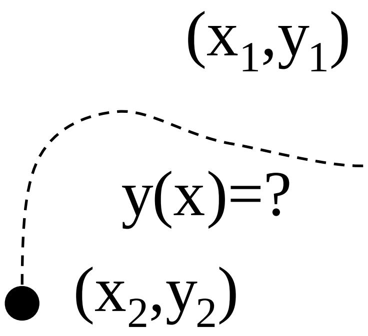
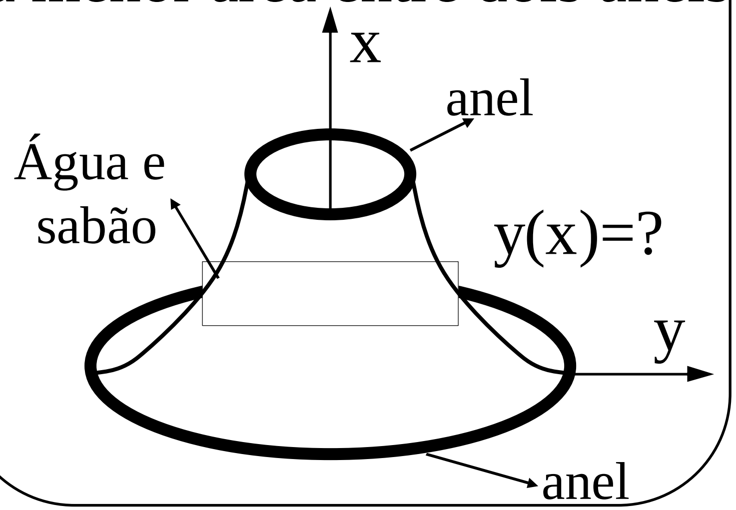
Problemas Variacionais Clássicos

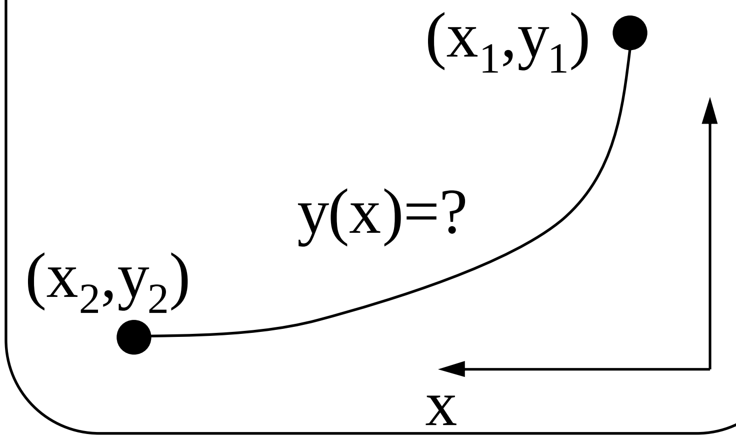
Arco de menor comprimento conectando dois pontos



Superfície de revolução com a menor área entre dois anéis



Problema "Brachistochrone"



Problema de "Dido" - Encontrar a equação da curva que circunda a maior área;

Princípio de Hamilton:
"Equação de Lagrange de Movimento"

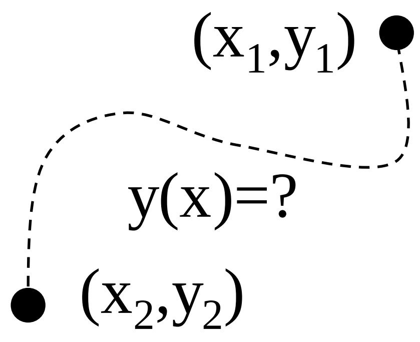
Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Problemas Variacionais Clássicos

Arco de menor comprimento conectando dois pontos

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx}_{ds} \qquad y(x_1) = y_1;\ \ y(x_2) = y_2$$

ds - "comprimento de arco"



$$\boxed{\min_{y(x)} \ J(y)} \Rightarrow \boxed{\delta J(y)=0}$$

Equação de Euler-Lagrange:

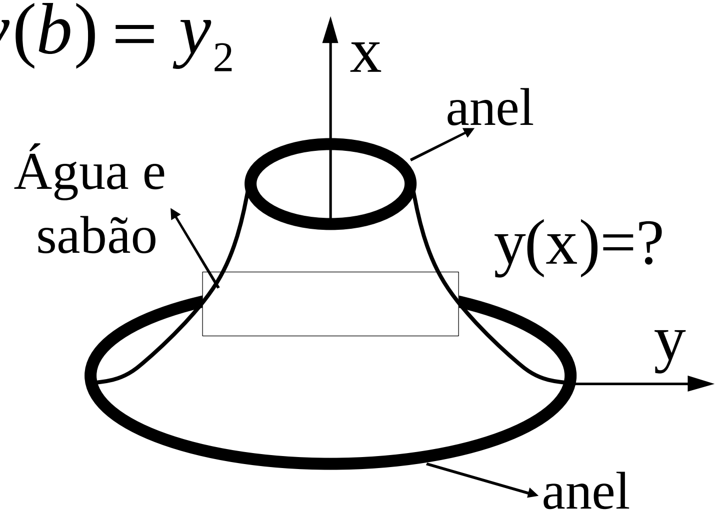
$$y'' = 0 \Rightarrow y = \frac{\left(y_2 - y_1\right)\left(x - x_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)} + y_1$$

Equação de uma reta!!

Problemas Variacionais Clássicos

Superfície de revolução com a menor área entre dois anéis

$$\mathrm{J(y)} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(\mathrm{y}')^2}\,\mathrm{dx} \qquad y(a) = y_1;\ \ y(b) = y_2$$



$$\min_{\mathrm{y(x)}} \ \mathrm{J(y)} \Rightarrow \delta \mathrm{J(y)}=0$$

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} = C_1 \Rightarrow -y = C_1\sqrt{1+(y')^2} \Rightarrow C_1\frac{dy}{\sqrt{y^2 - C_1{}^2}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1\cosh\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right)};\ \mathrm{onde}: \mathrm{coshx} = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

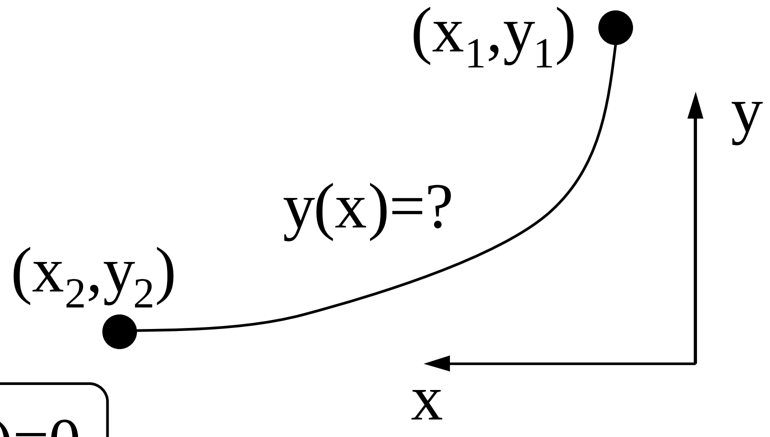
Problemas Variacionais Clássicos

Problema "Brachistochrone" - Qual a curva entre dois pontos que faz com que uma partícula, sujeita a força peso, percorra o caminho entre esses dois pontos no menor tempo possível?

Tempo

$$\mathrm{T} = \int_0^T dt \Rightarrow \int_0^L \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{v}\,dx$$

$$y(x_1) = y_1;\;\; y(x_2) = y_2$$



$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Min}\quad T(y)\\ y(x)\end{array}} \Rightarrow \boxed{\delta T(y)=0}$$

Da conservação de energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^{\;2} + mgy_1 \Rightarrow v = \sqrt{2g\left(y_1 - y\right) + v_0^{\;2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g\left(k - y\right)};\; \mathrm{k} = \mathrm{y}_1 + \frac{v_0^{\;2}}{2g}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Problemas Variacionais Clássicos

