y')$

então: $\boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad \text{(constante)}}$

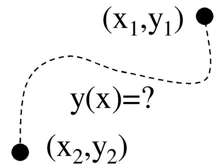
$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = \frac{\partial F}{\partial x}$$

Problemas Variacionais Clássicos

Arco de menor comprimento conectando dois pontos

$$J(y)=\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx}_{} \qquad y(x_1)=y_1;\; y(x_2)=y_2$$

ds - "comprimento de arco"



$\underset{y(x)}{\text{Min}}\; J(y)$ ➡ $\delta J(y)=0$

Equação de Euler-Lagrange:

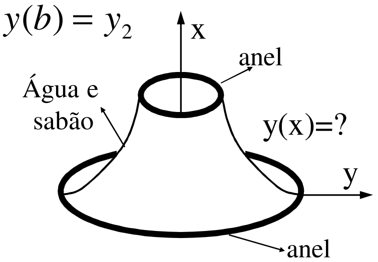
$$y''=0 \Rightarrow y=\frac{(y_2-y_1)(x-x_1)}{(x_2-x_1)}+y_1$$

Equação de uma reta!!

Problemas Variacionais Clássicos

Superfície de revolução com a menor área entre dois anéis

$$J(y)=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad y(a)=y_1;\; y(b)=y_2$$



$\underset{y(x)}{\text{Min}}\; J(y)$ ➡ $\delta J(y)=0$

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}-y\sqrt{1+(y')^2}=C_1 \Rightarrow -y=C_1\sqrt{1+(y')^2} \Rightarrow C_1\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=C_1\cosh\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right)};\ \text{onde}: \cosh x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$$

Equação da curva "Catenária"

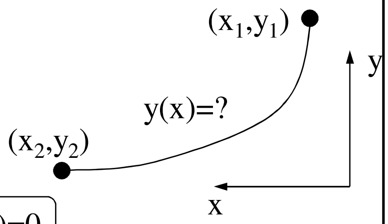
Problemas Variacionais Clássicos

Problema “Brachistochrone” - Qual a curva entre dois pontos que faz com que uma partícula, sujeita a força peso, percorra o caminho entre esses dois pontos no menor tempo possível?

Tempo

$$\mathrm{T}=\int_0^T dt \Rightarrow \int_0^L \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v}\,dx$$

$$y(x_1)=y_1;\ \ y(x_2)=y_2$$



$$\boxed{\min_{y(x)}\ T(y)} \Rightarrow \boxed{\delta T(y)=0}$$

Da conservação de energia:

$$\frac{1}{2}mv^2+mgy=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}+mgy_1 \Rightarrow v=\sqrt{2g(y_1-y)+v_0^{\ 2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{2g(k-y)};\ \mathrm{k}=\mathrm{y}_1+\frac{v_0^{\ 2}}{2g}$$

Problemas Variacionais Clássicos

Portanto: $\mathrm{T}=\dfrac{1}{\sqrt{2g}}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{k-y}}\,dx$

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{k-y}}-\frac{(y')^2}{\sqrt{k-y}\sqrt{1+(y')^2}}=C \Rightarrow (k-y)\left[1+(y')^2\right]=\frac{1}{C^2}=C_1 \Rightarrow$$

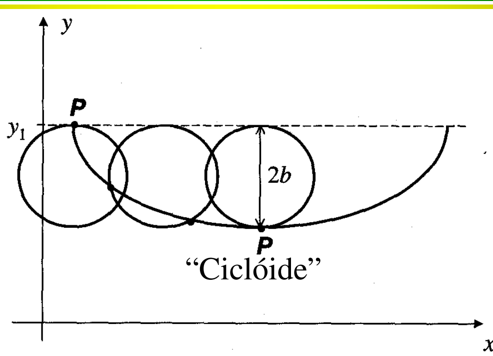
$$\Rightarrow dx=-\frac{\sqrt{k-y}}{C_1-(k-y)}dy;\ \ k-y=C_1\sin^2\alpha \Rightarrow dx=C_1(1-\cos 2\alpha)d\alpha \Rightarrow$$

$$x(\alpha)=\frac{1}{2}C_1(2\alpha-\sin 2\alpha)+C_2;\ \ \ y(\alpha)=k-C_1\sin^2\alpha$$

Mudança de variáveis:

$$\underbrace{x(\theta)=a+b(\theta-\sin\theta)\ \text{ e }\ y(\theta)=y_1+\frac{v_0^{\ 2}}{2g}-b(1-\cos\theta)}_{\text{Equação de uma curva “ciclóide”}}$$