Portanto: $\mathrm{T} = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} \dfrac{\sqrt{1+(\mathrm{y}')^2}}{\sqrt{\mathrm{k}-\mathrm{y}}}\,\mathrm{dx}$

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{k-y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{k-y}\sqrt{1+(y')^2}} = C \Rightarrow (k-y)\left[1+(y')^2\right] = \frac{1}{C^2} = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{\sqrt{k-y}}{C_1-(k-y)}dy;\ k-y = C_1 \sin^2\alpha \Rightarrow dx = C_1(1-\cos 2\alpha)d\alpha \Rightarrow$$

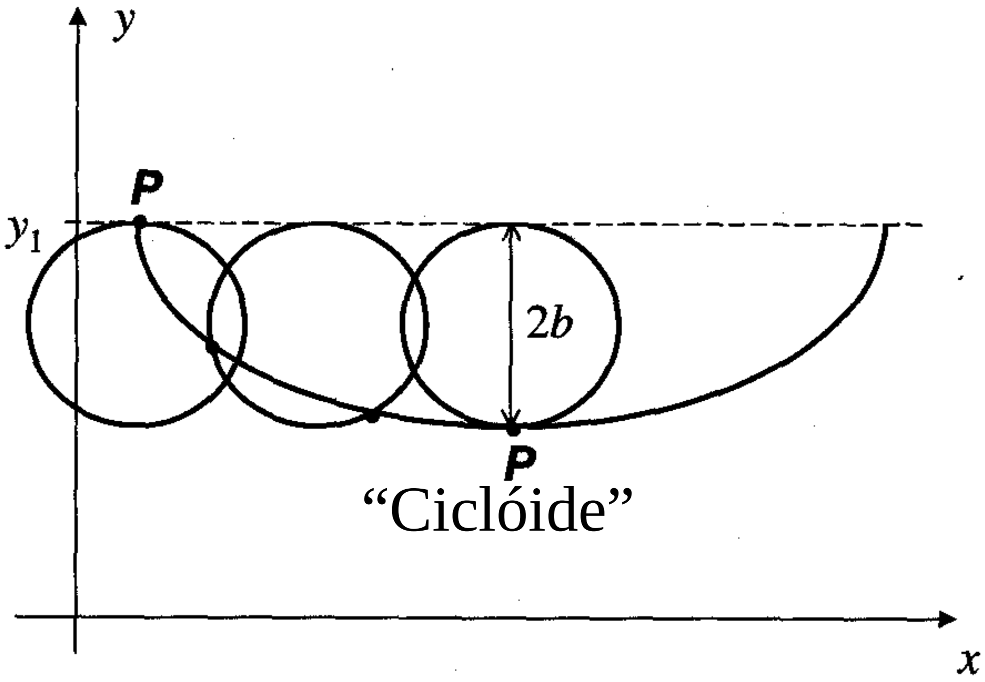
$$x(\alpha) = \frac{1}{2}C_1(2\alpha - \sin 2\alpha) + C_2; \quad y(\alpha) = k - C_1 \sin^2\alpha$$

Mudança de variáveis:

$$\underbrace{x(\theta) = a + b(\theta - \sin\theta) \text{ e } \ y(\theta) = y_1 + \frac{{v_0}^2}{2g} - b(1-\cos\theta)}_{\text{Equação de uma curva “ciclóide”}}$$

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Problemas Variacionais Clássicos



"Ciclóide"

$$\frac{v^2}{2} = 2g\left(k-y\right) \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{g}{4b}\left({s_0}^2 - s^2\right) \Rightarrow \quad \mathrm{T} = \int_0^T dt \Rightarrow \int_0^L \frac{ds}{v} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{b}{g}}\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{{s_0}^2 - s^2}} \Rightarrow \boxed{T = \pi\sqrt{\frac{b}{g}}}$$

Portanto período independe do ponto inicial: "tautocronismo"

"Pêndulo Cicloidal"