Problemas Variacionais Clássicos



$$\frac{v^2}{2} = 2g(k-y) \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{g}{4b}\left(s_0^{\,2} - s^2\right) \Rightarrow \quad \mathrm{T} = \int_0^T dt \Rightarrow \int_0^L \frac{ds}{v} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{b}{g}}\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{s_0^{\,2} - s^2}} \Rightarrow \boxed{T = \pi\sqrt{\frac{b}{g}}}$$

Portanto período independe do ponto inicial: "tautocronismo"

"Pêndulo Cicloidal"

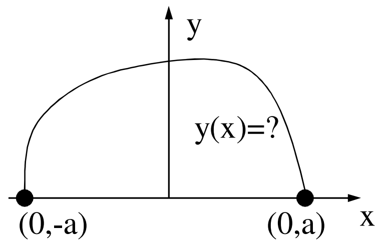
Problemas Variacionais Clássicos

Problemas Isoperimétricos

Problema de "Dido" - Encontrar a equação da curva com comprimento limitado que circunda a maior área;

Área $\mathrm{I(y)} = \int_{-a}^{a} y\,\mathrm{dx}$ $\quad y(-a) = 0;\ \ y(a) = 0$

Comprimento da curva $\quad \mathrm{J(y)} = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{dx}$



Min I(y)
y(x)
tal que J(y)=πa

➡

Min I(y)+λJ(y)
y(x)

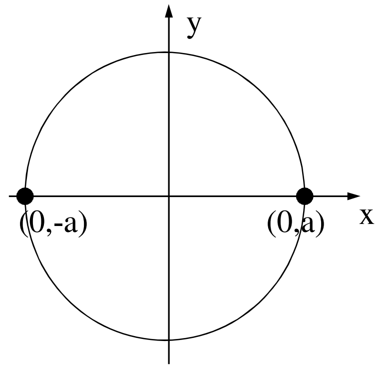
Problemas Variacionais Clássicos

17

Equação de Euler-Lagrange:

$$1+\lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]=0 \Rightarrow \underbrace{\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}}_{\text{Curvatura = cte.}}=-\frac{1}{\lambda} \Rightarrow x^2+(y-C)^2=a^2$$

Equação de um círculo!!



Problemas Variacionais Clássicos

18

Princípio de Hamilton

Equilíbrio dinâmico:

$$\underset{\mathbf{q}}{\text{Min}}\ \text{I(y)} \qquad \text{I(y)}=\int_{t_1}^{t_2} L\text{dt}=\int_{t_1}^{t_2}(\text{T - V})\text{dt} \Rightarrow \delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2} L\text{dt}=0$$

Coordenadas generalizadas

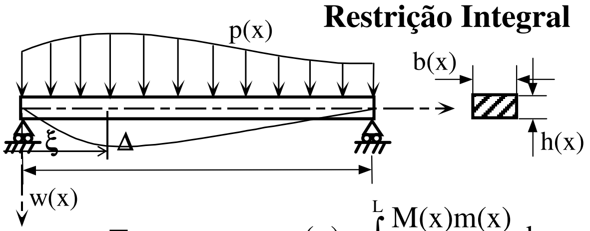
Equação de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=0, \quad j=1,2,\ldots,m}$$

"Equação de Lagrange de Movimento"

Exemplo

Restrição Integral



$$\underset{A(x)}{\text{Min}} \; V = \int_0^L A(x)dx$$

tal que $w(\varepsilon) - \Delta = 0$

Temos que: $w(\varepsilon) = \int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI(x)} dx$

Portanto: $L(A,\lambda) = \int_0^L A(x)dx + \lambda\left[\int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI(x)} dx \text{ - } \Delta\right]$

$$I(x) = \alpha[A(x)]^n \begin{cases} n = 1 \Rightarrow I = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{h^2}{12} bh = \dfrac{h^2}{12} A \\ n = 2 \Rightarrow I = \dfrac{h}{12b}(bh)^2 = \dfrac{h}{12b} A^2 \\ n = 3 \Rightarrow I = \dfrac{1}{12b^2}\left(b^3 h^3\right) = \dfrac{1}{12b^2} A^3 \end{cases}$$

Exemplo

Para n=1: $\delta L = \int_0^L \left[1 - \lambda \frac{M(x)m(x)}{\alpha E A^2(x)}\right] \delta A dx + \delta\lambda \left[\int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI(x)} dx - \Delta\right]$

Como δA é arbitrário entre as funções admissíveis:

$$1 - \lambda \frac{M(x)m(x)}{\alpha E A^2(x)} = 0 \Rightarrow A(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Mm}{\alpha E}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo em: $w(\varepsilon) - \Delta = 0 \Rightarrow \lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta} \int_0^L \left(\frac{Mm}{\alpha E}\right)^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow$

$$A^*(x) = \frac{1}{\alpha E \Delta}\left[\int_0^L (M(\eta)m(\eta))^{\frac{1}{2}} d\eta\right](M(x)m(x))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^* = \frac{1}{\alpha E \Delta}\left[\int_0^L (M(\eta)m(\eta))^{\frac{1}{2}} d\eta\right]^2$$

Otimização Usando Cálculo Variacional

• Restrições de Inegualdade

$$g_i\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p,\frac{\partial y_1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial y_p}{\partial x_n}\right)\geq 0,\qquad i=1,\dots,m$$

Transformando em igualdade:

$$g_i\left(\mathbf{x},\dots,\frac{\partial y_p}{\partial x_n}\right)-t_i^{\,2}(\mathbf{x})=0,\qquad i=1,\dots,m$$

onde t_i é uma função auxiliar. Assim: $L=\int_\Omega\left(f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i-t_i^{\,2})\right)dv$

Condição de estacionaridade de L:

$$\delta L\big|_{y=y^*}=\int_\Omega(\cdots)\delta y\,dv+\sum_{i=1}^{n}\left[\int_\Omega(\cdots)\delta\lambda_i dv-2\int_\Omega\lambda_i t_i\delta t_i dv\right]=0$$

Contribuição de t_i na variação do funcional: $-2\int_\Omega t_i\lambda_i\delta t_i dv$

Como δt_i é arbitrário (admissível): $t_i\lambda_i=0\Rightarrow\boxed{\lambda_i g_i=0}$ $(t_i=0\Leftrightarrow g_i=0)$

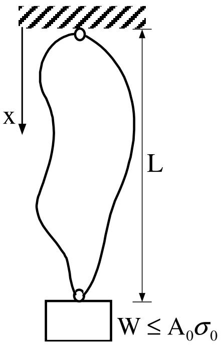
“condição de complementaridade”

Assim: $\begin{cases}\text{se } g_i\neq 0\Rightarrow\lambda_i=0 & \text{(restrição não é crítica)}\\ \text{se } g_i=0\Rightarrow\lambda_i\neq 0 & \text{(restrição é crítica)}\end{cases}$

Exemplo

$$\underset{A(x)}{\text{Min}}\ \int_0^L A(x)dx=V_0$$

tal que
$$A(x)\sigma_0-P(x)\geq 0$$
$$A-A_0\geq 0$$
$$P'+\rho A=0\qquad P(L)=W$$



$$L(A(x),P(x),\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\int_0^L A(x)dx+\int_0^L\lambda_1(A\sigma_0-P)dx+$$

$$+\int_0^L\lambda_2(A-A_0)dx+\int_0^L\lambda_3(P'+\rho A)dx\Rightarrow\delta L=\int_0^L\delta A dx+\int_0^L\lambda_1(\delta A\sigma_0-\delta P)dx+$$

$$+\int_0^L\lambda_2\delta A dx+\int_0^L\lambda_3(\delta P'+\rho\delta A)dx+\int_0^L\delta\lambda_3(P'+\rho A)dx$$

Exemplo

Integrando por partes para converter $\delta P'$ em δP, e isolando os termos em δA e δP, obtém-se:

$$\delta A:\ 1+\lambda_1\sigma_0+\lambda_2+\rho\lambda_3=0 \qquad (1)$$

$$\delta P:\ \lambda_1+\lambda_3'=0 \quad \lambda_3(0)=0 \quad (\text{pois}: \delta P(L)=0) \qquad (2)$$

junto com as condições de complementaridade $\begin{cases}\lambda_1(A\sigma_0-P)=0\\ \lambda_2(A-A_0)=0\end{cases}$

Solução: Próximo a x=0: $A>A_0 \Rightarrow \lambda_2=0$. Substituindo λ_1 de (2) em (1):