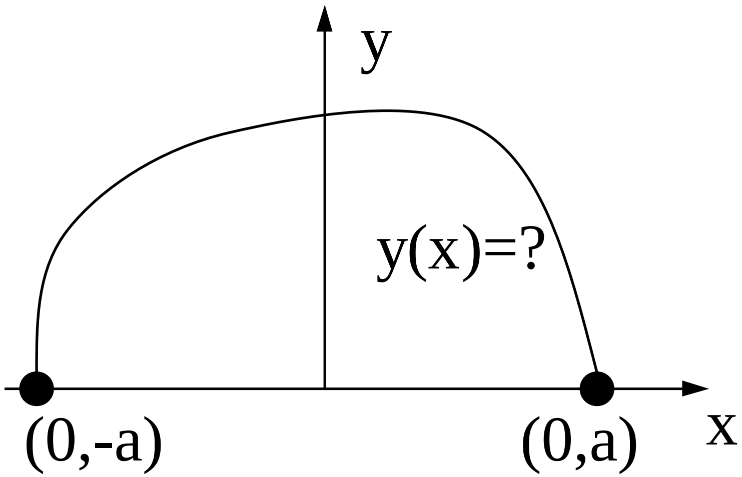
Problemas Variacionais Clássicos

Problemas Isoperimétricos

Problema de "Dido" - Encontrar a equação da curva com comprimento limitado que circunda a maior área;

Área $\mathrm{I}(y) = \int_{-a}^{a} y\,dx \qquad y(-a) = 0;\; y(a) = 0$

Comprimento da curva $\mathrm{J}(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$



Min I(y)
y(x)
tal que J(y)=πa

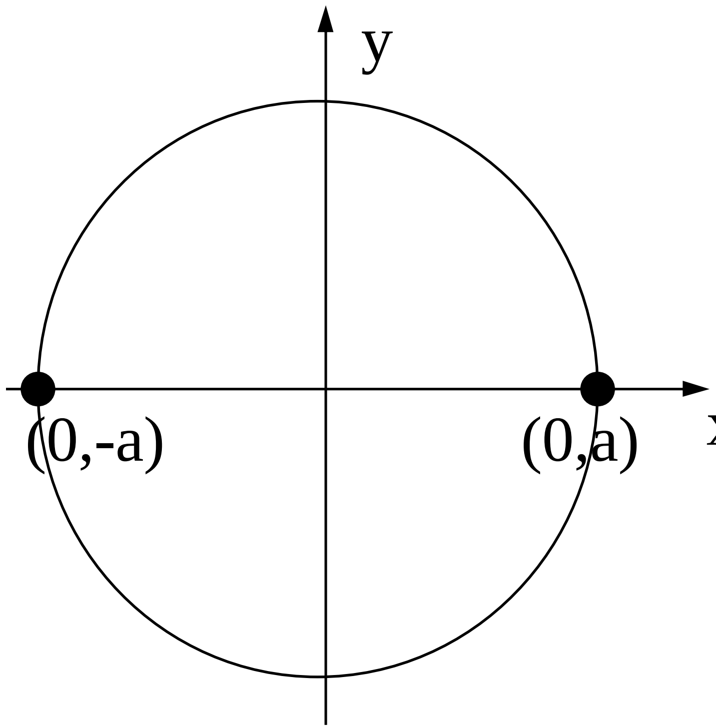
Min I(y)+λJ(y)
y(x)

Problemas Variacionais Clássicos

Equação de Euler-Lagrange:

$$1+\lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]=0\Rightarrow \underbrace{\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}}_{\text{Curvatura = cte.}}=-\frac{1}{\lambda}\Rightarrow x^2+(y-C)^2=a^2$$

Equação de um círculo!!



Problemas Variacionais Clássicos

Princípio de Hamilton

Equilíbrio dinâmico:

$$\underset{\mathbf{q}}{\text{Min}}\ \ \text{I(y)}$$

$$\text{I(y)} = \int_{t_1}^{t_2} L\text{dt} = \int_{t_1}^{t_2} (\text{T - V})\text{dt} \Rightarrow \delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\text{dt} = 0$$

$\mathbf{q}$ → Coordenadas generalizadas

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m$$

"Equação de Lagrange de Movimento"