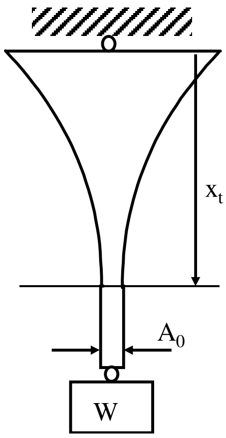
$$1-\lambda_3''\sigma_0+\rho\lambda_3=0 \ \text{ e } \ \lambda_3(0)=0 \Rightarrow \lambda_3=\frac{e^{\frac{\rho x}{\sigma_0}}-1}{\rho} \Rightarrow \lambda_1=-\frac{e^{\frac{\rho x}{\sigma_0}}}{\sigma_0} \Rightarrow \lambda_1\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=A(x)\sigma_0 \Rightarrow A'\sigma_0+\rho A=0 \ \text{ e } \ A(x_t)=A_0 \Rightarrow A(x)=A_0 e^{\frac{\rho(x_t-x)}{\sigma_0}} \quad \text{para } x<x_t$$

Na extremidade inferior do cabo $A=A_0$ e da equação de equilíbrio:

$$P=W+\rho(L-x)A_0 \Rightarrow x_t=L-\frac{A_0\sigma_0-W}{\rho A_0}$$

Exemplo



$$\boxed{\begin{array}{ll} A(x)=A_0 e^{\frac{\rho(x_t-x)}{\sigma_0}} & \text{para } x<x_t \\ A(x)=A_0 & \text{para } x>x_t \end{array}}$$

Outra formulação possível:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{A(x)}{\text{Min}}\ \underset{0\le x\le L}{\text{Max}}\ \sigma(x) \\ \text{tal que } \ A-A_0\ge 0 \\ \qquad\qquad \int_0^L A(x)dx=V_0 \\ \qquad\qquad P'+\rho A=0 \end{array}}$$

Otimização Usando Cálculo Variacional

Reformulação da Função Objetivo e Restrições

Restrições ponto-a-ponto ➡ Difícil tratamento ➡ Restrições Integrais

Para evitar problemas Min Max ➡ Formulação Integral

Exemplos:

- deslocamento num ponto: $y(x_0) \le y_{max} \Rightarrow \int_0^L \delta(x - x_0) y(x) dx \le y_{max}$

$$\text{onde}: \ \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \ne x_0 \end{cases} \quad e: \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

(Delta Dirac)

- $\max\limits_{x \in [0,L]} y(x) \le y_{max}$ pode ser substituído por: $\int_0^L p(x) y(x) dx$ (flexibilidade)

ou por: $\dfrac{1}{L}\int_0^L \left(y^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} dx \le y_{max}$ para $\begin{cases} y(x) \ge 0 \quad x \in [0, L] \\ \text{p grande o suficiente} \end{cases}$

•Freqüência de ressonância:

$$\begin{cases} (EIy'')'' + \omega^2 A \rho y = 0 & \text{(forma diferencial)} \\ \omega = \min\limits_{y(x)\ \text{admissível}} \left\{ \dfrac{\int_0^L EI(y'')^2 dx}{\int_0^L \rho A y^2 dx} \right\} & \text{(forma integral)} \end{cases}$$

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

Projeto: Minimização da Flexibilidade (ou Maximização da Rigidez)

$$\min_{A(x),\, u(x)} \int_\Omega p(x) u(x) dx$$

tal que

$$\int_\Omega (EAu'v' - pv) dx = 0 \quad \forall v \in \bar{V} \qquad \text{Formulação Fraca}$$

$$\left(\text{ou } (EAu')' - p = 0 \ \text{ e condições de contorno}\right)$$

$$A(x) - A_{min} \ge 0$$

$$\int_\Omega A dx - R \le 0$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega EAv'^2 dx - \int_\Omega pv dx \Rightarrow \delta\Pi = 0 \Rightarrow \int_\Omega (EAv'\delta v' - p\delta v) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (EAv'\eta' - p\eta) dx = 0$$

No equilíbrio: $v = u \Rightarrow \int_\Omega (EAu'\eta' - p\eta) dx = 0$

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

Como η é arbitrário entre as funções admissíveis:

$$\eta = u \Rightarrow \int_\Omega \left(EAu'^2 - pu\right)dx = 0 \Rightarrow \Pi\big|_{equil.} = \frac{1}{2}\int_\Omega EAu'^2dx - \int_\Omega pudx = -\frac{1}{2}\int_\Omega pudx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega EAu'^2dx \Rightarrow \int_\Omega pudx = \int_\Omega EAu'^2dx = -2\Pi\big|_{equil.}$$

Assim, o problema de minimização de flexibilidade é equivalente a:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{A(x)}{\text{Min}} & \int_\Omega EAu'^2dx \\ \text{tal que} & A(x) - A_{min} \geq 0 \\ & \int_\Omega Adx - R \leq 0 \end{array}}$$

$$\therefore L(A(x), \lambda_A, \Lambda) = \int_\Omega EAu'^2dx + \int_\Omega \lambda_A\left(A_{min} - A\right)dx + \Lambda\left(\int_\Omega Adx - R\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta A : \underbrace{\boxed{Eu'^2 = \begin{cases} \Lambda - \lambda_A \\ \Lambda \end{cases}}}_{\text{energia elástica é constante}} \begin{array}{l} \text{em } \Omega_A \; \left(\lambda_A \neq 0 \Rightarrow A = A_{min}\right) \\ \text{em } \underline{\Omega} \; \left(\lambda_A = 0 \Rightarrow A > A_{min}\right) \end{array} \quad \text{e} \quad \Omega = \Omega_A + \underline{\Omega}$$

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

Projeto: Maximização da Freqüência de Ressonância (ω)

Quociente de Rayleigh (QR):

$$QR = \frac{E_{elástica}}{E_{cinética}} = \frac{\int_0^L EI(x)w''^2dx}{\int_0^L \rho A(x)w^2dx} = \frac{\int_0^L E\alpha[A(x)]^n w''^2dx}{\int_0^L \rho A(x)w^2dx}$$

Freqüência de ressonância(ω): $\omega^2 = \underset{w(x)}{\text{Min}}\,(QR)$

Assim: $\delta(QR) = 0 \Rightarrow [EIw'']'' - \omega^2\rho Aw = 0$ e condições de contorno

Seja o problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{A(x)}{\text{Max}} & \omega^2 = \underset{w(x)}{\text{Min}}\,(QR) \\ \text{tal que} & \boxed{[EIw'']'' - \omega^2\rho Aw = 0 \;\; \text{(e condições de contorno)}} \rightarrow \textbf{redundante} \\ & \int_0^L Adx = V_0 \\ & A(x) - A_{min} \geq 0 \end{array}$$

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

$$\therefore L(w(x),A(x),\lambda)=\frac{\int_0^L E\alpha[A]^n w''^2 dx}{\int_0^L \rho A w^2 dx}-\lambda\left(\int_0^L A dx - V_0\right)\Rightarrow \delta L=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\int_0^L E\alpha[A]^n w''\delta w'' dx}{\int_0^L \rho A w^2 dx}-\frac{2\int_0^L E\alpha[A]^n w''^2 dx}{\left[\int_0^L \rho A w^2 dx\right]^2}\left[\int_0^L \rho A w \delta w dx\right]+\frac{\int_0^L nE\alpha[A]^{n-1} w''^2 \delta A dx}{\int_0^L \rho A w^2 dx}+$$

$$-\frac{\int_0^L E\alpha[A]^n w''^2 dx}{\left[\int_0^L \rho A w^2 dx\right]^2}\left[\int_0^L \rho w^2 \delta A dx\right]+\lambda\left[\int_0^L \delta A dx\right]=0$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

Integrando por partes e coletando os termos em δA e δw:

$$\text{Eq. de Movimento}: \left[E\alpha A^n w''\right]'' - \omega^2 \rho A w = 0$$

$$\text{Condições de Contorno}: \begin{array}{l} \delta w = 0 \quad \text{ou} \quad \left[E\alpha A^n w''\right]' = 0 \\ \delta w' = 0 \quad \text{ou} \quad \left[E\alpha A^n w''\right] = 0 \end{array}$$

$$\text{Condição de Optimalidade}: \; nE\alpha A^{n-1} w''^2 - \omega^2 \rho w^2 = \text{cte.}$$

Verificando a condição de suficiência para n=1. Sejam:
A e $\overline{A}$, soluções que satisfazem restrição de volume, e $\omega, \overline{\omega}, w, e\ \overline{w}$ as correspondentes freqüências de ressonância e respectivos modos de vibrar.
Assim:

$$\omega^2=\frac{\int_0^L E\alpha A w''^2 dx}{\int_0^L \rho A w^2 dx} \quad e \quad \overline{\omega}^2=\frac{\int_0^L E\alpha \overline{A}\,\overline{w}''^2 dx}{\int_0^L \rho \overline{A}\,\overline{w}^2 dx}\Rightarrow \overline{\overline{\omega}}^2=\frac{\int_0^L E\alpha \overline{A} w''^2 dx}{\int_0^L \rho \overline{A} w^2 dx}\geq \overline{\omega}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2 = \underset{w(x)}{\text{Min}}\,(\text{QR})\right)$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

$$\Rightarrow \bar{\bar{\omega}}^2 \int_0^L \rho\bar{A}w^2dx = \int_0^L E\alpha\bar{A}w''^2dx \quad e \quad \omega^2\int_0^L \rho A w^2dx = \int_0^L E\alpha A w''^2dx \Rightarrow$$

$$\text{Subtraindo}: \; \bar{\bar{\omega}}^2 \int_0^L \rho\bar{A}w^2dx - \omega^2\int_0^L \rho A w^2dx = \int_0^L E\alpha\left(\bar{A} - A\right)w''^2dx$$

$$\text{Mas}: \; E\alpha w''^2 - \omega^2\rho w^2 = c \Rightarrow E\alpha w''^2 = c + \omega^2\rho w^2 \Rightarrow$$

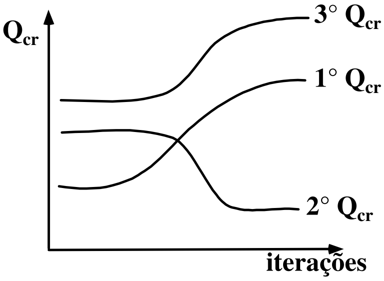
$$\int_0^L E\alpha\left(\bar{A} - A\right)w''^2dx = \int_0^L \left(\bar{A} - A\right)\left(c + \omega^2\rho w^2\right)dx = \int_0^L \left(\bar{A} - A\right)\omega^2\rho w^2dx;$$

$$\left(\int_0^L \left(\bar{A} - A\right)dx = 0\right) \Rightarrow \bar{\bar{\omega}}^2 \int_0^L \rho\bar{A}w^2dx - \omega^2\int_0^L \rho A w^2dx = \int_0^L \left(\bar{A} - A\right)\omega^2\rho w^2dx \Rightarrow$$

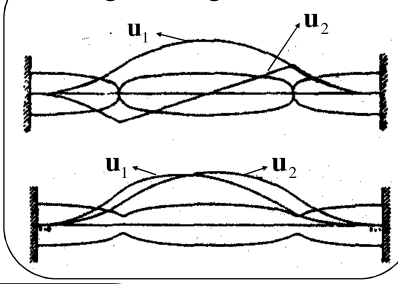
$$\Rightarrow \bar{\bar{\omega}}^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega^2 \geq \bar{\bar{\omega}}^2}$$

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

Inversão de modos durante a otimização. Ex.:



Viga bi-engastada:



Uma solução: Formulação Bimodal

$$\underset{A(x)}{\text{Max}} \; \theta = \int_0^L E\alpha\left[A(x)\right]^n w''^2dx$$

$$\text{tal que} \int_0^L E\alpha\left[A(x)\right]^n w_1''^2dx = \int_0^L E\alpha\left[A(x)\right]^n w_2''^2dx$$

$$\int_0^L w_1'^2dx = 1; \quad \int_0^L w_2'^2dx = 1; \int_0^L Adx = V_0; A \geq A_{min}$$

Condições de Optimalidade em Problemas Clássicos

Problemas equivalentes:

$$\underset{A(x)}{\text{Min}} \int_0^L A dx$$

tal que

$$[EIw'']'' - \omega^2 \rho A w = 0$$

(e condições de contorno)

$$\boxed{\text{ou} \quad \omega^2 = \underset{w(x)}{\text{Min}} \ (QR)}$$

$$A(x) - A_{min} \geq 0$$

ou

$$\underset{A(x)}{\text{Max}} \ \beta$$

tal que $\omega^2 \geq \beta$

$$[EIw'']'' - \omega^2 \rho A w = 0$$

(e condições de contorno)

$$\int_0^L A dx = V_0$$

$$A(x) - A_{min} \geq 0$$

Problema normalizado:

$$\underset{A(x)}{\text{Max}} \int_0^L \alpha^p [w'']^2 d\varepsilon$$

tal que

$$\int_0^L \alpha^p w^2 d\varepsilon = 1 \quad \text{(energia cinética)}$$

$$\int_0^L \alpha d\varepsilon = 1 \quad \text{(volume)}$$

$$\alpha = \frac{AL}{V_0}; \varepsilon = \frac{x}{L}; \lambda = \frac{\omega^2 \rho L^2}{ECV_0}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva